

Libro VIII - Campo magnetico variabile

# TRATTATO DI FISICA

LIBRO QUINTO

O. D. CHWOLSON - Professore ordinario all'Università imperiale di San Pietroburgo

traduttore: E. Davaux (Ingegnere della Marina)

Parigi - 1914

# 1 Cap. I - Introduzione

## 1. Osservazioni generali

Nei primi due Libri della parte del nostro Trattato dedicata all'ENERGIA ELETTRICA abbiamo considerato il campo elettrico costante e il campo magnetico costante. L'intensità di questi due campi è indipendente dal tempo; in generale, quest'ultimo è stato discusso molto raramente, ed entra in gioco solo in alcune leggi dove è presentato come un fattore di proporzionalità. È il caso, ad esempio, della quantità di calore liberata nelle azioni calorifiche della corrente (Libro II, Cap. IV), della quantità di ioni liberati nell'elettrolisi (Libro II, Cap. V); tali quantità sono proporzionali al tempo durante il quale si manifesta il fenomeno corrispondente.

Per far conoscere le proprietà dei campi costanti ci siamo quasi completamente limitati a descrivere i fenomeni stessi e ad indicare le leggi che li governano. Approfondendo nello studio di questi fenomeni, ci siamo appellati ai principi della Meccanica e, dove possibile, a quelli della Termodinamica. Tutto quanto è stato detto su questo argomento o dedotto nel modo indicato è assolutamente corretto e non dipende dalle ipotetiche idee che si possono avere sull'intima natura delle cause fondamentali di tutti i fenomeni considerati; queste idee quindi non hanno svolto finora alcun ruolo essenziale. All'inizio del Libro I abbiamo menzionato tre immagini, corrispondenti alle tre ipotesi che bastano, quasi allo stesso modo, a spiegare i fatti fin qui considerati. Si potrebbe, fin dall'inizio, partire da quella di queste ipotesi a cui spetta il primo posto e, a questo proposito, abbiamo indicato che la nostra scelta ricadrebbe sull'immagine C e sulla teoria elettronica che ne è lo sviluppo. Ma non lo abbiamo fatto, per le ragioni dettagliatamente indicate nell'introduzione (Volume IV) e abbiamo utilizzato solitamente l'immagine A, che ha dato origine alla terminologia consueta. Abbiamo ritenuto opportuno, dal punto di vista didattico, presentare innanzitutto, nella profusione di fatti importanti più o meno ben determinati, quelli il cui studio non richiede ancora alcuna scelta decisiva tra le diverse ipotesi.

Quando affrontiamo, come faremo ora, il tema del campo magnetico variabile, vi sono certamente un gran numero di fenomeni, che si possono descrivere senza ricorrere ad alcuna ipotesi; tuttavia, seguendo esclusivamente tale percorso, non si potrebbe arrivare ad una comprensione esatta e completa dei fatti. Il ruolo dell'ipotesi da scegliere ha qui un'importanza molto reale, poiché la nozione di elettrone è stata stabilita a partire quasi esclusivamente dai fenomeni che accompagnano il campo variabile. Di tutti i fenomeni che abbiamo studiato nel volume IV, solo quelli dell'elettrolisi portano a questa nozione e le servono da supporto. Ma poiché si può facilmente separare il vasto capitolo dei fenomeni fondamentali dell'induzione elettromagnetica e conservarne un carattere più o meno descrittivo, senza ricorrere a ipotesi specifiche, rinviando la presentazione degli elementi di teoria elettronica e ci limitiamo qui a indicare un'unica formula, che applicheremo in alcuni punti della teoria dell'induzione.

Tratteremo approfonditamente, in un capitolo ulteriore, della radioattività; tuttavia, essendo strettamente correlato ai fenomeni che dovremo preliminarmente considerare, è necessario che diamo, in questa introduzione, un'idea sommaria dei fatti radioattivi fondamentali.

Gli studiosi che hanno recentemente contribuito allo sviluppo della teoria dei fenomeni elettromagnetici, hanno generalmente utilizzato un particolare metodo di calcolo abbreviato, molto comodo per scrivere le equazioni e dedurre le conseguenze matematiche. Questo calcolo è detto *l'analisi vettoriale*; non è affatto facile abituarsi e ancor meno utilizzarlo spontaneamente.

In molte questioni relativamente semplici, se ne può fare a meno, ma nei casi complicati le formule vengono abbreviate, così come le operazioni a cui danno luogo, in modo davvero notevole. Non ci sembrerebbe del resto opportuno rinunciare del tutto all'analisi vettoriale, perché è necessario saperla utilizzare non appena si vogliono studiare le memorie originali dove la teoria dei fenomeni elettrici è trattata con un certo rigore. Introduciamo l'analisi vettoriale solo dove è veramente desiderabile e, poiché supponiamo che non sia familiare a tutti i lettori, ne delineeremo qui brevemente gli elementi.

## 2. Proprietà degli scalari e dei vettori

Le grandezze che compaiono in Fisica si possono suddividere in *scalari* e *vettoriali*. Uno scalare è completamente definito da un singolo parametro, che si può assumere come variabile in modo continuo. Temperatura, densità, capacità termica, potenziale, energia, ecc. sono esempi di scalari. I vettori sono già stati discussi nel Volume I (Introduzione, § 11); un vettore è una grandezza fisica che, indipendentemente dal suo valore numerico, ha una direzione determinata. Velocità, accelerazione, forza, intensità di corrente, ecc. sono esempi di vettori. Gli scalari possono ovviamente essere designati con qualsiasi lettera. Sir W.R. Hamilton, uno dei fondatori del calcolo vettoriale, riservò esclusivamente le lettere greche per designare i vettori; In molte opere, soprattutto in quelle tedesche, tutti i vettori sono rappresentati da lettere gotiche, in altre si utilizzano caratteri in grassetto (O. Heaviside). Utilizzeremo la notazione che P. Curie aveva adottato nel suo insegnamento e che P. Appel e P. Langevin hanno introdotto nell'edizione francese dell'Enciclopedia delle scienze matematiche pure e applicate; un vettore verrà designato con una lettera qualsiasi, sormontata da una freccia dritta o curva, seguendo una distinzione tra le varie categorie di vettori che stabiliremo in seguito.

Uno scalare può dipendere da molte variabili; può, ad esempio, essere dato come funzione continua delle coordinate di un punto nello spazio (funzione puntuale), oppure come funzione continua di queste coordinate e del tempo. Allo stesso modo, un vettore può dipendere dalle coordinate della sua origine, dalla velocità della sua origine, dalle coordinate o velocità di altri punti nello spazio, del tempo e da molte altre quantità. In questo paragrafo considereremo scalari e vettori in sé, ignorando le variabili da cui dipendono. Generalmente non terremo conto dei cambiamenti che potrebbero subire e molto spesso li considereremo come grandezze costanti. Non appena si considerano scalari e vettori come grandezze variabili, in generale come funzioni puntuali, si entra nel dominio proprio dell'Analisi Vettoriale, di cui ci occuperemo nel paragrafo successivo.

L'analisi vettoriale trova applicazioni in tutte le parti della Fisica, ma deve ricevere estensioni più o meno importanti, a seconda della materia speciale che si studia, in particolare mediante la considerazione delle quantità che hanno anche più componenti dei vettori, come deformazioni e forze in un mezzo deformabile (Volumi I e II), sia dall'introduzione di condizioni di simmetria negli stati dello spazio creati dagli agenti fisici, come nei fenomeni di conduzione termica o di induzione elettrica e magnetica (Volumi III e IV). Come ha fatto Mallard per primo nel suo *Trattato di cristallografia fisica*, ci si può proporre di precisare la simmetria caratteristica delle grandezze che intervengono come cause nella produzione dei fenomeni e la simmetria caratteristica delle grandezze che rappresentano gli effetti prodotti; si deve considerare inoltre la simmetria dell'ambiente in cui agiscono le cause. Questo punto di vista molto generale è stato particolarmente sviluppato da W. Voigt nella sua opera classica *Lehrbuch der Kristallphysik*. e da P. Curie nei suoi studi sulle proprietà fisiche dei corpi cristallizzati.

Purtroppo non esistono, per le operazioni del calcolo vettoriale, notazioni adottate in maniera generale. Utilizzeremo le più usuali; ma, per facilitare la lettura delle memorie originali, indicheremo le varie varianti che diversi autori hanno ritenuto necessario proporre.

Un vettore può riferirsi ad un punto specifico dello spazio, che si chiamerà *punto di applicazione*; tale è la velocità di un punto, la forza che agisce su una specifica particella materiale, ecc. A. E. H. Love ha proposto di dire, in questo caso, che il vettore si trova in un punto o è collegato ad un punto. Ma ci sono anche vettori che si trovano su una retta data, dove il punto di applicazione può essere scelto in qualunque modo; tale è, ad esempio, una forza che agisce su un corpo invariabile. Si dice allora che ciascuno dei vettori considerati si trova su una retta oppure che scorre su una retta (E. Budde, Somoff, H. Grassmann junior). Infine diciamo che un vettore non è localizzato o è libero (SOMOFF), quando ha semplicemente un modulo e una direzione e il suo punto di applicazione può essere scelto in qualsiasi punto dello spazio; è il caso, ad esempio, della velocità e dell'accelerazione nel moto traslatorio di un sistema invariabile, del momento di una coppia, ecc.

Un vettore può essere visto come l'insieme di due punti nello spazio A e B presi in un determinato ordine e della parte di retta compresa tra essi. Il primo punto A è l'origine o punto di applicazione del vettore, il secondo l'estremità. Nelle figure, si indica l'estremità di un vettore con una punta di freccia.

Rappresenteremo un vettore con una sola lettera sormontata da una freccia, ad esempio  $\vec{a}$ ; il modulo (numerico) del vettore  $\vec{a}$  sarà indicato con  $|\vec{a}|$ . Un vettore il cui modulo è uguale a uno sarà chiamato vettore unitario. Il vettore unitario che ha la stessa direzione del vettore  $\vec{a}$  sarà indicato con  $\vec{a}_1$ . I vettori unitari che hanno rispettivamente le direzioni di tre assi di coordinate rettangolari sono solitamente rappresentati (Hamilton) dalle lettere

$$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \quad (1.1)$$

Il prodotto del vettore  $\vec{a}$  e dello scalare  $\alpha$  è un vettore che è  $\alpha$  volte più grande del vettore  $\vec{a}$ ; si può quindi rappresentare qualsiasi vettore  $\vec{a}$  mediante il prodotto del suo modulo  $|\vec{a}|$  e del corrispondente vettore unità  $\vec{a}_1$

$$\vec{a} = |\vec{a}| \vec{a}_1 \quad (1.2)$$

Per somma o differenza di due vettori si intende sempre la loro somma o la loro differenza *geometrica*, detta anche vettoriale. L'addizione geometrica è già stata trattata nel Volume I (Introduzione: §12); dalla figura 1 è visibile che la somma e la differenza di due vettori  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  sono rappresentate rispettivamente dalle due diagonali del parallelogramma costruito su di essi.

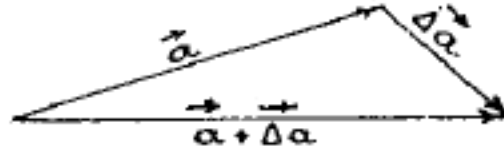


La somma di un numero qualsiasi di vettori in  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots$  (fig. 2) è il vettore della linea poligonale ABCDEF, i cui lati sono paralleli ai vettori dati (Volume I).

Con l'incremento  $\Delta \vec{a}$  di un vettore, si intende pure l'incremento vettoriale di questo vettore (fig. 3). Quando il vettore  $\vec{a}$  è una funzione di un parametro variabile  $t$  qualsiasi, la derivata

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \lim \frac{\Delta \vec{a}}{\Delta t} \quad (1.3)$$

possiede la direzione limite del vettore  $\Delta \vec{a}$ . Quando, ad esempio, un vettore cambia direzione senza variare il suo modulo, la derivata di questo vettore è perpendicolare ad esso (accelerazione nel moto curvilineo uniforme).



**Fig. 3**

Un vettore  $\vec{a}$  può essere scomposto in due o più vettori, ad esempio nelle componenti  $a_x, a_y, a_z$  lungo gli assi delle coordinate ordinarie; si ha allora, dalle (1) e (2),

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \quad (1.4)$$

e

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (1.5)$$

dove le grandezze sotto la radice sono scalari, vedere più avanti la formula (6,b).

Quando tre vettori  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  soddisfano a una relazione lineare della forma

$$\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c} = 0 \quad (1.6)$$

nella quale  $\alpha, \beta, \gamma$  sono tre numeri, questi vettori sono complanari, cioè posti in uno stesso piano; infatti, se si dividono tutti i termini del primo membro per  $\alpha$  e si passano i due termini nel secondo membro, si vede che  $\vec{a}$  è la somma di due vettori aventi rispettivamente la stessa direzione di  $\vec{b}$  e  $\vec{c}$  (o una direzione opposta).

Dalla definizione di somma vettoriale risulta che la proiezione di una somma di vettori su una qualsiasi direzione è uguale alla somma algebrica (che qui si confonde con la somma geometrica) delle proiezioni delle componenti vettoriali sulla stessa direzione.

Si distinguono due tipi di prodotti vettoriali, prodotti scalari e prodotti vettoriali.

Chiameremo prodotto scalare di due vettori  $\vec{a}, \vec{b}$  il prodotto dei loro valori numerici, moltiplicati per il coseno dell'angolo da essi compreso; talvolta si chiama lo stesso prodotto scalare anche prodotto interno (H. Grassmann) o prodotto geometrico (Somoff); lo rappresenteremo con H. A. Lorentz con il simbolo  $(\vec{a} \cdot \vec{b})$  o più semplicemente  $(\vec{a} \vec{b})$ , di modo che

$$(\vec{a} \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) \quad (1.7)$$

Si impiegano ancora le notazioni seguenti:  $-S \vec{a} \vec{b}$  (Hamilton),  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  (J. W. Gibbs),  $\vec{a} \vec{b}$  (O. Heaviside e M. Abraham),  $\vec{a} \times \vec{b}$  (C. Burali-Forti e R. Marcolongo).

L'ordine di successione dei fattori è indifferente; si ha

$$(\vec{a} \vec{b}) = (\vec{b} \vec{a}) \quad (1.8)$$

$$(\vec{a} \vec{a}) = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 \quad (1.9)$$

$$(\vec{i} \vec{j}) = (\vec{j} \vec{k}) = (\vec{k} \vec{i}) = \quad (1.10)$$

$$(\vec{i} \vec{i}) = (\vec{j} \vec{j}) = (\vec{k} \vec{k}) = 1 \quad (1.11)$$

Dalla formula  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \cos(\vec{a}, x) \cos(\vec{b}, x) + \cos(\vec{a}, y) \cos(\vec{b}, y) + \cos(\vec{a}, z) \cos(\vec{b}, z)$  risulta, infatti, l'equazione fondamentale

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (1.12)$$

È facile stabilire le seguenti formule:

$$(\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})) = (\vec{a} \cdot \vec{b}) + (\vec{a} \cdot \vec{c}) \quad (1.13)$$

$$((\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{c} + \vec{d})) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) + (\vec{a} \cdot \vec{d}) + (\vec{b} \cdot \vec{c}) + (\vec{b} \cdot \vec{d}) \quad (1.14)$$

Si ha infatti  $(\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b} + \vec{c}| \cos(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c})$ , o  $\vec{b} + \vec{c}$  è la somma vettoriale di due vettori  $\vec{b}$  e  $\vec{c}$ , di modo che

$$|\vec{b} + \vec{c}| \cos(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}) = |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) + |\vec{c}| \cos(\vec{a}, \vec{c})$$

Si ha, per la derivata del prodotto scalare di due vettori,

$$\frac{d(\vec{a} \cdot \vec{b})}{dt} = \lim \frac{\Delta(\vec{a} \cdot \vec{b})}{\Delta t} = \lim \frac{((\vec{a} + \Delta \vec{a}) \cdot (\vec{b} + \Delta \vec{b})) - (\vec{a} \cdot \vec{b})}{\Delta t}$$

dalla (7,b), si ha quindi il limite

$$\frac{d(\vec{a} \cdot \vec{b})}{dt} = \left( \vec{a} \cdot \frac{d\vec{b}}{dt} \right) + \left( \vec{b} \cdot \frac{d\vec{a}}{dt} \right) \quad (1.15)$$

Quando una forza  $\vec{f}$  agisce su un punto, il cui spostamento lungo una curva è  $\Delta \vec{s}$ , il lavoro compiuto  $\Delta R$  è uguale a

$$\Delta R = (\vec{f} \cdot \Delta \vec{s}) \quad (1.16)$$

Esprimeremo il prodotto vettoriale di due vettori  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  con il simbolo

$$[\vec{a} \vec{b}] = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b}) \quad (1.17)$$

Il modulo di  $[\vec{a} \vec{b}]$  è uguale all'area del parallelogramma ABCD (fig. 4) costruito sui vettori  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ . Supporremo che  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  essendo situati in uno stesso piano orizzontale,  $\vec{a}$  è più vicino al lettore di  $\vec{b}$  e considereremo la grandezza  $[\vec{a} \vec{b}]$  come una nuova specie di vettore  $\hat{c}$ , la cui direzione AF, normale al piano ABCD dei vettori  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ , è determinata dalla regola della vite (regola del cavatappi).

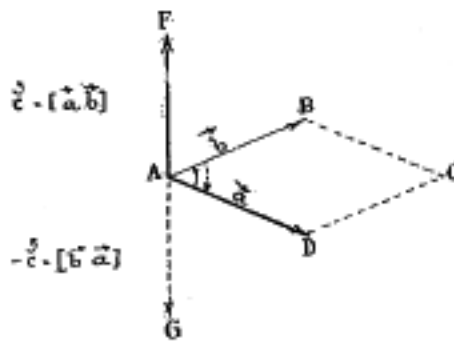


Fig. 4

Immaginiamo che lungo AF sia posta una vite, avente la testa in A e rotante nel senso da  $\vec{a}$  a  $\vec{b}$ , quindi nel verso della freccia continua, in modo che la vite riceva un movimento progressivo

nella direzione AF del vettore  $\hat{c}$ ; secondo ciò,  $[\vec{b} \vec{a}]$  corrisponderà ad una rotazione di  $\vec{b}$  verso  $\vec{a}$  (freccia punteggiata) e avrà verso opposto AG. Si ha allora

$$[\vec{b} \vec{a}] = - [\vec{a} \vec{b}] \quad (1.18)$$

ciò che mostra la particolare importanza che assume l'ordine di successione dei fattori in un prodotto vettoriale.

È opportuno insistere sul verso di rotazione che è un elemento essenziale nella definizione di un vettore come  $\hat{c}$ . Siano  $Ox$ ,  $Oy$  due assi di coordinate rettangolari situati su un piano orizzontale; innalziamo nel punto  $O$  una semiretta verticale  $Oz$ , posta rispetto a questo piano orizzontale da un lato in modo tale che un osservatore posto lungo  $Oz$ , con la testa in  $z$  e i piedi in  $O$ , vedrebbe che  $Ox$  deve essere ruotato da destra a sinistra, per portarlo a  $Oy$  mediante una rotazione di un angolo retto. Si ottiene così un triedro trirettangolare perfettamente determinato tra gli otto triedri che formano tra loro le tre rette che portano gli assi  $Ox, Oy, Oz$ . Si dice che ogni insieme di punti relativi a tali assi è orientato. Se si sostituiscono due delle semirette  $Ox, Oy, Oz$  con i loro prolungamenti  $Ox', Oy', Oz'$ , si ottengono tre nuovi triedri che hanno la stessa orientazione del primo. Se invece, mantenendo due degli assi, si prende il simmetrico del terzo rispetto all'origine  $O$ , oppure se si prende il simmetrico dei tre assi rispetto allo stesso punto, si ottengono quattro triedri la cui orientazione è inversa della primo, cioè che per il triedro  $Ox'y'z'$ , ad esempio, la rotazione di un angolo retto che porterebbe  $Ox'$  su  $Oy'$  si farebbe, per un osservatore posto con i piedi in  $O$  e la testa in  $z'$ , da sinistra a destra. Il verso di rotazione di questo nuovo triedro è detta *retrograda* o *inversa*. Per brevità, si chiamano spesso i triedri orientati come il primo triedro  $Oxyz$  triedri diretti, e i triedri orientati come  $Ox'y'z'$  inversi; la sostituzione di un triedro diretto con uno inverso, o viceversa, è detta *inversione degli assi*. Questa inversione serve, come vedremo più avanti, a distinguere le due specie di vettori per i quali si adottano rispettivamente le notazioni  $\vec{a}$  e  $\hat{a}$ . Notiamo a tal proposito che quando si dà un sistema di coordinate rettangolari, si dà allo stesso tempo il modo in cui si fa corrispondere il verso positivo di una rotazione al verso positivo di una traslazione. Questa corrispondenza sarà la stessa che esiste tra il verso positivo dell'asse  $Oz$  e quello della rotazione che porta l'asse  $Ox$  sull'asse  $Oy$  con un quarto di giro.

Con le stesse considerazioni si è portati a dare un segno all'area di un triangolo situato in un piano, che è orientato scegliendo due assi rettangolari  $Ox, Oy$ . Si inizia facendo corrispondere a questo piano orientato un asse orientato perpendicolare  $Oz$ . Ciò stabilito, si suppone che un osservatore avente i piedi sul piano del triangolo, all'interno del triangolo, e diretto lungo l'asse orientato corrispondente al piano orientato, veda un mobile passare successivamente per i tre vertici del triangolo nell'ordine in cui li si chiama. Se questo mobile ruota attorno all'osservatore in senso positivo, l'area del triangolo sarà considerata positiva; se il verso è negativo, l'area del triangolo sarà negativa. Queste convenzioni si estendono facilmente alle aree piane, limitate da eventuali curve.

Possiamo ora distinguere chiaramente tra loro le due specie di vettori che abbiamo designato con le notazioni  $\vec{a}$  e  $\hat{a}$ . Con W. Voigt chiameremo vettori polari i vettori indicati con  $\vec{a}$ , che sono analoghi ai raggi vettori provenienti da un punto e le cui componenti lungo i tre assi coordinati cambiano segno se gli assi sono invertiti. Chiameremo vettori assiali i vettori indicati con  $\hat{a}$ , che possono essere interpretati come segmenti aventi non solo una direzione determinata, ma anche dotati di un verso di rotazione. Essi sono strettamente legati alle aree piane dotate di un segno che può essere dedotto tracciando, in un piano normale alla direzione del segmento, una superficie di area pari alla lunghezza del segmento (l'unità di area è il quadrato costruito sull'unità di lunghezza). Le proiezioni di ciascuno di questi ultimi vettori mantengono il loro segno e il loro valore assoluto nell'inversione degli assi.

Nel Volume I (nota di E. e F. Cosserat, sulla dinamica del punto e del corpo invariabile), abbiamo distinto le trasformazioni di coordinate che chiamiamo movimenti propri (traslazione,



rotazione e loro prodotti), e quelle che chiamiamo movimenti impropri (movimento precedente seguito da una riflessione su un punto o su un piano). Le trasformazioni di coordinate che lasciano invariate le componenti di un vettore polare sono movimenti propri, cioè traslazioni e rotazioni di qualsiasi angolo attorno alla direzione del vettore; le trasformazioni che non modificano le componenti di un vettore assiale sono movimenti impropri, traslazioni e rotazioni attorno alla direzione del vettore, inversioni del piano rispetto ad un piano perpendicolare a questa direzione e inversioni.

È facile vedere, da ciò, che il prodotto vettoriale di due vettori assiali o di due vettori polari è un vettore assiale; il prodotto vettoriale di un vettore assiale e di un vettore polare è un vettore polare.

Il vettore  $\hat{c} = [\vec{a} \vec{b}]$  è stato chiamato da Grassmann prodotto esterni di due vettori  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ ; il simbolo  $[\vec{a} \vec{b}]$  a lui dovuto e anche a H. A. Lorentz, così come la maggior parte degli autori tedeschi si sono uniformati a questa notazione. Le notazioni seguenti sono pure utilizzate:  $V\vec{a} \vec{b}$  (Hamilton),  $\vec{a} \times \vec{b}$  (J. W. Gibbs),  $\vec{a} \wedge \vec{b}$  (C. Burali-Forti e R. Marcolongo).

Si ha

$$[\vec{a} \vec{a}] = 0 \quad (1.19)$$

ed è facile vedere che

$$\begin{cases} [\vec{i} \vec{j}] = \hat{k} & [\vec{j} \vec{k}] = \hat{i} & [\vec{k} \vec{i}] = \hat{j} \\ [\vec{j} \vec{i}] = -\hat{k} & [\vec{k} \vec{j}] = -\hat{i} & [\vec{i} \vec{k}] = -\hat{j} \end{cases} \quad (1.20)$$

quando il triedro  $Oxyz$  è diretto; e inoltre

$$[\vec{i} \vec{i}] = [\vec{j} \vec{j}] = [\vec{k} \vec{k}] = 0$$

In geometria analitica, si stabiliscono le espressioni delle proiezioni sui tre piani coordinati del parallelogramma costruito sui vettori  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ; queste sono evidentemente le proiezioni del vettore  $[\vec{a}, \vec{b}] = \hat{c}$  sugli assi delle coordinate. Queste espressioni sono le seguenti:

$$\begin{cases} [\vec{a} \vec{b}]_x = a_y b_z - a_z b_y \\ [\vec{a} \vec{b}]_y = a_z b_x - a_x b_z \\ [\vec{a} \vec{b}]_z = a_x b_y - a_y b_x \end{cases} \quad (1.21)$$

Ne risulta che

$$\begin{aligned} [\vec{a} (\vec{b} + \vec{c})]_x &= a_y (\vec{b} + \vec{c})_x - a_z (\vec{b} + \vec{c})_y = \\ &= a_y (b_x + c_x) - a_z (b_y + c_y) = a_y b_x - a_z b_y + a_y c_x - a_z c_y = [\vec{a} \vec{b}]_x + [\vec{a} \vec{c}]_x \end{aligned}$$

e poiché la direzione dell'asse delle  $x$  è arbitraria, si ha

$$[\vec{a} (\vec{b} + \vec{c})] = [\vec{a} \vec{b}] + [\vec{a} \vec{c}] \quad (1.22)$$

Si vede che

$$[(\vec{a} + \vec{b}) (\vec{c} + \vec{d})] = [\vec{a} \vec{c}] + [\vec{a} \vec{d}] + [\vec{b} \vec{c}] + [\vec{b} \vec{d}] \quad (1.23)$$

quest'ultima relazione può essere generalizzata. In particolare, la derivata

$$\frac{d}{dt} [\vec{a} \vec{b}] = \lim_{\Delta t} \frac{[(\vec{a} + \Delta \vec{a}) (\vec{b} + \Delta \vec{b})] - [\vec{a} \vec{b}]}{\Delta t}$$

diviene, dalla (1-9b)

$$\frac{d}{dt} [\vec{a} \vec{b}] = \left[ \vec{a} \frac{d\vec{b}}{dt} \right] + \left[ \frac{d\vec{a}}{dt} \vec{b} \right] \quad (1.24)$$

Le somme che ricorrono nelle relazioni (9,a), (9,b) e (9,c) sono tutte vettoriali.

Considereremo anche altri prodotti scalari e vettoriali, le cui espressioni sono state introdotte da Hamilton e che sono molto utili nel calcolo vettoriale.

Quando  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  e  $\vec{c}$  sono tre vettori qualunque, che supporremo polari per maggiore comodità, la grandezza  $(\vec{c} [\vec{a} \vec{b}])$  è il prodotto scalare del vettore polare  $\vec{c}$  e del vettore assiale  $[\vec{a} \vec{b}]$ ; questo prodotto è uguale a  $|\vec{c}| \cdot |[\vec{a} \vec{b}]| \cos(\vec{c} [\vec{a} \vec{b}])$ ; il vettore assiale  $[\vec{a} \vec{b}]$  è normale al piano del parallelogramma costruito su  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  e il suo modulo è uguale a quello dell'area di questo parallelogramma. Si vede quindi che il prodotto scalare considerato è uguale al volume del parallelepipedo costruito sui tre vettori  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  e  $\vec{c}$ ; questo prodotto è positivo, quando l'ordine di successione di  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  corrisponde al movimento di una vite; non è così allora per l'ordine di successione  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ ,  $\vec{a}$  e  $\vec{c}$ ,  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ , poiché si può prendere ognuna delle facce del parallelepipedo come base del volume e si ha

$$(\vec{c} [\vec{a} \vec{b}]) = (\vec{a} [\vec{b} \vec{c}]) = (\vec{b} [\vec{c} \vec{a}]) \quad (1.25)$$

ma si ha, ad esempio,

$$(\vec{c} [\vec{a} \vec{b}]) = -(\vec{b} [\vec{a} \vec{c}]) \quad (1.26)$$

Abbiamo chiamato *scalare* ogni quantità la cui determinazione è fissata da un numero, e soltanto da un numero; come, ad esempio, la densità o anche la temperatura. Ma, come abbiamo appena visto, si possono presentare due casi; 1. il numero in questione è indipendente dal verso degli assi coordinati; si dice allora che è uno scalare di prima specie; questo è proprio il caso della densità e della temperatura; 2. il numero che definisce la quantità considerata cambia segno quando si invertono gli assi delle coordinate: si dice allora che è uno scalare di seconda specie; l'esempio di un tale scalare che abbiamo incontrato sopra è quello del volume di un parallelepipedo; ma si può ancora menzionare l'angolo solido sotto il quale si vede da un punto una superficie limitata a un contorno di cui è dati il verso del percorso, poiché questo angolo solido è positivo dalla parte dove si vede svolgere il percorso in senso positivo. Lo stesso discorso vale per il potere rotatorio di un liquido attivo, la cui misura richiede anch'essa la scelta di una rotazione positiva.

Quando i vettori  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  sono in uno stesso piano, si ha

$$(\vec{a} [\vec{b} \vec{c}]) = 0 \quad (1.27)$$

si ha pure

$$(\vec{a} [\vec{a} \vec{b}]) = 0$$

Risulta dalla formula (1-7)

$$(\vec{a} [\vec{b} \vec{c}]) = a_x [\vec{b} \vec{c}] + a_y [\vec{b} \vec{c}] + a_z [\vec{b} \vec{c}]$$

da cui, utilizzando le espressioni (1-9), il determinante ben noto

$$(\vec{a} [\vec{b} \vec{c}]) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \quad (1.28)$$

Consideriamo ora la grandezza  $[\vec{a} [\vec{b} \vec{c}]] = \vec{d}$ , dove supponiamo ancora che  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  e  $\vec{c}$  sono vettori polari; questo vettore  $\vec{d}$  è perpendicolare ad  $\vec{a}$  e al vettore assiale  $\hat{e} = [\vec{b} \vec{c}]$ , che da parte sua è normale al piano dei vettori  $\vec{b}$  e  $\vec{c}$ ; il vettore  $\vec{d}$  è quindi situato nel piano dei vettori  $\vec{b}$  e  $\vec{c}$  e inoltre è perpendicolare al vettore  $\vec{a}$ . Applicando due volte la prima formula (9), si trova

$$\begin{aligned} d_x &= a_y (b_x c_y - b_y c_x) - a_z (b_z c_x - b_x c_z) = \\ &= b_x (a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z) - c_x (a_x b_x + a_y b_y + a_z c_z) \end{aligned}$$

o, dalla (7),

$$d_x = [\vec{a} [\vec{b} \vec{c}]] = \vec{b}_x (\vec{a} \vec{c}) - \vec{c}_x (\vec{a} \vec{b})$$

L'asse delle coordinate  $x$  essendo completamente arbitrario, si ha pertanto

$$\vec{d} = [\vec{a} [\vec{b} \vec{c}]] = \vec{b} (\vec{a} \vec{c}) - \vec{c} (\vec{a} \vec{b}) \quad (1.29)$$

nel secondo membro, si presenta la differenza geometrica dei due vettori  $\vec{b}$  e  $\vec{c}$  moltiplicata rispettivamente per le grandezze scalari  $(\vec{a} \vec{c})$  e  $(\vec{a} \vec{b})$ .

Dalla (10), si può trasformare il prodotto scalare di due prodotti vettoriali  $[\vec{a} \vec{b}] \cdot [\vec{c} \vec{d}]$  nell'espressione  $\vec{c} ([\vec{d} [\vec{a} \vec{b}]])$ . Risulta allora dalla (11) che

$$([\vec{a} \vec{b}] \cdot [\vec{c} \vec{d}]) = (\vec{a} \vec{c}) (\vec{b} \vec{d}) - (\vec{b} \vec{c}) (\vec{a} \vec{d}) \quad (1.30)$$

La teoria elettronica sarà oggetto di un capitolo successivo, ma indicheremo ora una formula di questa teoria che dovremo utilizzare nel Capitolo II.

Supponiamo che un elettrone di carica  $e$  si muova con velocità  $\vec{v}$  in un campo elettrico di intensità  $\vec{E}$  e in un campo magnetico di intensità  $\hat{H}$ . Il campo elettrico esercita sull'elettrone la forza  $e\vec{E}$ . Il campo magnetico agisce sull'elettrone in moto come sull'elemento  $\vec{ds}$  di una corrente elettrica  $i_e$  tale che  $i_e \vec{ds} = \vec{v}e$ , avendo  $\vec{v}$  la direzione di  $\vec{ds}$  ed essendo l'intensità  $i_e$  di corrente espressa in unità elettrostatiche. Abbiamo visto che il campo magnetico  $\hat{H}$  esercita sull'elemento  $\vec{ds}$  di corrente  $i$  una forza di modulo uguale, con le notazioni cartesiane del Volume IV, a

$$H i d s \sin (ds, H)$$

dove  $i$  è espressa in unità elettromagnetiche, di modo che  $i = i_e : c$ , essendo  $c$  la velocità della luce; la forza considerata è normale al piano che contiene i vettori  $\hat{H}$  e  $\vec{ds}$  e ha pertanto come espressione

$$[i \vec{ds} \cdot \hat{H}] = \frac{1}{c} [i_e \vec{ds} \cdot \hat{H}] = \frac{1}{c} [\vec{v}e \cdot \hat{H}]$$

Se si indica con  $\vec{F}$  la forza che agisce sull'unità elettrostatica di quantità di elettricità,  $\vec{F}$  è la forza esercitata sull'elettrone mobile e si ha

$$\vec{F} = \vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v} \hat{H}] \quad (1.31)$$

In questa formula,  $\vec{E}$  è espresso in unità elettrostatiche,  $\hat{H}$  in unità elettromagnetiche. Più avanti spiegheremo perché si considera  $\vec{E}$  come vettore polare e  $\hat{H}$  come vettore assiale.

### 3. Elementi di analisi vettoriale. I campi di scalari e di vettori

Uno spazio, in tutti i punti del quale viene aggiunto uno scalare o un vettore, è chiamato campo scalare o campo vettoriale. Uno spazio, in cui sono distribuite masse ponderabili, elettriche o magnetiche, rappresenta un campo scalare del potenziale di queste masse e allo stesso tempo un campo vettoriale delle forze a cui dà origine, o più precisamente un campo vettoriale delle intensità che possiede. Applicheremo in particolare l'analisi vettoriale, in questo paragrafo, alla considerazione dei fenomeni elettrici e magnetici; cercheremo quindi di evidenziare l'uso di questa analisi nella introduzione delle formule ed equazioni considerate nel Volume IV. Ci limiteremo qui a menzionare che uno spazio occupato da un fluido in movimento, le cui particelle hanno un potenziale di velocità, rappresenta un campo scalare di questo potenziale; lo si può anche considerare come un campo vettoriale delle velocità degli elementi del fluido. Uno spazio in cui esistono correnti elettriche è un campo vettoriale delle forze magnetiche che si esercitano in questo spazio.

Designeremo con  $V$  un qualsiasi scalare; le lettere che rappresentano i vettori saranno sormontate da una freccia dritta o curva, a seconda che si tratti di un vettore polare o di un vettore assiale, come nel § 2.

Dobbiamo far conoscere soprattutto quattro grandezze, che svolgono un ruolo particolarmente importante nell'analisi vettoriale.

I. LAPLACIANO. — Lo scalare  $V$ , in un campo scalare, è una funzione continua delle coordinate  $x, y, z$  del punto a cui si riferisce (funzione del punto). Indicheremo con  $\Delta V$  la seguente quantità:

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \quad (1.32)$$

che chiameremo il Laplaciano di  $V$ ; questo scalare è stato anche chiamato da G. Lamé il parametro differenziale del secondo ordine di  $V$ . Si può usare lo stesso simbolo per il campo di qualsiasi vettore,  $\vec{a}$ ; ma allora il suo significato è completamente diverso. Designeremo con  $\Delta \vec{a}$  un vettore, le cui componenti rispetto agli assi coordinati sono  $\Delta a_x, \Delta a_y, \Delta a_z$  (essendo  $a_x, a_y, a_z$  le componenti del vettore  $\vec{a}$ ). Si ha qui

$$\Delta a_x = \frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2} \quad (1.33)$$

con espressioni analoghe per  $\Delta a_y$  e  $\Delta a_z$ . Si può quindi scrivere

$$\Delta \vec{a} = \vec{i} \Delta a_x + \vec{j} \Delta a_y + \vec{k} \Delta a_z \quad (1.34)$$

in questa formula tutte le grandezze sono vettori e l'addizione nel secondo membro è ovviamente vettoriale. La formula (13) quindi non si applica immediatamente ai vettori; la formula (14,a) non è costituita allo stesso modo della (13).

II. GRADIENTE. — Consideriamo il campo di uno scalare  $V$ , che è ovunque continuo e finito e il cui modulo è funzione delle coordinate  $x, y, z$ . Le superfici  $V = \text{cost}$  sono chiamate *superfici di livello dello scalare  $V$* . Se si innalza la normale  $n$  al punto M di tale superficie e se si porta su di essa la grandezza  $\frac{\partial V}{\partial n}$ , si ottiene un vettore  $\vec{a}$  che è detto *caduta* o il *gradiente* dello scalare  $V$ ; lo designeremo con  $\text{grad } V$  e quindi scriveremo

$$\begin{cases} \vec{a} &= \text{grad } V \\ |\vec{a}| &= \frac{\partial V}{\partial n} \end{cases} \quad (1.35)$$

Se  $V$  è un potenziale,  $\vec{a}$  è l'intensità del campo di questo potenziale in un dato punto, vedere Libro 1, cap. I, § 6. Le linee in tutti i punti delle quali il vettore  $\vec{a}$  è diretto lungo la tangente

possono chiamarsi *linee del vettore*  $\vec{a}$ ; queste sono le traiettorie ortogonali delle superfici di livello dello scalare  $V$ . Le componenti del vettore  $\vec{a}$  sono

$$a_x = \frac{\partial V}{\partial x} \quad a_y = \frac{\partial V}{\partial y} \quad a_z = \frac{\partial V}{\partial z} \quad (1.36)$$

di modo che

$$|\vec{a}| = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2} \quad (1.37)$$

Quest'ultima espressione fu chiamata da G. Lamé il parametro differenziale del primo ordine di  $V$ . G. Lamé non ha considerato il vettore  $\vec{a}$  come una quantità orientata; quest'ultima nozione è stata introdotta da Hamilton.

Un vettore che è il gradiente di uno scalare è detto vettore lamellare, e dà origine ad un campo vettoriale lamellare (Lord Kelvin); si ricorda così che si può scomporre questo campo in lamine sottili mediante superfici piane, in modo che da una faccia all'altra di ciascuna lamina lo scalare diminuisce di una quantità fissa.

Le componenti del vettore lamellare  $\vec{a}$  soddisfano ovviamente le seguenti equazioni:

$$\frac{\partial a_y}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial a_z}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial a_x}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial x} = 0 \quad (1.38)$$

Quando un vettore non è lamellare, le linee del vettore possono tuttavia in generale esistere.

Sia  $s$  una qualsiasi curva nello spazio. Designiamo con  $ds$  il valore numerico di un elemento di questa curva; indicheremo lo stesso elemento, come vettore, con  $\vec{ds}$ , in modo che  $|\vec{ds}| = ds$ . Chiameremo integrale del vettore  $\vec{a}$  lungo la curva,

$$\int_{s_0}^{s_1} (\vec{a} \vec{ds}) = \int_{s_0}^{s_1} a_s ds$$

dove l'espressione  $(\vec{a} \vec{ds})$  è il prodotto scalare dei due vettori  $\vec{a}$ ,  $\vec{ds}$ . Se  $\vec{a}$  è un vettore lamellare, si ha

$$\int_{s_0}^{s_1} (\vec{a} \vec{ds}) = \int_{s_0}^{s_1} a_s ds = \int_{s_0}^{s_1} \frac{\partial V}{\partial s} ds = V_1 - V_0 \quad (1.39)$$

dove  $V_0$  e  $V_1$  sono i valori dello scalare  $V$  agli estremi  $s_0$  e  $s_1$  della curva.

Dalla (16) segue che *l'integrale di un vettore lamellare lungo una curva dipende solo dalla posizione degli estremi, ma non dalla forma della curva*. Per una curva chiusa, si ha

$$\int_{(s)} (\vec{a} \vec{ds}) = \int_{(s)} \text{grad } V \cdot ds = 0 \quad (1.40)$$

da cui questo teorema particolarmente importante: *le linee di un vettore lamellare non possono essere curve chiuse*. Infatti, quando si applica la (16,a) a una tale linea di vettore lamellare,  $\vec{a}$  e  $\vec{ds}$  hanno la stessa direzione, tutti gli elementi dell'integrale sono positivi, e questi ultimi non possono quindi annullarsi. *Le linee di un vettore lamellare devono quindi avere un inizio (punto di emissione) e una fine (punto di assorbimento)*. Ad esempio, le linee di forza, cioè le linee del gradiente del potenziale delle masse elettriche o magnetiche, hanno il loro inizio e la loro fine dove si trovano queste masse.

Possiamo facilmente dimostrare che un vettore è il gradiente di un certo scalare  $V$ , quando l'integrale di questo vettore lungo una curva che congiunge due punti dati qualsiasi è indipendente dalla forma di quella curva.

Finora abbiamo applicato il simbolo *grad* esclusivamente agli scalari. Ma così come abbiamo introdotto, sotto determinate condizioni, il simbolo  $\Delta \vec{a}$  definito con le formule (14) e (14,a), possiamo anche, notando che l'operatore *grad* ha per espressione

$$grad = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

impiegare il simbolo  $(\vec{a} grad) \vec{b}$  per un vettore le cui componenti sono  $(\vec{a} grad) b_x$ ,  $(\vec{a} grad) b_y$ ,  $(\vec{a} grad) b_z$ , di modo che

$$(\vec{a} grad) \vec{b} = \vec{i} (\vec{a} grad) b_x + \vec{j} (\vec{a} grad) b_y + \vec{k} (\vec{a} grad) b_z \quad (1.41)$$

si ha

$$(\vec{a} grad) = a_x \frac{\partial}{\partial x} + a_y \frac{\partial}{\partial y} + a_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.42)$$

e

$$(\vec{a} grad) b_x = a_x \frac{\partial b_x}{\partial x} + a_y \frac{\partial b_x}{\partial y} + a_z \frac{\partial b_x}{\partial z} \quad (1.43)$$

con formule analoghe per le altre componenti.

Alcuni autori prendono  $-\frac{\partial V}{\partial n}$  per il modulo del vettore dello scalare  $V$ ; Hamilton ha adottato la notazione

$$\nabla = grad = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

e si chiama qualche volta *nabla* l'operatore  $\nabla$ , dal nome di uno strumento di musica ebraico o assiro di forma analoga.

III. DIVERGENZA. - La *divergenza* di un vettore  $\vec{a}$  è la grandezza scalare

$$div \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \quad (1.44)$$

evidentemente

$$div (\vec{a} + \vec{b}) = div \vec{a} + div \vec{b} \quad (1.45)$$

Quando  $\vec{a}$  è un vettore lamellare, cioè quando si ha  $\vec{a} = grad V$ , si trova dalla formula (13) che

$$div grad V = \Delta V \quad (1.46)$$

Si sa che quando  $V$  è un potenziale, si ha  $\Delta V = -4\pi\rho$ , indicando  $\rho$  la densità di volume delle masse elettriche o magnetiche; in altre parole,  $div a = div grad V = \Delta V = -4\pi\rho$  è *diverso da zero nel punto in cui finiscono o iniziano le linee di forza*. In questo caso  $\vec{a}$  è l'intensità  $\vec{F}$  del campo cambiato segno. Se, in tutto lo spazio infinito,  $div \vec{a} = \Delta V = 0$ , le linee di forza sono chiuse; non ci sono né punti di emissione né punti di assorbimento e il campo si dice libero da sorgenti. Il campo magnetico di una corrente elettrica è un campo privo di sorgenti.

I. W. Gibbs ha proposto, per esprimere le relazioni reciproche delle grandezze  $V$ ,  $\vec{F}$  e  $\rho$ , le notazioni

$$\begin{cases} V &= Pot \rho \\ \vec{F} &= New \rho = -grad V \\ 4\pi\rho &= div \vec{F} = -div grad V \end{cases} \quad (1.47)$$

che si enunciano dicendo che  $V$  è il potenziale di  $\rho$  di cui  $\vec{F}$  è il newtoniano o il campo newtoniano.

*Teorema di GAUSS.* - Consideriamo una superficie chiusa  $S$ ; sia  $dS$  un elemento di questa superficie,  $n$  la direzione della normale a questo elemento,  $v$  il volume racchiuso dalla superficie

$S$ ; l'elemento di volume è  $dv = dxdydz$ . Sia inoltre  $\vec{a}$  un vettore che è una funzione finita, continua ed uniforme di  $x, y, z$ ,  $a_x$  la proiezione del vettore legato all'elemento  $dS$  sulla normale  $n$ . La grandezza  $a_n dS$  è detta flusso del vettore  $\vec{a}$  attraverso l'elemento  $dS$  della superficie. L'integrale esteso alla superficie totale  $S$

$$\iint a_n dS$$

corrisponde al flusso totale del vettore  $\vec{a}$  attraverso l'intera superficie  $S$ . Se  $\vec{n}_1$  è un vettore unitario preso nella direzione della normale  $n$ , si può scrivere  $a_n = (\vec{a} \cdot \vec{n}_1)$ . Con una trasformazione ben nota e molto semplice

$$\iiint \left( \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) dxdydz = \iint a_n dS \quad (1.48)$$

Indicando, per brevità, l'integrale multiplo con un solo segno di somma, si può scrivere, tenendo conto della (18)

$$\int \text{div } \vec{a} dv = \int a_n dS \quad (1.49)$$

*L'integrale della divergenza del vettore  $\vec{a}$  esteso a un certo volume è uguale al flusso del vettore  $\vec{a}$  attraverso la superficie contenente tale volume.* Questo è il teorema di Gauss.

Applicando la formula (21) al volume infinitamente piccolo  $dv$ , si può scrivere

$$\text{div } \vec{a} = \frac{\int a_n dS}{dv} \quad (1.50)$$

l'integrale del secondo membro essendo esteso alla superficie infinitamente piccola del volume  $dv$ . Prendendo ad esempio il parallelepipedo  $dxdydz$  per  $dv$ , si trova l'espressione (18) di  $\text{div } \vec{a}$ . Ne consegue che la formula (21,a) può essere presa come definizione della grandezza  $\text{div } \vec{a}$ . Per mezzo di questa formula si vede che la grandezza  $\text{div } \vec{a}$  è diversa da zero in un dato punto solo quando il flusso del vettore  $\vec{a}$  attraverso la superficie infinitamente piccola  $S$  che circonda il punto considerato non è esso stesso nullo; ma questo è possibile solo quando il punto è un punto di emissione ( $\text{div } \vec{a} > 0$ ) o un punto di assorbimento ( $\text{div } \vec{a} < 0$ ) delle linee del vettore  $\vec{a}$ . Se nel punto dato non c'è né emissione né assorbimento, il flusso che entra nella superficie  $S$  è uguale a quello che ne esce, per cui l'integrale nel secondo membro della (21,a) è nullo e quindi  $\text{div } \vec{a} = 0$ . *Quando  $\text{div } \vec{a}$  non è nulla, si ha nascita (emissione,  $\text{div } \vec{a} > 0$ ) o fine (assorbimento,  $\text{div } \vec{a} < 0$ ) delle linee del vettore  $\vec{a}$ . Quando non c'è né emissione né assorbimento, si ha  $\text{div } \vec{a} = 0$  ovunque.* Ciò è pienamente confermato quando  $V$  designa un potenziale e si ha  $\text{div grad } V = -4\pi\rho$ , quindi  $\text{div } \vec{F} = 4\pi\rho$ , essendo l'intensità  $\vec{F}$  del campo uguale a  $-\text{grad } V$ .

*Se si ha, in tutto lo spazio infinito,  $\text{div } \vec{a} = 0$ , le linee del vettore  $\vec{a}$  sono curve chiuse e lo spazio stesso è privo di sorgenti,* come abbiamo già visto per il caso in cui  $V$  rappresenta un potenziale. Si può quindi enunciare il seguente teorema: *Nel campo di un vettore lamellare  $\vec{a} = \text{grad } V$ , esistono punti in cui  $\text{div } \vec{a}$  non è nulla.*

Invece di  $\text{div } \vec{a}$ , Hamilton e Tait scrivono  $-\nabla \cdot \vec{a}$ ; allo stesso modo, la maggior parte degli autori inglesi usa invece del simbolo  $\Delta$  il simbolo  $\nabla^2$ .

IV. ROTORE. Nel campo di un vettore  $\vec{a}$  si può, in condizioni date, costruire un altro vettore  $\vec{b}$  detto rotore del vettore  $\vec{a}$ . Lo designeremo nel modo seguente:

$$\vec{b} = \text{rot } \vec{a} \quad (1.51)$$

notando che, come mostreremo in seguito, il rotore di un vettore polare è un vettore assiale e viceversa. Molto spesso gli autori inglesi utilizzano la notazione proposta da O. Heaviside

$\widehat{b} = \text{curl } \vec{a}$  P. G. Tait ha adottato il simbolo  $V\nabla\vec{a}$  che J. W. Gibbs ha semplificato scrivendo  $\nabla \times \vec{a}$ ; W. Voigt scrive  $\widehat{b} \text{vort } \vec{a}$ .

Definiremo il rotore  $\widehat{b}$  con le sue componenti

$$\begin{cases} b_x = \text{rot}_x \vec{a} = \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \\ b_y = \text{rot}_y \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \\ b_z = \text{rot}_z \vec{a} = \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \end{cases} \quad (1.52)$$

Le equazioni (15,c) mostrano che il rotore di un vettore lamellare è nullo; cioè, quando  $\vec{a} = \text{grad } V$ , si ha

$$\text{rot } \vec{a} = \text{rot grad } V = 0 \quad (1.53)$$

Se si calcola, con la formula (18), l'espressione  $\text{div } \widehat{b} = \text{div rot } \vec{a}$ , tutti i termini scompaiono e si ottiene

$$\text{div rot } \vec{a} = 0 \quad (1.54)$$

Questa equazione mostra che il vettore  $\widehat{b}$ , che è il rotore di un altro vettore  $\vec{a}$  non ha divergenza; il suo campo è libero da sorgenti e tutte le linee del vettore  $\widehat{b}$  sono chiuse. Il vettore  $\widehat{b} \text{rot } \vec{a}$  è detto un vettore solenoidale e il suo campo solenoidale.

**Teorema di STOKES.** Nel Libro II, cap. I, § 5, abbiamo reso nota la formula (43) di Stokes. Gli abbiamo dato la seguente espressione:

$$\int_S \varphi dx + \psi dy + \theta dz = \iint_S \left\{ \left( \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \cos(n, x) + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \cos(n, y) + \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \cos(n, z) \right\} dS$$

$\varphi, \psi$  e  $\theta$  sono funzioni di un punto qualsiasi, ma finite, continue e uniformi;  $S$  è una superficie limitata dalla curva  $s$ ,  $n$  è la normale tracciata all'elemento di superficie  $dS$ ,  $dx, dy, dz$  sono le componenti dell'elemento  $ds$  del contorno  $s$ . L'integrale al primo membro si estende per tutto il contorno  $s$  e viene preso in un verso che, con quello della normale  $n$ , risponde alla regola della vite. Supponiamo ora che  $\varphi = a_x, \psi = a_y, \theta = a_z$  siano le componenti di un certo vettore  $\vec{a}$ . Se si pone allora, come in precedenza,  $ds = |\vec{ds}|$ , si ha  $\varphi dx + \psi dy + \theta dz = \{a_x \cos(n, x) + a_y \cos(n, y) + a_z \cos(n, z)\} ds = a_s ds = (\vec{a} \vec{ds})$ . L'espressione sotto il segno di sommatoria nel secondo membro è allora

$$\text{rot}_x \vec{a} \cos(n, x) + \text{rot}_y \vec{a} \cos(n, y) + \text{rot}_z \vec{a} \cos(n, z) = \text{rot } \vec{a}$$

Se si prende dappertutto, come prima, un segno unico di sommatoria, si ottiene

$$\int (\vec{a} \vec{ds}) = \int \text{rot}_n \vec{a} dS \quad (1.55)$$

*L'integrale di un vettore lungo una curva chiusa è uguale al flusso del rotore di questo vettore attraverso qualsiasi superficie delimitata da questa curva.* Si vede così che attraverso tutte le superfici limitate da una data curva chiusa passa un unico e identico flusso di un vettore solenoidale e che inoltre il flusso di un vettore solenoidale attraverso qualsiasi superficie chiusa è nullo.

Quando si ha in tutto lo spazio  $\text{rot } \vec{a} = 0$ , allora  $\vec{a} = \text{grad } V$  e la formula (27) restituisce la (16,a). Può succedere, però, che in tutti i punti di uno spazio a forma d'anello che circonda la curva chiusa  $s$ , si abbia  $\text{rot } \vec{a} = 0$ , tranne che in certi punti; in questo caso l'integrale del vettore  $\vec{a}$  lungo la curva  $s$  non è nullo, anche se in tutti i punti di questa curva  $\text{rot } \vec{a} = 0$ ,



perché la superficie  $S$  delimitata dalla curva  $s$  attraversa necessariamente i punti dove  $rot \vec{a}$  non è nullo.

Le grandezze scalari o vettoriali che finora introdotte nell'analisi vettoriale permettono di liberarci da ogni considerazione in cui si ricorre ad assi coordinati senza rapporti geometrici o fisici con le questioni da studiare. Si vede molto semplicemente come si è arrivati a questo risultato notando con H. Burkardt che i simboli utilizzati sono dedotti dagli invarianti che un sistema di punti possiede rispetto ai gruppi degli spostamenti euclidei.

Per un solo vettore  $\vec{a}$  l'invariante scalare da considerare è la lunghezza  $|\vec{a}|$  di questo vettore. Per due vettori  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ , si deve introdurre inoltre il prodotto scalare  $(\vec{a} \vec{b})$ . Per tre vettori  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ , bisogna aggiungere l'invariante indicato in precedenza con  $(\vec{a} [\vec{b} \vec{c}])$ , ma che si può scrivere più semplicemente  $(\vec{a} \vec{b} \vec{c})$  e che è il volume del parallelepipedo costruito sui tre vettori  $\vec{a}$   $\vec{b}$   $\vec{c}$ . Ogni invariante scalare razionale intero di grado pari di un numero qualunque di vettori è unicamente funzione di prodotti geometrici come  $(\vec{a} \vec{b})$ , che comprendono  $|\vec{a}|$  e  $|\vec{b}|$  poiché  $(\vec{a} \vec{a}) = |\vec{a}|^2$ . Ogni invariante di grado dispari è funzione di prodotti scalari come  $(\vec{a} \vec{b})$  e  $(\vec{a} \vec{b} \vec{c})$ . Si vede facilmente che si ha in particolare

$$(\vec{a} \vec{b} \vec{c}) (\vec{d} \vec{e} \vec{f}) = \begin{vmatrix} (\vec{a} \vec{d}) & (\vec{a} \vec{e}) & (\vec{a} \vec{f}) \\ (\vec{b} \vec{d}) & (\vec{b} \vec{e}) & (\vec{b} \vec{f}) \\ (\vec{c} \vec{d}) & (\vec{c} \vec{e}) & (\vec{c} \vec{f}) \end{vmatrix}$$

e inoltre la relazione molto utile

$$(\vec{a} \vec{b} \vec{c}) (\vec{d} \vec{e}) - (\vec{b} \vec{c} \vec{d}) (\vec{a} \vec{e}) + (\vec{c} \vec{d} \vec{a}) (\vec{b} \vec{e}) - (\vec{d} \vec{a} \vec{b}) (\vec{c} \vec{e}) = 0$$

L'unico invariante vettoriale da considerare, a parte un vettore preso isolatamente, è il prodotto vettoriale  $[\vec{a} \vec{b}]$  di due vettori  $\vec{a}$   $\vec{b}$ , che è ovviamente indipendente da qualsiasi scelta degli assi coordinati. Infatti, un prodotto come  $[\vec{a} \vec{b} \vec{c}]$  è espresso, come nella formula (11), mediante gli invarianti precedenti ed è lo stesso per qualsiasi funzione vettoriale razionale intera di grado pari o dispari.

Passiamo ora agli invarianti differenziali. Per formarli basta ricorrere al simbolismo di Boole, come hanno fatto Hamilton e Tait, e applicare il curiosissimo operatore

$$grad = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

assimilandolo a un vettore. In base a quanto sopra, vediamo quindi apparire l'invariante

$$div \vec{a} = (grad \vec{a})$$

sostituendo in un prodotto scalare come  $(\vec{a} \vec{b})$  uno dei due vettori con  $grad$ , essendo l'altro vettore è assunto da questo operatore. Se l'operatore  $grad$  non assume quest'altro vettore, si ha in  $(\vec{a} grad)$  l'espressione di una derivata parziale presa nella direzione di  $\vec{a}$  (tale che la derivata  $\frac{\partial}{\partial n}$  lungo la normale che abbiamo già impiegato spesso). Sostituendo in  $(\vec{a} \vec{a}) = |\vec{a}|^2$  il vettore  $\vec{a}$  con  $gradm$ , si ritrova in particolare l'operatore differenziale  $\Delta = (grad grad)$ . Se si parte dal prodotto scalare  $(\vec{a} \vec{b} \vec{c})$ , si hanno i due invarianti scalari

$$\begin{aligned} (\vec{a} grad \vec{b}) &= (\vec{a} [grad \vec{b}]) \\ (\vec{a} \vec{b} grad) &= ([\vec{a} \vec{b}] grad) \end{aligned}$$

Le funzioni scalari razionali intere di un numero qualsiasi di vettori, che contengono le derivate derivate parziali di questi vettori linearmente, sono formate mediante scalari dei quattro tipi

$$(\vec{a} \vec{b}) \quad (\vec{a} \vec{b} \vec{c}) \quad (grad \vec{a}) \quad (\vec{a} grad \vec{b})$$

Analogamente, per le operazioni scalari differenziali del primo ordine, basta associare i quattro tipi di scalari

$$(\vec{a} \vec{b}) \quad (\vec{a} \vec{b} \vec{c}) \quad (\vec{a} grad) \quad (\vec{a} \vec{b} grad)$$

Gli invarianti differenziali vettoriali sono altrettanto facili da formare. Da  $[\vec{a} \vec{b}]$ , si deduce la nozione di rotore dalla relazione

$$[grad \vec{a}] = rot \vec{a}$$

da  $\vec{a} (\vec{b} \vec{c})$  derivano le espressioni  $\Delta \vec{a} = (grad grad) \vec{a}$  e  $(\vec{a} grad) \vec{b}$ , ecc.

L'operatore *grad* è quindi fondamentale. Se lo si considera polare, si vede che il rotore di un vettore assiale è un vettore polare e viceversa; la divergenza di un vettore polare è uno scalare della prima specie e quella di un vettore assiale è uno scalare della seconda specie; il gradiente di uno scalare del primo tipo è un vettore polare e il gradiente di uno scalare del secondo tipo è un vettore assiale, ecc.

P. G. Tait ha esteso ulteriormente il simbolismo di Boole. L'operatore algebrico

$$e^{h \frac{d}{dx}}$$

applicato a una funzione qualsiasi di  $x$ , trasforma  $x$  in  $x + h$ . Analogamente quando  $\vec{a}$  è un vettore, non attribuito al *grad*, l'operatore

$$e^{(\vec{a} grad)}$$

applicato a una funzione qualunque di un vettore  $\vec{b}$ , dà

$$e^{(\vec{a} grad)} f(\vec{b}) = f(\vec{a} + \vec{b})$$

Riuniamo qui alcune formule importanti che è facile introdurre da quanto detto e di cui ci serviremo nel seguito:

$$div (\vec{a} V) = V div \vec{a} + (\vec{a} grad V) \quad (1.56)$$

$$div [\vec{a} \vec{b}] = (\vec{b} rot \vec{a}) - (\vec{a} rot \vec{b}) \quad (1.57)$$

$$rot (\vec{a} V) = V rot \vec{a} + [grad V \cdot \vec{a}] \quad (1.58)$$

$$rot rot \vec{a} = grad div \vec{a} - \Delta \vec{a} \quad (1.59)$$

$$rot [\vec{a} \vec{b}] = \vec{a} div \vec{b} - \vec{b} div \vec{a} + (\vec{b} grad) \vec{a} - (\vec{a} grad) \vec{b} \quad (1.60)$$

$$(\vec{a} grad) \vec{b} + (\vec{b} grad) \vec{a} = grad (\vec{a} \vec{b}) - [\vec{a} rot \vec{b}] - [\vec{b} rot \vec{a}] \quad (1.61)$$

Tutti i termini nelle relazioni (28) e (29) sono scalari e nelle relazioni (30), (31), (32) e (33) vettori, per cui in quest'ultimo caso le addizioni o sottrazioni indicate sono vettoriali. È facile stabilire direttamente tutte queste formule, anche se i calcoli a volte sono un po' lunghi. Si ottiene la formula (28) molto semplicemente; dalla formula (18) segue infatti che

$$div (\vec{a} V) = \frac{\partial (a_x V)}{\partial x} + \frac{\partial (a_y V)}{\partial y} + \frac{\partial (a_z V)}{\partial z} = V \frac{\partial a_x}{\partial x} + a_x \frac{\partial V}{\partial x} + ecc.$$

data la (7), si trova la (28); in modo analogo si ha la (29) mediante (18), (9), (7) e (23). Per ottenere le altre relazioni ci si può limitare a considerare la componente lungo l'asse  $x$  del vettore del primo membro, ad esempio  $rot_x rot a$  nella (31), ed effettuare le trasformazioni che portano alle componenti lungo lo stesso asse dei vettori del secondo membro.

Considereremo altre due questioni importanti.

A. VARIAZIONE NEL TEMPO DI UNO SCALARE E DI UN VETTORE. Supponiamo che uno scalare  $V$  si riferisca ad una particella di determinata sostanza, che si muove con velocità  $\vec{v}$  e si trova all'istante  $t$  in un certo punto  $M$  dello spazio. Durante l'intervallo di tempo  $dt$ , le coordinate di questa particella cambiano di  $dx, dy, dz$ . Caratterizziamo con  $\frac{dV}{dt}$  la velocità di cambiamento dello scalare legato alla particella in movimento, ma con  $\frac{\partial V}{\partial t}$  la velocità di cambiamento dello scalare nel punto mobile  $M$ . Si ha allora

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

cioè

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + (\vec{v} grad V) \quad (1.62)$$

In modo analogo, si ottiene per un vettore  $\vec{a}$  la relazione facile da stabilire

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{\partial \vec{a}}{\partial t} + (\vec{v} grad) \vec{a} \quad (1.63)$$

Citeremo anche un'altra formula dello stesso tipo, che è molto importante. Sia  $S$  una superficie chiusa che si muove contemporaneamente agli elementi materiali che la compongono e che assume nell'istante dato la posizione  $S_0$ . Indicheremo con  $\frac{d}{dt} \int a_n dS$  la velocità di variazione subita dal flusso del vettore  $\vec{a}$  attraverso la superficie mobile  $S$ , e con  $\frac{\partial}{\partial t} \int a_n dS$  la velocità di variazione del flusso che scorre attraverso la superficie stazionaria  $S_0$ . Le superfici  $S$ ,  $S_0$  e la banda anulare infinitamente stretta che è descritta dal contorno di  $S$  nel suo movimento formano una superficie chiusa alla quale si può applicare il teorema di Gauss; vista inoltre la formula (27) di Stokes, si ottiene l'espressione

$$\frac{d}{dt} \int a_n dS = \int \left\{ \frac{\partial a_n}{\partial t} + v_n div \vec{a} + rot_n [\vec{a} \vec{v}] \right\} dS \quad (1.64)$$

B. DETERMINAZIONE DI UN VETTORE, QUANDO SI ASSEGNA LA SUA DIVERGENZA E IL SUO ROTORE. Si può stabilire che un vettore  $\vec{a}$  è completamente determinato dalle seguenti condizioni: 1.  $div \vec{a}$  è data in tutto lo spazio infinito; 2.  $rot \vec{a}$  è dato in tutto lo spazio; 3. nel punto  $M$  infinitamente distante, il vettore  $\vec{a}$  è infinitamente piccolo, almeno dell'ordine  $1 : r^2$ , essendo  $r$  la distanza dal punto  $M$  a un punto a distanza finita, ad esempio l'origine delle coordinate. Le forze elettriche e magnetiche soddisfano la terza condizione; non ritorneremo nel seguito su questa terza condizione, che supporremo comunque soddisfatta. Tratteremo prima due casi particolari, poi il problema generale.

PROBLEMA I. Determinare un vettore lamellare  $\vec{a}$ , per il quale  $div \vec{a} = m$  è assegnato. Poiché il vettore è lamellare, si ha

$$div \vec{a} = m \quad (1.65)$$

$$rot \vec{a} = 0 \quad (1.66)$$

quindi il vettore  $\vec{a}$  è completamente determinato (consideriamo la terza condizione sempre soddisfatta). Si può considerare un vettore lamellare come il gradiente di un certo scalare che indicheremo con  $V$ ; si ha quindi

$$\vec{a} = grad V \quad (1.67)$$

Dalle equazioni (19) e (37) risulta che

$$\Delta V = m \quad (1.68)$$

Il potenziale  $V$  di masse la cui densità di volume è  $\rho$  soddisfa l'equazione  $\Delta V = -4\pi\rho$  e si ha

$$V = \int \frac{\rho dv}{r} \quad (1.69)$$

dove  $dv$  è un elemento di volume, le cui coordinate indicheremo con  $x', y', z'$ ;  $r$  è la distanza tra  $dv$  e il punto  $x, y, z$  a cui si riferisce il valore  $V$ ;  $\rho$  è una funzione di  $x', y', z'$ , mentre  $r$  dipende dalle sei coordinate  $x, y, z, x', y', z'$ . L'integrale si estende a tutto lo spazio in cui  $\rho$  è diverso da zero. Se si pone  $m = -4\pi\rho$  e quindi  $\rho = -\frac{m}{4\pi}$ , si ha

$$V = - \int \frac{mdv}{4\pi r} \quad (1.70)$$

La grandezza  $V$  si chiama potenziale scalare. Se si indica con  $div' \vec{a}$  il valore di  $div \vec{a}$  nel punto  $x', y', z'$  dove si trova  $dv$ , si ottiene, dalla (37) e dalla (39)

$$\vec{a} = -grad \int \frac{div' \vec{a}}{4\pi r} dv \quad (1.71)$$

PROBLEMA II. Determinare un vettore solenoidale  $\vec{a}$  per il quale  $rot \vec{a} = \hat{b}$  è assegnato. Poiché il vettore è solenoidale, si ha

$$rot \vec{a} = \hat{b} \quad (1.72)$$

$$div \vec{a} = 0 \quad (1.73)$$

di conseguenza il vettore  $\vec{a}$  è completamente determinato. Introduciamo il vettore  $\hat{c}$  (assiale se  $\vec{a}$  è polare e polare se  $\hat{a}$  è assiale), ponendo

$$\vec{a} = rot \hat{c} \quad (1.74)$$

per la (25), la condizione (42) è soddisfatta. Il vettore  $\hat{c}$  non è determinato dall'equazione (42,a) poiché, se la soddisfa, lo stesso vale per qualsiasi vettore  $\hat{c} + \hat{d}$ , dove  $\hat{d}$  è un vettore lamellare, cioè il gradiente di uno scalare qualunque  $V$ ; si ha infatti  $rot grad V = 0$ , secondo la (24). Da ciò, è possibile sottoporre  $\hat{c}$  a una condizione aggiuntiva. Se si porta la (42,a) nella (41), si ha

$$rot rot \hat{c} = \hat{b}$$

o, dalla (31), che è applicabile a un vettore polare o assiale,

$$grad div \hat{c} - \Delta \hat{c} = \hat{b} \quad (1.75)$$

Introduciamo la condizione aggiuntiva

$$div \hat{c} = 0$$

nel qual caso, diremo con Maxwell che  $\hat{c}$  è un vettore potenziale; si ha allora

$$\Delta \hat{c} = -\hat{b} \quad (1.76)$$

o, in notazioni cartesiane

$$\Delta c_x = -b_x \quad \Delta c_y = -b_y \quad \Delta c_z = -b_z \quad (1.77)$$

Queste equazioni sono del tutto analoghe all'equazione soddisfatta dalla grandezza (39,b), dovendo sostituire  $4\pi\rho$  con  $c_x, c_y, c_z$  di modo che

$$c_x = \int \frac{b_x dv}{4\pi r} \quad c_y = \int \frac{b_y dv}{4\pi r} \quad c_z = \int \frac{b_z dv}{4\pi r} \quad (1.78)$$

Si ha quindi per  $\hat{c} = \hat{i} c_x + \hat{j} c_y + \hat{k} c_z$  l'espressione

$$\hat{c} = \int \frac{\hat{b} dv}{4\pi\rho} \quad (1.79)$$

dove la sommatoria indicata dall'integrale è vettoriale. Ammetteremo senza dimostrazione che l'espressione (44) soddisfa effettivamente la condizione (42,c), che di conseguenza è la soluzione cercata dell'equazione (42,b). Se si introduce nuovamente la notazione *rot* per il punto  $(x', y', z')$  in cui si trova  $dv$ , si ottiene, utilizzando le formule (42,a) e (41) il seguente risultato

$$\vec{a} = \text{rot} \int \frac{\text{rot}' \vec{a}}{4\pi r} dv = \quad (1.80)$$

Possiamo ora affrontare il problema generale.

PROBLEMA II. Determinare un vettore  $\vec{a}$  per il quale

$$\text{div} \vec{a} = m \quad (1.81)$$

$$\text{rot} \vec{a} = \hat{b} \quad (1.82)$$

sono assegnati.

Poniamo

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 \quad (1.83)$$

dove  $\vec{a}_1$  e  $\vec{a}_2$  sono vettori per i quali si ha

$$\begin{cases} \text{div} \vec{a}_1 = m & \text{rot} \vec{a}_1 = 0 \\ \text{div} \vec{a}_2 = 0 & \text{rot} \vec{a}_2 = \hat{b} \end{cases} \quad (1.84)$$

Evidentemente  $\vec{a}_1$  è un vettore lamellare,  $\vec{a}_2$  un vettore solenoidale; ne risulta che, in ogni campo vettoriale, il valore del campo può essere scomposto in due vettori, uno dei quali è un vettore lamellare e l'altro un vettore solenoidale. Le formule (40) e (45) danno i vettori  $\vec{a}_1$  e  $\vec{a}_2$ ; si ha quindi

$$\vec{a} = -\text{grad} \int \frac{m dv}{4\pi r} + \text{rot} \int \frac{\hat{b} dv}{4\pi\rho} \quad (1.85)$$

poiché  $\text{div} \vec{a}_1 = \text{div} \vec{a}$  e  $\text{rot} \vec{a}_2 = \text{rot} \vec{a}$ . Si può scrivere ancora

$$\vec{a} = -\text{grad} \int \frac{\text{div}' \vec{a} dv}{4\pi r} + \text{rot} \int \frac{\text{rot}' \vec{a} dv}{4\pi\rho} \quad (1.86)$$

il vettore cercato  $\vec{a}$  è quindi la somma vettoriale del gradiente di un potenziale scalare e di un rotore di un potenziale vettore.

Diremo solo poche parole nel caso in cui sulla superficie  $S$  data compaia una discontinuità del vettore  $\vec{a}$ . Supponiamo innanzitutto che la componente normale  $a_n$  abbia su entrambi i lati della superficie, nei punti  $M'$  e  $M''$ , valori diversi  $a'_n$  e  $a''_n$ ; allora  $\text{div} \vec{a}$  è infinitamente grande sulla superficie, mentreh  $\text{div} \vec{a}$  può assumere un valore finito, se  $h$  rappresenta la distanza infinitamente piccola tra i punti  $M'$  e  $M''$ . Quando invece è la componente tangenziale ad avere valori diversi  $a'_t$  e  $a''_t$  nei punti  $M'$  e  $M''$ ,  $\text{rot} \vec{a}$  è infinitamente grande, essendo  $s$  una direzione tangente a  $S$  perpendicolare alla direzione di  $t$ ; ma la grandezza  $h \text{rot} \vec{a}$  può rimanere finita, quando  $M'$  e  $M''$  si avvicinano indefinitamente alla superficie  $S$ .

## 4. Relazioni reciproche tra campi scalari e vettoriali. Campi tensoriali<sup>1</sup>

P. Curie e W. Voigt hanno particolarmente insistito sull'interesse che, nello studio dei fenomeni fisici, presentano considerazioni di simmetria familiari ai cristallografi. Dal punto di vista delle idee generali, la nozione di simmetria può essere paragonata alla nozione di dimensione: queste due nozioni fondamentali sono rispettivamente caratteristiche dell'ambiente in cui avviene un fenomeno e della grandezza con cui si valuta l'intensità del fenomeno di quest'ultimo.

P. Curie espone le seguenti proposizioni:

*La simmetria caratteristica di un fenomeno è la massima simmetria compatibile con l'esistenza di questo fenomeno.*

*Un fenomeno può esistere in un mezzo che ha la sua simmetria caratteristica o quella di uno dei sottogruppi della sua simmetria caratteristica.*

*In altre parole, certi elementi di simmetria possono coesistere con certi fenomeni, ma non sono necessari. Ciò che è necessario è che certi elementi di simmetria non esistano. È l'asimmetria che crea il fenomeno.*

Ad ogni classe di grandezze fisiche corrisponde una simmetria caratteristica; è il gruppo delle operazioni attorno ad un punto (rotazione attorno ad un asse, riflessione, ecc.) che sovrappongono a sé stesso un campo uniforme della grandezza considerata. Per una grandezza come temperatura, densità, energia, questo gruppo è quello dei mezzi completamente isotropi e comprende l'insieme di tutte le rotazioni attorno a qualsiasi asse e di tutte le riflessioni; per la forza, la velocità, il campo elettrico, ecc., il gruppo contiene tutte le rotazioni attorno ad una direzione particolare, quella della grandezza diretta, e tutte le riflessioni nei piani passanti per questa direzione; per le altre quantità orientate, come la velocità angolare, il campo magnetico, ecc., il gruppo comprende tutte le rotazioni attorno alla direzione particolare della grandezza, la riflessione in un piano perpendicolare a questa direzione e di conseguenza la simmetria rispetto ad un centro.

Il problema della fisica dei cristalli consiste nella determinazione della dipendenza tra due fenomeni A e B che si manifestano in un mezzo dotato di simmetria.

Se A e B sono entrambi scalari (influenza della temperatura sulla densità), la simmetria del mezzo non interviene. Se B è scalare e A vettore (pirelettricità), la dipendenza cercata è, almeno in prima approssimazione, della forma

$$\vec{\rho} = \vec{\alpha} \theta \quad (1.87)$$

essendo  $\vec{\rho}$  il vettore che rappresenta A, quando lo scalare  $\theta$  che rappresenta B è dato. Il fenomeno A è quindi determinato in modulo e direzione dal raggio vettore dell'ellissoide

$$\frac{x^2}{\alpha_x^2} + \frac{y^2}{\alpha_y^2} + \frac{z^2}{\alpha_z^2} = 3\theta^2 \quad (1.88)$$

dove le dimensioni e l'orientazione di questo ellissoide dipendono unicamente dalla simmetria del mezzo.

Se A e B sono entrambi vettoriali (dipendenza tra la corrente elettrica e la forza elettromotrice), la relazione tra i due fenomeni si esprime con il sistema di equazioni

$$\begin{cases} \rho_x &= \alpha_{11}\sigma_x + \alpha_{12}\sigma_y + \alpha_{13}\sigma_z \\ \rho_y &= \alpha_{21}\sigma_x + \alpha_{22}\sigma_y + \alpha_{23}\sigma_z \\ \rho_z &= \alpha_{31}\sigma_x + \alpha_{32}\sigma_y + \alpha_{33}\sigma_z \end{cases} \quad (1.89)$$

che si scrive con Hamilton e P. G. Tait e J. W. Gibbs

$$\vec{\rho} = \varphi \vec{\sigma}$$

---

<sup>1</sup>Questo paragrafo è stato aggiunto all'edizione francese (Nota del Traduttore).

dove  $\vec{\rho}$  rappresenta il fenomeno A,  $\vec{\sigma}$  il fenomeno B e  $\varphi$  un operatore lineare dipendente unicamente dal mezzo. Si dice che  $\vec{\rho}$  è una funzione vettoriale lineare di  $\vec{\sigma}$ ; l'operatore  $\varphi$  è detto da Gibbs una diade.

Se si considera il sistema

$$\begin{cases} \rho'_x &= \alpha_{11}\sigma_x + \alpha_{12}\sigma_y + \alpha_{13}\sigma_z \\ \rho'_y &= \alpha_{21}\sigma_x + \alpha_{22}\sigma_y + \alpha_{23}\sigma_z \\ \rho'_z &= \alpha_{31}\sigma_x + \alpha_{32}\sigma_y + \alpha_{33}\sigma_z \end{cases} \quad (1.90)$$

il vettore  $\vec{\rho}$  è detto la funzione vettoriale lineare coniugata di  $\rho$ . In certi casi, si stabilisce, da considerazioni termodinamiche (dipendenza tra il momento di un dielettrico e il campo elettrico) o in mancanza di ciò per via sperimentale, che

$$a_{1,2} = a_{2,1} \quad a_{31} = a_{13} \quad a_{23} = a_{32} \quad (1.91)$$

la funzione vettoriale lineare considerata è allora coniugata a se stessa. Supponiamo che nei fenomeni studiati sia così e consideriamo l'ellissoide

$$(\vec{\sigma} \varphi \vec{\rho}) = 1 \quad (1.92)$$

All'estremità del vettore  $\vec{\sigma}$  che rappresenta B, tracciamo il piano tangente a questo ellissoide. Il vettore  $\vec{\rho}$  che rappresenta A ha la stessa direzione della perpendicolare  $\vec{p}$  calata dal centro su detto piano tangente e la sua lunghezza è data dalla relazione

$$|\vec{\rho}| |\vec{p}| = 1 \quad (1.93)$$

Quando la dipendenza tra due fenomeni può essere così rappresentata da un ellissoide, questo deve possedere la simmetria del mezzo. Gli elementi di simmetria di qualsiasi ellissoide sono tre assi di rotazione binari rettangolari, un centro di simmetria e tre piani di simmetria perpendicolari agli assi. Un ellissoide non può avere un asse di ordine maggiore a due, a meno che non sia di rivoluzione attorno a tale asse; non può avere più di un asse di ordine maggiore a due, a meno che non sia una sfera. Per quanto riguarda i fenomeni fisici che stiamo attualmente considerando (un tipico esempio dei quali è la propagazione della luce), i cristalli possono essere successivamente suddivisi in cinque classi:

1. Nel sistema regolare l'ellissoide deve essere una sfera; il mezzo è isotropo.
2. Nei sistemi esagonale, quadratico e romboedrico, l'ellissoide deve essere una figura di rivoluzione il cui asse coincide con l'asse di simmetria senario, quaternario o ternario; tutti i cristalli in questi sistemi sono uniassiali per la luce.
3. Nel sistema ortorombico, tutti i cristalli sono biassiali e le direzioni degli assi principali dell'ellissoide rimangono le stesse per qualsiasi lunghezza d'onda.
4. Nel sistema clinorombico, uno degli assi dell'ellissoide deve coincidere con l'asse di simmetria o essere perpendicolare al piano di simmetria; tutti i cristalli di questo sistema sono biassiali rispetto alla luce e la direzione di uno degli assi principali dell'ellissoide è la stessa per qualsiasi lunghezza d'onda, le direzioni degli altri due assi generalmente variano con questa lunghezza d'onda.
5. Nel sistema triclinico non esiste una posizione con la quale un asse dell'ellissoide debba necessariamente coincidere; tutti i cristalli di questa classe sono biassiali rispetto alla luce e le direzioni di tutti gli assi dell'ellissoide variano con la lunghezza d'onda.

Diamo ora alcune indicazioni sui campi detti tensoriali seguendo una proposta di W. Voigt. Un fenomeno tensoriale è un fenomeno che si può rappresentare con la deformazione di un mezzo continuo. Si dice che un mezzo ha subito una deformazione quando i suoi punti, nel loro

cambiamento di posizione, non hanno subito uno spostamento d'insieme combinato o meno ad una trasformazione per simmetria. Siano  $x, y, z$  le coordinate primitive di un punto e

$$x_1 = x + u \quad y_1 = y + v \quad z_1 = z + w \quad (1.94)$$

cosa diventano dopo lo spostamento di questo punto. Le formule (55) definiscono una corrispondenza tra due spazi, l'uno posizione del punto  $(x, y, z)$ , l'altro posizione del punto  $(x_1, y_1, z_1)$ . Ma si può considerarle anche come formule che mettono in relazione spazio, posizione del punto  $(x_1, y_1, z_1)$ , a un sistema di coordinate curvilinee  $(x, y, z)$ . Si è così portati, per definire la deformazione, ad assumere funzioni di  $x, y, z$  che determinano in modo unico questo sistema di coordinate curvilinee e che sono determinate allo stesso modo da esso. Tali funzioni sono sia i sei coefficienti della forma differenziale quadratica che rappresenta il quadrato dell'elemento lineare del secondo spazio riferito al sistema di coordinate  $(x, y, z)$ , oppure opportune funzioni di questi sei coefficienti. Se

$$dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 = Adx^2 + Bdy^2 + Cdz^2 + 2Ddydz + 2Edzdx + 2Fdx dy \quad (1.95)$$

è il quadrato dell'elemento lineare del secondo spazio, questa espressione diventa identica al quadrato dell'elemento lineare del primo spazio, quando le funzioni  $A, B, C$  si riducono all'unità e le funzioni  $D, E, F$  si annullano. Si può quindi adottare, per definire la deformazione e di conseguenza un fenomeno tensoriale, le sei funzioni

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \\ \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \\ \varepsilon_3 = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] \\ \gamma_1 = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_2 = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \gamma_3 = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{cases} \quad (1.96)$$

e si deducono le seguenti:

$$\begin{cases} dx_1 = \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \\ dy_1 = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \left( 1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz \\ dz_1 = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \left( 1 + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dz \end{cases} \quad (1.97)$$

che risultano dalla differenziazione delle relazioni (55).

Rifacendosi, come abbiamo appena fatto, alla teoria delle coordinate curvilinee, le sei funzioni associate ad una deformazione, si arriva immediatamente alla seguente proposizione, che risulta dal lavoro di Lamé, Bonnet, Lipschitz e G. Darboux:

*Le sei funzioni determinate dalle formule (57) non possono essere prese arbitrariamente; esse verificano un sistema di equazioni alle derivate parziali del secondo ordine; ad ogni soluzione di questo sistema corrisponde una e una sola deformazione, e considerando come equivalenti due deformazioni che differiscono solo per uno spostamento d'insieme, combinato o meno con una trasformazione per simmetria.*

Consideriamo una porzione del mezzo indeformato che circonda un punto  $P(x, y, z)$ . Se questa porzione è sufficientemente piccola, le sei funzioni  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  che sono funzioni continue di  $x, y, z$ , manterranno, nei suoi diversi punti, sostanzialmente gli stessi valori, quelli che hanno nel punto  $P(x, y, z)$ . Siamo così portati a sostituire alla deformazione di una porzione del



mezzo circostante un punto  $P(x, y, z)$ , quando questa porzione è sufficientemente piccola, una deformazione che si dice con Lord Kelvin e Tait omogenea e che è definita dalle equazioni

$$\begin{cases} X_1 &= a_{10} + (1 + a_{11})X + a_{12}Y + a_{13}Z \\ Y_1 &= a_{20} + a_{21}X + (1 + a_{22})Y + a_{23}Z \\ Z_1 &= a_{30} + a_{31}X + a_{32}Y + (1 + a_{33})Z \end{cases} \quad (1.98)$$

dove  $X, Y, Z$  designano le coordinate di un punto  $Q$  nel mezzo indeformato rispetto al punto  $P$ , cioè rispetto a tre assi aventi la loro origine in  $P$  e paralleli agli assi coordinati, dove  $X_1, Y_1, Z_1$  indicano le coordinate della nuova posizione di  $Q$  rispetto agli stessi assi, e dove infine i coefficienti  $a_{ij}$ , che sono determinati contemporaneamente a  $x, y, z$ , sono dati dalle formule

$$\begin{cases} a_{10} = u & a_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} & a_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} & a_{13} = \frac{\partial u}{\partial z} \\ a_{20} = v & a_{21} = \frac{\partial v}{\partial x} & a_{22} = \frac{\partial v}{\partial y} & a_{23} = \frac{\partial v}{\partial z} \\ a_{30} = w & a_{31} = \frac{\partial w}{\partial x} & a_{32} = \frac{\partial w}{\partial y} & a_{33} = \frac{\partial w}{\partial z} \end{cases} \quad (1.99)$$

Esisterà generalmente un triedro con vertice  $P$ , che la deformazione omogenea precedente trasformerà in un triedro i cui spigoli saranno rispettivamente paralleli a quelli del primo; questo è ciò che mostrano le formule (59).

Esisterà anche un triedro trirettangolo con vertice  $P$ , che resterà trirettangolo quando gli verrà applicata la deformazione omogenea nel punto  $P$ ; è quanto stabilisce il noto ragionamento che ricorderemo.

Ad un ellissoide posto in uno dei due spazi, le formule (59) fanno corrispondere un nuovo ellissoide, e a tre diametri coniugati di uno degli ellissoidi corrispondono tre diametri coniugati dell'altro. In particolare, alla sfera del primo spazio, che è definita dall'equazione

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$$

le formule (59) fanno corrispondere ad un ellissoide  $\mathcal{E}_1$  che chiameremo con Cauchy il primo ellissoide di deformazione rispetto al punto  $P$ . Supponendo che questo ellissoide abbia assi disuguali, esiste uno e un solo sistema dei tre diametri rettangolari della sfera considerata che si trasforma per le (59) in tre rette rettangolari: questi sono i diametri che si trasformano negli assi dell'ellissoide  $\mathcal{E}_1$ . Allo stesso modo, alla sfera del secondo spazio, che è definita dall'equazione

$$(X_1 - a_{10})^2 + (Y_1 - a_{20})^2 + (Z_1 - a_{30})^2 = 1$$

corrisponde l'ellissoide  $\mathcal{E}$  definito dall'equazione

$$(1 + 2\varepsilon_1)X^2 + (1 + 2\varepsilon_2)Y^2 + (1 + 2\varepsilon_3)Z^2 + 2\gamma_1YZ + 2\gamma_2ZX + 2\gamma_3XY = 1$$

e che chiameremo con Lord Kelvin e Tait il secondo ellissoide di deformazione relativo al punto  $P$ . Gli assi corrispondono a tre diametri rettangolari della sfera corrispondente.

Si può, in vari modi, con una rotazione seguita dalla traslazione delle componenti  $a_{10}, a_{20}, a_{30}$ , applicare i tre assi dell'ellissoide  $\mathcal{E}$  sui corrispondenti assi dell'ellissoide  $\mathcal{E}_1$ . Tra queste rotazioni, si distingue quella per la quale i tre spigoli di un triedro formato con gli assi di  $\mathcal{E}$  si applicano infine ai tre spigoli che ad essi corrispondono per le (59) e che appartengono ad un triedro formato con gli assi di  $\mathcal{E}$ . Questa rotazione è quella che si chiama rotazione al punto  $P$  del mezzo.

Affinché quest'ultima rotazione sia nulla è necessario (ma questa condizione non è sufficiente, secondo quanto appena detto) che le direzioni degli assi del secondo ellissoide di deformazione siano anche quelle che la (59) lascia invariate. Come si vede subito, ciò equivale a dire che si ha

$$a_{23} = a_{32} \quad a_{31} = a_{13} \quad a_{12} = a_{21}$$

Se queste condizioni sono soddisfatte, si può semplicemente affermare che i due ellissoidi di deformazione hanno gli stessi assi. La corrispondente deformazione omogenea è ciò che Lord Kelvin e Tait hanno chiamato deformazione pura.

La definizione che abbiamo dato delle componenti della deformazione in un punto del mezzo dipende dagli assi coordinati. Se si considerano nuovi assi, si avranno sei nuove componenti che saranno funzioni di quelle vecchie e le cui espressioni sono facili da trovare.

Sia

	$x'$	$y'$	$z'$
$x$	$a$	$b$	$c$
$y$	$a'$	$b'$	$c'$
$z$	$a''$	$b''$	$c''$

la tavola di trasformazione che definisce i coseni direttori dei nuovi assi. Siano  $x', y', z'$  e  $x'_1, y'_1, z'_1$  le coordinate, per questi nuovi assi, dei punti  $(x, y, z)$  e  $(x_1, y_1, z_1)$ . Si ha

$$dx_1'^2 + dy_1'^2 + dz_1'^2 = dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 \\ = (1 + 2\varepsilon_1) dx^2 + (1 + 2\varepsilon_2) dy^2 + (1 + 2\varepsilon_3) dz^2 + 2\gamma_1 dydz + 2\gamma_2 dzdx + 2\gamma_3 dxdy$$

e

$$\begin{aligned} dx &= a dx' + b dy' + c dz' \\ dy &= a' dx' + b' dy' + c' dz' \\ dz &= a'' dx' + b'' dy' + c'' dz' \end{aligned}$$

di conseguenza

$$dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 = (1 + 2\varepsilon'_1) dx'^2 + (1 + 2\varepsilon'_2) dy'^2 + (1 + 2\varepsilon'_3) dz'^2 \\ + 2\gamma'_1 dy' dz' + 2\gamma'_2 dz' dx' + 2\gamma'_3 dx' dy'$$

ponendo

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon'_1 = \varepsilon_1 a^2 + \varepsilon_2 a'^2 + \varepsilon_3 a''^2 + \gamma_1 a' a'' + \gamma_2 a'' a + \gamma_3 a a' \\ \varepsilon'_2 = \varepsilon_1 b^2 + \varepsilon_2 b'^2 + \varepsilon_3 b''^2 + \gamma_1 b' b'' + \gamma_2 b'' b + \gamma_3 b b' \\ \varepsilon'_3 = \varepsilon_1 c^2 + \varepsilon_2 c'^2 + \varepsilon_3 c''^2 + \gamma_1 c' c'' + \gamma_2 c'' c + \gamma_3 c c' \\ \gamma'_1 = 2\varepsilon_1 bc + 2\varepsilon_2 b' c' + 2\varepsilon_3 b'' c'' + \gamma_1 (b' c'' + b'' c') + \gamma_2 (b'' c + b c'') + \gamma_3 (b c' + b' c) \\ \gamma'_2 = 2\varepsilon_1 ca + 2\varepsilon_2 c' a' + 2\varepsilon_3 c'' a'' + \gamma_1 (c' a'' + c'' a') + \gamma_2 (c'' a + c a'') + \gamma_3 (c a' + c' a) \\ \gamma'_3 = 2\varepsilon_1 ab + 2\varepsilon_2 a' b' + 2\varepsilon_3 a'' b'' + \gamma_1 (a' b'' + a'' b') + \gamma_2 (a'' b + a b'') + \gamma_3 (a b' + a' b) \end{array} \right. \quad (1.100)$$

Queste sono le formule cercate. Si può osservare che se si considera il secondo ellissoide di deformazione

$$(1 + 2\varepsilon_1) X^2 + (1 + 2\varepsilon_2) Y^2 + (1 + 2\varepsilon_3) Z^2 + 2\gamma_1 YZ + 2\gamma_2 ZX + 2\gamma_3 XY = 1$$

e se si sostituisce nella sua equazione  $X, Y, Z$  con

$$\begin{aligned} X &= aX' + bY' + cZ' \\ Y &= a'X' + b'Y' + c'Z' \\ dz &= a''X' + b''Y' + c''Z' \end{aligned}$$

la nuova equazione è

$$(1 + 2\varepsilon'_1) X'^2 + (1 + 2\varepsilon'_2) Y'^2 + (1 + 2\varepsilon'_3) Z'^2 + 2\gamma'_1 Y' Z' + 2\gamma'_2 Z' X' + 2\gamma'_3 X' Y' = 1$$

Ne deriva che le espressioni

$$\begin{aligned} & \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \\ & \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 - 4(\varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2) \\ & 4\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 + \gamma_1\gamma_2\gamma_3 - \varepsilon_1\gamma_1^2 - \varepsilon_2\gamma_2^2 - \varepsilon_3\gamma_3^2 \end{aligned}$$

rimangano invariate per una trasformazione delle coordinate.

Va qui ricordato che le formule (60) sono alla base della teoria dei tensori e dei tripli tensori che W. Voigt (1898) ha proposto di modellare sulla teoria dei vettori.

Abbiamo già introdotto nel Volume I la nozione di deformazione infinitamente piccola di un mezzo continuo. Consideriamo un mezzo le cui diverse posizioni sono definite come segue. Nelle formule

$$x_1 = x + \mathbf{u} \quad y_1 = y + \mathbf{v} \quad z_1 = z + \mathbf{w}$$

che danno le coordinate  $x_1, y_1, z_1$  della nuova posizione del punto  $(x, y, z)$ , le quantità  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$  sono funzioni di  $x, y, z$  e di una nuova variabile  $t$ ; assumeremo che il mezzo proposto corrisponda, ad esempio, al valore zero del parametro  $t$ .

Quando  $t$  sarà infinitamente piccolo, le quantità variabili con la deformazione, come, ad esempio, le sei funzioni  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  differiranno dai loro valori iniziali per quantità infinitamente piccole. Lo studio della parte principale di tali infinitamente piccoli costituisce ciò che dobbiamo intendere per studio della deformazione infinitamente piccola del mezzo considerato.

Supponiamo che le funzioni  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ , della variabile  $t$  così come di  $x, y, z$ , possano essere sviluppate secondo le potenze intere positive di  $t$ ; poiché  $u, v, w$  devono rispettivamente ridursi a zero per  $t = 0$ , avremo

$$\begin{cases} \mathbf{u} = u + u_1 + u_2 + \dots \\ \mathbf{v} = v + v_1 + v_2 + \dots \\ \mathbf{w} = w + w_1 + w_2 + \dots \end{cases} \quad (1.101)$$

designando con  $u, v, w$  i termini di questi sviluppi che contengono  $t$  in fattore, e generalmente con  $u_n, v_n, w_n$  quelli che contengono  $t^{n+1}$  in fattori. Avremo con queste notazioni

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial x} + \dots & \gamma_1 &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} + \dots \\ \varepsilon_2 &= \frac{\partial v}{\partial y} + \dots & \gamma_2 &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} + \dots \\ \varepsilon_3 &= \frac{\partial w}{\partial z} + \dots & \gamma_3 &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \dots \end{aligned}$$

si vede che quando  $t$  è sufficientemente piccolo, le sei componenti della deformazione in un punto hanno come valori le espressioni

$$\begin{cases} e_1 = \frac{\partial u}{\partial x} & e_2 = \frac{\partial v}{\partial y} & e_3 = \frac{\partial w}{\partial z} \\ g_1 = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} & g_2 = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} & g_3 = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \end{cases} \quad (1.102)$$

Abbiamo sottolineato che sei funzioni qualsiasi di  $x, y, z$  non possono rappresentare la deformazione di un mezzo continuo; devono verificare un sistema di equazioni alle derivate parziali che rappresenti la condizione necessaria e sufficiente perché le equazioni (57), dove si considerano  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  come funzioni date, determinino le incognite  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ . Allo stesso modo le sei funzioni  $e_1, e_2, e_3, g_1, g_2, g_3$  associate a una deformazione infinitamente piccola soddisfano un sistema di equazioni, dato per la prima volta da Barré de Saint-Venant.

Nel seguito ci limiteremo alla deformazione infinitamente piccola. Partendo dall'espressione dell'energia di deformazione relativa all'unità di volume, che è una forma quadratica delle sei

funzioni  $e_1, e_2, e_3, g_1g_2, g_3$  che si può scrivere:

$$\begin{aligned}
2W = & c_{11}e_1^2 + 2c_{12}e_1e_2 + 2c_{13}e_1e_3 + 2c_{14}e_1g_1 + 2c_{15}e_1g_2 + 2c_{16}e_1g_3 \\
& + c_{22}e_2^2 + 2c_{23}e_2e_3 + 2c_{24}e_2g_1 + 2c_{25}e_2g_2 + 2c_{26}e_2g_3 \\
& + c_{33}e_3^2 + \dots\dots\dots \\
& + \dots\dots\dots \\
& + \dots\dots\dots \\
& + c_{66}g_3^2
\end{aligned} \tag{1.103}$$

Lord Kelvin, con il metodo indicato nel Volume I, ha introdotto la nozione di sforzo di un punto del mezzo, le cui sei componenti sono

$$N_1 = \frac{\partial W}{\partial e_1} \quad N_2 = \frac{\partial W}{\partial e_2} \quad N_3 = \frac{\partial W}{\partial e_3} \quad T_1 = \frac{\partial W}{\partial g_1} \quad T_2 = \frac{\partial W}{\partial g_2} \quad T_3 = \frac{\partial W}{\partial g_3}$$

Consideriamo lo sforzo  $(N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3)$  come il fenomeno tensoriale  $A$  e la deformazione  $e_1, e_2, e_3, g_1g_2, g_3$  come il fenomeno tensoriale  $B$ . Saremo condotti, dalle seguenti considerazioni dovute a C. Sonigliana (1894), ad una classificazione dei mezzi dotati di simmetria, che ci permetterà, senza ricorrere alle considerazioni molecolari delle cristallografia, di dedurre la legge di razionalità degli indici dal semplice fatto che l'energia di deformazione è una forma quadratica delle componenti della deformazione.

Per determinare la simmetria di un mezzo, dobbiamo cercare il gruppo di trasformazioni di coordinate che lascia invariata l'espressione dell'energia di deformazione. Sia  $G$  questo gruppo; si può sempre supporre che comprenda solo rotazioni, poiché una simmetria  $I$  rispetto all'origine delle coordinate lascia invariata la forma quadratica  $W$  qualunque siano i suoi coefficienti e  $G$  contenente sempre una simmetria  $I$ , è possibile sostituire con rotazioni tutte le simmetrie  $\Pi$  rispetto a piani passanti per l'origine (il prodotto di una simmetria  $\Pi$  per una simmetria  $I$  è infatti una rotazione di  $\pi$  attorno ad un determinato asse). Introduciamo un'altra definizione; diremo che due assi di simmetria sono equivalenti, quando esiste una trasformazione di  $G$  che permuta questi due assi.

Detto questo, proponiamoci di scegliere i coefficienti  $c_{ij}$  di  $W$  tali che sia invariante rispetto ad una rotazione di determinata ampiezza attorno ad un dato asse. Si prende  $Oz$  come asse di rotazione e sia  $2\pi/n$  l'ampiezza di questa rotazione; nella tabella dei coseni, si avrà

$$\begin{array}{lll}
a = \cos \frac{2\pi}{n} & b = -\sin \frac{2\pi}{n} & c = 0 \\
a' = \cos \frac{2\pi}{n} & b' = \cos \frac{2\pi}{n} & c' = 0 \\
a'' = 0 & b'' = 0 & c'' = 1
\end{array}$$

e di conseguenza le formule analoghe alle (60) e relative alla deformazione infinitamente piccola daranno

$$\left\{ \begin{array}{l}
e_1 = e'_1 \cos^2 \frac{2\pi}{n} + e'_2 \sin^2 \frac{2\pi}{n} - g'_3 \cos \frac{2\pi}{n} \sin \frac{2\pi}{n} \\
e_2 = e'_1 \sin^2 \frac{2\pi}{n} + e'_2 \cos^2 \frac{2\pi}{n} - g'_3 \cos \frac{2\pi}{n} \sin \frac{2\pi}{n} \\
e_3 = e'_3 \\
g_1 = g'_1 \cos \frac{2\pi}{n} + g'_2 \sin \frac{2\pi}{n} \\
g_2 = -g'_1 \sin \frac{2\pi}{n} + g'_2 \cos \frac{2\pi}{n} \\
g_3 = 2(e'_1 - e'_2) \cos \frac{2\pi}{n} \sin \frac{2\pi}{n} + 2g'_3 \left( \cos^2 \frac{2\pi}{n} - \sin^2 \frac{2\pi}{n} \right)
\end{array} \right. \tag{1.104}$$

Scrivendo poi che la forma quadratica  $W$  è invariante per la trasformazione (64), si otterranno tra i coefficienti  $c_{ij}$  relazioni da cui risulterà la particolare forma cercata per l'espressione dell'energia di deformazione. C. Somigliana ottiene così i seguenti risultati:

Se  $n$  è diverso da 2, 3, 4, l'energia  $W$  rimane invariante per una rotazione dell'asse  $Oz$  e di qualsiasi ampiezza; si dice allora che  $Oz$  è un asse di isotropia e  $W$  è della forma

$$\begin{aligned} 2W &= c_{11}e_1^2 + 2c_{12}e_1e_2 + 2c_{13}e_1e_3 \\ &\quad + c_{11}e_2^2 + 2c_{13}e_2e_3 \\ &\quad + c_{33}e_3^2 \\ &\quad + c_{44}g_1^2 \\ &\quad + c_{44}g_2^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}(c_{11} - c_{22})g_3^2 \end{aligned}$$

$[A_3]$   
(5 costanti)

Se  $n = 2, 3, 4$ , si dice che  $Oz$  è un asse di ordine  $n$ ;  $W$  assume allora una delle forme seguenti (nelle quali  $[A_z^n]$  indica che  $Oz$  è un asse di ordine  $n$ ):

$$\begin{aligned} 2W &= c_{11}e_1^2 + 2c_{12}e_1e_2 + 2c_{13}e_1e_3 && + 2c_{16}e_1g_3 \\ &\quad + c_{22}e_2^2 + 2c_{13}e_2e_3 && + 2c_{26}e_2g_2 \\ &\quad + c_{33}e_3^2 \\ &\quad + c_{44}g_1^2 + 2c_{45}g_1g_2 \\ &\quad + c_{55}g_2^2 \\ &\quad + c_{66}g_3^2 \end{aligned}$$

$[A_z^2]$   
(13 costanti)

$$\begin{aligned} 2W &= c_{11}e_1^2 + 2c_{12}e_1e_2 + 2c_{13}e_1e_3 + 2c_{14}e_1g_1 + 2c_{15}e_1g_2 \\ &\quad + c_{22}e_2^2 + 2c_{13}e_2e_3 - 2c_{14}e_2g_1 - 2c_{15}e_2g_2 \\ &\quad + c_{33}e_3^2 \\ &\quad + c_{44}g_1^2 + && - 2c_{15}g_1g_2 \\ &\quad && + c_{44}g_2^2 + 2c_{14}g_2g_3 \\ &\quad && + \frac{1}{2}(c_{11} - c_{13})g_3^2 \end{aligned}$$

$[A_z^3]$   
(7 costanti)

$$\begin{aligned} 2W &= c_{11}e_1^2 + 2c_{12}e_1e_2 + 2c_{13}e_1e_3 && + 2c_{16}e_1g_3 \\ &\quad + c_{11}e_2^2 + 2c_{13}e_2e_3 && - 2c_{15}e_2g_3 \\ &\quad + c_{33}e_3^2 \\ &\quad + c_{44}g_1^2 + \\ &\quad + c_{44}g_2^2 \\ &\quad + c_{66}g_3^2 \end{aligned}$$

$[A_z^4]$   
(7 costanti)

Supponiamo ora che ci siano due assi di simmetria; le rotazioni corrispondenti costituiranno la base di un gruppo  $\Gamma$ . Si trova allora facilmente che, se  $\Gamma$  comprende solo rotazioni attorno ad assi di ordine 2, 3, 4,  $W$  ha necessariamente una delle seguenti forme (in cui  $A_x^n$  e  $A_y^n$  indicano che  $Ox$  e  $Oy$  sono assi di ordine  $n$ ):

$$\begin{aligned} 2W &= c_{11}e_1^2 + 2c_{12}e_1e_2 + 2c_{13}e_1e_2 \\ &\quad + c_{22}e_2^2 + 2c_{23}e_2e_3 \\ &\quad + c_{33}e_3^2 \\ &\quad + c_{44}g_1^2 + \\ &\quad + c_{55}g_2^2 \\ &\quad + c_{66}g_3^2 \end{aligned}$$

$[A_z^2A_x^2]$   
(9 costanti)

$$\begin{aligned} 2W &= c_{11}e_1^2 + 2c_{12}e_1e_2 + 2c_{13}e_1e_2 + 2c_{14}e_1g_1 \\ &\quad + c_{11}e_2^2 + 2c_{13}e_2e_3 - 2c_{14}e_2g_1 \\ &\quad + c_{33}e_3^2 \\ &\quad + c_{44}g_1^2 + \\ &\quad + c_{44}g_2^2 + 2c_{14}g_2g_3 \\ &\quad + \frac{1}{2}(c_{11} - c_{13})g_3^2 \end{aligned}$$

$[A_z^3A_x^2]$   
(6 costanti)

$$\begin{aligned}
2W &= c_{11}e_1^2 + 2c_{12}e_1e_2 + 2c_{13}e_1e_3 \\
&\quad + c_{11}e_2^2 + 2c_{13}e_2e_3 \\
&\quad + c_{33}e_3^2 \\
&\quad + c_{44}g_1^2 + \\
&\quad + c_{55}g_2^2 \\
&\quad + c_{61}g_3^2
\end{aligned}$$

$[A_z^4 A_x^2]$   
(6 costanti)

$$\begin{aligned}
2W &= c_{11}e_1^2 + 2c_{12}e_1e_2 + 2c_{13}e_1e_3 \\
&\quad + c_{11}e_2^2 + 2c_{12}e_2e_3 \\
&\quad + c_{11}e_3^2 \\
&\quad + c_{44}g_1^2 + \\
&\quad + c_{44}g_2^2 \\
&\quad + c_{41}g_3^2
\end{aligned}$$

$A_z^4 A_x^4$   
(3 costanti)

In quest'ultimo caso esistono tre assi equivalenti  $A_x^2, A_y^2, A_z^2$ .

Infine, se esistono due assi di cui il primo è di isotropia, oppure il secondo è di ordine 2 perpendicolare al primo, e allora  $W$  ha la forma  $[A_z]$ , oppure tutte le rette uscenti da  $O$  sono assi di isotropia. Il mezzo si dice isotropo e  $G$  coincide con l'insieme delle rotazioni attorno a tutti gli assi provenienti da  $O$ ; l'espressione dell'energia di deformazione ha la forma più ridotta assumibile:

$$\begin{aligned}
2W &= c_{11}e_1^2 + 2c_{12}e_1e_2 + 2c_{13}e_1e_3 \\
&\quad + c_{11}e_2^2 + 2c_{12}e_2e_3 \\
&\quad + c_{11}e_3^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})g_1^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})g_2^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}(c_{11} - c_{13})g_3^2
\end{aligned}$$

$[A]$   
(2 costanti)

Se il mezzo deformabile che abbiamo appena considerato ha proprietà di simmetria nel senso definito, l'energia di deformazione ha necessariamente una delle dieci forme ridotte sopra riportate, che non sono diverse da quella dell'isotropia uniassiale, ovvero completa solo per  $n = 2, 3, 4$ . Si nota che queste forme coincidono con quelle assegnate da Minnigerode, W. Voigt, Liebisch, Love alle dieci classi cristalline che si ottengono eliminando nei 32 gruppi conosciuti le suddivisioni basate sull'esistenza di un centro di simmetria, che qui sono indifferenti. Ecco l'elenco di queste dieci classi, con l'indicazione delle 32 classi di Schoenflies che ad esse corrispondono:

		Classificazione di Schoenflies
1. Sistema triclinico	(forma generale di $W$ )	1, 2
2. Sistema clinorombico	$[A_z^2]$	3, 4, 5
3. Sistema romboedrico	$[A_z^3]$	12, 13
4. Sistema quadratico	$[A_z^4]$	17, 18, 20
5. Sistema ortorombico	$[A_z^2 A_x^2]$	6, 7, 8
6. Sistema romboedrico	$[A_z^3 A_x^2]$	9, 10, 11
7. Sistema quadratico	$[A_z^4 A_x^2]$	14, 15, 16, 19
8. Sistema esagonale	$[A_z]$ e $[A_z A_x^2]$	21 a 27
9. Sistema regolare	$[A_z^4 A_x^4]$	28, 29, 30
10. Sistema cubico	$[A]$	31, 32

La legge di razionalità degli indici, che si può esprimere come segue: ogni asse di simmetria cristallina è un asse di isotropia o un asse di ordine. 2, 3, 4 o 6 (un asse di simmetria cristallografica di ordine 6 essendo un asse di isotropia dal punto di vista della deformazione di un mezzo

continuo), è quindi dedotto, senza alcuna ipotesi molecolare, dai principi della teoria di corpi deformabili. R. Garnier (1913) ha recentemente ripreso la dimostrazione di C. Somigliana dandole una forma geometrica molto intuitiva.

## 5. Nozioni preliminari sui fenomeni radioattivi

Dedicheremo poi un capitolo speciale ai fenomeni radioattivi; ma, anche alcune nozioni su questi fenomeni ci verranno date via via; elencheremo qui, senza entrare nei dettagli, i fatti e le idee essenziali che sono alla base dell'attuale teoria della radioattività. Questi fatti e queste idee sono in strettissima relazione con la teoria elettronica che abbiamo già brevemente caratterizzato all'inizio del Volume IV e ci basterà aggiungere qualche indicazione a quanto abbiamo detto in precedenza.

L'*elettrone* rappresenta, in un certo senso, un atomo di elettricità negativa, cioè la quantità elementare di questa elettricità, la più piccola e apparentemente indivisibile. La sua carica è di circa

$$e = 4,9 \cdot 10^{-10} \text{ unità el. st. C.G.S.} \quad (1.105)$$

di quantità di energia elettrica o  $1,6 \cdot 10^{-10}$  coulomb.

Non si è ancora riusciti a farsi una visione molto chiara dell'elettricità positiva, come substrato indipendente. Quando si ha a che fare con un'elettricità positiva, si può sempre supporre che sia costituita da una perdita di uno o più elettroni negativi. Non sembra dubbio che l'atomo materiale contenga un certo numero di elettroni ed è stata avanzata l'ipotesi che l'azione esterna di questi ultimi sia compensata da quella del nucleo dell'atomo, costituito da elettricità positiva; gli elettroni si muoverebbero attorno a questo nucleo o al suo interno. Quando all'interno di un corpo esistono elettroni liberi o quando agli atomi materiali si aggiungono altri elettroni, oltre a quelli che già possiedono allo stato neutro, la sostanza considerata appare elettrizzata negativamente; se gli atomi hanno invece perso uno o più elettroni, il corpo manifesta le proprietà attribuite all'elettrizzazione positiva. Finora (1913) non si è ancora stabilita con certezza l'esistenza di elettroni positivi liberi.

Quando una corrente elettrica ad alta tensione viene fatta passare attraverso un tubo munito di elettrodi metallici e contenente un gas estremamente rarefatto, dal catodo fuoriesce un flusso rettilineo di elettroni, che costituisce i cosiddetti *raggi catodici*; tali raggi possono, come vedremo, essere ottenuti anche con altri mezzi, ad esempio illuminando superfici metalliche nel vuoto con radiazioni ultraviolette. La velocità dei raggi catodici dipende dalle circostanze in cui vengono prodotti e varia tra  $0,025c$  e  $0,3c$  o più, dove  $c$  indica la velocità della luce. I raggi lenti o molli, come vengono talvolta chiamati, vengono deviati dal campo magnetico in modo più forte rispetto ai raggi veloci o duri. Nel bombardamento della superficie di un corpo solido da parte dei raggi catodici si formano raggi Röntgen che non vengono affatto deviati dal campo magnetico.

Nello stesso tubo dove compaiono i raggi catodici, in determinate circostanze può sorgere anche un altro tipo di raggi, i *raggi canale*. Questi ultimi sono costituiti da un flusso di particelle materiali elettrizzate positivamente. I raggi canale vengono deviati dal campo magnetico molto più debolmente dei raggi catodici.

Passiamo ora ai fenomeni radioattivi. Prima della scoperta della radioattività, gli atomi materiali erano considerati invarianti rispetto a tutte le modificazioni fisiche o chimiche; ma, alla fine del secolo scorso, furono trovati elementi i cui atomi manifestavano una scomposizione spontanea; questo fatto ha portato ad attribuire all'atomo una struttura interna molto complessa.

Tali elementi sono chiamati radioattivi; l'uranio e il torio sono conosciuti da molto tempo; tra quelli scoperti di recente si possono citare il radio, il polonio, l'attinio, oltre a un gran numero di altre sostanze di cui parleremo più avanti. I fenomeni manifestati dalle sostanze radioattive si osservano con particolare chiarezza nei composti del radio, il che ha portato all'adozione della terminologia oggi utilizzata. Faremo ora notare che tutti i composti chimici di uno stesso

elemento radioattivo hanno le stesse proprietà radioattive, sia per quanto riguarda l'intensità, sia da un punto di vista puramente qualitativo, per cui tali proprietà dipendono solo dalla quantità di elemento radioattivo contenuto in un dato elemento radioattivo composto.

Le sostanze radioattive danno luogo ad una serie di fenomeni che indicheremo brevemente.

L'aria e altri gas, quando si trovano in prossimità di sostanze radioattive, subiscono la ionizzazione; in altre parole, lì nascono ioni liberi positivi e negativi, così che il gas diventa conduttore di elettricità. Quando una sostanza radioattiva viene avvicinata ad un corpo elettrizzato, ad esempio un elettroscopio, quest'ultimo perde rapidamente la sua carica.

Le sostanze radioattive agiscono sulle lastre fotosensibili (lastre fotografiche); inoltre provocano la luminosità dei corpi fluorescenti. Spesso queste due azioni si manifestano ancora, anche quando si interpone tra la sostanza radioattiva e il corpo sensibile o fluorescente un foglio di carta, un foglio di legno e perfino una lastra di metallo, il cui spessore deve però, in ogni caso particolare, non superare un determinato limite.

Ma il fenomeno più essenziale è l'*emissione*, da parte di sostanze radioattive, di diversi tipi di raggi, ed è qui che risiede la causa della ionizzazione, della fluorescenza e dell'azione fotogenica. Distinguiamo innanzitutto quattro tipi di raggi, che chiamiamo raggi  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  e  $\delta$ . Il radio emette questi quattro tipi di raggi, ma la maggior parte delle altre sostanze radioattive emettono solo una o due specie di raggi. Sembra inoltre che il radio emetta solo raggi  $\alpha$ ,  $\beta$ , i raggi  $\gamma$  e  $\delta$  possono essere considerati come raggi secondari prodotti dai raggi  $\alpha$ ,  $\beta$ , così come i raggi Röntgen derivano dai raggi catodici.

I raggi  $\alpha$  rappresentano un flusso di atomi di *elio*, ciascuno dei quali porta una carica elettrica positiva pari a  $2e$  in valore assoluto; si può intendere da ciò che ogni atomo ha perso due elettroni negativi. Il peso atomico dell'elio è pari a 4. I raggi  $\alpha$  ricordano per il loro carattere i raggi canale, ma la loro velocità, che varia tra  $c/30$  e  $c/15$  (essendo  $c$  la velocità della luce), è molto maggiore della velocità ordinaria dei raggi canale. I gas e i corpi allo stato solido assorbono fortemente i raggi  $\alpha$ . Lastre di vetro o di mica dello spessore di  $0,1\text{ mm}$  non ne lasciano passare quasi nessuno; una lastra di alluminio di  $0,0034\text{ mm}$  trattiene già circa la metà di questi raggi. La loro azione fotogenica è debole, ma la loro azione ionizzante è molto forte. Il campo magnetico e il campo elettrico li deviano relativamente poco e in una direzione che corrisponde a un flusso di elettricità positiva.

I raggi  $\beta$  formano un flusso di elettroni liberi e sono quindi del tutto analoghi ai raggi catodici; ma la loro velocità è considerevole e varia da  $0,5c$  a  $0,97c$ , cioè raggiunge talvolta quasi la velocità della luce. I raggi  $\beta$  attraversano uno strato d'aria spesso  $30\text{ cm}$ , la mica, ecc.; una lamina di alluminio spessa  $0,5\text{ mm}$  lascia passare circa il 50% di questi raggi. Il campo magnetico li devia più fortemente dei raggi  $\alpha$  e nel verso opposto. Esercitano una debole azione ionizzante, una fortissima azione fluorescente ed anche un'intensa azione fotogenica.

I raggi  $\gamma$  sono molto simili, nelle loro proprietà, ai raggi Röntgen, ma hanno un potere di penetrazione maggiore. Attraversano un foglio di Pb o Fe spesso diversi centimetri, nonché un foglio di Al spesso  $70\text{ mm}$ . Esercitano un'intensa azione fluorescente, ma producono una debole ionizzazione e hanno solo una piccola azione fotogenica. È molto probabile che derivano dai raggi  $\beta$  emessi dalle particelle interne della sostanza radioattiva, a una certa distanza dalla sua superficie. Sui raggi  $\gamma$  non hanno alcuna azione percepibile il campo magnetico e il campo elettrico.

I raggi  $\delta$  si distinguono dai raggi  $\beta$  solo per una velocità minore, pari a circa  $0,01c$ . Corrispondono ai raggi catodici molli; sono fortemente deviati dal campo magnetico. È possibile che i raggi  $\delta$  siano anche raggi secondari, prodotti dai raggi  $\alpha$ .

L'emissione di raggi accompagna, come già detto, la scomposizione degli atomi della sostanza radioattiva. La velocità di questa scomposizione è del tutto indipendente dalla natura del composto chimico in cui entra l'elemento radioattivo; né dipende da circostanze fisiche, ad esempio la temperatura. Quando un elemento radioattivo emette raggi  $\alpha$ , cioè atomi di elio, da



questo elemento si forma una nuova sostanza, il cui peso atomico è 4 unità inferiore ( $He = 4$ ) a quello dell'elemento iniziale. Il peso atomico del radio è 226,4; durante l'emissione dei raggi  $\alpha$ , il radio si trasforma in una sostanza chiamata emanazione del radio. È un corpo allo stato gassoso, che possiede tutte le proprietà dei gas ordinari. L'emanazione del radio segue la legge di Boyle-Mariotte e si liquefa a  $-150^\circ$ . Ramsay e Gray (1911). hanno determinato il peso di 0,0730 g di questo gas con una microbilancia che ha permesso di osservare un variazione di peso di  $3 \cdot 10^{-6}$  g (la variazione della pressione dell'aria è di 0,1 mm di colonna di mercurio); trovarono  $710 \cdot 10^{-6}$  g, da cui si deduce per il peso atomico dell'emanazione del radio  $\gamma$  (chiamato anche niton da Ramsay) il numero 223, in realtà molto vicino alla differenza tra il peso atomico del radio (226,4) e quella dell'elio (4). Anche l'emanazione del radio emette raggi  $\alpha$ , trasformandosi in una nuova sostanza, il radio A. Designeremo con  $T$  il tempo durante il quale si scompone la metà della quantità di sostanza radioattiva; questo tempo è detto il *periodo*. Per il radio,  $T = 1900$  anni; per l'emanazione del radio,  $T = 3,8$  giorni; infine per il radio A,  $T = 3$  minuti. Si formano anche il radio B ( $T = 26,7$  minuti), il radio C ( $T = 19,5$  minuti), il radio D ( $T = 40$  anni), il radio E ( $T = 5,6$  giorni); probabilmente esistono ancora le sostanze  $E_1$ , ed  $E_2$  e il radio F (polonio,  $T = 143$  giorni). Il radio B e il radio E emettono solo raggi  $\beta$ , il radio C emette raggi  $\alpha, \beta, \gamma$ .

La sostanza che dà origine al radio e ai suoi prodotti di scomposizione è probabilmente l'uranio (è dell'ordine di  $10^9$  anni); Da questo si forma prima l'uranio X ( $T = 22$  giorni), poi lo ionio ed infine il radio.

Il torio e l'attinio danno origine a generazioni simili di sostanze radioattive; abbiamo, per l'emanazione gassosa del torio,  $T = 54$  secondi, per quella dell'attinio, anch'esso gassoso,  $T = 3,9$  secondi.

La scomposizione delle sostanze radioattive è accompagnata da un rilascio molto considerevole di energia termica, tanto che la temperatura di tali sostanze è sempre superiore a quella dell'ambiente circostante. Un grammo-atomo (226,4 g) di radio libera, nella sua completa scomposizione,  $142 \cdot 10^6$  cal. kg. È molto probabile che tutte le sostanze siano radioattive; ma la scomposizione dei loro atomi avviene con una tale lentezza che il loro periodo  $T$  è colossalmente grande, anche rispetto a quello dell'uranio.



## 2 Cap. II - INDUZIONE<sup>1</sup>

### 1. Il fenomeno dell'induzione

Consideriamo un filo posto in un campo magnetico. Quando, per una causa qualunque, il numero di linee di induzione magnetica che attraversano la superficie delimitata da questo filo cambia, cambiamento, si genera una corrente nel filo. Tale corrente è chiamata corrente *indotta*. Essa cessa non appena scompare la causa che l'ha prodotta, cioè non appena il numero delle linee di induzione magnetica che passano all'interno della sua linea di percorso non varia più.

Questo fenomeno fu scoperto da Faraday nel 1831. Egli è stato condotto a questa scoperta ragionando nel modo seguente: una carica elettrica produce, nei conduttori vicini, la comparsa di cariche indotte; si può immaginare la corrente elettrica come un flusso di cariche elettriche; una carica in movimento deve produrre le cariche da essa indotte nei conduttori vicini (induzione galvanica o voltaica).

I tentativi di osservare una corrente duratura di questo tipo in conduttori posti in prossimità del conduttore percorso dalla corrente non hanno avuto successo; ma Faraday è riuscito a constatare la comparsa di una corrente di breve durata in un conduttore, vicino al quale si trovava un altro conduttore percorso da una corrente di intensità variabile.

Questo primo esperimento fu effettuato nel modo seguente. Su un cilindro di legno venivano avvolte successivamente due bobine di filo isolate l'una dall'altra. Una di esse era collegata ad una batteria, l'altra ad un galvanometro. Nel momento in cui la corrente veniva avviata o interrotta nella prima bobina, l'ago del galvanometro collegato alla seconda bobina mostrava deviazioni di breve durata.

Il fenomeno venne notevolmente rafforzato montando le spire non più su un cilindro di legno, ma su un anello di ferro dolce (fig. 5). Questa circostanza portò Faraday a considerare il fenomeno come esclusivamente di natura magnetica e riuscì effettivamente a dimostrare con esperimenti successivi che in una bobina si produce una corrente indotta, ogni volta che varia il numero di linee magnetiche che la attraversano, sia per una corrente o qualsiasi altra causa (induzione elettromagnetica).



Faraday, che credeva alla realtà delle linee di induzione magnetica, ammetteva che il fenomeno dell'induzione avviene nel momento in cui una linea magnetica viene tagliata dal conduttore. La figura 6 illustra il corrispondente esperimento di Faraday. Tra i due poli di un magnete, in un piano perpendicolare alla linea che congiunge i poli, ruota un disco di rame. Nella rotazione, la parte superiore del disco interseca le linee di induzione magnetica. Nel disco si genera allora una forza elettromotrice, la cui direzione, come vedremo più avanti, è radiale. A seconda del verso di

<sup>1</sup>Questo capitolo è stato scritto da A. A. Dobiasch

rotazione, questa forza elettromotrice è diretta dal centro verso il contorno del disco o viceversa. Due fili, che toccano il disco rotante per mezzo di due contatti striscianti, uno sull'asse e l'altro nel punto più alto del contorno, conducono la corrente indotta ad un galvanometro. Questo straordinario dispositivo costituisce il prototipo della moderna dinamo.

Per la spiegazione di questa esperienza, ci si deve riferire a quanto detto nel Libro II, cap. III, § 9. Non si possono osservare correnti aperte; ogni corrente è realmente una corrente chiusa. Ciò è evidente per quanto riguarda le correnti costanti, di cui si è parlato nel Libro II; ma anche le correnti di breve durata, che si manifestano nei fenomeni di induzione, sono correnti chiuse. Ciò costituisce una delle proposizioni fondamentali della teoria di Maxwell, come vedremo nel capitolo successivo. Nel caso in cui un impulso elettrico di breve durata si propaga lungo un conduttore aperto, si creano nello spazio circostante particolari correnti di spostamento, equivalenti alle correnti ordinarie e che integrano l'impulso dato nella trasformazione in una corrente completa e chiusa. Ad esempio, quando le armature di una bottiglia di Leida carica sono collegate da un filo, una normale corrente di conduzione passa attraverso il filo di collegamento, la bottiglia si scarica e la tensione elettrostatica nello strato isolante della bottiglia si indebolisce. Questo processo di indebolimento della tensione si presenta come la *corrente di spostamento*, che integra la corrente di conduzione per renderla una corrente completa e chiusa. Non possiamo quindi osservare una corrente aperta e di conseguenza interpretazioni simili a quella data nel Libro II non sono verificabili. Tuttavia, partendo dalle idee di Faraday, si arriva a leggi integrali esatte e le utilizzeremo spesso nel seguito.

Esperimenti effettuati con fili flessibili, i cui elementi possono subire movimenti nel campo magnetico, hanno mostrato che quando un conduttore deformabile taglia le linee magnetiche, si crea una corrente indotta; ma, quando i movimenti degli elementi del conduttore sono paralleli a queste linee, non si produce corrente. Di conseguenza, quando un conduttore si muove in un campo magnetico e la direzione del suo movimento in un punto forma un certo angolo con quella del campo, conta solo la componente di questo movimento perpendicolare alla direzione del campo. L'intensità della corrente indotta è proporzionale al numero di linee magnetiche tagliate al secondo. Nell'esperimento a cui si riferisce la figura 6, l'intensità della corrente indotta è notevolmente proporzionale alla velocità di rotazione del disco.

## 2. Regole per determinare la direzione della forza elettromotrice di induzione

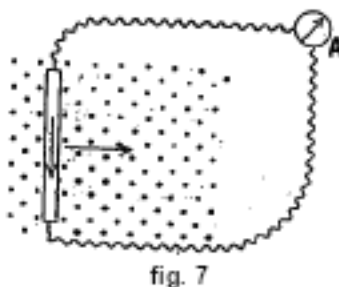
Secondo quanto sopra, una forza elettromotrice ha origine in un conduttore che taglia le linee di induzione magnetica; di conseguenza le tre rispettive direzioni del campo magnetico, del movimento e della forza elettromotrice, devono essere perpendicolari tra loro, come gli assi di un sistema di coordinate rettangolari. Tra le tante regole mnemoniche che si utilizzano per ricordare la direzione della forza elettromotrice, citeremo solo la *regola della mano destra*, che corrisponde alla regola della mano sinistra indicata nel Libro II, Cap. III, §8. Essa afferma che: quando il pollice, l'indice e il medio della mano destra formano tra loro un angolo retto e l'indice ha la direzione del campo magnetico, il pollice quella del movimento, il medio indica la direzione della forza elettromotrice. La figura 7 mostra la posizione corrispondente dei vettori rappresentativi di queste tre grandezze. I punti rappresentano le tracce delle linee di forza magnetica, perpendicolari al piano della figura e dirette verso il lettore; il conduttore si muove trasversalmente al campo da sinistra a destra e lì si sviluppa una forza elettromotrice diretta dall'alto verso il basso. Si osserverà che il vettore polare  $\vec{c} = [\vec{a} \hat{b}]$ , che è il prodotto vettoriale del vettore polare  $\vec{a}$  e del vettore assiale  $\hat{b}$ , ha la stessa direzione della forza elettromotrice indotta, se si assegna ad  $\vec{a}$  la direzione del movimento e a  $\hat{b}$  quella del campo magnetico. Indichiamo con  $\vec{E}$  la forza elettromotrice, con  $\vec{v}$  la velocità dello spostamento e con  $\hat{B}$  il flusso

magnetico, si vede che la direzione (ma non il modulo) della forza elettromotrice è determinata dalla relazione

$$\vec{E} = [\vec{v} \hat{B}] = - [\hat{B} \vec{v}]$$

spiegheremo in seguito perché si deve considerare  $\hat{B}$  come un vettore assiale.

In analogia con quanto detto nel Libro II, cap. III, § 8, si può ancora adottare un'altra regola per determinare la direzione dell'induzione in un conduttore chiuso. La figura 7 mostra che, nello spostamento di un tratto di conduttore verso destra, diminuisce il numero di linee magnetiche che penetrano all'interno della linea di percorso della corrente. Viceversa, nello spostamento della stessa porzione di conduttore verso sinistra, aumenta il numero di linee di forza avvolte dalla linea di percorso della corrente, ma contemporaneamente si inverte il verso della forza elettromotrice. Quando un contorno chiuso di forma invariata si muove parallelamente a se stesso in un campo magnetico uniforme, non si verifica alcuna variazione nel numero di linee avvolte da questo contorno e, in quest'ultimo, non si genera alcuna forza elettromotrice, perché la forza elettromotrice indotta in una delle metà del contorno è compensata da quella nel verso opposto nell'altra metà.



Le cose vanno diversamente quando un circuito conduttore si muove in un campo non uniforme. Può allora accadere che parte del circuito entri in una regione più densa di quella in cui si trova il resto del conduttore oppure in una regione in cui la direzione del campo cambia; in questo caso si ha una certa forza elettromotrice non compensata, ma allo stesso tempo è variato il numero di linee di induzione magnetica che il circuito abbraccia.

Applicando a tutti questi casi la regola della mano destra, si ottiene la regola di cui al § 1: *una forza elettromotrice ha origine in un circuito chiuso, quando varia il numero di linee magnetiche che lo attraversano*. La forza elettromotrice è diretta in un dato verso quando aumenta il numero delle linee, nel verso opposto quando diminuisce.

Una variazione nel numero di linee può avvenire non solo in seguito al movimento del circuito conduttore, ma anche per un cambiamento nella natura del campo magnetico. Nel circuito chiuso si forma quindi anche una forza elettromotrice, il cui verso dipende da quello della variazione dell'intensità del campo, che può, ad esempio, aumentare o diminuire. Supponiamo quindi che nella figura 7, con il circuito rimasto stazionario e il campo in movimento da sinistra a destra, il flusso magnetico aumenta attraverso il circuito. Si produce allora nel circuito una corrente avente il verso orario, perché ad un movimento del conduttore da destra a sinistra segue un movimento del campo da sinistra a destra. Viceversa, in uno spostamento del campo da destra a sinistra accompagnato da una riduzione delle linee che attraversano il circuito, si ha una forza elettromotrice il cui verso è antiorario. Si arriva facilmente alla seguente regola generale: quando le linee sono dirette verso l'osservatore, quest'ultimo vede la forza elettromotrice agente nel verso orario, se si verifica un aumento del campo (derivata rispetto al tempo positivo); viceversa, il verso della forza elettromotrice è antiorario, se si ha una riduzione del campo (derivata negativa).

La forza elettromotrice agente in un circuito omogeneo e chiuso, il suo integrale lungo una curva chiusa non è nullo; essa rappresenta quindi un rotore. Per quanto riguarda la direzione

(ma non il modulo), è legata alla derivata rispetto al tempo del vettore del campo magnetico dalla relazione

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{d\hat{B}}{dt}$$

nella quale  $\vec{E}$  indica la forza elettromotrice e  $\hat{B}$  l'induzione magnetica.

### 3. Modulo della forza elettromotrice di induzione

Si può ottenere, da considerazioni teoriche, il verso così come il modulo della forza elettromotrice di induzione. Lenz (1834) per primo ha indicato la legge tra la corrente indotta e il campo inducente. La regola di Lenz si riferisce ad un conduttore che si muove in un campo magnetico ed è espressa come segue: *Quando un conduttore metallico si muove in prossimità di una corrente o di un magnete, in questo conduttore si forma una corrente galvanica. Il verso di questa corrente (indotta) è tale da far compiere al conduttore un movimento direttamente opposto allo spostamento effettivo. Si suppone che il conduttore possa muoversi solo nella direzione dello spostamento effettivo o in quella opposta.* Successivamente F. Neumann ed altri hanno formulato più brevemente la legge di Lenz. Nel 1847 Helmholtz ha introdotto per la prima volta teoricamente la necessità del fenomeno dell'induzione.

Supponiamo che un circuito chiuso, costituito da un elemento galvanico di forza elettromotrice  $E$  e di resistenza  $w$ , si spostino in un campo magnetico generato da magneti costanti. Essa compie così un certo lavoro  $dR$  contro le reazioni della corrente e del campo e del calore di Joule viene rilasciato nel conduttore. Secondo il Libro II, cap. IV, questo calore è uguale a  $I^2 w dt$ , con  $I$  che indica l'intensità della corrente. Il lavoro meccanico, compiuto nell'intervallo di tempo  $dt$  è uguale a  $dR = I \frac{dN}{dt} dt$ , dove  $N$  è il numero delle linee di induzione magnetica, che attraversano la linea del percorso della corrente da sud verso nord. Questo dispendio di energia deve essere coperto dalla quantità di energia fornita dall'elemento nel tempo  $dt$ , che è uguale a  $E I dt$ , sia dalla variazione dell'energia potenziale della corrente relativa ai magneti; ma quest'ultima è nulla e si ha quindi l'uguaglianza

$$E I dt = I^2 w dt + I \frac{dN}{dt} dt$$

o, dividendo per  $dt$ ,

$$I w = E - \frac{dN}{dt} \quad (2.1)$$

Cioè, oltre alla forza elettromotrice  $E$  applicata dall'esterno, in un circuito che si muove in un campo magnetico appare un'ulteriore forza elettromotrice uguale a  $-\frac{dN}{dt}$ .

La formula (1) mostra che quando non viene applicata alcuna forza elettromotrice dall'esterno, la forza elettromotrice indotta  $e$  è uguale in modulo a

$$e = w I = -\frac{dN}{dt} \quad (2.2)$$

Se si misura la corrente indotta in unità elettromagnetiche assolute, si ottiene  $e$  in unità elettromagnetiche assolute. Poiché un volt equivale a  $10^8$  unità el. mag. assolute, il valore di  $e$  in unità pratiche è uguale a

$$e = -10^8 \frac{dN}{dt} \text{ volt}$$

con  $N$  espresso in unità assolute.

Osserviamo che  $N = \int \mu (\hat{H} \hat{ds})$  dove  $\hat{H}$  indica l'intensità del campo,  $\mu$  la permeabilità magnetica e  $\hat{ds}$  un elemento di area della superficie limitata dal circuito. L'unità pratica di

intensità del campo è detta *gauss* ed è uguale all'unità assoluta. Possiamo pertanto esprimere  $\hat{H}$  in gauss (da non confondere con il sistema di unità di Gauss,

#### 4. Verifica sperimentale delle leggi dell'induzione

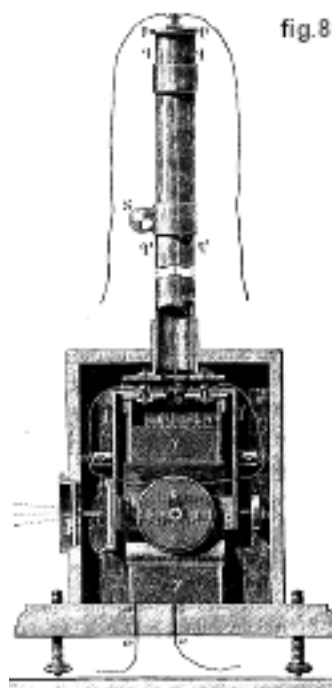
Poiché i fenomeni di induzione hanno una durata molto breve, è difficile seguire la variazione delle forze elettromotrici di induzione. La quantità totale di elettricità  $q$ , che attraversa il circuito nell'intervallo  $t_2 - t_1$  di un fenomeno di induzione, può essere osservata molto meglio. Questa quantità è uguale a  $\int_{t_1}^{t_2} i dt$ , essendo  $i$  l'intensità della corrente dovuta all'induzione. Siccome questa intensità è uguale a  $i = -\frac{1}{w} \frac{dN}{dt}$ , si ha

$$q = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{w} \frac{dN}{dt} dt = - \frac{N_2 - N_1}{w} \quad (2.3)$$

dove  $N_2 - N_1$  è la variazione del flusso totale di induzione, che attraversa il circuito chiuso dei conduttori nell'intervallo di tempo  $t_2 - t_1$ .

E. Lenz ha confermato ed esteso i risultati di Faraday attraverso accurati esperimenti. Egli ha inviato la corrente indotta in un galvanometro balistico. La quantità di elettricità che passa (in brevissimo tempo) attraverso un tale galvanometro è proporzionale a  $\sin \frac{\alpha}{2}$ , dove  $\alpha$  è l'angolo di deviazione dell'ago del galvanometro. Lenz ha ottenuto i seguenti risultati: 1. la quantità di elettricità generata in una bobina indotta, a parità di altre condizioni, è proporzionale al numero di spire del filo di questa bobina; 2. quando si introducono, in bobine di diverse grandezze, ma dello stesso numero di spire e della stessa resistenza, magneti identici (le bobine hanno quindi la stessa resistenza  $w$  e lo stesso flusso totale  $N_2 - N_1$ ), la quantità di elettricità non varia con le dimensioni della bobina; 3. quando la resistenza di bobine diverse è la stessa, la quantità di elettricità non dipende dalla sostanza della bobina.

W. Weber ha studiato con particolare attenzione i fenomeni di induzione. Nelle sue ricerche ha utilizzato un elettrodinamometro costruito nel modo seguente. All'interno di una bobina  $yy$ , mostrata in sezione in figura 8, se ne trova una seconda  $c$ , che è mobile e dove il piano delle spire è perpendicolare al piano delle spire della bobina  $yy$ . La bobina interna  $c$  è fissata ad uno speciale telaio mobile, che circonda liberamente la bobina  $yy$ . Le estremità della bobina  $c$  portano a due terminali isolati  $a$  e  $b$ , portati dal telaio precedente, il quale è sospeso a due fili metallici isolati, collegati metallicamente ai terminali  $a$  e  $b$ . Le oscillazioni della bobina interna attorno al suo asse verticale sono smorzate dalla resistenza dell'aria e dall'attrito della sospensione. Queste oscillazioni vengono osservate attraverso una piccola finestra utilizzando i movimenti dello specchio  $ff$ .



Il decremento logaritmico delle oscillazioni smorzate della bobina era  $\lambda = 0,002541$ . L'intero strumento è disposto in modo che l'asse della bobina mobile si trovi nel meridiano magnetico (perpendicolare al piano della figura). Accanto al dispositivo si posizionano poi alcuni magneti (4), orientati nello stesso modo (est-ovest). Si osserva per la seconda volta lo smorzamento della bobina *c* cortocircuitando le estremità della sospensione a due fili; la bobina è allora attraversata da correnti indotte, la cui reazione sul campo magnetico esterno esercita un effetto ritardante sull'ampiezza delle oscillazioni, senza modificarne il periodo; il nuovo decremento logaritmico era uguale a 0,002638. La differenza di 0,000097 tra i due decrementi determina l'entità della reazione. Si allontanano poi i magneti e si invia una corrente nella bobina *yy*, con un verso tale che il campo magnetico della bobina sia diretto est-ovest. Weber ha osservato la diminuzione di ampiezza delle oscillazioni nel caso in cui la bobina mobile è aperta, quindi in corto circuito e ha ottenuto per i valori del decremento logaritmico 0,002796 e 0,005423. La differenza uguale a 0,002627 determina l'entità della reazione. Il rapporto delle reazioni in questi due esperimenti era

$$\frac{0,002627}{0,000097} = 27,1$$

Successivamente si immette una bassa corrente nella bobina *c* e si osservano le deviazioni che questa bobina subisce nel campo dei magneti e nel campo della bobina *yy*. Con lo strumento utilizzato da Weber, queste deviazioni erano uguali a 19,1 e 101,9. Il loro rapporto serve come misura dell'intensità relativa dei rispettivi campi magnetici dei magneti e della bobina *yy*. Se si ammette che l'intensità della corrente indotta è proporzionale all'intensità del campo induttore e se si ricorda che l'entità della reazione elettromagnetica è proporzionale al prodotto dell'intensità del campo per l'intensità della corrente, si vede che le grandezze delle reazioni nei due esperimenti devono stare come i quadrati delle intensità dei campi, cioè come  $\left(\frac{101,9}{19,1}\right)^2$ , che dà 28,5. Questo numero è abbastanza vicino a 27,1 per confermare l'ipotesi ammessa.

## 5. Teorie di F. Neumann e W. Weber

La prima teoria matematica dei fenomeni di induzione prodotti dalle correnti fu data da F. Neumann (1845); questa teoria si basa sui seguenti dati sperimentali che abbiamo già indicato:



1. Una corrente indotta si origina in un conduttore ogni volta che avviene un cambiamento nell'azione virtuale della corrente inducente su questo conduttore, cioè nell'azione elettrodinamica che il conduttore indotto subirebbe dalla corrente induttrice, se l'intensità di corrente nel primo fosse costante, uguale ad esempio all'unità.

2. La forza elettromotrice indotta non dipende dalla sostanza del conduttore indotto.

3. A parità di altre circostanze, la forza elettromotrice indotta è proporzionale alla velocità relativa degli elementi di corrente.

4. La componente lungo la direzione del movimento dell'azione elettrodinamica che la corrente inducente esercita su un elemento della corrente indotta in movimento è sempre negativa (regola di Lenz).

5. A parità di altre circostanze, l'intensità della corrente indotta è proporzionale a quella della corrente inducente.

Neumann ha fatto i suoi calcoli basandosi sulla legge elettrodinamica di Ampère; la sua teoria presenta quindi oggi solo un interesse storico e noi ci limiteremo ad indicarne i tratti fondamentali. Designando con  $R$  l'azione elettrodinamica della corrente inducente sull'unità di lunghezza del conduttore sottoposto ad induzione, che si suppone percorso in una qualsiasi direzione data da una corrente di intensità pari ad *uno*, si ottiene, per l'azione elettrodinamica sulla corrente elemento  $Ids$ , l'espressione  $IRds$ , con  $I$  l'intensità della corrente indotta. Se l'elemento  $ds$  del conduttore indotto si muove con una velocità  $v$  formante un angolo  $\alpha$  con la direzione della forza elettrodinamica  $R$ , l'intensità della corrente indotta è, secondo la proposizione 3, proporzionale a  $v$ , cioè si ha  $I = vl_1$  dove  $l_1$  è un fattore di proporzionalità. Consideriamo dapprima il caso in cui tutti gli elementi del conduttore soggetti ad induzione abbiano la stessa velocità  $v$ . La componente totale della reazione elettrodinamica nella direzione del movimento è quindi uguale a

$$I_1 v = \int R \cos \alpha ds$$

essendo l'integrale esteso all'intero conduttore indotto. Questa espressione deve secondo la proposizione 4, avere un segno contrario a quello di  $v$ ; si soddisfa più semplicemente a questa condizione ponendo

$$I_1 = -K \int R \cos \alpha ds$$

dove  $K$  è una grandezza positiva. La corrente indotta è quindi

$$I = -Kv \int R \cos \alpha ds$$

e la forza elettromotrice  $E$  nel conduttore indotto, quando  $\rho$  indica la sua resistenza, è, dalla legge di Ohm,

$$E = I\rho = -\rho K v \int R \cos \alpha ds$$

Ma, secondo la proposizione 2, questa forza elettromotrice è indipendente dalla sostanza del conduttore indotto; quindi  $\rho K$  deve essere una costante universale dipendente solo dalle unità di misura scelte per corrente, lunghezza, ecc., che Neumann chiama costante di induzione  $\varepsilon$ . La forza elettromotrice totale è quindi

$$E = -\varepsilon v \int R \cos \alpha ds$$

e, indicando con  $e$  la forza elettromotrice riferita all'unità di lunghezza del conduttore indotto, si ha

$$E = \int e ds = -\varepsilon v \int R \cos \alpha ds$$

Quando tutti gli elementi del conduttore indotto hanno una velocità comune  $v$ , si soddisfa molto semplicemente questa equazione, assumendo la forza elettromotrice distribuita uniformemente lungo il conduttore e si ha

$$e = -\varepsilon v R \cos \alpha \quad (2.4)$$

Questa è l'equazione fondamentale della teoria di Neumann. Per stabilirlo ci si è posti nel caso particolare in cui tutti gli elementi del conduttore indotto hanno la stessa velocità in modulo e direzione; si può successivamente estenderlo al caso in cui il conduttore indotto ha un movimento complessivo, composto da una traslazione e una rotazione, quindi a quello in cui gli elementi del conduttore hanno moti relativi.

Per determinare  $R$ . Neumann ha applicato, come già detto, la formula di Ampère, e ha introdotto l'espressione

$$W_{1,2} = -\frac{1}{2} I_1 I_2 \iint \frac{\cos \varepsilon}{r} ds_1 ds_2$$

questo potenziale di Neumann è il lavoro meccanico totale che deve essere compiuto contro le forze elettrodinamiche agenti tra due correnti, per spostare in qualsiasi modo e con velocità del tutto arbitrarie queste correnti nella situazione in cui la loro distanza reciproca è infinita nella situazione considerata; si suppone che le due correnti  $I_1$  e  $I_2$  sono costanti e una conseguenza immediata del risultato che abbiamo appena ricordato è che la risultante delle forze elettrodinamiche tra due conduttori, nonché il loro momento risultante, sono le derivate negative del potenziale di Neumann rispetto alle coordinate che definiscono la posizione dei conduttori.

La teoria di W. Weber ha svolto un ruolo importante nello sviluppo delle teorie dell'induzione. Weber ha espresso una formula che collega la legge di Coulomb sull'azione reciproca tra masse elettriche a riposo alle leggi elettrodinamiche relative alle cariche in movimento. Secondo questa formula (Libro II, Cap. VII, § 5), la forza  $f$ , con la quale agiscono tra loro due cariche  $\eta_1$  e  $\eta_2$ , la cui distanza  $r$  varia col tempo, è uguale a

$$f = C \frac{\eta_1 \eta_2}{r^2} \left\{ 1 - a^2 \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + 2a^2 r \frac{d^2 r}{dt^2} \right\} \quad (2.5)$$

dove le derivate sono totali. Quando la distanza  $r$  non cambia, la formula (5) si trasforma in quella di Coulomb. Concependo le azioni elettrodinamiche come azioni mutue tra le cariche stesse (senza tener conto dell'effetto del mezzo intermediario), Weber ha potuto dedurre dalla sua formula le leggi dell'induzione. Egli considera l'azione esercitata da un conduttore in quiete, portato da corrente, su un altro conduttore la cui distanza dal primo varia. Per Weber la corrente è l'insieme dei movimenti della carica positiva  $e$  con velocità  $c$  e della carica negativa  $-e$  con la stessa velocità in senso opposto. Nel conduttore indotto, si presuppone inizialmente che le cariche  $\pm e$  sono a riposo e si muovono con il conduttore. Calcolando con la formula (5) l'azione reciproca di tutte queste cariche, Weber ha ottenuto una differenza tra le forze che agiscono, nel conduttore in movimento, sulla carica positiva e su quella negativa; questa differenza definisce la forza che tende a separare l'elettricità positiva da quella negativa e svolge il ruolo di forza elettromotrice di induzione. Integrando detta differenza rispetto a  $s_1$  e  $s_2$  e ponendosi nel caso in cui i due circuiti a cui si estende l'integrazione sono chiusi, si trovano le leggi ordinarie dell'induzione. Weber ha analizzato in modo analogo il caso del movimento di un conduttore in prossimità di un magnete, identificandolo con un elettromagnete. I risultati di Weber coincidono per molti aspetti con quelli di F. Neumann; come abbiamo già detto, la sua teoria ha suscitato importanti obiezioni, in particolare da parte di Helmholtz (Volume IV, Capitolo VII, § 5); la discussione che ne è seguita non ha raggiunto una conclusione definitiva, essendo l'attenzione generale dei fisici concentrata in quel periodo sulla teoria di Maxwell, che prevede la propagazione nel tempo di azioni elettriche, mentre quella di Weber rimane al punto di visione di azioni istantanee a distanza. In tempi recenti, però, la concezione atomistica dell'elettricità ha ridato un certo

interesse alle idee di Weber, che si ritrovano nella moderna teoria degli elettroni. Si considera la comparsa di una corrente indotta in un conduttore che taglia un campo magnetico, come risultato dell'azione del campo sugli elettroni che si trovano nel conduttore e che si muovono con esso. Consideriamo un conduttore che si muove attraverso un campo magnetico, portando con sé gli elettroni a riposo che contiene. Se consideriamo un elettrone che si muove quindi come una corrente e applichiamo la regola della mano sinistra, si vede che l'elettrone deve muoversi nel conduttore seguendo la direzione determinata dalla regola della mano destra. Torneremo su questa questione nel capitolo dedicato alla teoria degli elettroni.

## 6. Autoinduzione

In ogni conduttore che si trova in un campo magnetico variabile, si verifica il fenomeno dell'induzione, qualunque sia la causa che produce la variazione del campo magnetico. Pertanto, una variazione dell'intensità della corrente nel conduttore stesso può dar luogo ad una variazione del campo magnetico che circonda il conduttore. I fenomeni di induzione, dovuti a variazioni dello stato della corrente stessa, sono detti fenomeni di *autoinduzione*. Sia  $N$  il numero di linee di induzione che attraversano un circuito conduttore percorso dalla corrente  $I$ . Questo numero è proporzionale all'intensità  $I$  della corrente e si ha

$$N = \mu LI \quad (2.6)$$

dove  $L$  è un fattore di proporzionalità detto *coefficiente di autoinduzione* e  $\mu$  è la permeabilità magnetica del mezzo. Assumeremo nel seguito che i fenomeni avvengono nell'aria e porremo di conseguenza  $\mu = 1$ . Quando  $N$  varia, nel conduttore si crea una forza elettromotrice  $-dN/dt$ , il segno meno indica che questa forza è nel verso opposto a quello della corrente che produrrebbe un aumento di  $N$ . Quando una forza elettromotrice esterna  $E$  è applicata al conduttore, la forza elettromotrice totale è

$$E - \frac{dN}{dt} = E - L \frac{dI}{dt} \quad (2.7)$$

L'intensità della corrente nel circuito, determinata in ogni istante dalla legge di Ohm, ha come espressione

$$I = \frac{E - L \frac{dI}{dt}}{w} \quad (2.8)$$

dove  $w$  indica la resistenza del conduttore. Per trovare la legge secondo la quale la corrente varia con il tempo, bisogna integrare l'equazione

$$Iw = E - L \frac{dI}{dt} \quad (2.9)$$

Nel caso particolare in cui  $E$  è una quantità costante, cioè quando si applica improvvisamente una forza elettromotrice  $E$  al conduttore di resistenza  $w$  e coefficiente di autoinduzione  $L$ , si ottiene un'equazione differenziale lineare del primo ordine a coefficienti costanti

$$\frac{dI}{dt} + \frac{w}{L}I = \frac{E}{L} \quad (2.10)$$

il suo integrale è

$$I = Ce^{-\frac{wt}{L}} + \frac{E}{w} \quad (2.11)$$

con  $C$  la costante di integrazione.

Quando l'intensità di corrente è nulla nell'istante iniziale ( $t = 0$ ), caso che corrisponde alla chiusura della corrente, si soddisfa alle condizioni iniziali ponendo  $C = -E/w$  e infine si ha

$$I = \frac{E}{w} \left(1 - e^{-\frac{wt}{L}}\right) \quad (2.12)$$

Questa formula mostra che se si applica una forza elettromotrice  $E$  ad un sistema di conduttori di resistenza  $w$  e autoinduzione  $L$ , la corrente non raggiunge improvvisamente il suo valore limite  $E/w$ , ma si avvicina asintoticamente e ciò tanto più rapidamente quanto più  $w$  è maggiore e  $L$  minore. Al contrario, quando  $w$  è piccolo e  $L$  è grande, l'aumento di corrente avviene in con lentezza. È così che, nei grandi elettromagneti, la corrente può talvolta continuare ad aumentare per diversi secondi.

Molto spesso si deve risolvere il problema opposto. In un circuito agisce una forza elettromotrice  $E$  e l'intensità della corrente è  $I_1 = E/w$ . Supponiamo che la forza elettrica scenda improvvisamente a zero, rimanendo il circuito chiuso sulla resistenza  $w$ . Ci si propone di determinare la legge di diminuzione della corrente. L'equazione (10) in questo caso assume la forma

$$\frac{dI}{dt} + \frac{w}{L}I = 0 \quad (2.13)$$

L'integrale di questa equazione è

$$I = Ce^{-\frac{w}{L}t} \quad (2.14)$$

dove  $C$  è una costante di integrazione determinata dalla condizione che nell'istante iniziale ( $t = 0$ ), l'intensità di corrente sia uguale a  $I_1$ ; si trova così  $C = I_1$ , di modo che infine

$$I = I_1 e^{-\frac{w}{L}t} \quad (2.15)$$

## 7. Coefficiente di autoinduzione

Il coefficiente  $L$  nella formula (6) è un fattore di proporzionalità numericamente uguale al flusso di forza che attraversa il circuito, percorso da una corrente di intensità unitaria. Se il circuito comprende più spire è necessario sommare i flussi di forza che attraversano rispettivamente le spire. Le dimensioni di questo coefficiente sono quindi in unità elettromagnetiche [flusso di forza]/[corrente]; ma siccome l'equazione dimensionale di un flusso è  $[\Psi] = [\mu] [\Phi] = [\mu]^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$  e quella di una corrente  $[I] = [\mu]^{-\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$ , la dimensione  $[L]$  del coefficiente di autoinduzione è la lunghezza  $L$ ; cioè, ha la stessa dimensione del coefficiente di mutua induzione.

Dalla formula (6), la forza elettromotrice di autoinduzione si esprime come

$$E = -L \frac{dI}{dt}$$

Questa espressione può essere utilizzata per determinare l'unità di autoinduzione. Un conduttore ha un'autoinduzione uguale a uno, quando, per una variazione dell'intensità di corrente di una unità elettromagnetica al secondo ( $\frac{dI}{dt} = 1$ ), la forza elettromotrice di induzione che si genera è uguale all'unità. el. mag. di differenza di potenziale. Poiché l'unità pratica dell'intensità di corrente è 1 ampere = 0,1 unità assoluta el. mag. di intensità di corrente e che l'unità pratica di differenza di potenziale è 1 volt =  $10^8$  unità el. mag. di differenza di potenziale, l'unità pratica del coefficiente di autoinduzione, detta *henry*, è uguale a  $10^9$  unità el. mag. C.G.S. Il suo modulo è quindi di  $10^9$  cm, cioè circa  $1/4$  del meridiano terrestre; inoltre è ancora chiamato quadrante.

Un conduttore ha quindi un'autoinduzione di 1 henry, quando una variazione dell'intensità di corrente di 1 ampere al secondo dà origine, in esso, a una forza elettromotrice di induzione di 1 volt. Abbiamo già indicato la formula fondamentale

$$L = \iint \frac{\cos \varepsilon}{r} ds ds' \quad (2.16)$$

che determina il coefficiente di autoinduzione, essendo  $ds$  e  $ds'$  elementi dello stesso circuito. Abbiamo visto anche che questo coefficiente deve essere noto, per poter calcolare l'energia

potenziale specifica di una corrente, cioè la grandezza

$$W = -\frac{1}{2}I^2\mu L \quad (2.17)$$

Possiamo ora dare a questa formula un'altra interpretazione. Quando una corrente  $I$  passa attraverso un conduttore metallico fisso, tutta l'energia della sorgente di corrente è spesa nel rilascio di calore di Joule, dato dalla formula

$$Q = AI^2Rt \quad (2.18)$$

Se la resistenza  $R$  è sufficientemente piccola, anche questa energia è piccola e al limite è nulla; cioè, in un circuito di resistenza nulla, la corrente potrà essere mantenuta senza alcun dispendio di energia. Ma, per produrre questa corrente, è necessario vincere la forza elettromotrice di autoinduzione, uguale a  $-L\frac{dI}{dt}$  e si spende per questo scopo l'energia

$$-IL\frac{dI}{dt}dt \quad (2.19)$$

Durante tutto il periodo di instaurazione della corrente, quando questa passa dall'intensità  $I = 0$  all'intensità  $I = I_1$ , si spende l'energia

$$-\int_0^{I_1} LI dl = -\frac{1}{2}LI_1^2$$

Quando il fenomeno avviene in un mezzo di permeabilità magnetica  $\mu$ , bisogna sostituire  $L$  con  $\mu L$  e si ottiene la formula (17). L'energia spesa per vincere la forza elettromotrice di autoinduzione risulta quindi essere immagazzinata sotto forma di energia potenziale magnetica propria della corrente.

Il calcolo del coefficiente di autoinduzione può essere effettuato in modo rigoroso solo in un numero limitato di casi. Tuttavia, spesso si possono stabilire espressioni per questo coefficiente che diano una buona approssimazione. Si determina molto semplicemente il coefficiente di autoinduzione di una bobina, la cui lunghezza è grande rispetto al diametro del tratto rettilineo. Nel Libro II, cap. III, § 7, abbiamo trovato per il flusso di forza in una tale bobina l'espressione

$$\Phi = 4\pi n\sigma I \quad (2.20)$$

dove  $I$  indica l'intensità della corrente,  $n$  il numero di avvolgimenti per cm. di lunghezza e  $\sigma$  l'area della sezione trasversale della bobina. Poiché il numero totale di spire è  $nl$ , essendo  $l$  la lunghezza della bobina in cm., il flusso di forza che attraversa tutte le spire è uguale a

$$4\pi n\sigma I \times nl = 4\pi n^2 l\sigma I$$

La formula (6) dà quindi, per il coefficiente di autoinduzione di una bobina lunga e sottile, l'espressione

$$L = 4\pi n^2 l\sigma = 4\pi^2 R^2 n^2 l \quad (2.21)$$

che è applicabile anche ad una bobina anulare, quando la circonferenza dell'anello è grande rispetto al raggio della sezione trasversale. Sono state stabilite formule molto precise per bobine di altre forme. Uno studio critico di tutta questa questione è stato effettuato in un'ampia dissertazione da Rosa e Grover. Un circuito circolare formato da un filo di sezione circolare possiede, secondo Kirchhoff, l'autoinduzione

$$L = 4\pi a \left( \log \frac{8a}{\rho} - 1,75 \right) \quad (2.22)$$

dove  $a$  designa il raggio della linea assiale della corrente e  $\rho$  il raggio della sezione del filo. Di grande interesse è la dipendenza dell'autoinduzione di un tale conduttore dal suo spessore. Quando il filo è infinitamente sottile, il coefficiente di autoinduzione è infinitamente grande. Ciò è comprensibile, perché il campo magnetico in prossimità di un conduttore infinitamente sottile che trasporta una corrente di intensità uguale a uno è infinitamente grande. Formule simili furono fornite da Maxwell e Lord Rayleigh. La formula di Lord Rayleigh è

$$L = 4\pi a \left\{ \left( 1 + \frac{\rho^2}{8a^2} \right) \log \frac{8a}{\rho} + \frac{\rho^2}{24a^2} - 1,75 \right\} \quad (2.23)$$

le due formule sono solo approssimative e tanto più esatte quanto più piccolo è il rapporto  $\rho : a$ . Grover ha introdotto una formula per tubi conduttori piegati a forma di toroide. In pratica si tratta di bobine di dimensione finita. Lord Rayleigh ha dato, per una bobina con un solo strato di spire di raggio medio  $a$ , la cui linea assiale è di lunghezza  $b$ , la formula

$$L = 4\pi a n^2 \left\{ \log \frac{8a}{\rho} - \frac{1}{2} + \frac{b^2}{32a^2} \left( \log \frac{8a}{\rho} + \frac{1}{4} \right) \right\} \quad (2.24)$$

dove  $n$  è il numero totale di avvolgimenti. Altre formule sono state proposte anche da Coffin, Lorenz, Nagaoka, Webster, Havelock, Kirchhoff, ecc.

Esistono moltissime formule per una bobina con diversi strati di filo e una sezione rettangolare. Maxwell ha indicato la seguente espressione

$$L = 4\pi a n^2 \left( \log \frac{8a}{R} - 2 \right) \quad (2.25)$$

dove  $n$  è il numero di spire,  $a$  il raggio medio della bobina e  $R$  quella che viene chiamata la distanza geometrica media della sezione trasversale dell'avvolgimento.

La distanza geometrica media da un punto  $P$  ad una linea  $S$  si ottiene come segue. Si divide la linea  $S$  in un numero sufficientemente grande  $n$  di segmenti e si unisce il punto  $P$  a questi  $n$  segmenti mediante  $n$  linee. La radice  $n^{esima}$  del prodotto delle  $n$  distanze è detta la distanza media geometrica. In base a ciò, la distanza geometrica media  $R$  della linea rispetto a se stessa è la radice  $n^{esima}$  delle  $n$  distanze tra i segmenti della linea presi a due a due, essendo il numero  $n$  grande a piacere. Questo ci riporta alla definizione matematica

$$\log R = \iint \log r ds_1 ds_2$$

dove  $ds_1$  e  $ds_2$  indicano i due segmenti la cui distanza è  $r$ . Si chiama distanza media geometrica di una figura piana qualunque l'espressione

$$\log R = \iiint \log r dx dy dx_1 dy_1$$

Per la sezione rettangolare di un avvolgimento, la cui lunghezza assiale è  $b$  e lo spessore radiale  $c$  si ottiene la formula seguente:

$$\log R = \log \sqrt{b^2 + c^2} - \frac{1}{6} \frac{c^2}{b^2} \log \sqrt{1 + \frac{b^2}{c^2}} - \frac{1}{6} \frac{b^2}{c^2} \log \sqrt{1 - \frac{c^2}{b^2}} + \frac{2}{3} \frac{c}{b} \arctan \frac{b}{c} + \frac{2}{3} \frac{b}{c} \arctan \frac{c}{b} - \frac{25}{12} \quad (2.26)$$

Altre formule più esatte sono state indicate da Stefan, Weinstein, Perry e altri. Tutte queste espressioni portano a risultati abbastanza coerenti. Si troverà nel già citato lavoro di Rosa e Grover uno studio estremamente dettagliato di queste formule, nonché esempi di calcolo numerico.

Il coefficiente di autoinduzione di un conduttore rettilineo gioca un ruolo importante nella teoria delle oscillazioni elettriche prodotte da un tale conduttore. Per un conduttore solido di forma cilindrica, questo coefficiente è uguale a

$$L = 2l \left( \log \frac{2l}{\rho} - \frac{3}{4} \right) \quad (2.27)$$

essendo  $l$  la lunghezza e  $\rho$  il raggio della sezione del conduttore. Vedremo però più avanti che le oscillazioni rapide non possono penetrare all'interno dei conduttori, ma si propagano soltanto sulla loro superficie; per le oscillazioni è quindi importante solo il coefficiente di autoinduzione di un conduttore cilindrico cavo con pareti molto sottili. Un conduttore simile ha, come coefficiente di autoinduzione,

$$L = 2l \left( \log \frac{2l}{\rho} - 1 \right) \quad (2.28)$$

Queste formule sono state fornite per la prima volta da Neumann. Successivamente Lord Rayleigh le estese al caso generale in cui la permeabilità magnetica del conduttore solido differisce dall'unità.

Con le correnti alternate si usano spesso cavi concentrici, uno dei quali funge da conduttore di alimentazione di corrente e l'altro da conduttore di ritorno. Il coefficiente di autoinduzione di tale cavo è uguale a

$$L = 2l \left( \log \frac{a_2}{a_1} - \frac{1}{4} \right) \quad (2.29)$$

essendo  $a_2$  il raggio del conduttore esterno e  $a_1$  quello del conduttore interno.

## 8. Mutua Induzione. Coefficiente di mutua induzione

Per calcolare la forza elettromotrice di induzione prodotta nel circuito primario dalla variazione della corrente  $I_1$  che passa in questo circuito, è necessario sapere come varia, in funzione dell'intensità  $I_1$ , il flusso totale di induzione magnetica proveniente dal circuito primario e attraversante il circuito secondario. Per fare ciò si deve determinare il coefficiente di mutua induzione  $L_{1,2}$ ; dal Libro II, cap. III, § 8, il flusso di induzione è infatti uguale a  $\Phi_2 = L_{1,2}I_1$  dove  $L_{1,2}$  è il coefficiente di mutua induzione.

Il coefficiente  $L_{1,2}$  dipende solo dai dati geometrici dei due circuiti e può essere considerato come una quantità costante, purché i circuiti non cambino e rimangano a riposo. In questo caso la forza elettromotrice di mutua induzione  $E_2$  nel circuito secondario è uguale a

$$E_2 = -\frac{d\Phi}{dt} = -L_{1,2} \frac{dI_1}{dt}$$

Nel Capitolo III del Libro II è stato dimostrato che  $L_{1,2} = L_{2,1}$ , cioè che il flusso che attraversa tutti gli avvolgimenti del circuito secondario, quando il circuito primario è percorso da una corrente di intensità uno, è uguale al flusso che attraversa tutti gli avvolgimenti del circuito primario, quando passa una corrente di intensità uno nel secondario. In altre parole il coefficiente di induzione del circuito primario sul circuito secondario è uguale al coefficiente di induzione del secondo conduttore sul primo. Da qui il nome coefficiente di mutua induzione. Questo coefficiente è espresso dalla formula Neumann

$$L_{1,2} = \iint \frac{\cos \varepsilon}{r} ds_1 ds_2$$

dove  $ds_1$  e  $ds_2$  sono rispettivamente elementi del primo e del secondo conduttore. Un gran numero di casi speciali sono stati considerati da diversi autori, ma le formule esatte corrispondenti sono

spesso molto complicate. Rimandiamo il lettore, per ulteriori approfondimenti, al più volte citato libro di Rosa e Grover; qui indicheremo solo alcuni dei risultati più importanti.

Per due conduttori paralleli, di lunghezza  $l$  e distanti  $d$ , si ha

$$L_{1,2} = l \log \frac{\sqrt{l^2 + d^2} + l}{\sqrt{l^2 + d^2} - l} - 2\sqrt{l^2 + d^2} + 2d \quad (2.30)$$

Quando  $d$  è piccolo rispetto a  $l$ , si può prendere l'espressione approssimata più semplice

$$L_{1,2} = 2l \log \left( \frac{2l}{d} - 1 + \frac{d}{l} \right) \quad (2.31)$$

Maxwell ha calcolato la mutua induzione di due cerchi di raggio  $A$  e  $a$  avente lo stesso asse e i cui piani distano  $d$ ; ha trovato

$$L_{1,2} = 4\pi\sqrt{Aa} \left\{ \left( \frac{2}{k} - k \right) F - \frac{2}{k} E \right\} \quad (2.32)$$

dove  $k = \frac{2\sqrt{Aa}}{\sqrt{(A+a)^2 + d^2}}$  e dove  $F$  ed  $E$  sono integrali ellittici completi di prima e seconda specie, il cui modulo è  $k = \sin \gamma$ . Il valore di questi integrali in funzione di  $\gamma$  è indicato in Legendre, *Trattato sulle funzioni ellittiche*, Volume II, Tavola VIII e in Maxwell, *Treatise*, Volume II, § 701, Append. I, dove i valori di  $\log \frac{L_{2,1}}{4\pi\sqrt{Aa}}$  sono dati per  $\gamma$  compreso tra  $60^\circ$  e  $90^\circ$ . Quando la distanza  $d$  tra i due cerchi e la differenza  $A - a$  sono sufficientemente piccole rispetto ad  $a$ , è a volte più conveniente utilizzare un'altra formula di Maxwell:

$$L_{1,2} = 4\pi a \left( \log \frac{8a}{r} - 2 \right) \quad (2.33)$$

dove  $\sqrt{(A-a)^2 + d^2}$  è la distanza più breve tra i due circuiti. Altre formule sono state fornite da Weinstein, Nagaoka, Havelock, Mathy, Wiedemann. eccetera. Di grande importanza è l'espressione del coefficiente di mutua induzione di due bobine concentriche, i cui avvolgimenti hanno larghezza e spessore finiti. Si può assumere in prima approssimazione

$$L_{1,2}^0 = n_1 n_2 M_0 \quad (2.34)$$

con  $n_1$  e  $n_2$  che designano il numero di spire delle bobine,  $M_0$  il coefficiente di mutua induzione di due cerchi conduttori aventi rispettivamente per raggio la media aritmetica dei raggi delle diverse spire di ciascuna bobina e la cui distanza è uguale a quella delle spire piani mediane delle bobine. In seconda approssimazione si ha, secondo Maxwell, *Treatise*, Volume II, § 700, la formula

$$L_{1,2} = L_{1,2}^0 + \frac{1}{24} \left\{ (b_1^2 + b_2^2) \frac{\partial^2 L_{1,2}^0}{\partial x^2} + c_1^2 \frac{\partial^2 L_{1,2}^0}{\partial a^2} + c_2^2 \frac{\partial^2 L_{1,2}^0}{\partial A^2} \right\} \quad (2.35)$$

dove  $b_1$  e  $b_2$  sono le lunghezze delle spire nella direzione dell'asse,  $c_1$  e  $c_2$  i loro rispettivi spessori lungo il raggio,  $x$  la distanza dei piani mediani delle due bobine. Nel caso particolare in cui le due bobine concentriche sono del tutto identiche, le derivate presenti nella (35) prendono i seguenti valori:

$$\frac{\partial^2 L_{1,2}^0}{\partial x^2} = \pi \frac{k^3}{a} \left( F - \frac{1-2k^2}{1-k^2} E \right) \quad (2.36)$$

$$\frac{\partial^2 L_{1,2}^0}{\partial a^2} = \pi \frac{k}{a} \left\{ (2-k^2) F - \left( 2-k^2 \frac{1-2k^2}{1-k^2} \right) E \right\} \quad (2.37)$$

avendo  $E$  e  $F$  lo stesso significato della (32); la formula (35) si può ancora scrivere così:

$$L_{1,2} = n_1 n_2 \left\{ M_0 + \frac{1}{12} \left( b^2 \frac{\partial^2 L_{1,2}^0}{\partial x^2} + c^2 \frac{\partial^2 L_{1,2}^0}{\partial a^2} \right) \right\} \quad (2.38)$$

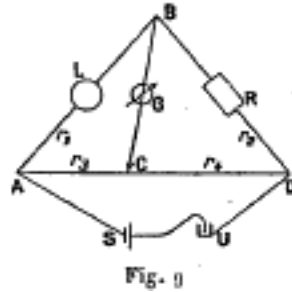


## 9. Determinazione sperimentale del coefficiente di autoinduzione e del coefficiente di mutua induzione

Un metodo fondamentale per determinare il coefficiente di autoinduzione è stato proposto da Maxwell. Questo metodo è stato poi leggermente modificato da Lord Rayleigh. Si utilizza un ponte di Wheatstone, i cui rami  $r_2, r_3, r_4$  non devono avere né capacità né autoinduzione. Sul quarto ramo è inserita la bobina di cui si vuole determinare l'autoinduzione. Si cerca la posizione del punto C (fig. g), per la quale il galvanometro non devia. Nell'esperienza, è sempre necessario inserire prima la batteria ed introdurre il galvanometro solo quando si è stabilita la corrente nel circuito (meno di un secondo), perché altrimenti le correnti di induzione prodotte alla chiusura turberebbero l'equilibrio. Viceversa, all'apertura della corrente, è necessario prima rimuovere il galvanometro. Quando non c'è corrente nel galvanometro, la condizione

$$r_1 : r_2 = r_3 : r_4$$

è soddisfatta.



Il galvanometro deve essere di tipo balistico. Ora, quando viceversa si chiude la corrente e il galvanometro e poi, senza togliere il galvanometro, si apre il circuito ASD, si osserva nel galvanometro un effetto balistico, dovuto al fenomeno dell'autoinduzione nel ramo  $r_1$ . Se la corrente nel ramo  $r_1$  ha intensità  $i_1$ , ai può ammettere che in questo ramo, durante il periodo di scomparsa della corrente  $i_1$ , agisce una forza elettromotrice  $-L \frac{di_1}{dt}$  (tralasciamo il segno sotto meno). La corrente  $i_g$ , che attraversa il galvanometro, è proporzionale a questa forza elettromotrice e può essere calcolata utilizzando le leggi delle correnti derivate, essendo  $r_1$  e  $r_3$  parti non derivate del circuito e le linee BC e BDC che danno passaggio a due correnti parallele. La corrente nella linea BC, la cui resistenza è  $r_g$ , è uguale a

$$i_g = L \frac{di_1}{dt} \frac{r_2 + r_4}{r_g (r_1 + r_2 + r_3 + r_4) + (r_1 + r_3) (r_2 + r_4)} \quad (2.39)$$

Indicando l'ultima funzione con  $K$ , si può scrivere

$$i_g = L \frac{di_1}{dt} K \quad (2.40)$$

Se si moltiplicano entrambi i membri per  $dt$  e si integra in tutto l'intervallo di tempo necessario alla scomparsa dell'extracorrente, si ottiene

$$Q_g = Li_1 K \quad (2.41)$$

$Q_g$  designa la quantità totale di elettricità che passa attraverso il galvanometro.

Conoscendo  $Q_g$  (per far questo si deve determinare la costante balistica del galvanometro) e  $i_1$ , oltre a tutte le resistenze che entrano nell'espressione di  $K$ , si può determinare  $L$ . Esiste però un metodo (Lord Rayleigh) che ci permette di evitare di determinare tutte queste quantità. La

teoria del galvanometro balistico fornisce, per un galvanometro a bobina a basso smorzamento, la formula

$$Q_g = Li_1 K = \frac{Ta \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right)}{S\pi} \quad (2.42)$$

da cui si deduce

$$L = \frac{Ta \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right)}{SKi_1\pi} \quad (2.43)$$

Si determina  $SKi_1$ , nel modo seguente; si modifica un poco la resistenza  $r_1$ , introducendo una piccolissima resistenza aggiuntiva  $\Delta r_1$ . Il galvanometro subisce allora una piccola deviazione costante  $\varphi$ , uguale a

$$\varphi = i_g S \quad (2.44)$$

Per semplificare porremo in questa formula  $R = 0$  e scriveremo, con le nostre attuali notazioni,  $r_g$  invece di  $R_1$ ,  $r_1 + \Delta r_1$  invece di  $R_2$ ,  $r_4$  per  $R_3$ ,  $r_2$  per  $R_4$  e  $r_g$  per  $R_0$ . Siccome  $\Delta r$  è molto piccolo, lo si può trascurare al denominatore e sostituire anche  $E$  con  $i_1(r_1 + r_2)$ . Avendo  $r_1 : r_2 = r_3 : r_4$ , si stabilisce facilmente che

$$i_g = Ki_1 \Delta r_1 \quad (2.45)$$

dove  $K$  ha lo stesso significato della (41). Si può quindi porre, nella (42,a),  $\varphi : \Delta r_1$  al posto di  $SKi_1$ ; infine si ha

$$L = \frac{Ta \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right) \Delta r_1}{\varphi\pi} \quad (2.46)$$

Nella forma primitiva del metodo Maxwell-Rayleigh la resistenza  $r_1$  era interposta in un altro ramo. In tal caso entra nella formula (45) un altro fattore che dipende dalla resistenza dei rami.

Esistono alcuni metodi per determinare il coefficiente di autoinduzione di una bobina mediante confronto con un'altra bobina di autoinduzione nota. In questo metodo la bobina, di cui si ricerca l'autoinduzione  $L_1$ , è posta in serie con una resistenza variabile  $r_1$  sul ramo AB, fig. 9; l'altra bobina, di autoinduzione nota  $L_2$  e resistenza  $r_2$ , è posta sul ramo BD. Si modificano le resistenze  $r_1$  e  $r_2$  finché non si è trovata una posizione del punto C tale che il galvanometro non dia alcuna deviazione, quando si chiude la corrente in modo duraturo o negli istanti di chiusura e apertura del circuito. In questo caso, si ha

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{r_3}{r_4} = \frac{r_1}{r_2} \quad (2.47)$$

Infatti, la corrente  $i_g$  nel galvanometro risulta, all'apertura del circuito, di due correnti, dovute alla forza elettromotrice  $-L_1 \frac{di_1}{dt}$  nel ramo AB e alla  $-L_2 \frac{di_1}{dt}$  nel ramo BD.

Le correnti nel galvanometro, corrispondenti a queste forze, sono  $K_1 L_1 \frac{di_1}{dt}$  e  $K_2 L_2 \frac{di_1}{dt}$ ; ma hanno verso contrario. Quando non c'è alcuna corrente nel galvanometro, si ha

$$K_1 L_1 \frac{di_1}{dt} = K_2 L_2 \frac{di_1}{dt} \quad (2.48)$$

dove  $K_1$ , si veda la (39), in ragione della simmetria completa di  $K_1$ , non differisce da quest'ultimo se non perché  $r_2 + r_4$  è sostituito da  $r_1 + r_3$  e viceversa; ne segue che  $L_1 : L_2 = K_2 : K_1 = (r_1 + r_3) : (r_2 + r_4)$ . Da questa relazione si può dedurre la (46), considerando la condizione  $r_1 : r_2 = r_3 : r_4$  simultaneamente soddisfatta.

Convien, in misure di questo tipo, utilizzare un particolare interruttore automatico, in grado di aprire e chiudere più volte il circuito e di inviare a piacimento nel galvanometro solo la corrente di apertura o di chiusura. Con un telefono o un galvanometro a vibrazione è possibile utilizzare per queste misure anche la corrente alternata. Per determinare i coefficienti di autoinduzione

con il metodo di confronto, esistono gruppi di bobine di autoinduzione nota, disposte in scatole che ricordano le cassette di resistenza. J. Carpentier ha costruito dei campioni di autoinduzione (fig. 10) costituiti da bobine piatte, la cui gola è rivestita con filo di rame.



fig. 10

Le dimensioni geometriche di queste bobine sono state scelte per dare la costante di tempo più alta possibile, per un dato volume di filo: essendo le dimensioni delle spire le stesse per tutti gli standard di questa serie, la costante di tempo è la stessa per tutte, e prossima a 0,01 secondi. La scanalatura delle bobine ha un raggio interno di 2,4 *cm*, e un raggio esterno di 7,2 *cm* e un'altezza di 3,6 *cm*. Il diametro del filo di rame avvolto varia con il valore dell'autoinduzione. Questi campioni vengono utilizzati nella misura dei coefficienti di autoinduzione, con tutti i metodi di confronto, sia con corrente continua che con corrente alternata.

Descriveremo un sistema che permette di modificare continuamente l'autoinduzione. All'interno di una bobina, il cui piano degli avvolgimenti è disposto verticalmente, è posta un'altra bobina, il cui piano delle spire è pure verticale, ma che può ruotare all'interno della prima attorno al suo asse verticale. La corrente passa successivamente attraverso ciascuna bobina. Il campo magnetico dell'uno si somma a quello dell'altro e, a seconda della posizione reciproca delle spire, i campi possono rafforzarsi o indebolirsi a vicenda. Il coefficiente di autoinduzione di un tale sistema varia continuamente ed è funzione dell'angolo formato dai piani degli avvolgimenti delle due bobine; assume il suo valore massimo quando le correnti hanno versi uguali nelle due bobine e il suo valore minimo quando hanno verso opposto. Una scala posta sopra lo strumento permette di leggere l'angolo di rotazione e una tabella appartenente allo strumento fornisce l'entità dell'autoinduzione per i diversi angoli. Questo sistema è stato proposto da Lord Rayleigh e prodotto da Wien. J. Carpentier ha costruito il modello di bobina di autoinduzione regolabile rappresentato in figura 11; questo dispositivo è costituito da due spire piatte e concentriche; la bobina interna, sagomata su un asse diametrale, può assumere varie inclinazioni.

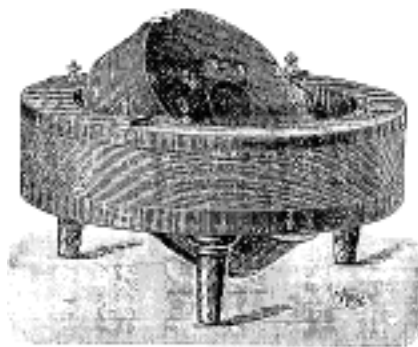


fig. 11

L'angolo del suo piano con quello della bobina fissa è indicato, in ogni istante, da un cerchio graduato; i circuiti delle due bobine sono ancora uniti in tensione. Il coefficiente di autoinduzione dell'insieme, a seconda dell'angolo che le due bobine formano tra loro, può variare entro limiti

abbastanza ampi. La tabella seguente fornisce le costanti di un dispositivo stabilite in base a questi dati:

	Bobina fissa	Bobina mobile	Insieme di due bobine inclinate		
			0°	90°	180°
Resistenza	5 ohm	3,68 ohm	8,63 ohm		
Coefficiente di autoinduzione	0,269 henry	0,177 henry	0,228	0,416	0,664
Costante di tempo	0,0538 sec	0,048 sec	0,0262	0,0513	0,0764

Negli ultimi tempi si è sentita l'esigenza nella telegrafia senza fili, dove si utilizzano alte tensioni, di avere autoinduzioni variabili e relativamente deboli, in grado di sopportare queste alte tensioni; si è stati così indotti a costruire tutta una serie di nuovi tipi di autoinduzioni variabili secondo il seguente principio: in un circuito possono essere interposte un numero più o meno grande di spire di un conduttore avvolto in spirale piatta o ad elica.

Tralasciamo per il momento i metodi in cui l'autoinduzione è compensata da una capacità e quelli in cui si utilizzano oscillazioni elettriche.

Il coefficiente di mutua induzione può essere determinato anche in diversi modi. Dalla definizione stessa di questo coefficiente nasce già un metodo di misura. Oppure ottenere la mutua induzione di due bobine; in una delle due si invia una corrente di data intensità e, utilizzando un galvanometro balistico collegato in serie alla seconda, si osserva la deviazione prodotta dalla corrente che ha origine nella seconda bobina, al momento dell'interruzione della corrente nella prima. Per definizione, il coefficiente di mutua induzione è misurato dal numero di linee di induzione che attraversano tutte le spire della seconda bobina, quando nella prima viene inviata una corrente di un ampere. Se questa corrente è  $i_1$  ampere, il numero  $N$  di linee di induzione è uguale a

$$N = L_{1,2}i_1 \quad (2.49)$$

Con l'interruzione della corrente, si produce nella seconda bobina una forza elettromotrice

$$e = -L_{1,2} \frac{di_1}{dt}$$

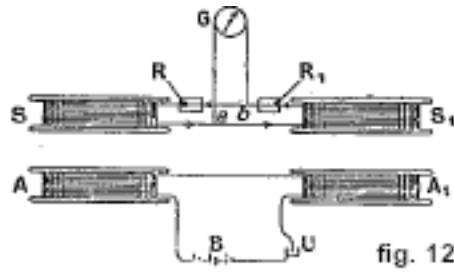
L'intensità di corrente corrispondente è

$$i_2 = \frac{e}{r_2} = -\frac{L_{1,2}}{r_2} \frac{di_1}{dt} \quad (2.50)$$

dove  $r_2$  indica la resistenza della seconda bobina e del galvanometro. La quantità totale di elettricità, che passa nel circuito, è uguale all'integrale  $\int i_2 dt$ , preso per tutto il tempo di scomparsa della corrente. Indicheremo con  $Q$  questa quantità, che è misurata dal galvanometro balistico; si ottiene infine

$$L_{1,2} = \frac{r_2 Q}{i_1} \quad (2.51)$$

Maxwell ha proposto il seguente metodo per il confronto di due coefficienti di mutua induzione. Si hanno due coppie di bobine, AS (fig. 12) di cui occorre determinare il coefficiente di mutua induzione e  $A_1 S_1$  di cui è noto il coefficiente. Le bobine A e  $A_1$  sono collegate in serie con una batteria B e le bobine S e  $S_1$  costituiscono, con le cassette di resistenza R e  $R_1$ , un circuito chiuso.



Sul ponte di questo circuito è posto il galvanometro G. Al momento dell'interruzione della corrente in U, nelle bobine S e  $S_1$  si formano forze elettromotrici che generano correnti corrispondenti nel galvanometro. Secondo quanto detto e secondo le formule (46) e (47) nel galvanometro non passa corrente, se è soddisfatta la seguente condizione

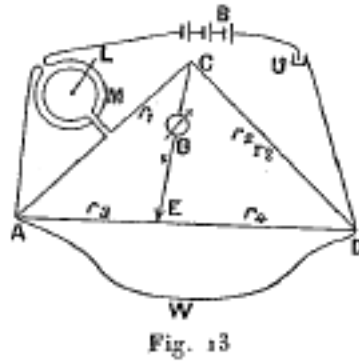
$$KL_{1,2} \frac{di}{dt} = K' L'_{1,2} \frac{di}{dt} \quad (2.52)$$

essendo  $L_{1,2}$  il coefficiente di mutua induzione per le bobine A e S,  $L'_{1,2}$  per le bobine  $A_1$  e  $S_1$ ;  $K$  e  $K'$  hanno lo stesso significato della (47);  $i$  è l'intensità di corrente nel circuito  $AA_1B$ . Si ricava

$$\frac{L_{1,2}}{L'_{1,2}} = \frac{K'}{K} = \frac{r}{r'} \quad (2.53)$$

dove  $r$  e  $r'$  indicano le resistenze totali dei circuiti  $bRsa$  e  $bR_1S_1a$ .

Maxwell ha proposto ancora un altro metodo per determinare il coefficiente di induzione reciproca  $L_{1,2}$  di due bobine. Una di esse, di cui si vuole determinare il coefficiente di mutua induzione, è posta sul ramo AC (fig. 13) di un ponte di Wheatstone. Il coefficiente di autoinduzione  $L_{1,1}$  di questa bobina deve essere stato determinato in precedenza. La seconda bobina M è inserita nel circuito di una batteria ABUD, in modo che il campo di questa bobina sia opposto al campo della bobina L. Spostando il contatto E e variando contemporaneamente la resistenza  $r_2$ , si ottiene che il galvanometro G non si devia né quando si stabilisce la corrente, né alla chiusura e apertura del circuito.



È chiaro che, in questo caso, la forza elettromotrice di autoinduzione, che si origina nella bobina L quando scompare la corrente  $i_L$  che la attraversa, è compensata dalla forza elettromotrice di mutua induzione delle bobine M e L, che ha origine quando la corrente  $i_M$  scompare nella bobina M. Si ha quindi l'uguaglianza

$$L_{1,1} \frac{di_L}{dt} = L_{1,2} \frac{di_M}{dt} \quad (2.54)$$

Ma, in assenza di ogni corrente nel galvanometro, la corrente derivata  $i_M$  è legata alla corrente  $i_L$  dalla relazione

$$i_M : i_L = (r_1 + r_2 + r_3 + r_4) : (r_3 + r_4)$$

Se ne deduce che

$$L_{1,1} = L_{1,2} \frac{r_1 + r_2 + r_3 + r_4}{r_3 + r_4} = L_{1,2} \left( 1 + \frac{r_1 + r_2}{r_3 + r_4} \right) \quad (2.55)$$

L'equazione del ponte di Wheatstone permette di scrivere questa formula nel modo seguente:

$$L_{1,1} = L_{1,2} \left( 1 + \frac{r_2}{r_4} \right) = L_{1,2} \left( 1 + \frac{r_1}{r_3} \right) \quad (2.56)$$

Si può pure procedere nel seguente modo: si collegano le due bobine in serie, una prima volta in modo che i loro campi magnetici coincidano, una seconda volta in modo che siano opposti e si determinano i coefficienti di autoinduzione in entrambi i casi. Nel primo, il coefficiente di autoinduzione  $L_+$  del sistema è uguale a

$$L_+ = L_{1,1} + 2L_{1,2} + L_{2,2}$$

dove  $L_{1,1}$  e  $L_{2,2}$  indicano i coefficienti di autoinduzione delle bobine prese singolarmente e  $L_{1,2}$  il coefficiente di mutua induzione cercato. Il fattore 2 indica che bisogna tenere conto sia dell'induzione della prima bobina sulla seconda, sia di quella della seconda sulla prima. Nel secondo caso il coefficiente di autoinduzione  $L_-$  è uguale a

$$L_- = L_{1,1} - 2L_{1,2} + L_{2,2}$$

Si può quindi dedurre  $L_{1,2}$  e si ha

$$L_{1,2} = \frac{1}{4} (L_+ - L_-) \quad (2.57)$$

Non parleremo qui dei metodi basati sull'uso di oscillazioni elettriche.

Abbiamo fin qui ammesso l'invariabilità di  $L_{1,1}$  e di  $L_{1,2}$ ; ma è facile vedere che i fenomeni di autoinduzione e di mutua induzione giocano ancora un ruolo nel caso in cui, con corrente costante, cambi la configurazione dei circuiti. Cambiamenti nelle proprietà del mezzo, come quelli derivanti dall'avvicinamento di un nucleo di ferro, possono modificare anche il flusso magnetico e di conseguenza produrre anche fenomeni di autoinduzione e mutua induzione. In tutti questi casi è necessario calcolare la forza elettromotrice di autoinduzione mediante la formula

$$E = -I_1 \frac{dL_{1,1}}{dt}$$

e la forza elettromotrice di mutua induzione con la formula

$$E = -I_1 \frac{dL_{1,2}}{dt}$$

## 10. Energia del campo elettromagnetico. Modelli

Come già ricordato, si può, con l'aiuto dei fenomeni di induzione, interpretare la formula (78) del Libro II, Capitolo III, § 8 in modo leggermente diverso. Quando una corrente è inviata in una bobina, che ha una autoinduzione  $L_{1,1}$ , si deve, prima di raggiungere la sua piena intensità  $I_1$ , superare la forza elettromotrice di autoinduzione  $-L_{1,1} \frac{dI_1}{dt}$ , spendendo a questo scopo la quantità di energia  $L_{1,1} I_1 \frac{dI_1}{dt}$ . Quando c'è nelle vicinanze un'altra bobina legata alla prima dal coefficiente di mutua induzione  $L_{1,2}$  e percorsa dalla corrente  $I_2$ , se la corrente varia nella prima bobina con la velocità  $\frac{dI_1}{dt}$ , la forza elettromotrice  $-L_{1,2} \frac{dI_1}{dt}$  nella seconda appare e viene rilasciata l'energia  $L_{1,2} I_2 \frac{dI_1}{dt}$ . Scrivendo le analoghe espressioni per le variazioni della corrente  $I_2$

nella seconda bobina, si vede che la produzione delle correnti  $I_1$  e  $I_2$  nella prima e nella seconda bobina richiede, a coefficienti di induzione costanti  $L_{1,1}$ ,  $L_{2,2}$ ,  $L_{1,2}$ , un dispendio di energia

$$dW = L_{1,1}I_1 \frac{dI_{1,1}}{dt} + L_{1,2}I_2 \frac{dI_{1,1}}{dt} + L_{1,2}I_1 \frac{dI_{2,2}}{dt} + L_{2,2}I_2 \frac{dI_{2,2}}{dt} \quad (2.58)$$

L'energia del campo è quindi, supponendo nulla la costante di integrazione (non c'è energia senza correnti),

$$W = \frac{1}{2}L_{1,1}I_1^2 + L_{1,2}I_1I_2 + L_{2,2}I_2^2$$

cioè è espressa da una funzione razionale intera omogenea di secondo grado delle intensità di corrente.

La capacità dell'autoinduzione (e della mutua induzione) di opporsi alle variazioni delle intensità di corrente può essere paragonata per certi aspetti all'inerzia delle masse nella meccanica ordinaria. Infatti, l'espressione stessa dell'energia  $-\frac{1}{2}L_{1,1}I_1^2$ , richiama l'espressione della semi forza viva  $\frac{1}{2}MV^2$ , dove la velocità  $V$  gioca il ruolo dell'intensità di corrente e la massa  $M$  (coefficiente d'inerzia) il ruolo dell'autoinduzione  $L_{1,1}$ . Questa analogia ha portato alla costruzione di numerosi modelli (J. J. Thomson, Lord Rayleigh, Lodge, ecc.), cioè sistemi materiali, in cui i fenomeni meccanici sono collegati tra loro in modo analogo ai fenomeni elettromagnetici. Ma, attraverso questi modelli, non si può pretendere di rappresentare il vero meccanismo del campo elettromagnetico; servono semplicemente da illustrazioni.

Consideriamo un modello di questo tipo descritto da Lord Rayleigh. Su due pulegge A e B (fig. 14), ruotanti attorno allo stesso asse, passa una corda senza fine, alla quale sono sospese altre due pulegge mobili C e D, entrambe caricate con pesi uguali E ed F. Le pulegge sono assunte come prive di massa. Quando si ruota la puleggia A, i pesi E ed F, per la loro inerzia, non cambiano livello e la corda si mette in moto) e fa ruotare la puleggia B in senso contrario ad A. Si illustra in questo modo il fenomeno di induzione corrispondente alla chiusura della corrente nel circuito primario.

Quando le due pulegge A e B ruotano nella stessa direzione, uno dei pesi, F per esempio, si abbassa e l'altro E sale. Se si ferma improvvisamente la puleggia A, l'inerzia dei pesi costringe la corda sulla puleggia B a correre più velocemente e ad acquisire velocità. Questo caso corrisponde al fenomeno dell'induzione che si verifica quando viene interrotta la corrente nel circuito primario. Nelle equazioni che traducono questi fenomeni meccanici, le masse vengono evidenziate in modo analogo ai coefficienti di autoinduzione e mutua induzione. La modalità di costruzione dei modelli, in grado di illustrare alcuni fenomeni di induzione, è strettamente legata *alla più ampia questione dell'interpretazione meccanica dell'energia del campo elettromagnetico*.

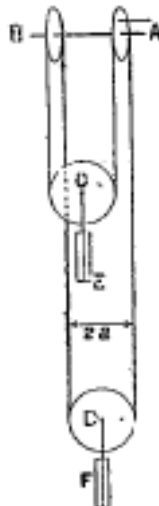


Fig. 14

Seguendo le idee di Faraday e Maxwell, questa energia è immagazzinata nell'etere sotto forma di deformazioni o vortici, spostamenti elettrici o linee magnetiche e ci si può proporre di trovare l'interpretazione puramente meccanica di queste deformazioni o di questi movimenti nell'etere. A tale proposito sono possibili quattro modi di vedere: 1. Si può considerare l'energia elettrica come energia potenziale e l'energia magnetica come energia cinetica. Designeremo il gruppo delle teorie corrispondenti con il simbolo (pot. cin.). 2. Si può, viceversa, considerare l'energia elettrica come energia cinetica e l'energia magnetica come energia potenziale, da qui il gruppo (cin. pot.). 3. È possibile considerare le due energie come energie cinetiche, gruppo (cin. cin.) oppure 4. entrambe come energie potenziali, gruppo (pot. pot.). Si possono considerare anche cinque sottogruppi, a seconda che si assuma una sola o entrambe le energie di carattere misto (pot. cin.). Tali sottogruppi sono i seguenti: 1. (pol. [pot. cin.]), 2. (cin. [pot. cin.]), 3. ([pol. cin.] pot.), 4. ([pot. cin.] cin.), 5. ([pot. cin.] [pot. cin.]).

H. Witte, nel suo libro *Über den gegenwärtigen Stand der Frage nach einer mechanischen Erklärung elektrischen Erscheinungen*, Berlino 1906, giunge a questa conclusione che è impossibile dare una forma sistematica e puramente razionale a nessuna di queste teorie, senza ammettere la struttura atomica dell'etere; con una tale ipotesi non si risolve la questione, ma semplicemente si rimanda la difficoltà. Tuttavia, con molte ipotesi e restrizioni, è possibile costruire modelli meccanici dell'etere, che corrispondono ai diversi tipi di teorie precedenti.

Maxwell è stato il primo a fornire un modello del tipo (pot. cin.). Rappresenta l'energia elettrica come dovuta ad un certo movimento lungo la linea della forza elettrostatica e l'energia magnetica sotto forma di forza viva di rotazione attorno alla linea della forza magnetica.

Indichiamo innanzitutto da quali considerazioni siamo portati ad ammettere che il vettore magnetico è un vettore assiale e il vettore elettrico un vettore polare. Abbiamo visto che il prodotto vettoriale di due vettori polari  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  dà un nuovo vettore  $\hat{c} = [\vec{a}, \vec{b}] - [\vec{b}, \vec{a}]$ , che non è del tutto identico ai vettori iniziali; abbiamo chiamato vettore assiale  $\hat{c}$ , perché la sua direzione dipende da quelle dei vettori  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  secondo la regola della vite (asse). La differenza tra i due tipi di vettori diventa evidente quando invertiamo la direzione dei tre assi coordinati. Supponiamo, per semplicità, che due vettori siano entrambi diretti lungo l'asse  $z$ , il primo sia un vettore polare e il secondo un vettore assiale, che si ottiene come prodotto di due vettori polari, di cui uno diretto lungo l'asse  $x$  e l'altro lungo l'asse  $y$ , per cui si ha da un lato il vettore  $\vec{Z}$  e dall'altro il vettore  $\hat{Z} = [\vec{X}, \vec{Y}]$ . Invertendo la direzione dell'asse  $z$ , si modifica il segno del vettore polare:  $\vec{Z}$ . Per il vettore assiale  $\hat{Z}$  è diverso. Invertendo la direzione degli assi  $x$  e  $y$ , si cambia il segno dei vettori  $\vec{X}, \vec{Y}$ , ma il loro prodotto mantiene il segno. Invertendo contemporaneamente la direzione dell'asse  $z$  si cambia anche il verso del vettore, che corrisponde al prodotto vettoriale; con questo cambio di verso si conserva quindi il segno di  $\hat{Z}$ , e viceversa. Da notare infatti che invertendo così il verso dei tre assi, la vite che gira a destra si trasforma in una vite che gira a sinistra; un osservatore, posto lungo il nuovo asse  $z$ , vede il movimento, che porta il nuovo asse  $x$  a coincidere con il nuovo asse  $y$ , avvenire nel verso orario.

Ricorderemo inoltre che il prodotto vettoriale di due vettori della stessa natura (entrambi polari o entrambi assiali) dà un vettore assiale e che il prodotto vettoriale di due vettori di natura diversa fornisce un vettore polare; nel prodotto vettoriale di due vettori della stessa natura, l'inversione di verso di un asse cambia infatti il segno dei due fattori o non ne cambia nessuno, per cui il segno del prodotto non cambia; non è così con due vettori di diversa natura.

Abbiamo sopra indicato che il cambiamento di segno è caratteristico del vettore polare, mentre se non vi è cambiamento per inversione degli assi, il vettore deve essere assiale. Abbiamo richiamato la formula

$$\vec{E} = [\vec{v}, \hat{B}]$$

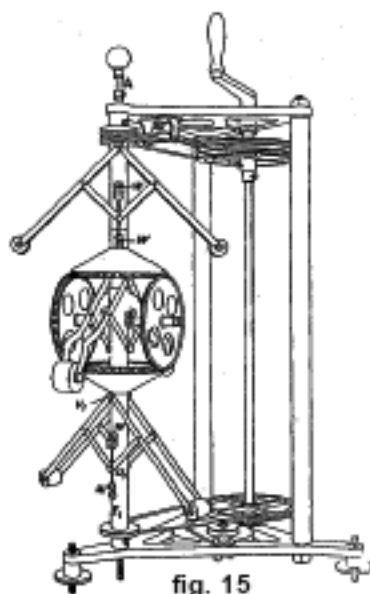
che esprime la forza elettromotrice indotta. Quando si cambia il verso del moto  $\vec{v}$  e quello del



campo magnetico  $\hat{B}$ , non si modifica il segno del vettore  $\vec{E}$ ; ma se si invertono tutti gli assi,  $\vec{E}$  cambia di segno, precisamente perché la direzione e il verso di questo vettore nello spazio rimangono invariati; è quindi un vettore polare. Ma siccome  $\vec{v}$  nel prodotto vettoriale  $[\vec{v}, \hat{B}]$  è un vettore polare, dobbiamo considerare il vettore  $\hat{B}$  come un vettore assiale.

Lo stato dell'etere di Maxwell è quindi costituito da vortici che ruotano attorno alle linee di forza magnetica come assi. Tutti questi vortici hanno lo stesso verso di rotazione; le facce affacciate di questi vortici hanno quindi velocità dirette in versi opposte. Tra i vortici si trovano particelle molto sottili, che rotolano, senza strisciare, a contatto con le superfici dei vortici. Queste particelle svolgono lo stesso ruolo dei rulli di trasmissione delle macchine, o le ruote intermedie, che trasmettono il movimento della ruota motrice a quella condotta senza cambiarne il verso. Maxwell li considera come il supporto delle proprietà elettriche. Una corrente elettrica, cioè il flusso di particelle elettriche in un filo conduttore, provoca attorno ad esso un movimento vorticoso nell'etere; il movimento dei vortici tende a spostare gli strati esterni di particelle elettriche in senso contrario alla corrente centrale, e a far ruotare nuovi anelli di vortici che avvolgono i primi; gli strati esterni di particelle elettriche ricevono quindi, come in un laminatoio, un movimento di traslazione (corrente indotta). Un modello corrispondente a questa tabella è stato descritto nella 3a edizione del lavoro di Maxwell.

Boltzmann ha proposto un modello molto più complicato, ma più conveniente. A lui dobbiamo anche una profonda analisi dell'idea stessa di modelli meccanici. Il modello di Boltzmann è stato successivamente semplificato da Ebert. La Figura 15 rappresenta il modello di Ebert. Su un asse verticale comune sono montati tre sistemi, indipendenti tra loro: un cono dentato superiore, un cono dentato inferiore ed una trasmissione costituita da due ruote dentate, che possono ruotare insieme attorno all'asse verticale e ciascuna separatamente attorno ad un asse orizzontale. I sistemi, ruotando, sollevano pesi fissati a regolatori centrifughi, in modo che l'energia viene immagazzinata sotto forma di energia rotazionale e gravitazionale. Il cono superiore, ruotando attorno all'asse verticale, costringe il sistema di trasmissione a rotolare sul cono inferiore.



La trasmissione, a causa della sua inerzia, non può raggiungere immediatamente la sua massima velocità attorno all'asse verticale ed esercita quindi, fino al momento in cui il movimento è divenuto permanente, una reazione sul sistema inferiore, costringendolo a ruotare in senso opposto a quello del movimento del sistema superiore. Ma, quando la rotazione del cono superiore si è stabilita definitivamente, la trasmissione, rotolando sul cono inferiore, lascia quest'ultimo

fisso. Quando poi il cono superiore si ferma improvvisamente, la trasmissione, continuando il suo movimento rotatorio attorno all'asse verticale, aziona il cono inferiore. Il primo fenomeno corrisponde all'induzione durante la chiusura della corrente primaria, il secondo a quello che si verifica quando questa corrente primaria si apre.

Maxwell, per primo, ha trattato in forma generale il problema così posto. Egli parte dalla concezione di Faraay, secondo cui la corrente rappresenta una sorta di energia cinetica, "qualcosa che è animato da un movimento traslatorio". Per essere più generali, Maxwell non scrive le equazioni della meccanica in coordinate cartesiane, ma in coordinate lagrangiane generalizzate. Ricorderemo la forma che assumono poi queste equazioni.

Siano  $n$  coordinate cartesiane  $x_1, x_2, \dots, x_n$  e  $k$  parametri indipendenti  $a_1, a_2, \dots, a_k$ ; le coordinate cartesiane sono definite da  $n$  formule tali che

$$x_n = \varphi_k(a_1, a_2, \dots, a_k) \quad k \leq n \quad (2.59)$$

dove supporremo che il tempo non compaia esplicitamente. Introduciamo inoltre la notazione seguente

$$\alpha = \frac{da}{dt} \quad (2.60)$$

Le equazioni di Lagrange si scrivono

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \alpha} - \frac{\partial T}{\partial \alpha} = A \quad (2.61)$$

essendo  $T$  la metà della forza viva o l'energia cinetica del sistema espressa in funzione dei nuovi parametri  $a$  e delle loro derivate  $\alpha$  rispetto al tempo. L'espressione  $\frac{\partial T}{\partial \alpha}$  prende il nome di quantità di moto generalizzata, per analogia con la denominazione comune; per esempio, nel caso semplice del moto rettilineo di un punto, dove  $T = \frac{1}{2}mx^2$  e  $\alpha = x \left( x = \frac{dx}{dt} \right)$ , si ha  $\frac{\partial T}{\partial \alpha} = mx$ , cioè la quantità di moto del punto, per definizione. La quantità  $A$  è detta la componente relativa al parametro  $a$  della forza generalizzata, anche per ragioni di analogia, perché  $Ada$ , come è facilmente dimostrabile, rappresenta il lavoro in una variazione  $da$  di  $a$ . In alcuni casi,  $A$  può non essere affatto una forza nel senso comune del termine. Pertanto, quando un punto materiale ruota attorno ad un asse lungo una circonferenza di raggio  $r$ , e si sceglie, come parametro di posizione, l'azimut del raggio vettore, si ha  $T = \frac{m}{2}r^2\omega^2$ , indicando con  $\omega$  la velocità angolare, e l'equazione di Lagrange si scrive

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \omega} = m^2\omega = F \quad (2.62)$$

qui  $F$  non è una forza, ma un momento, che si può scrivere  $F = mr\omega$  essendo  $r\omega$  l'accelerazione. Lo scopo di queste espressioni generalizzate è innanzitutto quello di lasciare indeterminato il parametro  $a$  e la sua derivata  $\alpha$  nel loro significato fisico; non possiamo quindi introdurre prematuramente ipotesi su questo argomento e riunire nella forma adottata un gran numero di interpretazioni meccaniche. Ma in tal modo, come ha sottolineato Boltzmann, i modelli, costruiti per illustrare tali equazioni meccaniche, possono essere considerati solo come immagini del meccanismo reale e potrebbero non avere nulla in comune con esso se non la forma delle equazioni del moto.

Quando si ha un sistema di conduttori percorsi da una o più correnti, questo sistema può essere definito completamente dai parametri  $(a)$ , che determinano la posizione dei conduttori e dai parametri  $(b)$ , che danno la posizione delle cariche elettriche all'interno dei conduttori.

Questi ultimi parametri  $b$  sono stati scelti da Maxwell nel modo seguente. La posizione di una carica elettrica  $A$  che percorre un circuito lineare  $C$  è perfettamente determinata se si conosce, da un lato, la posizione del circuito nello spazio, e dall'altro, la lunghezza  $s$  dell'arco  $OA$  contata da una data origine  $O$ . Di conseguenza, se  $a_1, a_2, a_3, \dots$  sono parametri che definiscono la posizione delle masse materiali che costituiscono il circuito, la posizione di una carica elettrica

dipende dai parametri  $s, a_1, a_2, a_3, \dots$ . Ma invece di  $s$  si può prendere una funzione di questo arco, perché la conoscenza di questa funzione permetterebbe di determinare  $s$  e quindi la posizione di una carica elettrica sul circuito  $C$ ; Maxwell prende la quantità

$$b = \int_0^t I dt$$

che è, così dimostreremo, una funzione di  $s$ . Infatti, la sezione del conduttore, che può essere variabile da un punto a un altro, è una funzione  $\varphi(s)$  dell'arco  $s$ ; la velocità dell'elettricità, quoziente tra l'intensità e la sezione del conduttore, è allora  $I/\varphi(s)$ , poiché questa velocità vale  $ds/dt$ , si deve avere

$$\frac{ds}{dt} = \frac{I}{\varphi(s)}$$

da cui si ricava

$$\int I dt = \int \varphi(s) ds = \psi(s)$$

e

$$\int_0^t I dt = \psi(s) - \psi(s_0)$$

essendo  $s_0$  la posizione della carica elettrica all'origine dei tempi. Di conseguenza  $b$  è funzione solo di  $s$  e si possono assumere, come parametri da cui dipende la posizione di una carica elettrica nel circuito, le quantità  $b, a_1, a_2, \dots, a_n$ . Nel caso di più circuiti, percorsi rispettivamente da correnti di intensità  $I_1, I_2$ , ecc., si porrà

$$b_1 = \int_0^t I_1 dt \quad b_2 = \int_0^t I_2 dt$$

Ciò premesso, se si può avere un'idea puramente meccanica di un sistema di conduttori percorsi da una o più correnti, la metà della viva di tale sistema è rappresentata da una funzione omogenea di secondo grado delle derivate  $\alpha$  e  $\beta$  rispetto al tempo dei parametri  $a$  e  $b$ . La forma generale di questa funzione è quindi

$$T = \sum_i \sum_j (A_{ij} \alpha_i \alpha_j + B_{ij} \beta_i \beta_j + C_{ij} \alpha_i \beta_j) \quad (2.63)$$

dove i coefficienti  $A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}$  sono funzioni di  $a_i, a_j, b_i, b_j$ . Si può scrivere questa espressione nella forma

$$T = T_m + T_e + T_{me} \quad (2.64)$$

dove  $T_m$  indica l'energia di movimento delle masse materiali,  $T_e$  l'energia di movimento delle masse elettriche e  $T_{me}$  l'energia dovuta alla coesistenza del movimento delle masse materiali e di quelle elettriche.

Secondo Maxwell, il termine  $T_{me}$  è nullo. Maxwell non è riuscito a osservare né l'inerzia elettrica delle masse materiali, né l'inerzia meccanica dell'elettricità. La prima si manifesterebbe con l'insorgere di forze elettromotrici dovute esclusivamente allo spostamento dei conduttori (senza campo magnetico esterno); la seconda si avverterebbe negli urti che subirebbero longitudinalmente i conduttori durante i periodi di chiusura e apertura delle correnti. La moderna teoria elettronica, attribuendo inerzia all'elettrone, ammette azioni corrispondenti al termine  $T_{me}$ , sebbene tali azioni debbano essere molto deboli. L'energia di movimento dei conduttori e dell'elettricità si misura quindi dalla somma delle rispettive energie di movimento dei conduttori e delle masse elettriche. Si ammette inoltre che l'energia  $T$  sia indipendente dai parametri  $b$ , cioè che le coordinate assolute delle cariche elettriche non abbiano alcun ruolo e che siano importanti solo

le correnti ( $\beta$ ) regnanti nei punti dati. Tale particolarizzazione caratterizza ciò che Helmholtz chiama sistemi ciclici (Volume III), cioè i sistemi costituiti da trottole dove, col procedere della rotazione, entrano in campo, in un punto dato dallo spazio, al posto di un punto singolo  $m_1$ , un altro punto  $m_2$  avente quasi o esattamente la stessa massa e la stessa velocità. Di conseguenza, gli eventi in un dato punto dello spazio cambiano solo lentamente o non cambiano affatto, nonostante la rapida velocità dei singoli punti. In ogni conduttore del sistema scorre con enorme velocità una corrente e tuttavia, al passaggio di una corrente costante, i fenomeni attorno ai conduttori hanno carattere stazionario. Il modello di Boltzmann è un esempio di sistema ciclico.

Dopo queste spiegazioni possiamo scrivere l'espressione per le componenti generalizzate relative ai parametri  $a$  e  $b$ ; designando queste componenti con  $A$  e  $B$ , si ha

$$\begin{cases} A &= \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \alpha} - \frac{\partial T}{\partial b} \\ B &= \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \beta} - \frac{\partial T}{\partial a} \end{cases} \quad (2.65)$$

Ma, in virtù della (61) dove  $T_{me} = 0$ , si può eseguire la seguente scomposizione

$$\begin{cases} A = A_e + A_m &= \frac{d}{dt} \frac{\partial T_e}{\partial \alpha} - \frac{\partial T_e}{\partial b} + \frac{d}{dt} \frac{\partial T_m}{\partial \alpha} - \frac{\partial T_m}{\partial b} \\ B = B_e + B_m &= \frac{d}{dt} \frac{\partial T_e}{\partial \beta} - \frac{\partial T_e}{\partial a} + \frac{d}{dt} \frac{\partial T_m}{\partial \beta} - \frac{\partial T_m}{\partial a} \end{cases} \quad (2.66)$$

Osservando che  $T_e$  è indipendente da  $\alpha$ ,  $T_m$  da  $\beta$  e che  $T$  non contiene  $b$  in generale, si ottengono le quattro espressioni seguenti:

$$A_e = -\frac{\partial T_e}{\partial \alpha} \quad A_m = \frac{d}{dt} \frac{\partial T_m}{\partial \alpha} - \frac{\partial T_m}{\partial a} \quad B_e = \frac{d}{dt} \frac{\partial T_m}{\partial \beta} \quad B_m = 0 \quad (2.67)$$

Tali componenti generalizzate hanno il seguente significato:  $A_m$  è la forza meccanica ordinaria che agisce sui conduttori;  $A_e$  è la forza che agisce meccanicamente sui conduttori, ma la cui origine è elettrica; è quindi la reazione elettrodinamica;  $B_e$  è la forza di origine elettrica che agisce sulle cariche elettriche. Possiamo chiamare quest'ultima componente generalizzata forza elettromotrice, senza specificare ulteriormente il significato di questa designazione.

Quando si definiscono i parametri  $b$  come ha fatto Maxwell,  $T_e$  è proprio il potenziale elettrodinamico del sistema rispetto a se stesso e si ha, nel caso in cui siano presenti solo due correnti,

$$T = T_m + \frac{1}{2} L_{1,1} I_1^2 + L_{1,2} I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_{2,2} I_2^2$$

$L_{1,1}$ ,  $L_{1,2}$ ,  $L_{2,2}$  dipendenti solo dalla forma e dalla posizione relativa dei circuiti, sono funzioni di  $a$  soltanto; inoltre  $I_1$  e  $I_2$  sono, secondo gli integrali che definiscono  $b_1$  e  $b_2$ , le derivate  $\beta_1$  e  $\beta_2$  di tali quantità rispetto al tempo. Valutiamo le componenti generalizzate  $B_e$ . Se assumiamo che la corrente che attraversa il circuito  $C_1$  sia trasmessa da una forza elettromotrice  $E_1$ , la quantità di energia voltaica fornita dalla sorgente di questa forza elettromotrice nel tempo  $dt$  è  $E_1 I_1 dt$  o  $E_1 \delta b_1$ ; ma bisogna tenere conto anche della resistenza che la corrente incontra nel conduttore e il cui lavoro si ritrova sotto forma di calore Joule, cioè è uguale a  $-w_1 I_1^2 dt$  oppure  $-w_1 I_1 \delta b_1$ . Le componenti generalizzate  $B_e$  per due circuiti sono quindi  $E_1 - w_1 I_1^2$  e  $E_2 - w_2 I_2^2$ , corrispondenti rispettivamente ai parametri  $b_1$  e  $b_2$ . La terza equazione (64) ci dà quindi

$$\frac{d}{dt} (L_{1,1} I_1 + L_{1,2} I_1 I_2) = E_1 - w_1 I_1 \quad \frac{d}{dt} (L_{1,2} I_1 + L_{2,2} I_2) = E_2 - w_2 I_2$$

o, supponendo i due circuiti invariabili nel tempo e fissi

$$\begin{aligned} E_1 - L_{1,1} \frac{dI_1}{dt} - L_{1,2} \frac{dI_2}{dt} &= w_1 I_1 \\ E_2 - L_{1,2} \frac{dI_1}{dt} - L_{2,2} \frac{dI_2}{dt} &= w_2 I_2 \end{aligned}$$

Queste sono le espressioni delle leggi di induzione a cui siamo precedentemente arrivati con il metodo di Lord Kelvin.

Come già accennato, non si può ancora considerare stabilita l'assenza dell'energia  $T_m$ . A. Carbasso si è proposto di verificare con quale precisione si possa ammettere che questo termine si annulli.

Ben più serie sono le difficoltà che si incontrano ogni volta che si vuole dare una spiegazione meccanica dei fenomeni del campo elettromagnetico, non per un sistema di conduttori lineari come ha fatto Maxwell, ma per qualsiasi corpo in movimento. H. A. Lorentz, nella sua memoria sulla teoria elettromagnetica di Maxwell e la sua applicazione ai corpi in movimento (1892), ha sottolineato che l'accuratezza del ragionamento di Maxwell si basa sulla seguente ipotesi: quando si conosce in un certo istante la posizione dei punti materiali di un sistema e quella delle masse elettriche, nonché la posizione dei punti materiali nell'istante successivo e la quantità totale di elettricità che è fluita nei conduttori nell'intervallo di tempo considerato, la seconda posizione del sistema è completamente determinata ed è unica. Lorenz dimostra che non si può accettare senza riserve tale ipotesi, quando si tratta di corpi qualsiasi, e che al contrario sembra molto più probabile che un sistema elettromagnetico non particolarizzato non possa soddisfarla. Maxwell, per usare le equazioni di Lagrange, deve assumere che il sistema sia olonomo, seguendo l'espressione introdotta da Hertz, cioè che le equazioni che traducono le connessioni del sistema devono poter essere espresse in termini finiti; non è così quando si usano le quantità di elettricità come coordinate e si introducono i loro spostamenti virtuali per applicare il principio di d'Alembert. Per generalizzare le idee di Maxwell sul legame matematico tra meccanica e fenomeni elettrodinamici, H. A. Lorentz è portato a definire una nuova classe di sistemi che chiama quasi-olonomi e rispetto ai quali la teoria dinamica di Maxwell appare solo come una approssimazione. Recentemente E. Guillaume (1913) ha proposto di applicare il metodo con cui P. Appell ha dedotto le equazioni generali della dinamica dall'energia dell'accelerazione. Si può allora supporre, in modo generale, il sistema non olonomo; sostituendo gli spostamenti virtuali con le accelerazioni virtuali, le quantità di elettricità non entrano più in gioco.

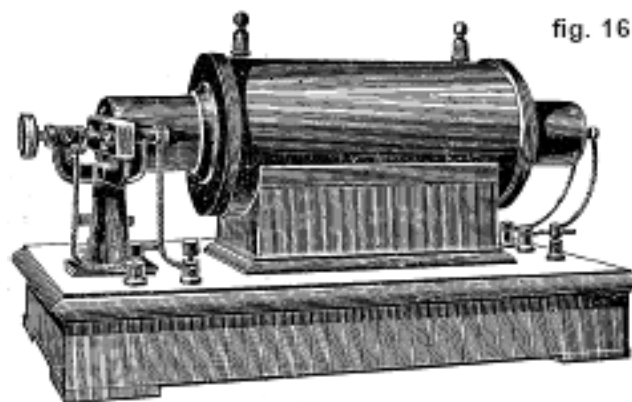
Aggiungeremo che, secondo H. Poincaré, se è possibile determinare un meccanismo che illustri esattamente il campo elettromagnetico, si possono costruire un numero infinito di varianti di tale meccanismo; ma è necessario apportare alcune restrizioni a questa osservazione, vista quella fatta da G. Drboux relativa alla rappresentazione geometrica completa di un elemento lineare.

## **11. Applicazioni dei fenomeni di induzione. Bobine di induzione. Interruttori**

Si fa un uso molto frequente del fenomeno di induzione in elettrotecnica. Qui considereremo due dei dispositivi più comunemente utilizzati nelle applicazioni, la bobina di induzione e il trasformatore.

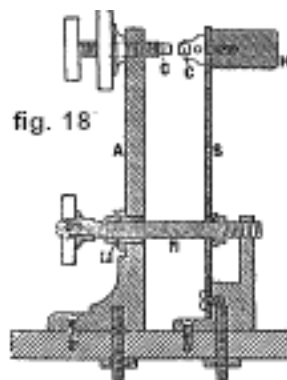
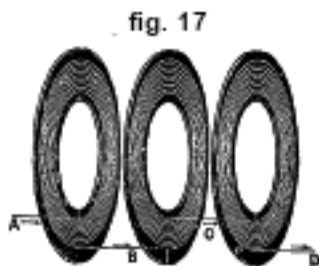
La bobina di induzione viene utilizzata per produrre scintille, la cui lunghezza dipende dalle dimensioni della bobina e può raggiungere un metro o più. La figura 16 rappresenta una bobina che dà una scintilla lunga 30 cm. Questo dispositivo è costruito come segue. La parte interna della bobina è formata da un nucleo cilindrico di ferro, costituito o da bande di lamine di ferro, che ricordano quindi un tronco d'albero segato in tavole, oppure da un fascio di fili di ferro. Questa disposizione ha lo scopo di evitare correnti parassite, di cui parleremo più avanti. Attorno a questo nucleo è avvolta la bobina primaria, comprendente un numero relativamente piccolo (da 100 a 500) di spire di filo di grandi dimensioni (solitamente da 2 a 3 mm di diametro). Le estremità di questa bobina primaria sono collegate a due terminali (fig 16 a destra). In alcuni dispositivi, questo avvolgimento comprende due bobine indipendenti, che portano a quattro terminali. Queste due bobine possono essere collegate in serie o in parallelo. Nel secondo caso, esse si comportano come un'unica bobina due volte più corta, ma anche due volte più spessa, con un coefficiente di autoinduzione circa quattro volte inferiore rispetto all'accoppiamento in serie. Il primario è ricoperto da un avvolgimento secondario, formato da un numero molto

elevato (fino a diverse centinaia di migliaia) di spire di filo molto sottile (circa  $0,2\text{ mm}$  di diametro). L'avvolgimento secondario raggiunge spesso, in grandi bobine di induzioni, decine e perfino centinaia di chilometri. A titolo esemplificativo indichiamo i dati costruttivi della bobina mostrata in figura 16.



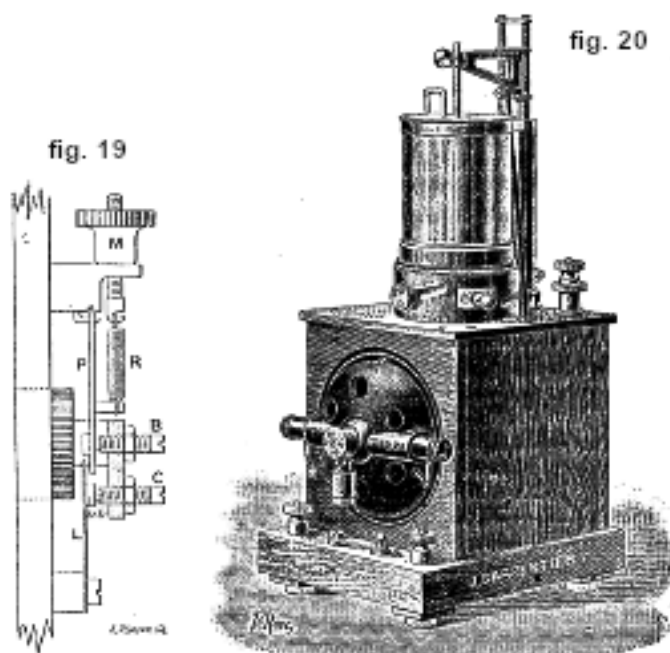
L'avvolgimento primario è costituito da 360 spire di un filo di  $2\text{ mm}$  di diametro, avvolto attorno ad un nucleo formato da un fascio di fili di ferro. Il nucleo ha un diametro di  $5\text{ cm}$ ; la resistenza dell'avvolgimento è di  $0,36\text{ ohm}$ , il suo coefficiente di autoinduzione è di  $0,02\text{ henry}$ . L'avvolgimento secondario contiene  $25\text{ km}$  di filo, formante circa 50000 giri; lo spessore del filo è  $0,18\text{ mm}$ . La resistenza di questo avvolgimento è di  $6600\text{ ohm}$ , il suo coefficiente di autoinduzione è di  $460\text{ henry}$ . Il coefficiente di mutua induzione delle due bobine è  $2,75\text{ henry}$ . Il funzionamento dello strumento è il seguente: si invia una corrente nel circuito primario, che viene poi improvvisamente interrotta; la derivata  $dN : dt$  è quindi estremamente grande e, in ogni spira del circuito secondario, viene indotta una forza elettromotrice di breve durata ma intensa (in media da 1 a 2 volt). Essendo il numero di spire considerevole, nel circuito secondario si ottiene una forza elettromotrice molto elevata, che può raggiungere i 100000 volt e oltre. In questo momento scocca la scintilla.

Poiché la differenza di tensione crescendo da una spira all'altra, è necessario fare attenzione a non avvicinare parti dell'avvolgimento separate da un gran numero di spire. L'avvolgimento a strati, come quello delle bobine ordinarie, non soddisfa questa condizione. Le bobine di induzione sono costituite da sezioni (fig. 17), in cui il filo è avvolto a spirale piatta e separati tra loro da uno strato di isolamento. La qualità dell'isolamento gioca un ruolo molto importante. Molti isolanti, ossidandosi a spese dell'ossigeno dell'aria ambiente (o disciolto nella sostanza isolante), perdono col tempo il loro potere isolante, in particolare sotto l'influenza di scariche lente. È molto importante rimuovere ogni traccia di aria disciolta dalla massa isolante (vedere la descrizione delle bobine di induzione di Boas a Berlino).



Per interrompere la corrente nel modo più brusco e frequente possibile si utilizzano appositi interruttori, di cui esistono le tipologie più diverse. Ne descriveremo solo alcuni. Un interruttore deve soddisfare due condizioni: 1. deve chiudere e aprire la corrente con la massima frequenza, tenendo conto però del tempo necessario affinché la corrente primaria raggiunga il suo valore massimo; 2. l'apertura della corrente deve essere effettuata nel modo più rapido e brusco possibile, per evitare la formazione nel punto di rottura di un arco voltaico, a causa dell'extra corrente di apertura. Gli interruttori più importanti sono i seguenti. L'interruttore a martello o martello NEEF è utilizzato solo in bobine piccole. È il primo interruttore pratico dal punto di vista della rapidità della rottura. Nella sua forma attuale, è spesso costruito secondo il tipo inglese, come segue. Un pezzo di ferro H (fig. 18) è attratto dal nucleo magnetizzato della bobina primaria. I contatti DC in platino smettono quindi di toccarsi. Poiché la corrente primaria deve, prima di entrare nella bobina, passare attraverso questi contatti, la corrente viene interrotta nel momento in cui si allontanano l'uno dall'altro, il nucleo della bobina viene smagnetizzato e l'armatura H è riportata indietro dalla molla S finché il contatto viene ristabilito tra C e C, dopodiché il processo ricomincia. Si può regolare la frequenza delle alternanze di chiusura e apertura della corrente primaria, modificando la tensione della molla S mediante la vite N e la dimensione delle aree di contatto CC. Con forti correnti la scintilla altera le parti metalliche tra le quali scoppia, per cui questo interruttore non è adatto a correnti intense.

Un altro interruttore a secco, quello atonico di J. Carpentier (fig. 19), produce la ripartizione della corrente tra due contatti di platino *a* e *b*. La paletta di ferro dolce P, attratta dal fascio della bobina primaria, si articola in una scanalatura triangolare con una delle sue estremità tagliata a forma di coltello. Una molla elicoidale R la mantiene in posizione e allo stesso tempo la costringe ad appoggiarsi su una vite di fermo B che funge da limite posteriore al suo movimento. Uno dei contatti in platino *a* è montato su una lamina di molla L, che funge da supporto; l'altro *b* è fissato all'estremità di una vite di regolazione C. Dalla figura si vede che la paletta è già dotata di una velocità notevole quando urta la molla L separando così bruscamente i contatti. L'intensità della corrente interrotta e la frequenza delle interruzioni dipendono dalla regolazione dell'interruttore; bisogna anche cercare, agendo sul condensatore di cui parleremo più avanti, nel caso di bobine producenti scintille superiori a 20 cm, di spegnere il più possibile la scintilla, altrimenti inevitabile, che scatta tra i contatti *a* e *b* dell'interruttore.



L'interruttore a mercurio è indispensabile quando la tensione della sorgente di corrente supera i 30 volt; il modello con motore elettrico costruito da J. Carpentier (fig. 20) ha il vantaggio di

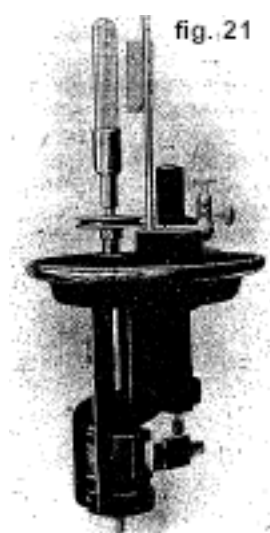
conferire all'asta tuffante un moto rettilineo ed una velocità molto regolare. Il motore elettrico, racchiuso nella base dello strumento, è predisposto per 10 o 110 volt a seconda dei casi; permette di ottenere fino a 25 interruzioni al secondo. L'interruttore vero e proprio è posto sulla base; è costituito da un grande vaso di vetro nel quale è presente un secondo vaso, più piccolo, destinato a contenere il mercurio. L'asta di rame immersa nel mercurio è portata da un manubrio di alluminio al quale una biella, azionata dal motore, imprime un moto rettilineo alternato. Per garantire il collegamento tra questa asta e il corrispondente terminale, una seconda asta, fissata al manubrio, è costantemente immersa nel mercurio che riempie una colonna di ferro. Quest'ultimo funge da supporto per la slitta su cui si muove il manubrio. Una rampa elicoidale permette di alzare o abbassare il vaso di vetro, in modo da regolare la durata del contatto dell'asta immersa e del mercurio; questa regolazione può essere effettuata durante il movimento. I circuiti del motore e dell'interruttore sono completamente indipendenti e ben isolati l'uno dall'altro, quindi è possibile utilizzare sorgenti separate o un'unica sorgente per azionare il motore e alimentare la bobina.

L'interruttore Klingelfuss è costituito essenzialmente da collettore (fig. 21) presentante una o due lamelle metalliche di contatto disposte su un cilindro in fibra e una spazzola in rete metallica che, alternativamente, apre e chiude il circuito primario e secondario a seconda che sia a contatto con la fibra o con una lamella del collettore. Il tutto viene immerso nell'olio per soffocare la scintilla. Così com'è, l'apparecchio potrebbe funzionare, anche se è soggetto a grippaggio e le pale del collettore vengono rapidamente distrutte per effetto delle scintille. Ma la caratteristica dell'interruttore Klingelfuss, che gli permette di sfuggire a questi inconvenienti e di interrompere grandi correnti senza fatica, è che al suddetto dispositivo è abbinata una turbina a mercurio. Sotto il collettore è posta un'elica che pesca nel mercurio e lo pompa per effetto della forza centrifuga. Il mercurio così sollevato all'interno del collettore può fuoriuscire lateralmente attraverso fessure riservate tra le lamine di contatto e la fibra. Questa emissione di mercurio da parte del collettore-turbina si interrompe solo nel momento in cui la spazzola lascia ricoprire la fenditura, ma riprende con un getto improvviso nel momento in cui la spazzola lascia la lamina per passare sulla fibra. È questo getto di mercurio che, disperdendosi nell'olio e disperdendovi contemporaneamente la scintilla, taglia il circuito senza che le parti metalliche della spazzola o del collettore debbano soffrirne. Inoltre, il mercurio così portato nel collettore amalgama costantemente la spazzola e le lamine garantisce un perfetto contatto tra queste parti senza rischio di grippaggio.

È grazie a questa particolarità che l'interruttore Klingelfuss permette di interrompere grandi correnti senza danni e con una regolarità del tutto soddisfacente; grazie ad esso si è potuto tagliare correnti primarie che arrivavano a 35 ampere effettivi da bobine destinate alla telegrafia senza fili e caricare nel secondario una batteria di condensatori da 0,4 microfarad con una scintilla di 5 mm tra cilindri del diametro di 10 mm.

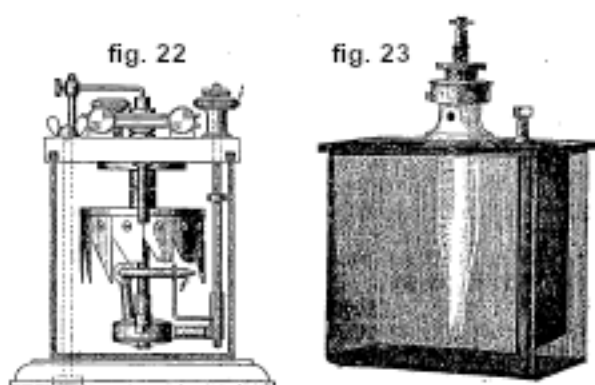
Per mettere in funzione l'apparecchio, si toglie il coperchio del serbatoio su cui sono montati il raccoglitore e la spazzola. Nel serbatoio vengono versati da 600 a 800 grammi di mercurio, poi da 2 a 3 litri di olio e si rimette il coperchio. Si collega quindi il motore alla rete di distribuzione e si connette il circuito del primario della bobina ai terminali portati dal coperchio e dal serbatoio.





Bisogna fare attenzione affinché la quantità di mercurio raccolta sul fondo della vasca sia sempre sufficiente ad amalgamare le parti sfreganti. D'altro canto, per mantenere il collettore in buone condizioni, è consigliabile sostituire la spazzola in tela amalgamata prima della completa usura. Il supporto della spazzola è regolabile tramite l'orientazione dell'asta portata dal coperchio. Questo supporto dovrebbe essere il più leggero possibile. L'interruttore porta nella parte superiore dell'albero un giometro per indicare la velocità di rotazione del collettore; questa velocità viene regolata utilizzando il cursore del reostato.

L'interruttore a turbina è disposto in modo diverso. La figura 22 rappresenta l'interruttore di Levy. Un cilindro centrale viene fatto ruotare rapidamente per mezzo di un motore. L'estremità inferiore del cilindro porta una serie di palette che ruotano in un recipiente contenente mercurio. La forza centrifuga spinge il mercurio nel tubo  $f$ ; un filo di mercurio colpisce così la piastra rivolta verso  $i$  e chiude la corrente. Sul cilindro sono inoltre montati una serie di denti, che tagliano il flusso di mercurio e interrompono la comunicazione tra  $f$  e  $i$ . Il mercurio che scaturisce da  $f$  cade e ritorna nella camera inferiore. Ci sono degli interruttori dove i denti sono fissi e dove è il filo di mercurio che ruota; la corrente viene interrotta ogni volta che il filo di mercurio colpisce uno dei denti. Il resto del recipiente è riempito con alcool o petrolio per soffocare le scintille e prevenire l'ossidazione del mercurio.

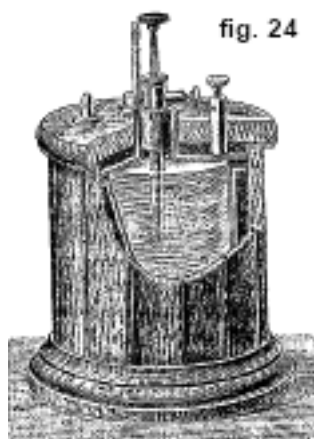


Negli ultimi anni si è diffuso l'uso dell'interruttore "Rolax". Un vaso di ferro contenente un po' di mercurio viene fatto ruotare rapidamente, facendo sì che la superficie del mercurio assuma una forma parabolica. Per una velocità di rotazione sufficientemente elevata, i rami della parabola salgono fino al punto di agire sui denti esterni di una piccola ruota, eccentrica all'interno del vaso che a sua volta comincia a ruotare. La ruota è di materiale non conduttore, ad eccezione di

un solo dente metallico. Quando il mercurio tocca questo dente, si stabilisce il contatto tra le pareti del vaso e l'asse della ruota. Il resto del vaso è pieno d'olio.

L'interruttore elettrolitico di Wehnelt (fig. 23) è utilizzato molto frequentemente. Si compone di un vaso di vetro, riempito di acido al 20%. In questo vaso ce n'è un altro, di porcellana, con un piccolo foro sul fondo, attraverso il quale passa l'estremità di un filo di platino. Ruotando una vite posta sopra il vaso in porcellana, è possibile aumentare o diminuire la lunghezza della punta sporgente in platino. Quando una corrente di direzione costante viene inviata in un circuito in cui una bobina d'arresto e questo recipiente sono collegati in serie, l'estremità del filo di platino che funge da anodo (una lamina di piombo forma il catodo), la corrente viene trasformata in una corrente intermittente. Sembra che l'ossigeno liberato dall'elettrolisi e forse anche il vapore acqueo dovuto al calore Joule (secondo Klupathy, sembra avere un ruolo anche il fenomeno di Peltier) circondino l'elettrodo di platino d'un involucro gassoso e lo separino così dall'acido solforico. Il filo di platino è circondato da un bagliore speciale, che Slouguinoff è stato il primo ad osservare.

Il funzionamento dell'interruttore è garantito quando la differenza di potenziale ai suoi elettrodi è compresa tra 30 e 80 volt. Possono funzionare anche interruttori molto piccoli anche intorno ai 10 – 12 volt. Quello costruito da J. Carpentier (fig. 24) è costituito da un serbatoio di ottone rivestito di piombo, e chiuso ermeticamente da un coperchio forato da tre tubi: uno serve per introdurre l'elettrodo, l'altro contiene un termometro, il terzo permette l'evacuazione dei gas; un terminale è fissato al coperchio; il serbatoio è accuratamente circondato da una guaina isolante in feltro, e il tutto è racchiuso in un involucro di legno. L'elettrodo mobile è costituito da un filo di platino saldato all'estremità di un'asta di piombo filettata e da un dado sul quale è fissato il secondo terminale di ingresso della corrente; questo insieme è fissato nella sua tubazione mediante un tappo di gomma. L'asta regolabile è ricoperta da un tubo di vetro, un'estremità del quale, forata, permette la fuoriuscita del filo di platino.

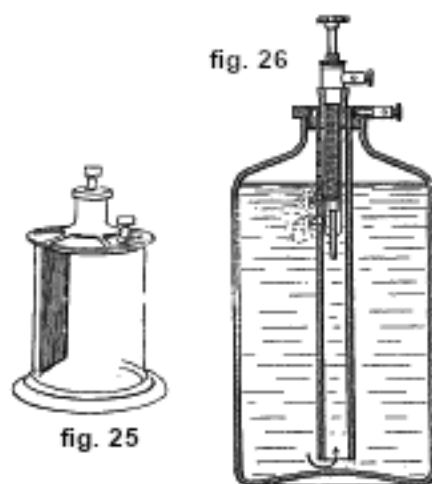


Con un'adeguata regolazione dell'autoinduzione e della lunghezza della punta in platino, il numero di interruzioni del dispositivo Wehnelt può arrivare a 2000 al secondo. La teoria dell'interruttore elettrolitico non è ancora ben consolidata. Non c'è dubbio che si tratta di un processo vibratorio (S. Thompson, Goldhammer, Ruhmer, H. Th. Simon, ecc.), perché si può ottenere un buon funzionamento solo con un selv nel circuito. W. Mitkewitch ritiene che nell'interruttore Wehnelt si verifichino fenomeni simili a quelli dell'arco voltaico: la natura unilaterale del funzionamento dell'interruttore, cioè la necessità di collegare il platino al polo positivo della sorgente di corrente, è che il platino, nel collegamento inverso, essendo spento, viene messo in condizione di inviare un flusso di particelle cariche negativamente (elettroni), e che quindi non si verifica la ripartizione della corrente.

Una variante interessante dell'interruttore Wehnelt è dovuta a H. Th. Simon. Nel suo interruttore i due elettrodi hanno quasi le stesse dimensioni. Uno degli elettrodi è posto nel vaso di

vetro esterno, il secondo all'interno di un tubo di porcellana (fig. 25), comunicante con il vaso esterno attraverso una o più aperture. Come elettrolita viene utilizzato l'acido solforico.

J. Carpentier costruisce il modello mostrato in figura 26, che ha il vantaggio di poter funzionare per lungo tempo alla tensione ordinaria delle reti di distribuzione. Innanzitutto ha una capacità sufficientemente grande tale che il riscaldamento totale della sua massa è molto lento. Inoltre, grazie alla circolazione prodotta dalle differenze di densità, funziona a freddo purché non venga riscaldata tutta la massa dell'elettrolita lontana dall'anodo. Quando si posiziona un anodo Wehnelt in un grande recipiente, si nota che tutto il liquido posto sopra l'anodo si riscalda, mentre quello che sta sotto rimane freddo. Nel dispositivo rappresentato dalla figura 26, il vaso di vetro contiene un tubo verticale di piombo formante un catodo, al centro del quale si trova un anodo a vite regolabile, simile a quello del modello precedente (fig. 24). Il tubo di piombo catodo scende fino a pochi millimetri dal fondo del vaso; sopra l'anodo vi sono fori che si aprono verso il livello superiore del liquido. È facile capire cosa succede: non appena il circuito viene chiuso, l'elettrolita che è a contatto con l'anodo si riscalda velocemente e, in virtù della sua variazione di densità, tende a risalire nel tubo, mentre viene sostituito dal liquido freddo aspirato dalla parte inferiore. Non appena l'interruttore entra in funzione, nel tubo di piombo si stabilisce regolarmente la circolazione ed il liquido caldo fuoriesce dai fori posti nella parte superiore.



L'andamento è così regolare che toccando il vaso di vetro si nota una separazione molto netta tra lo strato superiore caldo e quello inferiore freddo; la linea di separazione scende lentamente fino a riscaldare l'intera massa del liquido; si riesce così a coinvolgere tutto l'elettrolita nel riscaldamento e, con un contenitore da 4 a 5 litri di capacità, si può ottenere un funzionamento continuo per un'ora a 120 volt e da 12 a 15 ampere. Inoltre, la corrente liquida che si produce attorno all'anodo permette di ottenere una maggiore regolarità delle interruzioni rispetto a quelle fornite dagli anodi immersi in una grande massa di liquido. L'elettrolita utilizzato può ovviamente essere qualsiasi, ma è preferibile utilizzare una soluzione semisatura di solfato di magnesio; con questa soluzione i risultati sono pari a quelli dell'acqua solforosa acidulata e non si verificano né fumi sgradevoli né corrosione delle parti metalliche.

Spesso più interruttori Wehnelt vengono installati in parallelo.

Come abbiamo visto, per ottenere il miglior effetto nel circuito secondario, la corrente primaria deve essere interrotta il più repentinamente possibile. Lord Rayleigh ha mostrato che l'effetto massimo si ottiene tagliando il conduttore con una palla di fucile, vale a dire effettuando una rottura molto improvvisa; ma la maggior parte degli interruttori meccanici non soddisfa questa condizione. Fizeau (1853) fu il primo a indicare un mezzo per rimediare a questo difetto. Si uniscono ai due punti tra i quali avviene la rottura, le armature di un condensatore. Il condensatore deve avere, a seconda delle qualità dell'interruttore, una determinata capacità,

per produrre l'effetto migliore. Pertanto l'interruttore Wehnelt deve essere utilizzato senza condensatore se si vuole ottenere la scintilla più lunga possibile. Quanto più bruscamente l'interruttore interviene, tanto minore deve essere la capacità collegata in serie al circuito primario. Trowbridge è riuscito a raddoppiare la lunghezza della scintilla di una bobina di induzione, solitamente dotata di un interruttore a martello con condensatore, utilizzando un interruttore, senza condensatore, con interruzione improvvisa.

Le dimensioni del condensatore che produce l'effetto migliore dipendono inoltre dalle dimensioni della bobina di induzione, dalla sua autoinduzione, dalla potenza della corrente primaria, ecc. Esiste, per ogni bobina, un optimum, che corrisponde a condizioni ben definite.

L'azione del condensatore è stata spiegata teoricamente in vari modi. Innanzitutto si presumeva che l'unica funzione del condensatore fosse quella di spegnere la scintilla nel punto di rottura. Si produce infatti nell'avvolgimento primario, al momento dell'interruzione della corrente, una notevole forza elettromotrice. Se la capacità verso il punto di rottura è piccola, in questo punto si stabilisce una grande differenza di potenziale, che provoca una scintilla di scarica, per cui la corrente primaria non viene interrotta così bruscamente come sarebbe auspicabile. L'aggiunta di un condensatore collegato in parallelo al punto di rottura permette alla forza elettromotrice di accumulare maggiori quantità di elettricità, a questo punto la tensione non raggiunge un valore così elevato e la scintilla non si manifesta. L'aumento di capacità consente alla extra corrente di rottura di circolare nel circuito già aperto (per caricare il condensatore). Il campo magnetico primario è così annullato più lentamente, il che ha inoltre l'effetto di ridurre la tensione nella bobina secondaria. Diventa quindi evidente l'esistenza di un certo optimum per la dimensione del condensatore. Ma in realtà il ruolo del condensatore è molto più complicato. Nel momento in cui la corrente primaria viene aperta dall'interruttore, le extracorrenti producono sulle armature dei condensatori tensioni considerevoli, molte volte superiori alla tensione della batteria esterna impiegata. Si può allora considerare il circuito complessivo come formato: 1. dal condensatore, 2. dall'avvolgimento primario della bobina, e 3. dalla batteria, collegati in serie. In questo circuito avviene la scarica del condensatore che assume, in queste condizioni, un carattere oscillatorio (vedi sotto). Queste oscillazioni a loro volta possono agire sul carattere dei fenomeni nel circuito secondario. Innanzitutto riducono il magnetismo residuo del nucleo di ferro (Fleming) e quindi aumentano il valore di  $dN : dt$ ; in secondo luogo, come verrà spiegato in seguito, può verificarsi una risonanza tra le oscillazioni proprie dell'avvolgimento primario e quello secondario, che deve produrre un ulteriore notevole aumento della tensione nel secondario. Tuttavia, secondo le ricerche di Armagnat, Walter, W. Lébédinsky e altri, la presenza di correnti nell'avvolgimento secondario agisce fortemente sul funzionamento dell'interruttore. Il numero e il carattere delle oscillazioni possono essere profondamente modificati dalla lunghezza della scintilla secondaria. La questione è ulteriormente complicata dal fatto che nella maggior parte degli interruttori meccanici la distanza tra i contatti nel punto di rottura aumenta abbastanza lentamente, tanto che due o tre scariche passano attraverso l'interruttore prima che inizino le scariche oscillanti del condensatore con l'interruttore aperto. Lo studio teorico è infine reso molto difficile, perché le proprietà della scintilla al punto di rottura non sono sufficientemente conosciute e la distanza tra i due elettrodi ed il loro stato subiscono modifiche non ben definibili.

## 12. Teoria approssimata della bobina di induzione

La realizzazione di una teoria completa della bobina di induzione, alimentata da una corrente costante con un interruttore sul primario, presenta difficoltà quasi insormontabili, a causa dei fattori di instabilità come la resistenza alla scintilla nel circuito secondario e nell'interruttore. Le equazioni generali per due cosiddetti circuiti accoppiati possono essere scritte in forma differenziale, ma gli integrali si possono trovare solo in casi particolari. Consideriamo due circuiti, l'uno primario e l'altro secondario, di resistenze  $R_1$  e  $R_2$  con coefficienti di autoinduzione  $L_1$

e  $L_2$ , un coefficiente di mutua induzione  $L_{1,2}$ . Alle estremità di questi circuiti sono applicate differenze di potenziale o forze elettromotrici  $E_1$  e  $E_2$ , e nei circuiti passano le correnti  $I_1$  e  $I_2$ . La forza elettromotrice totale del primo circuito si compone della forza elettromotrice applicata  $E_1$ , della forza elettromotrice di autoinduzione  $-L_1 \frac{dI_1}{dt}$  e della forza elettromotrice  $-L_{1,2} \frac{dI_2}{dt}$  prodotta dall'induzione del secondo circuito sul primo.

Dalla legge di Ohm, la somma di queste forze elettromotrici è uguale a  $I_1 R_1$ , ciò che dà l'equazione

$$E_1 - L_1 \frac{dI_1}{dt} - L_{1,2} \frac{dI_2}{dt} = R_1 I_1 \quad (2.68)$$

e si ha in modo analogo per il secondo circuito

$$E_2 - L_2 \frac{dI_2}{dt} - L_{1,2} \frac{dI_1}{dt} = R_2 I_2 \quad (2.69)$$

La forza elettromotrice  $E_2$  è ordinariamente nulla;  $E_1$  è costante nelle bobine alimentate a corrente costante, ma essendo  $R_1$  e  $R_2$  variabili, non si può integrare queste equazioni nella loro forma generale, ma eseguire facilmente l'integrazione per i periodi in cui  $R_1$  e  $R_2$  rimangono costanti. Considereremo due casi: quello della corrente primaria chiusa e quello della corrente primaria aperta; considereremo soprattutto i periodi di chiusura e di apertura. Assumeremo il circuito secondario chiuso in cortocircuito e avente una determinata resistenza  $R_2$ .

**CHIUSURA CIRCUITO PRIMARIO.** — Se il processo di chiusura avviene in un intervallo di tempo  $\Delta t$  estremamente breve, durante il quale le grandezze  $E_1$ ,  $R_1 I_1$ , e  $R_2 I_2$  rimangono finite, si conclude dalle equazioni (65) e (66) che

$$\begin{cases} L_1 \Delta I_1 + L_{1,2} \Delta I_2 = 0 \\ L_2 \Delta I_2 + L_{1,2} \Delta I_1 = 0 \end{cases} \quad (2.70)$$

dove  $\Delta I_1$  e  $\Delta I_2$  indicano le variazioni totali delle correnti  $I_1$  e  $I_2$  nell'intervallo di tempo  $\Delta t$ .

Se  $L_1 L_2 - L_{1,2}^2 \neq 0$ , si ha

$$\Delta I_1 = \Delta I_2 = 0 \quad (2.71)$$

cioè, nel periodo di chiusura di corrente, le correnti non hanno il tempo di variare sostanzialmente, né nel primario né nel secondario. Dal momento in cui la corrente è chiusa i fenomeni si verificano con  $R_1$  costante. Le equazioni corrispondenti si scrivono

$$R_1 I_1 + L_1 \frac{dI_1}{dt} + L_{1,2} \frac{dI_2}{dt} = E_1 \quad (2.72)$$

$$R_2 I_2 + L_2 \frac{dI_2}{dt} + L_{1,2} \frac{dI_1}{dt} = 0 \quad (2.73)$$

Queste equazioni sono facilmente integrabili. Differenziandole rispetto a  $t$ , si dispone di un sistema di quattro equazioni, tra le quali si può eliminare  $I_2$ ,  $\frac{dI_2}{dt}$ ,  $\frac{d^2 I_2}{dt^2}$ , poi  $I_1$ ,  $\frac{dI_1}{dt}$ ,  $\frac{d^2 I_1}{dt^2}$ ; si ottengono così le due equazioni seguenti

$$\frac{d^2 I_1}{dt^2} (L_1 L_2 - L_{1,2}^2) + \frac{dI_1}{dt} (L_2 R_1 + L_1 R_2) + I_1 R_1 R_2 = E_1 R_2 \quad (2.74)$$

$$\frac{d^2 I_2}{dt^2} (L_1 L_2 - L_{1,2}^2) + \frac{dI_2}{dt} (L_2 R_1 + L_1 R_2) + I_2 R_1 R_2 = 0 \quad (2.75)$$

Dalla definizione stessa dei coefficienti di autoinduzione e del coefficiente di mutua induzione segue che  $L_1 L_2 - L_{1,2}^2 \geq 0$ . Infatti, il coefficiente di autoinduzione è la somma dei flussi magnetici che attraversano tutte le spire ( $n$ ) di una bobina, quando questa è percorsa da una corrente di un ampere. Designiamo il flusso magnetico con  $\Psi$ , si avrà

$$L_1 = n_1 \Psi_1 \quad L_2 = n_2 \Psi_2 \quad (2.76)$$

Il coefficiente di mutua induzione è la somma dei flussi che attraversano tutte le spire ( $n_2$ ) della bobina secondaria, quando la primaria è percorsa da una corrente di un ampere, o viceversa.

Nel caso più favorevole, quando non vi è alcuna perdita, cioè quando il flusso totale  $\Psi_1$  attraversa tutti le  $n_2$  spire, o viceversa  $\Psi_2$  tutte le  $n_1$  spire, si ha

$$L_{1,2} = n_2 \Psi_1 = n_1 \Psi_2$$

e quindi

$$L_1 L_2 - L_{1,2}^2 = 0$$

Ma il più delle volte si ha una perdita molto evidente di flusso magnetico; si ha quindi  $L_{1,2} < n_2 \Psi_1$  e  $L_{1,2} < n_1 \Psi_2$  e di conseguenza  $L_1 L_2 - L_{1,2}^2 > 0$ . Tutti i coefficienti di  $I$  e delle sue derivate nelle equazioni (71) e (72) sono quindi positivi. Designiamoli con  $A, B, C$ ; le equazioni si scrivono come segue:

$$A \frac{d^2 I_1}{dt^2} + B \frac{dI_1}{dt} + CI_1 = E_1 R_2 \quad (2.77)$$

$$A \frac{d^2 I_2}{dt^2} + B \frac{dI_2}{dt} + CI_2 = 0 \quad (2.78)$$

Gli integrali di queste equazioni sono

$$I_1 = P_1 e^{-\alpha_1 t} + Q_1 e^{-\alpha_2 t} + \frac{E_1 R_2}{C} \quad (2.79)$$

$$I_2 = P_2 e^{-\alpha_1 t} + Q_2 e^{-\alpha_2 t} \quad (2.80)$$

dove  $P_i, Q_i$  sono costanti di integrazione,  $C = R_1 R_2$  e dove  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  devono soddisfare l'equazione caratteristica seguente

$$A\alpha^2 + B\alpha + C = 0 \quad (2.81)$$

le cui radici  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  sono reali e positive. Supponendo che  $I_1$  e  $I_2$  siano nulli nell'istante iniziale  $t = 0$ , si hanno le due equazioni seguenti per determinare  $P_1, P_2, Q_1, Q_2$ :

$$P_1 + Q_1 + \frac{E_1}{R_1} = 0 \quad (2.82)$$

$$P_2 + Q_2 = 0 \quad (2.83)$$

di modo che la (71,b) e la (72,b) contengono solo due costanti di integrazione indipendenti. I valori di  $I_1$  e  $I_2$  determinate dagli integrali (71,b) e (72,b) devono soddisfare le equazioni fondamentali (69) e (70). Ma, se si tiene conto dell'equazione caratteristica (74), basta che una sola delle equazioni (69) e (70) sia soddisfatta, poiché anche la seconda lo sarà. Portando la (71,b) e la (72,b) nella (69), viene

$$\{P_1 (R_1 - L_1 \alpha_1) - P_2 L_{1,2} \alpha_1\} e^{-\alpha_1 t} + \{Q_1 (R_1 - L_1 \alpha_2) - Q_2 L_{1,2} \alpha_2\} e^{-\alpha_2 t} + E_1 = E_1$$

Questa equazione è identicamente soddisfatta, quando lo sono le due condizioni seguenti:

$$P_1 (R_1 - L_1 \alpha_1) - P_2 L_{1,2} \alpha_1 = 0 \quad (2.84)$$

$$Q_1 (R_1 - L_1 \alpha_2) - Q_2 L_{1,2} \alpha_2 = 0 \quad (2.85)$$

L'equazione (70) fornisce la coppia corrispondente di equazioni;

$$P_2 (R_2 - L_2 \alpha_1) - P_1 L_{1,2} \alpha_1 = 0 \quad (2.86)$$

$$Q_2 (R_2 - L_2 \alpha_2) - Q_1 L_{1,2} \alpha_2 = 0 \quad (2.87)$$

Dalla (71,d) e (71,e), si deduce

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{L_{1,2}\alpha_1}{R_1 - L_1\alpha_1} \quad \frac{P_1}{P_2} = \frac{R_2 - L_2\alpha_1}{L_{1,2}\alpha_1}$$

essendo uguali le due equazioni di destra, si ha

$$(R_2 - L_2\alpha_1)(R_1 - L_1\alpha_1) = L_{1,2}^2\alpha_1^2$$

cioè un'equazione analoga alla (74), visti i valori di  $A, B, C$ ; l'equazione (71,e) è quindi una conseguenza della (71,d) e analogamente la (72,c) risulta dalla (72,d). Le relazioni (71,c), (72,c), (71,e), (72,e) oppure (71,d) e (72,d) permettono di determinare le quattro costanti di integrazione; si ottiene così

$$I_1 = \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_1 \alpha_2 (R_2 - L_2\alpha_1) e^{-\alpha_1 t} - \alpha_1 (R_2 - L_2\alpha_2) e^{-\alpha_2 t}}{(R_2 - L_2\alpha_2) \alpha_1 - (R_2 - L_2\alpha_1) \alpha_1} \quad (2.88)$$

$$I_2 = \frac{E_1}{R_1} \frac{L_{1,2} \alpha_1 \alpha_2 (e^{-\alpha_1 t} - e^{-\alpha_2 t})}{(R_2 - L_2\alpha_2) \alpha_1 - (R_2 - L_2\alpha_1) \alpha_1} \quad (2.89)$$

La prima espressione è zero per  $t = 0$ , e aumenta poco a poco, al crescere di  $t$ , fino al valore limite  $E_1/R_1$ . La seconda aumenta da zero al massimo e poi ritorna a zero.

APERTURA IMPROVVISA DEL CIRCUITO PRIMARIO. — Questo caso può essere trattato in modo simile. Le condizioni iniziali sono le seguenti: nel circuito primario, la corrente ha un'intensità uguale a  $E_1/R_1$ ; non c'è corrente nel secondario. La corrente primaria viene improvvisamente interrotta, per cui l'intensità  $I$  cade a zero in un certo intervallo di tempo  $\Delta t$  molto piccolo, mentre la resistenza  $R$  aumenta fino a diventare infinita. Il circuito secondario è chiuso e non vi è applicata alcuna forza elettromotrice esterna, vale a dire che  $E_2 = 0$  e  $R_2$  rimane finito come  $I_2$ . Dall'equazione (66), si può concludere, da quanto esposto, che l'espressione

$$L_2 \frac{dI_2}{dt} + L_{1,2} \frac{dI_1}{dt} \quad (2.90)$$

deve mantenere un valore finito, cosa che non si può dire della (65), perché la quantità  $R_1$  che vi appare diventa infinita. Moltiplicando la (76) per  $\Delta t$ , si può scrivere, essendo  $\Delta t$  piccolo,

$$L_2 \Delta I_2 + L_{1,2} \Delta I_1 = 0$$

ma, in questa relazione,  $\Delta I_2$  e  $\Delta I_1$  non sono più nulli separatamente come nella (67). La corrente che cade nel circuito primario da  $E_1/R_1$  a zero,  $\Delta I_1 = -\frac{E_1}{R_1}$  e pertanto

$$\Delta I_2 = \frac{L_{1,2}}{L_2} \frac{E_1}{R_1} \quad (2.91)$$

È l'espressione dell'intensità di corrente nel momento dell'apertura della corrente primaria. Da questo momento il circuito primario non agisce quasi più sul secondario e la corrente, in quest'ultimo, diminuisce, secondo la formula (14)

$$I_2 = \frac{L_{1,2}}{L_2} \frac{E_1}{R_1} e^{-\frac{R_2}{L_2} t} \quad (2.92)$$

La realtà è molto più complessa, poiché il primario contiene un condensatore, nel circuito aperto si verificano oscillazioni e l'isteresi, le correnti di Foucault, ecc. del nucleo di ferro alterano i fenomeni.

Abbiamo stabilito formule approssimate per determinare l'intensità di corrente nei circuiti primario e secondario. Secondo Lord Rayleigh, la massima tensione possibile si ottiene ai capi

di una bobina di induzione aperta, quando tutta l'energia magnetica del primario, che è pari a  $\frac{1}{2}L_1I_1^2$ , si trasforma in energia elettrostatica, caricando al potenziale  $E_2$  la capacità  $C_2$  del secondario, la cui energia è  $\frac{1}{2}C_2E_2^2$ . Si ha così

$$E_2 = I_1 \sqrt{\frac{L_1}{C_2}} \quad (2.93)$$

Nei suoi esperimenti Lord Rayleigh è riuscito, aprendo il circuito primario con un proiettile di arma da fuoco, a raggiungere una tensione prossima a quella calcolata con la formula (79). In questa formula, la capacità  $C_2$  comprende la capacità dell'avvolgimento e le capacità aggiunte alle estremità.

Anche la capacità dell'avvolgimento è piccola, dell'ordine di  $10^{-12}$  farad. Negli ultimi tempi, le bobine di induzione sono state spesso alimentate non da una corrente intermittente, ma da una corrente alternata sinusoidale. Il funzionamento delle bobine è poi simile a quello dei trasformatori in corrente alternata, che studieremo in seguito.

### 13. Corrente alternata

La corrente alternata è una corrente che cambia verso un gran numero di volte (fino a 100 e più) in un secondo. Una corrente alternata si ottiene facendo agire una forza elettrica alternata in un circuito. La legge più semplice della variazione nel tempo della forza elettromotrice è la legge della variazione sinusoidale. Le correnti solitamente utilizzate nella tecnica differiscono notevolmente dalla corrente sinusoidale; ma, secondo il teorema di Fourier, qualsiasi funzione periodica del tempo può sempre essere posta sotto forma di una somma indefinita di funzioni sinusoidali, di ampiezza e fasi opportune, e di periodi decrescenti in progressione aritmetica. Lo studio delle forze elettromotrici sinusoidali è quindi di grande importanza e deve essere posto alla base dell'esposizione delle proprietà delle correnti alternate. Considereremo quindi innanzitutto una forza elettromotrice che varia secondo la legge

$$E = E_0 \sin 2\pi \frac{t}{T} \quad (2.94)$$

essendo  $E_0$  la tensione maggiore durante l'intero periodo  $T$ . Molto spesso, al posto del periodo  $T$ , si introduce la grandezza  $\nu = \frac{2\pi}{T}$ ; rappresenta il numero di alternanze totali in  $2\pi$  secondi. Si usa anche la grandezza  $n = \frac{1}{T}$ , che si chiama la *frequenza*; è il numero di periodi nell'unità di tempo. Nella corrente alternata ordinaria si ha circa  $n = 50$  e di conseguenza  $\nu$  è uguale a circa 314.

I dispositivi di misura della tensione alternata forniscono solitamente solo un valore medio. Per misure di questo tipo si possono utilizzare solo strumenti le cui indicazioni sono indipendenti dal verso della corrente. Tali sono, in primo luogo, i vari tipi di voltmetri termici, nei quali la deviazione dell'ago è dovuta al calore prodotto dalla corrente; tali sono anche i dispositivi in cui la deviazione dell'ago risulta dall'aspirazione di un nucleo di ferro all'interno di una bobina percorsa da corrente.

Per spiegare cosa indica effettivamente un dispositivo termico, confronteremo le sue indicazioni in corrente costante e in corrente alternata. L'entità della deviazione dipende dalla quantità di calore rilasciato nell'unità di tempo. Prenderemo come unità di tempo il periodo  $T$  della corrente alternata. Poiché il dispositivo non è dotato né di autoinduzione né di capacità, si può, quando è inserito in un circuito percorso da una corrente alternata, applicargli in ogni istante l'uguaglianza

$$I = \frac{E_0 \sin 2\pi \frac{t}{T}}{R}$$



dove  $R$  indica la resistenza del voltmetro. La quantità totale di calore liberata nel tempo  $T$  per effetto Joule +

$$Q = \int_0^T \frac{E_0^2 \sin^2 2\pi \frac{t}{T}}{R} dt = \frac{E_0^2}{R} \int_0^T \sin^2 2\pi \frac{t}{T} dt \quad (2.95)$$

l'integrale presente al secondo membro dell'ultima uguaglianza è uguale a  $\frac{T}{2}$  e si ha pertanto

$$Q = \frac{E_0^2 T}{R 2}$$

La quantità di calore liberata nel tempo  $T$  nello stesso strumento da una corrente costante di tensione  $E$ , è determinata dall'espressione

$$\frac{E_1^2}{R} T$$

Quando le indicazioni sono le stesse in entrambi i casi, si dice che  $E_1$  equivale alla tensione della corrente alternata, dal punto di vista del rilascio di energia termica. Questa tensione  $E_1$  è detta tensione effettiva  $E_{eff}$  della corrente alternata; da quanto precede, si ha tra questa tensione ed  $E_0$ , la seguente relazione:

$$E_{eff}^2 = E_1^2 = \frac{E_0^2}{2}$$

o

$$E_{eff} = E_1 = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \quad (2.96)$$

Si definisce in modo analogo, come intensità efficace di una corrente sinusoidale, la seguente grandezza

$$I_{eff} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \quad (2.97)$$

Se quindi un voltmetro di corrente alternata indica 110 volt, nel circuito ci sono 156 volt negli istanti in cui la tensione è massima; questa è una delle cause del grande pericolo delle correnti alternate.

Consideriamo ora le leggi che governano il passaggio di una corrente alternata in un circuito dotato di autoinduzione e capacità. Considereremo innanzitutto l'effetto dell'autoinduzione  $L$ . Quando in un circuito di autoinduzione  $L$  e di resistenza  $R$  agisce una tensione  $E_0 \sin \nu t$  ( $\nu = \frac{2\pi}{T}$ ), una forza elettromotrice aggiuntiva di autoinduzione appare nel circuito e la forza elettromotrice totale, uguale a  $IR$  secondo la legge di Ohm, è la somma di queste due forze elettromotrici; si ha quindi

$$IR = E_0 \sin \nu t - L \frac{dI}{dt}$$

o

$$L \frac{dI}{dt} + IR = E_0 \sin \nu t \quad (2.98)$$

L'integrale di questa equazione è

$$I = Ae^{-\frac{R}{L}t} + B \sin(\nu t - \gamma) \quad (2.99)$$

essendo  $A$  una costante di integrazione determinata dalle condizioni iniziali, e  $B$  e  $\gamma$  due costanti che possono essere scelte in modo che la funzione (85) sia una soluzione dell'equazione (84). Portando la (85) nella (84) e espandendo  $\sin(\nu t - \gamma)$  e  $\cos(\nu t - \gamma)$  secondo le note formule

trigonometriche, poi uguagliando il coefficiente di  $\sin \nu t$  a  $E_0$  e quello di  $\cos \nu t$  a zero, si ottengono le seguenti due relazioni:

$$\begin{cases} BR \cos \gamma + B\nu L \sin \gamma = E_0 \\ BR \sin \gamma - B\nu L \cos \gamma = 0 \end{cases} \quad (2.100)$$

da cui si deduce

$$\begin{cases} \tan \gamma = \frac{\nu L}{\frac{E_0}{B}} \\ B = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + L^2 \nu^2}} \end{cases} \quad (2.101)$$

Si ottiene infine l'espressione

$$I = Ae^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + L^2 \nu^2}} \sin(\nu t - \gamma)$$

con  $\gamma$  determinato dalla prima delle (87).

Il termine  $Ae^{-\frac{R}{L}t}$  tende assai rapidamente a zero, poiché la resistenza  $R$  è di solito grande rispetto a  $L$ .

Ricordiamo che  $[R]$  espressa in ohm è uguale a  $[R \cdot 10^9]$  unità elettromagnetiche C.G.S. e ha come dimensione  $\frac{L}{T}$ ; l'autoinduzione  $[L]$  in henry è uguale a  $[L \cdot 10^9]$  unità elettromagnetiche C.G.S. e possiede la dimensione  $L$ ; si può quindi, nell'espressione  $\frac{R}{L}t$ , sostituire  $R$  e  $L$  con unità pratiche, essendo  $\frac{R}{L}t$  un numero astratto. Così, per i diversi avvolgimenti della bobina di induzione si hanno i numeri seguenti: 1. Nell'avvolgimento primario,  $\frac{R}{L} = \frac{0,36}{0,02} = 18$ ; 2. nel secondario  $\frac{R}{L} = \frac{6600}{460} = 14,4$ . Dopo un certo tempo, il termine  $Ae^{-\frac{R}{L}t}$  è quindi scomparso e il regime dello strumento è allora definito dalla formula

$$I = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + L^2 \nu^2}} \sin(\nu t - \gamma) = I_0 \sin(\nu t - \gamma) \quad (2.102)$$

dove  $I_0 = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + L^2 \nu^2}}$  e  $\gamma$  è determinato dalla prima delle (87). L'intensità efficace si esprime con la formula analoga

$$I_{eff} = \frac{E_{eff}}{\sqrt{R^2 + L^2 \nu^2}} \quad (2.103)$$

Poiché la dimensione di  $[L]$  è  $L$  e quella di  $[\nu]$   $\frac{1}{T}$ , la dimensione di  $[L\nu]$  è quella di una velocità, cioè quella di  $[R]$ . Inoltre, essendo l'henry e l'ohm entrambi pari a  $10^9$  unità assolute, è possibile, nelle formule espresse in unità pratiche, utilizzare un'espressione in henry per  $L$ .

Il risultato è il seguente: *la sinusoide che rappresenta graficamente la corrente è spostata indietro ( $\gamma$  è positivo) rispetto alla sinusoide della forza elettromotrice*. Per  $L$  e  $\nu$  grandi,  $R$  piccola, la  $\tan \gamma$  può raggiungere un valore elevato. Così, ponendo  $\nu = \frac{2\pi}{0,02} = 314$ , si ottiene, per l'avvolgimento primario della bobina di induzione presa da sola,  $\frac{L\nu}{R} = 17$ , ciò che dà  $\gamma = 86,7^\circ$ . Nel caso limite in cui  $\gamma = 90^\circ$ , si producono fenomeni interessanti: *l'intensità della corrente raggiunge il suo massimo, quando la forza elettromotrice diviene nulla e inversamente*.

La formula (89) mostra che quando nel circuito è presente autoinduzione e la frequenza è elevata, l'intensità di corrente è molto inferiore rispetto al caso in cui il circuito ha solo la resistenza  $R$ . Pertanto, prendendo l'avvolgimento primario della bobina di induzione isolatamente si ha  $R = 0,36 \cdot \sqrt{R^2 + \nu^2 L^2} = 6,3$ ; la resistenza apparente è quindi 18 volte maggiore di  $R$ .

Si può determinare  $L$  usando la formula (89). Infatti, conoscendo l'intensità della corrente  $I_{eff}$ , la tensione  $E_{eff}$ , la resistenza  $R$  e  $\nu$ , si ottiene  $L$ . L'espressione  $\sqrt{R^2 + \nu^2 L^2}$  porta il nome di *resistenza apparente* o *impedenza*, mentre la quantità  $\nu L$  è detta *resistenza induttiva* o *induttanza*. La resistenza  $R$  viene spesso definita resistenza ohmica o semplicemente *resistenza*<sup>2</sup>.

<sup>2</sup>Si adotta talvolta la seguente terminologia utilizzata in elettrotecnica: resistenza totale per l'impedenza, resistenza dewattizzata per l'induttanza, resistenza wattizzata per la resistenza. Il significato dei termini wattizzato e dewattizzato verrà spiegato più avanti.

Consideriamo ora un circuito che non presenta un'autoinduzione apprezzabile, ma solo una resistenza  $R$  ed una capacità  $C$  in serie alla sorgente di forza elettromotrice alternata. La differenza di potenziale alle armature di un condensatore è uguale al quoziente della quantità di elettricità  $\int_0^t I dt$ , che è fluita verso il condensatore, per la capacità  $C$ . Per avere la forza elettromotrice totale, uguale a  $IR$  secondo la legge di Ohm, è necessario sommare alla forza elettromotrice applicata  $E_0 \sin \nu t$  la differenza di potenziale alle armature del condensatore, che è ad essa opposta (presa negativamente). Si ottiene così l'equazione

$$E_0 \sin \nu t - \frac{\int_0^t I dt}{C} = IR \quad (2.104)$$

Differenziando, si ha

$$E_0 \cos \nu t - \frac{I}{C} = R \frac{dI}{dt}$$

o

$$R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = E_0 \cos \nu t \quad (2.105)$$

L'integrale di questa equazione è

$$I = Ae^{-\frac{t}{RC}} + B \sin(\nu t - \gamma) \quad (2.106)$$

dove  $A$  è una costante di integrazione e dove  $B$  e  $\gamma$  devono essere determinati sostituendo la (92) nella (91). Si ottengono così le relazioni

$$\begin{cases} BR\nu \cos \gamma - \frac{B \sin \gamma}{C} = E_0 \nu \\ BR\nu \sin \gamma + \frac{B \cos \gamma}{C} = 0 \end{cases} \quad (2.107)$$

da cui si deduce

$$\begin{cases} \tan \gamma = -\frac{I}{R\nu C} \\ B = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\nu^2 C^2}}} \end{cases} \quad (2.108)$$

Il termine  $Ae^{-\frac{t}{RC}}$  scompare nel tempo tanto più velocemente quanto  $R$  e  $C$  sono piccoli; si stabilisce allora il seguente regime:

$$I = \frac{E_0 \sin(\nu t - \gamma)}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\nu^2 C^2}}} = I_0 \sin(\nu t - \gamma) \quad (2.109)$$

dove

$$I_0 = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\nu^2 C^2}}}$$

l'intensità efficace è

$$I_{eff} = \frac{E_{eff}}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\nu^2 C^2}}} \quad (2.110)$$

Dalla formula (95) si conclude che la sinusoide della corrente è in anticipo rispetto alla sinusoide della forza elettromotrice della fase  $\gamma$  ( $\gamma$  è negativa), determinata dalla prima formula (94). Poiché  $\nu$  è normalmente piuttosto grande, l'anticipo può raggiungere valori grandi solo per  $R$  e  $C$  piccoli. La formula (96) mostra che, in un circuito chiuso su un condensatore, la corrente è tanto più intensa quanto maggiore è  $C$ . Quando  $C$  è molto grande ( $\frac{1}{\nu C} = 0$ ), l'intensità della corrente è la stessa di quando non è presente il condensatore e la resistenza  $R$  è l'unica nel circuito. Allo stesso tempo, l'anticipo della corrente viene annullato. Poiché la capacità  $C$ , misurata in farad, è uguale a  $10^{-9}$  unità elettromagnetica C.G.S. e ha dimensioni  $L^{-1}T^2$ , l'espressione  $\frac{1}{\nu C}$

ha le dimensioni di una velocità (come  $R$ ) e, come l'ohm, è uguale alle  $10^9$  corrispondenti unità elettromagnetiche. Se quindi  $R$  si valuta in ohm, è necessario, nella formula (95) e in formule simili, esprimere  $C$  in farad. Il termine  $\frac{1}{\nu C}$  è di dimensione zero, come deve essere. L'espressione  $\frac{1}{\nu C}$  è detta capacità.

Nella maggior parte delle applicazioni tecniche, ci si trova in presenza del caso generale, dove si ha in serie nel circuito la capacità  $C$ , l'autoinduzione  $L$  e la resistenza  $R$ . Da quanto detto, si ha allora l'equazione

$$E_0 \sin \nu t - L \frac{dI}{dt} - \frac{\int_0^t I dt}{C} = IR \quad (2.111)$$

differenziandola, si ha

$$E_0 \cos \nu t - L \frac{d^2 I}{dt^2} - \frac{1}{C} I = R \frac{dI}{dt}$$

o

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = E_0 \cos \nu t \quad (2.112)$$

L'integrale generale di questa equazione è

$$I = A_1 e^{-\alpha_1 t} + A_2 e^{-\alpha_2 t} + B \sin(\nu t - \gamma) \quad (2.113)$$

dove  $A_1$  e  $A_2$  sono costanti arbitrarie determinate dalle condizioni iniziali e dove  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  sono determinati dalla sostituzione della (99), nella (98). Queste ultime devono essere scelte in modo che la quantità  $A_1 e^{-\alpha_1 t} + A_2 e^{-\alpha_2 t}$  soddisfi l'equazione (98) senza un secondo membro. Si vede quindi che  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  devono essere le radici dell'equazione caratteristica

$$L\alpha^2 - R\alpha + \frac{1}{C} = 0$$

che solo nelle condizioni esaminate può avere radici reali e positive.

Bisogna scegliere  $B$  e  $\gamma$  nell'espressione  $B \sin(\nu t - \gamma)$ , in modo che sia una soluzione particolare dell'equazione (98) con il secondo membro. Sviluppando  $B \sin(\nu t - \gamma)$  e  $B \cos(\nu t - \gamma)$  secondo le formule note e uguagliando separatamente a zero i coefficienti del seno e coseno, si ottengono le due relazioni

$$\begin{cases} BL\nu^2 \sin \gamma + BR\nu \cos \gamma - \frac{B \sin \gamma}{C} = E_0 \nu \\ -BL\nu^2 \cos \gamma + BR\nu \sin \gamma + \frac{B \cos \gamma}{C} = 0 \end{cases} \quad (2.114)$$

da cui si ricava

$$\begin{cases} \tan \gamma = \frac{L\nu^2 - \frac{1}{C}}{R\nu} = L\nu - \frac{1}{R\nu C} \\ B = \frac{E_0 \nu}{\sqrt{(\frac{1}{C} - L\nu^2)^2 + R^2 \nu^2}} = \frac{E_0}{\sqrt{(\frac{1}{C\nu} - L\nu)^2 + R^2}} \end{cases} \quad (2.115)$$

Quando si stabilisce il regime permanente e i termini  $A_1 e^{-\alpha_1 t}$  e  $A_2 e^{-\alpha_2 t}$  sono scomparsi, si ha

$$I = \frac{E_0 \sin(\nu t - \gamma)}{\sqrt{R^2 + \left(L\nu - \frac{1}{C\nu}\right)^2}} = I_0 \sin(\nu t - \gamma) \quad (2.116)$$

dove  $I_0 : \sqrt{R^2 + \left(L\nu - \frac{1}{C\nu}\right)^2}$ . L'espressione  $\left(L\nu - \frac{1}{C\nu}\right)$  è detta *reattanza*. La corrente efficace è

$$I_{eff} = \frac{E_{eff}}{\sqrt{R^2 + \left(L\nu - \frac{1}{C\nu}\right)^2}} \quad (2.117)$$

Dalla formula (102) si conclude che la sinusoide della corrente può essere spostata, indietro o in avanti, rispetto a quella della forza elettromotrice, secondo il segno di  $\tan \gamma$  nella (101); secondo

la (102,a), l'intensità effettiva della corrente è generalmente inferiore all'intensità definita dalla legge di Ohm. È solo nel caso particolare molto importante in cui

$$\frac{1}{C\nu} = L\nu$$

ciò che dà  $\nu = 1 : \sqrt{LC}$ , che l'autoinduzione è compensata dalla capacità.

La corrente aumenta rapidamente fino al valore determinato dalla legge di Ohm, come se nel circuito non ci fossero né autoinduzione né capacità. Quando la capacità e l'autoinduzione sono nel rapporto precedente, la differenza di fase tra la corrente e la forza elettromotrice è zero. Questo caso è particolarmente interessante, perché corrisponde al fenomeno della risonanza; il periodo proprio delle oscillazioni del circuito è determinato dalla formula  $T = 2\pi\sqrt{LC}$  e il numero di tali oscillazioni è  $\nu = 1 : \sqrt{LC}$ ; nel caso attuale il periodo della forza elettromotrice esterna coincide con il periodo proprio delle oscillazioni del sistema.

Si ricorre alla compensazione reciproca della capacità e dell'autoinduzione, quando grandi autoinduzioni oppongono alla corrente una resistenza apparente troppo considerevole. Di grande interesse è anche lo studio dell'energia della corrente alternata. In ogni elemento temporale  $dt$ , l'energia della corrente è uguale a  $Eldt$ ; ma non si può calcolare la potenza media semplicemente moltiplicando  $I_{eff}$  per  $E_{eff}$ , perché non è in fase con la forza elettromotrice. La potenza della corrente è uguale a

$$W = \frac{1}{T} \int_0^T E_0 \sin \nu t \cdot \frac{E_0 \sin (\nu t - \gamma)}{R'} dt \quad (2.118)$$

dove  $R'$  è la resistenza totale. Sviluppando  $\sin (\nu t - \gamma)$  e osservando che  $\int_0^T \sin^2 \nu t dt = \frac{T}{2}$ ,  $\int_0^T \sin \nu t \cos \nu t dt = 0$  viene

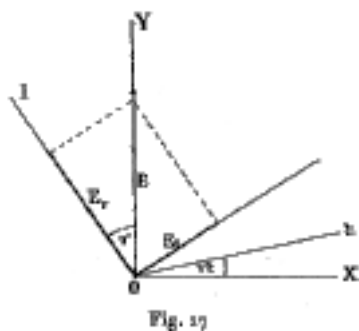
$$W = \frac{1}{2} E_0 \frac{E_0}{R'} \cos \gamma = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \times \frac{I_0}{\sqrt{2}} \cos \gamma = E_{eff} I_{eff} \cos \gamma \quad (2.119)$$

La potenza della corrente dipende quindi da  $\gamma$ . Se  $\gamma$  è prossimo a  $90^\circ$ , la potenza non è lontana dal valore  $I_{eff} E_{eff}$ . Prendiamo ancora come esempio l'avvolgimento primario della bobina di induzione; si avrà a  $\gamma = 86,7^\circ$ ,  $\cos \gamma = 0,075$  e  $R' = 6,3$ . Inserendo questo avvolgimento nel circuito di una corrente alternata di 100 volt, la corrente nell'avvolgimento è pari a  $100 : 6,3 = 15,9 A$ . La sua potenza è quindi

$$W = 100 \cdot 15,9 \cdot 0,075 = 116 \text{ watt}$$

Si può ancora interpretare l'equazione (104) in modo diverso. Consideriamo  $E_{eff}$  e  $I_{eff}$  come vettori che formano tra loro l'angolo  $\gamma$ ;  $I_{eff} E_{eff}$  è quindi il prodotto scalare di questi due vettori. Se scomponiamo il vettore  $E_{eff}$  nei due vettori  $E_{eff} \cos \gamma$  e  $E_{eff} \sin \gamma$  il primo essendo la proiezione del vettore  $E_{eff}$  su  $I_{eff}$ , il secondo perpendicolare a  $I_{eff}$ , si vede che l'energia viene fornita solo dal primo componente; il secondo,  $E_{eff} \sin \gamma$ , rappresenta la componente dewattizzata (senza watt) della forza elettromotrice.

Questioni come queste possono essere risolte graficamente nel modo seguente. Sull'asse  $Y$  si traccia un segmento corrispondente alla forza elettromotrice massima o al modulo della forza elettromotrice e si traccia un vettore di grandezza  $I$  (massima intensità di corrente) che forma con questo asse  $Y$  un angolo  $\gamma$ , contato verso destra se  $\gamma$  è negativo e verso sinistra se  $\gamma$  è positivo. La linea  $Ot$  (fig. 27) è animata da un moto rotatorio uniforme, di velocità angolare  $\nu$ , attorno all'origine  $O$ . La proiezione dei vettori  $I$  ed  $E$  su questa linea in movimento rappresenta in ogni istante l'entità dell'intensità della corrente e quella della forza elettromotrice. Si vede, nella figura 27, che la linea  $Ot$  interseca prima il vettore  $E$  e poi il vettore  $I$ , che corrisponde ad un ritardo della corrente sulla forza elettromotrice.



Siano  $E_r$  e  $E_x$  le due componenti rettangolari di  $E$ , la prima in fase con la corrente, la seconda in anticipo di  $90^\circ$ . La forza elettromotrice in ogni istante  $t$  è uguale a  $E \sin \gamma$  ed è espressa dalla somma

$$E \sin \gamma t = E_r \sin (\nu t - \gamma) + E_x \cos (\nu t - \gamma)$$

La componente  $E_r \sin (\nu t - \gamma)$ , in fase con la corrente fornisce la potenza

$$W = W = \frac{1}{T} \int_0^T E_r \sin (\nu t - \gamma) I \sin (\nu t - \gamma) dt = \frac{E_r I}{2}$$

La seconda  $E_x \cos (\nu t - \gamma)$ , che anticipa sulla corrente di  $90^\circ$ , non fornisce alcuna energia. Questa è la componente dewattizzata della forza elettromotrice.

È facile vedere che  $E_r = Ir$ , essendo  $r$  la resistenza ohmica del circuito. Designiamo la resistenza totale (impedenza) con  $R$ . L'espressione (101) di  $\tan \gamma$  mostra che  $\gamma = r/R$ ; si ha pertanto

$$E_r = E \cos \gamma = \frac{Er}{R} = Ir$$

Analogamente

$$\sin \gamma = \frac{L\nu - \frac{1}{\nu C}}{R}$$

e quindi

$$E \sin \gamma = \frac{E}{R} \left( L\nu - \frac{1}{\nu C} \right) = I \left( L\nu - \frac{1}{\nu C} \right) = Ix$$

cioè  $E \sin \gamma$  rappresenta la forza elettromotrice che vince la reattanza. Il lavoro  $W = \frac{E_r I}{2}$  si trasforma in calore Joule ed è anch'esso uguale a  $I_{eff}^2 r$ , mentre la componente dewattizzata della forza elettromotrice origina il campo magnetico e carica il condensatore. È dewattizzata perché l'energia spesa viene successivamente trasformata in forza elettromotrice indotta dal campo magnetico quando scompare e nella differenza di potenziale del condensatore carico. Possiamo scomporre la corrente allo stesso modo in una corrente wattizzata e una corrente non wattizzata; la prima è uguale a  $I \cos \gamma$  ed è in fase con la forza elettromotrice; la seconda è uguale a  $I \sin \gamma$  e, nella nostra figura, è in ritardo rispetto alla forza elettromotrice.

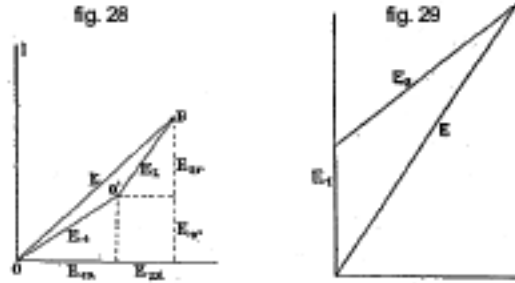
Per fornire un'applicazione di quanto sopra, consideriamo il caso in cui una corrente  $I$  passa successivamente in due circuiti aventi impedenze diverse. Sia  $R'_1$  l'impedenza del primo circuito,  $R'_2$  quella del secondo; designiamo con  $x_1$  e  $x_2$  le corrispondenti reattanze, con  $r_1$  e  $r_2$  le resistenze. Ci proponiamo di determinare la tensione ai capi di ciascuna impedenza. Le forze  $E_{1r}$  ed  $E_{2r}$  sono uguali a  $Ir_1$  e  $Ir_2$ ; invece  $E_{1x}$  e  $E_{2x}$  sono rispettivamente uguali a  $Ix_1$  e  $Ix_2$ ,  $E_{1r}$  e  $E_{2r}$  si trovano in fase con la corrente e  $E_{1x}$ ,  $E_{2x}$  essendo perpendicolare al vettore della corrente.

Tracciando  $I$  sull'asse  $Y$  (fig. 28) e rappresentando le quantità  $E_{1x}$ ,  $E_{1r}$ , si ottiene l'ipotenusa  $E_1$  che fornisce la tensione ai capi della prima impedenza. Conduciamo da  $O'$  ad angolo retto  $E_{2x}$  e  $E_{2r}$ ; si ha così l'ipotenusa  $E_2$ , che rappresenta la tensione ai capi della seconda impedenza.

La retta di chiusura  $E$  rappresenta la tensione totale ai terminali. Se è data, si può risolvere il problema inverso e determinare  $I$ .

Poiché  $E, E_1, E_2$  formano un triangolo, si ha  $E_1 + E_2 > E$ ; in generale, la tensione totale ai capi di due impedenze in serie non è quindi uguale alla somma delle tensioni ai capi di ciascuna impedenza presa isolatamente. Nel caso particolare in cui un'impedenza, ad esempio  $R'_1$ , non ha reattanza, presenta cioè solo una resistenza ohmica, la corrispondente grandezza  $Ix_1 = 0$ ; di conseguenza la tensione  $E_1$  è in fase con la corrente e deve, nella nostra figura, essere portata parallelamente alla corrente  $I$ .

Quando, oltre alla direzione di  $E_1$ , si conoscono ancora le grandezze delle tensioni  $E_1, E_2$  ed  $E$ , si può costruire il triangolo di figura 29 e determinare successivamente  $\gamma_2$  e  $\gamma$ , cioè la differenza di fase (anticipo o ritardo) che esiste tra la corrente e la tensione generale  $E$  ai capi dei terminali, sia tra la corrente e la tensione  $E_2$  ai capi dell'impedenza  $r_2$ . È su questa costruzione che si basa il metodo per determinare  $\gamma$  e  $\cos \gamma$ , una grandezza che gioca un ruolo importante nella teoria della corrente alternata. Non ci soffermeremo sulla tecnica di questa determinazione conosciuta come metodo dei tre voltmetri.



Abbiamo supposto finora che la forza elettromotrice fosse rappresentata da una sinusoide pura (e per le costanti  $R, L, C$  valesse pure per la corrente). In realtà la costruzione della dinamo è tale che la curva rappresentativa della la forza elettromotrice devia più o meno dalla sinusoide. Assumendo che  $R, L, C$  siano costanti, si ottiene anche per  $I$  una curva diversa dalla sinusoide. Sorge quindi la domanda su cosa indicano il voltmetro e l'amperometro quando sono percorsi da tale corrente, cioè a cosa sono uguali  $E_{eff}$  e  $I_{eff}$ . Allo stesso modo in cui abbiamo stabilito la formula (82), abbiamo

$$E_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f(\nu t)^2 dt} \quad (2.120)$$

dove le  $f(\nu t)$  rappresentano la forza elettromotrice in funzione del tempo; questa funzione è periodica e ha  $T$  per periodo. Dal teorema di Fourier, si può scrivere una tale funzione periodica nella forma

$$f(\nu t) = A_1 \cos \nu t + B_1 \sin \nu t + A_2 \cos \nu t + B_2 \sin \nu t + A_3 \cos \nu t + B_3 \sin \nu t + \dots \quad (2.121)$$

dove le  $A_n$  e  $B_n$  sono determinate dalle seguenti formule

$$\begin{cases} A_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\nu t) \cos n\nu t \cdot d(\nu t) \\ B_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\nu t) \sin n\nu t \cdot d(\nu t) \end{cases} \quad (2.122)$$

Riunendo i termini  $A_n \cos n\nu t$  e  $B_n \sin n\nu t$  in una sola espressione del tipo  $C_n \sin(n\nu t + \delta_n)$ , si ottiene infine per  $f(\nu t)$  lo sviluppo

$$f(\nu t) = C_1 \sin(\nu t + \delta_1) + C_2 \sin(2\nu t + \delta_2) + \dots \quad (2.123)$$

cioè, si può considerare  $f(\nu t)$  come una funzione armonica composta, costituita da un'oscillazione fondamentale e da una serie di oscillazioni armoniche di ordine superiore. Portando l'espressione (108) nella (105) e notando che l'integrale

$$\int_0^T \sin(n\nu t + \delta_n) \sin(n\nu t + \delta_m) dt$$

è nullo per  $n \neq m$  e uguale a  $\nu\pi$  per  $n = m$ , si trova che rimangono sotto il radicale nella (105) solo gli integrali il cui elemento è  $\sin^2(n\nu t + \delta_n)$ ; i valori di tali integrali sono rispettivamente uguali ai quadrati delle forze elettromotrici efficaci corrispondenti alle diverse oscillazioni armoniche, che compongono la funzione periodica considerata. Si ottiene quindi infine

$$E_{eff} = \sqrt{E_{1eff}^2 + E_{2eff}^2 + E_{3eff}^2 + \dots} \quad (2.124)$$

Si trova analogamente

$$I_{eff} = \sqrt{I_{1eff}^2 + I_{2eff}^2 + I_{3eff}^2 + \dots} \quad (2.125)$$

Si dimostra anche che, nel calcolo della potenza

$$W = \frac{1}{T} \int_0^T I E dt$$

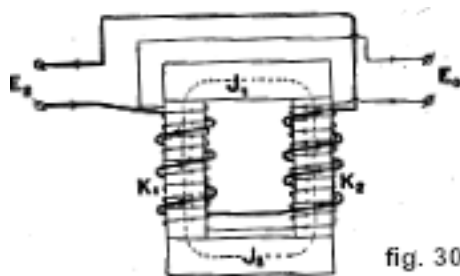
intervengono solo i prodotti di correnti e forze elettromotrici aventi lo stesso periodo. Se il periodo della corrente è diverso da quello della forza elettromotrice, la corrente si riduce; si arriva quindi, per la potenza, alla seguente formula:

$$W = I_{1eff} \cdot E_{1eff} \cos \gamma_1 + I_{2eff} \cdot E_{2eff} \cos \gamma_2 + \dots \quad (2.126)$$

Questa formula mostra che l'energia fornita da una corrente costituita da una serie di oscillazioni armoniche è la somma delle energie fornite da ciascuna delle oscillazioni armoniche, prese isolatamente.

## 14. Teoria approssimata del trasformatore di corrente alternata

La bobina di induzione che abbiamo considerato nei §§ 11 e 12 appartiene al gruppo di dispositivi che portano il nome generico di trasformatori. Ma il trasformatore tecnico, il cui scopo è trasformare l'energia elettrica di un certo tipo in energia elettrica di un altro tipo, per quanto possibile senza perdite, presenta differenze essenziali nella sua costruzione rispetto alla bobina di induzione. Un trasformatore è organizzato come segue. Su un telaio di fogli di lamiera  $K_1, K_2$  (fig. 30) sono bobinati due avvolgimenti, uno di filo grosso, l'altro di filo sottile, quest'ultimo avente un numero di spire maggiore del primo. Uno dei due circuiti, ad esempio il filo sottile, è alimentato da una corrente alternata, la cui tensione è  $E_0 \sin \nu t$ .





Nel secondo circuito la differenza di potenziale  $E_2 \sin(\nu t - \gamma)$  è stabilita per induzione. Supponiamo che la resistenza ohmica degli avvolgimenti primario e secondario sia bassa, cioè trascuriamo la perdita di energia per effetto Joule ( $I^2 R$ ). Si può allora ammettere che tutta la forza elettromotrice  $E_0 \sin \nu t$  viene utilizzata per vincere le forze elettromotrici di autoinduzione e mutua induzione. Consideriamo innanzitutto il caso in cui il secondario è aperto. Il fenomeno della mutua induzione scompare e si può scrivere l'equazione

$$E_0 \sin \nu t = -\omega_1 \frac{d\Phi}{dt} 10^{-8} \quad (2.127)$$

dove  $\omega_1$  indica il numero di spire della bobina primaria, attraversate dal flusso totale  $\Phi$ . Se ne deduce la seguente espressione per  $\Phi$ :

$$\Phi \cdot 10^{-8} = \frac{E_0}{\omega_1 \nu} \cos \nu t = \frac{E_0}{\omega_1 \nu} \sin \left( \frac{\pi}{2} + \nu t \right) \quad (2.128)$$

cioè, il flusso di forza anticipa di  $90^\circ$  rispetto alla forza elettromotrice, pur conservando il carattere sinusoidale. Ma l'intensità della corrente, che circola nell'avvolgimento primario, non conserva questo carattere sinusoidale. A causa dell'isteresi, la corrente deve essere più intensa nel periodo di crescita del flusso magnetico, e più debole nel periodo di decrescenza; la curva di corrente presenta quindi rispetto alla curva di flusso dei picchi analoga ai picchi di isteresi (fig. 31 in alto).

Se non ci fosse isteresi, la curva di corrente sarebbe una senoide, sincrona a quella del flusso magnetico, ed esprimibile con la formula  $I = I_0 \sin \left( \frac{\pi}{2} + \nu t \right)$ . In questo caso, il trasformatore, funzionante a vuoto, non spenderebbe alcuna energia, poiché si ha

$$\frac{1}{T} \int_0^T E_0 \sin(\nu t) I_0 \sin \left( \frac{\pi}{2} + \nu t \right) dt = 0$$

Lo sfasamento della curva di corrente dovuto all'isteresi determina una perdita detta perdita per isteresi. Secondo quanto detto alla fine del § 13, si può sostituire la curva di corrente efficace  $i_0$  con un insieme di sinusoidi, dove solo la senoide del periodo principale dà energia con la forza elettromotrice  $E_0 \sin \nu t$ . Sulla figura 31, questa senoide principale  $i_0$  è rappresentata nella parte inferiore. La perdita per isteresi corrispondente è uguale a

$$W_0 = E_{eff} \cdot I'_0 \cos(90^\circ - \alpha)$$

dove  $\alpha$  è l'angolo di cui la curva corrente viene spostata verso sinistra rispetto allo sfasamento ideale di  $90^\circ$ . La curva  $i_d$  dà la differenza tra  $i_0$  e  $i'_0$ ; tale differenza non dà luogo, come si è detto, ad alcuna perdita e rappresenta quindi la componente dewattizzata della corrente  $i_0$ .

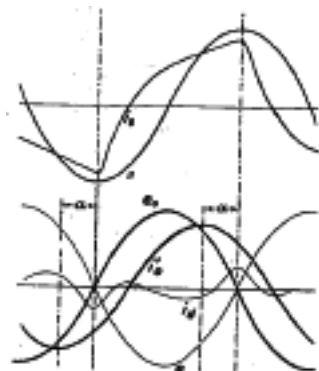


fig. 31

Parliamo ora delle variazioni nel regime di un trasformatore, dovute ad una resistenza non induttrice  $R_2$  del circuito secondario. Poiché la resistenza dell'avvolgimento è molto piccola, si può supporre che tale resistenza sia la resistenza totale del circuito secondario. Consideriamo innanzitutto il caso ideale in cui non vi sono perdite, ovvero il caso in cui il flusso di forza proveniente dall'avvolgimento primario attraversa tutte le spire dell'avvolgimento secondario. L'esperienza mostra che i moderni trasformatori, in normali condizioni operative, restituiscono fino al 97% dell'energia consumata. La nostra ipotesi semplificatrice è quindi giustificata. Il trasformatore si differenzia dalla normale bobina di induzione proprio per questo utilizzo completo del flusso. L'ipotesi appena formulata può ancora essere presentata sotto un'altra forma. I coefficienti di autoinduzione  $L_{1,1}$ ,  $L_{2,2}$  dei due avvolgimenti ed il loro coefficiente di mutua induzione  $L_{1,2}$  sono legati nel modo seguente. Siano  $n_1$  e  $n_2$  il numero di spire degli avvolgimenti primario e secondario; supponiamo la bobina primaria percorsa da una corrente di un ampere, che crea un flusso di forza  $\Phi_1$ . I coefficienti sono quindi  $L_{1,1} = n_1\Phi_1$ ,  $L_{1,2} = n_2\Phi_2$  e  $L_{2,2} = \Phi_1 \frac{n_2^2}{n_1}$ , da cui

$$L_{1,2} : L_{1,1} : L_{2,2} = n_2 : n_1 : \frac{n_2^2}{n_1} \quad (2.129)$$

Conoscendo  $L_{1,2}$  si ha

$$L_{1,1} = \frac{n_1}{n_2} L_{1,2} \quad L_{2,2} = \frac{n_2}{n_1} L_{1,2} \quad (2.130)$$

e di conseguenza  $L_{1,1}L_{2,2} = L_{1,2}^2$ . In tali condizioni, si può scrivere, per la corrente primaria, l'equazione

$$E_0 \sin \nu t = \frac{n_1}{n_2} L_{1,2} \frac{dI_1}{dt} + L_{1,2} \frac{dI_2}{dt} \quad (2.131)$$

Per il secondario, che ha una resistenza apprezzabile  $R_2$ , ma al quale non è applicata alcuna forza elettromotrice, si ha l'equazione

$$0 = I_2 R_2 + \frac{n_2}{n_1} L_{1,2} \frac{dI_2}{dt} + L_{1,2} \frac{dI_1}{dt} \quad (2.132)$$

Tale sistema di equazioni differenziali ha come soluzione

$$\begin{cases} I_1 = A \sin(\nu t - \delta) \\ I_2 = B \sin(\nu t - \varepsilon) \end{cases} \quad (2.133)$$

dove  $A, B, \delta, \varepsilon$  devono soddisfare alle quattro seguenti equazioni ottenute sostituendo i valori della (117) nella (115) e (116)

$$\begin{cases} E_0 = L_{1,2} A p \nu \sin \delta + L_{1,2} B \nu \sin \varepsilon \\ 0 = L_{1,2} A p \nu \cos \delta + L_{1,2} B \nu \cos \varepsilon \\ 0 = B R_2 \cos \varepsilon + L_{1,2} B \nu \frac{\sin \varepsilon}{p} + L_{1,2} A \nu \sin \delta \\ 0 = - B R_2 \sin \varepsilon + \frac{L_{1,2} B \nu}{p} \cos \varepsilon + L_{1,2} A \nu \sin \delta \end{cases} \quad (2.134)$$

dove  $p$  vale  $n_1 : n_2$ . Queste quattro relazioni danno

$$\begin{cases} 1 \cdot \varepsilon = \pi \\ 3 \cdot a = \frac{E_0}{R_2 p L_{1,2} \nu} \sqrt{R_2^2 p^2 + L_{1,2}^2 \nu^2} \end{cases} \quad \begin{cases} \tan \delta = \frac{R_2 p}{L_{1,2} \nu} \\ 4 \cdot B = -\frac{E_0}{R_2 p} \end{cases} \quad (2.135)$$

Da queste ultime formule si traggono le seguenti conclusioni:

1. La corrente secondaria, che è in fase con la sua forza elettromotrice, ritarda di  $180^\circ$  rispetto alla forza elettromotrice della corrente primaria.
2. La corrente primaria presenta uno sfasamento con la sua forza elettromotrice; tale differenza aumenta e tende a  $90^\circ$ , man mano che aumenta la resistenza del circuito secondario, la corrente

si dewattizza; quando invece  $R_2$  diminuisce, la fase della corrente primaria si avvicina sempre più a quella della corrispondente forza elettromotrice e il dispendio energetico nell'avvolgimento primario aumenta.

3. La terza formula fornisce una relazione assai complessa tra l'ampiezza della corrente primaria e gli altri elementi che caratterizzano il trasformatore. Molto interessante è la dipendenza di questa ampiezza dalla resistenza  $R_2$  del circuito secondario. Quando  $L_{1,2}$  è sufficientemente grande da poter trascurare  $R_2^2 p^2$  sotto il radicale, si ottiene

$$A = \frac{E_0}{R_2 p} \quad (2.136)$$

cioè, l'intensità della corrente primaria è inversamente proporzionale alla resistenza del secondario.

4. La quarta formula fornisce l'intensità della corrente secondaria.

Con le semplificazioni ammesse, si può immediatamente dedurre dalle equazioni (115) e (116) l'espressione che risulta anche dalla prima e dalla quarta formula (118,a).

La teoria del trasformatore diventa molto meno semplice, se si considerano le perdite di flusso; non ci soffermeremo su questo caso più complicato.

## 15. Azioni mutue meccaniche tra la corrente inducente e la corrente indotta

La mutua azione tra la corrente inducente e quella indotta segue le leggi generali dell'elettrodinamica. L'energia potenziale delle correnti  $I_1$  e  $I_2$ , tra le quali si esercita un'azione reciproca, è data dalla formula

$$W_{1,2} = -I_1 I_2 \mu L_{1,2} \quad (2.137)$$

dove  $\mu$  indica la permeabilità magnetica del mezzo e  $L_{1,2}$  il coefficiente di mutua induzione. L'entità dell'azione reciproca ha per espressione

$$P = I_1 I_2 \mu \frac{\partial L_{1,2}}{\partial p} \quad (2.138)$$

essendo  $p$  un parametro che determina la posizione reciproca delle correnti. Quando la corrente primaria è una corrente alternata, la mutua azione elettrodinamica assume carattere stazionario. Se la differenza di fase delle due correnti è prossima a  $\pi/2$ , in media non c'è quasi nessuna azione reciproca. Infatti le correnti primarie e secondarie sono, durante un periodo completo, due volte dirette nello stesso verso e si attraggono, e due volte dirette in verso opposto, respingendosi poi con la stessa forza. Quando le correnti primaria e secondaria sono sfasate di più di  $\pi/2$ , si ottiene una repulsione più o meno forte.

Considereremo un caso interessante di azione reciproca delle correnti. Un lungo nucleo in filo ferro viene inserito in una bobina dritta. Supponiamo l'asse della bobina verticale e un anello in filo di rame molto grande rivestito sulla parte del nucleo di ferro che sporge. Nella bobina viene inviata una corrente alternata che induce correnti molto intense nell'anello, che viene respinto dalla bobina, risale lungo il nucleo di ferro e, se non sfugge, si ferma ad una certa altezza, dove rimane fermo finché la bobina è percorsa dalla corrente alternata. Questa straordinaria esperienza è dovuta a Elihu Thomson. Designiamo la corrente nella bobina con  $I_1$ , il suo coefficiente di autoinduzione con  $L_{1,1}$ , la sua resistenza con  $R_1$ . Siano  $I_2$ ,  $I_{2,2}$  e  $R_2$  gli elementi corrispondenti dell'anello,  $L_{1,2}$  il coefficiente di mutua induzione dell'anello e della bobina. Supponiamo che ai capi della bobina sia applicata la forza elettromotrice  $E \sin mt$ , dove  $m = 2\pi/T$ . Secondo quanto esposto in precedenza si scrivono le equazioni attuali per la bobina e l'anello

$$L_{1,1} \frac{dI_1}{dt} + L_{1,2} \frac{dI_2}{dt} + R_1 I_1 = E \sin mt \quad (2.139)$$

$$L_{2,2} \frac{dI_2}{dt} + L_{1,2} \frac{dI_1}{dt} + R_2 I_2 = 0 \quad (2.140)$$

La soluzione di queste equazioni, che si riferisce a un regime permanente e unico casi di nostro interesse, è della forma

$$I_1 = A \sin(mt - \alpha) \quad (2.141)$$

$$I_2 = B \sin(mt - \beta) \quad (2.142)$$

Le costanti  $A, B$  e  $\alpha, \beta$  devono essere determinate per sostituzione delle espressioni (124) e (125) nelle equazioni (122) e (123); annullando i coefficienti di  $\cos mt$  e  $\sin mt$ , si ottengono le due relazioni

$$mL_{1,2}A \cos \alpha = -mL_{2,2}B \cos \beta + R_2 B \sin \beta \quad (2.143)$$

$$mL_{1,2}A \sin \alpha = -mL_{2,2}B \sin \beta - R_2 B \cos \beta \quad (2.144)$$

Moltiplicando rispettivamente queste equazioni prima per  $\sin \beta$  e  $-\cos \beta$ , poi per  $\cos \beta$  e  $\sin \beta$ , e sommando i prodotti a due a due, si ottiene

$$\sin \beta \cos \alpha - \sin \alpha \cos \beta = \sin(\beta - \alpha) = \frac{R_2 B}{mL_{1,2}A} \quad (2.145)$$

$$\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \cos(\beta - \alpha) = -\frac{L_{2,2}B}{mL_{1,2}A} \quad (2.146)$$

da cui si deduce infine

$$\tan(\beta - \alpha) = -\frac{R_2}{mL_{2,2}} \quad (2.147)$$

Questa espressione, considerando il segno di  $\sin(\beta - \alpha)$ , mostra che  $\beta - \alpha > \frac{\pi}{2}$  e che  $\beta - \alpha$  è tanto più vicino a  $\pi$  che  $R_2$  è più piccolo e  $mL_{2,2}$  più grande. Per  $R_2$  molto piccolo e per un numero molto elevato di cambiamenti di verso della corrente al secondo ( $L_{2,2}$  è normalmente piccolo), le fasi vengono sfasate di quasi mezzo periodo, cioè che le correnti, nella bobina e nell'anello, sono opposti per quasi tutto il periodo, il che spiega la violenta repulsione dell'anello da parte della bobina. E. Thomson ha effettuato altri esperimenti, nei quali ha sospeso, in un campo magnetico alternato orizzontale, un anello mobile attorno ad un diametro verticale. L'anello ruota e assume una posizione in cui il suo piano è parallelo al campo magnetico esterno; nessun flusso lo attraversa, non vi si verificano correnti indotte. Questo fenomeno è una conseguenza diretta della repulsione tra la corrente primaria e le correnti indotte. Fleming ha utilizzato questo principio nella costruzione di un amperometro per corrente alternata. Il fenomeno scoperto da E. Thomson gioca un ruolo importante nei cosiddetti motori a repulsione.

## 16. Induzione in corpi multidimensionali. Correnti di Foucault

Finora abbiamo considerato solo i fenomeni di induzione nei conduttori lineari, cioè nei fili. Essendo la sezione di questi conduttori piccola, la forza elettromotrice ha la stessa intensità e direzione in tutta la sezione; la corrente può circolare solo nella direzione longitudinale del filo e all'interno di un conduttore lineare non possono formarsi linee di corrente chiuse ed indipendenti. Ma se si porta una piastra metallica (ad esempio di rame) in un campo magnetico variabile, in essa si possono formare correnti vorticosi, che portano il nome particolare di correnti di Foucault. Allo stesso modo, quando una parte della piastra di rame interseca un campo magnetico variabile, in quella regione si formano forze elettromotrici che danno origine a correnti nella piastra. È difficile determinare la distribuzione di tali linee di flusso. Felich (1853) ha tentato per primo di affrontare teoricamente la questione. Jochmann lo ha studiato più approfonditamente. Nel 1872 Maxwell ha sviluppato la teoria dell'induzione in una piastra infinitamente estesa e molto

sottile; infine Hertz, nella sua dissertazione *Über die Induktion in rotierenden Kugeln* (1880), ha dato la soluzione completa del problema per una sfera e un piatto.

Sperimentalmente, si può determinare la distribuzione delle linee di corrente con un metodo che ricorda il metodo di Quincke. Due contatti scorrevoli sono appoggiati in due punti della piastra rotante e li sposta fino a trovare una posizione per la quale la differenza di potenziale tra i due punti scompare. Le linee isoelettriche così trovate possono poi essere rappresentate graficamente. Matteucci, che ha fatto ricerche di questo genere, riteneva che le linee di corrente devono essere normali alle linee isoelettriche; ma le ricerche successive hanno mostrato che questa semplice ipotesi non è vera.

Se le correnti indotte sono prodotte dal movimento di masse metalliche in un campo magnetico, esse devono, secondo la legge di Lenz, dar luogo a una reazione che si oppone al movimento. Quando un disco di rame viene ruotato, ad esempio, in modo che una parte del disco taglia un campo magnetico, è necessario applicargli una certa forza per mantenerlo in movimento. Allo stesso modo è necessario spendere lavoro per portare un disco di rame dentro o fuori da un campo magnetico, mentre il movimento dello stesso disco trasversalmente a un campo uniforme non richiede tale spesa. I campi magnetici possono quindi agire in modo ritardante sulle masse oscillanti di rame, proprietà utilizzata negli smorzatori di sismografi, di galvanometri a bobina, ecc.; al contrario, masse di rame possono esercitare un'azione ritardatrice sui magneti oscillanti, proprietà utilizzata negli smorzatori dei galvanometri magnetici. Arriviamo a questa conclusione che la posizione relativa delle masse di rame tende a rimanere invariata rispetto ai campi magnetici e che se le sorgenti di questi ultimi cominciano a muoversi, le masse di rame tendono a seguirle nel loro movimento. Faraday (1831) ha spiegato per primo in questo modo gli enigmatici fenomeni del magnetismo rotazionale scoperti da Arago (1826). Arago ha scoperto che quando un ago magnetico orizzontale è sospeso sopra un disco di rame orizzontale rotante, l'ago è guidato dalla rotazione del disco. Viceversa, la rotazione dell'ago magnetico può produrre quella del disco. Non menzioneremo gli altri fenomeni più complessi, conosciuti anche come magnetismo rotazionale. Il problema del disco di Arago è stato risolto matematicamente da Maxwell.

Ferraris (1888) ha ottenuto le prime rotazioni continue, partendo da questo principio. Faceva sì che un disco di rame posto in un campo magnetico assumesse un movimento rotatorio continuo, facendo ruotare il campo. Ha utilizzato così per la prima volta quello che viene chiamato campo magnetico rotante. Per ottenere un tale campo, ha posto due coppie di poli elettromagnetici ad angolo retto. Ciascuna coppia di poli veniva fatta passare attraverso una corrente alternata, in modo da produrre polarità opposte nei due poli; la corrente che alimentava una delle coppie di poli era sfasata di  $\pi/2$  rispetto a quella che alimentava l'altra coppia. Il vettore campo magnetico risultante è stato quindi scomposto in due vettori rettangolari, di grandezza variabile secondo la legge sinusoidale e sfasati rispetto alla fase  $\pi/2$ . Si sa, secondo la teoria della composizione dei movimenti vibratorii armonici rettangolari, che il vettore risultante è animato da un movimento circolare uniforme, senza che la sua intensità cambi. Quando un cilindro di rame è portato in tale campo rotante, deve ovviamente seguire la rotazione del vettore magnetico, tendendo ad assumere un movimento sincrono. Il sincronismo non è mai raggiunto e vi è sempre un certo scorrimento del cilindro mobile (rotore) rispetto al campo magnetico rotante degli elettromagneti fissi (statore). Maggiore è lo scorrimento, più intense saranno le correnti parassite sviluppate nel cilindro e maggiore sarà l'azione meccanica reciproca tra statore e rotore. La costruzione dei motori asincroni si basa su questo principio.

Ma, in molti casi, le correnti indotte, che si formano nelle parti metalliche dei dispositivi ad induzione (trasformatori, induttori, ecc.), sono dannose e si chiamano correnti parassite. Queste correnti sono particolarmente dannose quando si verificano nei nuclei di ferro dei dispositivi ad induzione; svolgono infatti, nel trasformatore, il ruolo di avvolgimenti secondari interni chiusi in cortocircuito, che assorbono una parte notevole dell'energia del flusso magnetico primario e

producono così il riscaldamento del nucleo di ferro. Per evitare questo effetto calorifico, i nuclei sono suddivisi, cioè costituiti da tondini di ferro, nastri o fogli di lamiera, disposti in modo che le loro superfici di separazione, ricoperte di ossido di ferro non conduttore, e spesso da un sottile foglio di carta, sono paralleli al flusso magnetico; tale costruzione, senza aumentare la resistenza magnetica del circuito, impedisce la formazione, nella sezione del nucleo, di correnti chiuse con un ampio raggio. Mostreremo tutta l'importanza di questa suddivisione.

Consideriamo un nucleo di ferro costituito da fibre, e supponiamo che sia sottoposto ad una magnetizzazione longitudinale alternata. Consideriamo all'interno di una delle aste uno strato cilindrico di raggio  $r$  e spessore  $dr$ ; sia  $\rho$  la resistenza specifica del ferro. Se si indica con  $B$  l'induzione magnetica nella direzione longitudinale dell'asta, la forza elettromotrice e lungo una circonferenza dello strato è

$$e = -\pi r^2 \frac{dB}{dt} \quad (2.148)$$

La resistenza che un conduttore tubolare di lunghezza  $l$ , raggio  $r$  e spessore  $dr$  oppone a una corrente circolante lungo la circonferenza è uguale a

$$W = \frac{2\pi r \rho}{l dr} \quad (2.149)$$

La quantità di calore ceduta dalla corrente indotta durante il tempo  $dt$  in questo conduttore tubolare è

$$dq = I^2 W dt = \frac{\left(\pi r^2 \frac{dB}{dt}\right)^2 dt}{\frac{2\pi r \rho}{l dr}} = \pi r^2 \frac{l}{2\pi} \left(\frac{dB}{dt}\right)^2 dr dt \quad (2.150)$$

La quantità di calore  $dQ$  liberata in tutta l'asta di raggio  $R$  nel tempo  $dt$  è

$$dQ = dt \int_0^R \pi r^3 \frac{l}{2\pi} \left(\frac{dB}{dt}\right)^2 dr = \frac{\pi R^4 l}{8\rho} \left(\frac{dB}{dt}\right)^2 dt \quad (2.151)$$

La quantità di calore  $dQ_1$  liberata in  $1 \text{ cm}^3$  dell'intero nucleo di ferro nel tempo  $dt$  è

$$dQ_1 = dt \frac{R^2}{8\rho} \left(\frac{dB}{dt}\right)^2 \quad (2.152)$$

Questa formula mostra che la quantità di calore  $dQ_1$  diminuisce rapidamente con il raggio delle aste (e aumenta con la frequenza). Ma poiché riducendo il raggio delle aste si aumenta lo spazio occupato dall'isolante, ciò che nuoce alla permeabilità, è chiaro che deve esistere un certo optimum per la suddivisione del nucleo. Si formano le perdite per correnti di Foucault, con la perdita per isteresi, le principali perdite di ferro dei trasformatori e delle dinamo.

Quando delle lastre di rame di buona conduttività vengono poste nel percorso del flusso magnetico di un campo alternato, ne assorbono l'energia e la trasformano in calore. Arrestano così il flusso magnetico (schermo magnetico). Abbiamo visto, infatti, nel paragrafo precedente, che nelle piastre buone conduttrici la fase delle correnti indotte è sfasata, rispetto a quella della corrente primaria, di  $180^\circ$ ; di conseguenza, queste correnti parassite indeboliscono il flusso magnetico prodotto dalla corrente primaria. Se si inserisce un'altra bobina su una bobina alimentata in corrente alternata e si separano le due bobine con un foglio di rame, l'intensità della corrente indotta nella seconda bobina si indebolisce notevolmente. Zenneck ha sviluppato, in una serie di memorie e nella sua opera *Elektromagnetische Schwingungen und drahtlose Télégraphie*; un'interessante teoria dell'azione di schermo delle lastre di rame. Si parte dalla nozione di circuito magnetico. Si considera un anello di ferro chiuso, bobinato uniformemente e di sezione  $\sigma$ . Dalla (25,b), si ha, per la forza magnetomotrice  $M$ , l'espressione

$$M = C n_1 i_1$$

dove  $C$  è un fattore di proporzionalità, dipendente dalla scelta delle unità,  $n_1$  il numero di spire attorno all'anello e  $i_1$  l'intensità della corrente nell'avvolgimento. Designando con  $r = l : \mu\sigma$  la resistenza magnetica del circuito, si ottiene, per il flusso magnetico  $\psi_1$ , l'espressione

$$\psi_1 = \frac{Cn_1i_1}{r} \quad (2.153)$$

che vale anche per il caso di corrente alternata. Disponiamo attorno all'anello un secondo avvolgimento chiuso in cortocircuito; sia  $n_2$  il numero delle sue spire. La corrente  $i_2$  indotta in questo avvolgimento crea un'ulteriore forza magnetomotrice  $Cn_2i_2$ , per cui il flusso magnetico totale è pari a

$$\psi = \frac{Cn_1i_1 + Cn_2i_2}{r} \quad (2.154)$$

L'intensità  $i_2$  si calcola con le leggi generali dell'induzione; si ha

$$i_2w_2 = -L_{1,2}\frac{d\psi}{dt} \quad (2.155)$$

dove  $L_{1,2}$  indica il coefficiente di mutua induzione di due bobine e  $w_2$  la resistenza ohmica della bobina secondaria. Portando nella (13,a) il valore di  $i_2$  dato dalla (132,b) e indicando  $\frac{Cn_2L_{1,2}}{w_2}$  con  $p$ , si ottiene l'espressione

$$\psi = \frac{Cn_1i_1 - p\frac{d\psi}{dt}}{r} \quad (2.156)$$

e infine, sostituendo  $Cn_1i_1$  con  $M$

$$\psi = \frac{M - p\frac{d\psi}{dt}}{r} \quad (2.157)$$

Questa espressione ha una notevole somiglianza con la formula (8). Estende l'analogia tra corrente elettrica e corrente magnetica. Arriviamo alla conclusione che, in un circuito magnetico dove circola un flusso magnetico variabile, una forza magnetomotrice indotta  $-p\frac{d\psi}{dt}$  ha origine al di fuori della forza magnetomotrice  $M$  applicata dall'esterno, svolgendo il coefficiente  $p$  il ruolo di autoinduzione relativa al flusso magnetico. La somiglianza formale delle formule fondamentali porta all'analogia delle conseguenze che da esse si possono trarre. Nel caso di una forza magnetomotrice sinusoidale, la grandezza efficace del flusso magnetico è la stessa che se nel circuito esistesse non una resistenza magnetica  $r$ , ma una resistenza magnetica totale, la cui espressione

$$r_1 = \sqrt{r^2 + \left(\frac{2\pi}{T}p\right)^2} \quad (2.158)$$

è analoga alla formula (89). Il flusso magnetico è sfasato rispetto alla forza magnetomotrice secondo le leggi che valgono per le correnti.

Pertanto, l'introduzione di una piastra di rame nel percorso di un flusso magnetico aumenta apparentemente la resistenza magnetica del circuito. Quando questa lastra intercetta solo una parte del flusso magnetico, quest'ultimo, evitando il passaggio attraverso la lastra, si concentra nel restante spazio libero. Abbiamo quindi la possibilità di far riflettere e direzionare il flusso magnetico utilizzando schermi di rame. Da questo punto di vista gli esperimenti di Elihu Thomson sopra descritti si presentano sotto un aspetto nuovo. Lo spazio circondato dall'anello di rame può essere considerato diamagnetico rispetto al resto dello spazio, perché ha una grande resistenza magnetica e, essendo un corpo diamagnetico, viene respinto dall'elettromagnete. Si può spiegare allo stesso modo l'azione delle correnti parassite nei nuclei di ferro.

L'aumento della resistenza magnetica dovuto alle correnti parassite provoca ancora un altro fenomeno. Quando un nucleo di ferro cilindrico cavo (tubo) viene inserito in una bobina percorsa da una corrente alternata, si verifica un aumento del flusso primario. Ma, se all'interno di

questo primo nucleo, anch'esso di ferro, si introduce un altro nucleo pieno, il flusso non viene nuovamente rinforzato. Un avvolgimento interno al nucleo cavo non manifesta fenomeni di induzione. Si può concludere che il flusso magnetico non penetra nello spessore del nucleo cavo di ferro, ma è confinato nello strato superficiale. Le masse conduttrici piene (non suddivise) si comportano quindi come corpi fortemente diamagnetici, attraverso i quali non può penetrare un flusso magnetico alternato. Le ricerche di Zenneck hanno mostrato che questa azione è tanto più forte quanto maggiore è il prodotto della conducibilità elettrica per la permeabilità magnetica della sostanza e per il numero di alternanze della corrente al secondo. Questo fenomeno è noto come effetto pelle. A parte il fenomeno di rapida diminuzione dell'ampiezza del flusso magnetico, nella profondità delle barre conduttrici, man mano che ci si allontana dalla superficie, si nota ancora un ritardo di fase del flusso magnetico crescente con la distanza dalla superficie. Anche il diametro del nucleo gioca un ruolo. Il fenomeno si manifesta chiaramente nei nuclei di ferro, il cui diametro supera 1 cm. Pertanto, in un nucleo di ferro di oltre 1 cm di diametro, a una profondità di 3 mm e per 100 alternanze di corrente al secondo, l'induzione magnetica è solo lo 0,02 dell'induzione alla superficie. In una barra di rame il fenomeno è meno accentuato, perché la permeabilità magnetica del rame è molto inferiore a quella del ferro, sebbene la sua conduttività sia maggiore.

La corrente elettrica si distribuisce in modo non uniforme anche nella sezione di un conduttore e questo fenomeno è chiamato ancora effetto pelle. È facile immaginare quale sia la causa: abbiamo mostrato che l'autoinduzione di un conduttore anulare dipende dal raggio della sezione trasversale del conduttore e abbiamo visto che è lo stesso per un conduttore rettilineo (vedi formula (27)). Da un punto di vista fisico, questa circostanza è facilmente spiegabile. Quando si fa passare una corrente in un anello pieno, una parte delle linee di forza magnetica attraversano la massa del conduttore stesso; esistono quindi solo le linee centrali della corrente che avvolgono la totalità delle linee di forza magnetiche prodotte dalla corrente; e il flusso magnetico, circondato dalle linee di corrente della superficie, non corrisponde alla piena intensità della corrente. Per calcolare il coefficiente di autoinduzione di una data linea di corrente data, è quindi necessario tener conto del flusso circondato da questa linea di corrente o che circonda questa linea.

Di conseguenza; quando, una corrente alternata circola in un conduttore, il Le linee di corrente centrali offrono una maggiore resistenza apparente di quella delle linee superficiali e la corrente, propagandosi liberamente sulla superficie, non può raggiungere il suo pieno valore all'interno del conduttore, a causa della notevole autoinduzione che vi si sviluppa.

Zenneck ha sottolineato un errore che spesso viene commesso. Si sostiene che le linee di corrente sono spinte dall'interno del conduttore verso l'esterno. In realtà, la corrente in prossimità della superficie non è più intensa di quanto consentito dalla conduttività e dall'autoinduzione dello strato superficiale considerato.

Questo fenomeno, così come l'effetto pelle del flusso magnetico, è tanto più evidente quanto il prodotto della conduttività per la permeabilità magnetica della sostanza e per il numero di alternanze della corrente in un secondo è maggiore. In tal modo, per un conduttore di rame e per  $10^6$  alternanze della corrente al secondo, l'intensità della corrente alla profondità di 0,3 mm è solo  $\frac{1}{3}$  dell'intensità in superficie. Nel ferro questo fenomeno è ancora più marcato. Ha una grande importanza nella tecnica delle correnti ad alta frequenza. Vediamo, ad esempio, che l'impiego di conduttori non offre alcun vantaggio; i conduttori a sezione anulare sono pienamente sufficienti. Quando è opportuno, per ragioni costruttive, utilizzare l'acciaio, è sufficiente ricoprirlo con uno strato di rame (bimetallo). I conduttori in rame stagnato sono scomodi perché lo strato di stagno è un cattivo conduttore.

Gli effetti pelle magnetici ed elettrici possono essere trattati teoricamente allo stesso modo, le formule fondamentali essendo analoghe per la corrente elettrica e per il flusso magnetico. Maxwell (*Treatise*, II, § 689) fu il primo a segnalare il fenomeno elettrico considerato. Lord Rayleigh ha poi fornito una teoria più completa. Successivamente si sono occupati della questione



Stefan, H. Poincaré, A. Sommerfeld, Cohn e altri. Ze neck ha applicato all'effetto magnetico le deduzioni ottenute da Cohn per l'effetto elettrico. Supponiamo che alle estremità di un conduttore cilindrico rettilineo sufficientemente lungo sia applicata una forza elettromotrice alternata  $E$ . Ammetteremo che il numero delle alternanze non è troppo grande per poter considerare costante l'intensità della corrente su tutta la lunghezza in ogni dato istante. Le linee magnetiche avranno la forma di cerchi concentrici. Consideriamo all'interno del conduttore due cilindri concentrici di raggio  $r$  e  $r + dr$ . Osserviamo che il primo è circondato da un numero di linee magnetiche maggiore del secondo; la differenza di questi numeri è uguale a

$$\mu H l dr \quad (2.159)$$

dove  $\mu$  indica la permeabilità magnetica,  $H$  l'intensità del campo e  $l$  la lunghezza del conduttore. Abbiamo introdotto le equazioni di Maxwell per il campo magnetico all'interno di un conduttore percorso da corrente. Introducendo le notazioni vettoriali, queste equazioni possono essere scritte come segue:

$$4\pi \vec{i} = \text{rot } \hat{H} \quad (2.160)$$

dove il vettore  $\vec{i}$  indica la densità di corrente. Il teorema di Stokes dà

$$\int \hat{f} \text{rot}_n \hat{H} = \int \vec{ds} \hat{H} \quad (2.161)$$

in altre parole l'integrale, preso sulla superficie  $f$  della componente normale del vettore  $\text{rot } \hat{H}$  è uguale all'integrale, lungo il contorno della superficie  $f$ , del vettore  $\hat{H}$ . Prendiamo come superficie  $f$  una parte della sezione del conduttore. Nel nostro caso  $\text{rot } \hat{H}$  è disposto normalmente nella sezione; inoltre il grandezza del vettore  $\hat{H}$  è costante in tutti i punti di una circonferenza di raggio  $r$ , tracciata nel piano della sezione trasversale e avente centro sull'asse del conduttore; il vettore stesso è diretto lungo la tangente a questo cerchio. Possiamo quindi scrivere, per tale cerchio,

$$\int_0^{2\pi} 2\pi r \text{rot } \hat{H} dr = 2\pi r \hat{H} \quad (2.162)$$

Sostituendo  $\text{rot } \hat{H}$  con  $4\pi \vec{i}$  e semplificando, si ottiene

$$4\pi \int_0^r \vec{i} r dr = r \hat{H} \quad (2.163)$$

Differenziando rispetto a  $r$ , si ha

$$4\pi r \vec{i} = \frac{\partial}{\partial r} (r \hat{H}) \quad (2.164)$$

Se sostituiamo  $\vec{i}$  con  $\frac{\vec{E}\sigma}{l}$ , dove  $\sigma$  è la conducibilità della sostanza, si ha

$$\frac{4\pi r \vec{E}\sigma}{l} = \frac{\partial}{\partial r} (r \hat{H}) \quad (2.165)$$

Differenziando ancora una volta rispetto a  $t$ , si ottiene

$$\frac{4\pi r \sigma}{l} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \hat{H}}{\partial t} \right) \quad (2.166)$$

Da quanto detto risulta che la forza elettromotrice applicata è tanto più indebolita dalla forza elettromotrice di autoinduzione quanto più ci si avvicina all'asse del conduttore. La variazione della forza elettromotrice indotta con la distanza dall'asse è, dalla (135), uguale a  $-\mu l \frac{\partial \hat{H}}{\partial t} dr$ , quindi, per la forza elettromotrice

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial r} dr = \mu l \frac{\partial \hat{H}}{\partial t} dr \quad (2.167)$$

Portando nella (138) il valore  $\frac{\partial \hat{H}}{\partial t}$  dedotto dalla (139), semplificando e differenziando poi rispetto a  $r$ , si ha

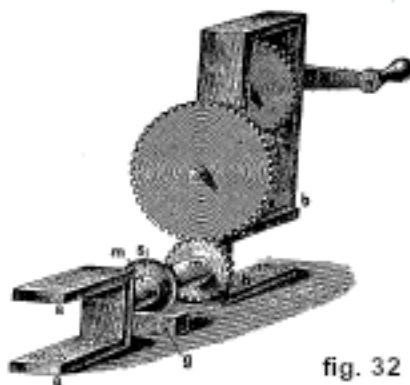
$$4\pi\sigma\mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{E}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial r^2} \quad (2.168)$$

Questa è l'equazione differenziale finale, che determina  $E$  in funzione di  $r$ ; può essere integrata utilizzando le funzioni di Bessel.

A causa di questi fenomeni, l'entità dell'autoinduzione e della resistenza di un conduttore, determinate con metodi ordinari, risulta essere troppo piccola nel caso di correnti ad alta frequenza. Questa questione assume un ruolo particolarmente importante nella tecnica della telegrafia senza fili.

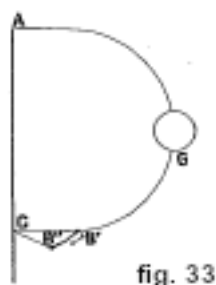
## 17. Induzione unipolare

Nella storia dello sviluppo della teoria dell'induzione, la questione dell'induzione unipolare ha assunto un'importanza particolare. Si indica con questo nome, poco felice, l'inversione della rotazione elettromagnetica di un magnete attorno al proprio asse. Il fenomeno è il seguente: un magnete  $m$  (fig. 32) poggia su cuscinetti  $a, b$  e può ricevere un rapido movimento di rotazione attorno al proprio asse mediante un sistema di ruote dentate. Il disco di ottone incastrato sull'albero  $m$  pesca in una ciotola  $g$  piena di mercurio. Quando questa ciotola viene collegata ad uno dei supporti, passando attraverso un galvanometro, per tutta la durata della rotazione del magnete, nei conduttori di giunzione circola una corrente. A prima vista la teoria di questo fenomeno non sembra presentare alcuna difficoltà; ma diventa molto complessa se si aggiunge la questione del trascinamento delle linee di induzione magnetica da parte del magnete rotante. Faraday pensava che, nella rotazione di un magnete simmetrico attorno al proprio asse, il campo magnetico di questo magnete rimanesse fisso.



Naturalmente è necessaria una perfetta simmetria del magnete attorno al proprio asse, perché altrimenti durante la rotazione le proprietà fisiche del campo cambierebbero. Quando si tenta di spiegare il fenomeno, partendo dall'idea di Faraday, ci si imbatte nella seguente difficoltà. La corrente si forma nelle parti del conduttore tagliate dalle linee magnetiche. Nel caso considerato

il circuito conduttore è costituito da: 1. l'asse del magnete dal supporto fino al disco  $s$ , 2. il raggio che congiunge l'asse del magnete alla goccia di mercurio  $g$ , 3. il raccordo che collega il galvanometro. Se il campo magnetico è a riposo, il raggio in movimento appare come l'unica parte del circuito che taglia le linee magnetiche; se invece il campo magnetico è trascinato dal magnete, viene indotta una forza elettromotrice nel circuito del galvanometro, che viene tagliato dalle linee rotanti. Sia che il campo magnetico rimanga a riposo o ruoti con il magnete, la questione non può essere risolta sperimentalmente; per un circuito chiuso (e questo è l'unico possibile), i risultati sono infatti gli stessi partendo da entrambi i punti di vista. Sia  $AC$  (fig. 33) l'asse del magnete,  $CB'$  e  $CB''$  due posizioni vicine al raggio di rotazione,  $AGB'$  l'attacco al galvanometro. Nella rotazione del raggio  $CB'$ , dalla posizione  $CB'$  alla posizione  $CB''$ , il contorno  $ACB'GA$  aumenta e diventa  $ACB''B'GA$ . Contemporaneamente l'area attraversata dal flusso magnetico aumenta del settore  $B'CB''$ . La forza elettromotrice è misurata dalla variazione del numero di linee di induzione magnetica tagliate dal circuito conduttore, indipendentemente da come queste linee entrano nel circuito. Questo è il risultato dato dalla teoria ordinaria e dalla teoria dell'induzione nei corpi in movimento dovuta ad  $H$ .



Hertz (*Ges. Werke*, II, 14) porta alla stessa conclusione. La teoria di H. Hertz necessita, è vero, di essere rettificata (vedi oltre); ma anche la modifica apportata da H. A. Lorentz dà lo stesso risultato, almeno per quanto riguarda la corrente. Si deve quindi concludere che la forza elettromotrice d'induzione rimane la stessa, sia che le linee di forza siano stazionarie sia che ruotino insieme al magnete.

Sono stati effettuati molteplici esperimenti sull'induzione unipolare, per arrivare ad un *experimentum crucis*; ma non hanno portato a nulla di positivo, perché i risultati ottenuti sono stati sempre spiegati da entrambi i punti di vista. M. Abraham ritiene che la questione sia mal posta. Secondo lui le linee di induzione magnetica costituiscono semplicemente un simbolo, che caratterizza il campo magnetico in un dato istante; egli ritiene impossibile seguire il destino delle singole linee che definiscono il campo variabile nel tempo e nello spazio.



# 3 Cap. III - La Teoria di Maxwell<sup>1</sup>

## Introduzione

Finora ci siamo concentrati soprattutto sull'aspetto esterno dei fenomeni elettrici e magnetici, parlando solo di ciò che effettivamente si osserva in essi e di ciò che non dipende da alcuna ipotesi sulla loro intima natura. È ragionevole pensare che un simile metodo di esposizione rimarrà razionale anche in futuro, finché le visioni teoriche non avranno acquisito un carattere stabile, dal quale sono attualmente molto lontane. Naturalmente in quanto precede abbiamo cercato, in un certo senso, di spiegare i fenomeni, di metterli in relazione tra loro mediante un'idea comune. Abbiamo così adottato il punto di vista dualistico, che è particolarmente conveniente e la cui terminologia rimane generalmente utilizzata; i fenomeni che abbiamo considerato si verificano, infatti, come se questo antico modo di vedere corrispondesse alla realtà, e si inserisse molto bene nel quadro di questa prima semplice immagine.

Nel seguito, ci occuperemo di fenomeni, il cui studio ha portato a molteplici teorie moderne e che si prestano poco o niente alle interpretazioni antiche. Alla base bisogna porre la teoria degli elettroni, se effettivamente si può parlare attualmente (1913) di una teoria ben determinata, meritevole di questo nome. Storicamente, la teoria degli elettroni è stata una delle logiche continuazioni della teoria di Maxwell; le equazioni alle quali conducono queste due teorie non presentano caratteristiche distintive molto nette, sebbene tra loro vi sia una grandissima differenza di principio; ciò risiede nelle concezioni sul substrato fondamentale dei fenomeni e in particolare sul ruolo che facciamo svolgere all'etere.

Le equazioni di Maxwell sono state messe in una forma molto simmetrica da Hertz e Heaviside; in Germania vengono spesso chiamate, per questo motivo, equazioni di Maxwell-Hertz. Le designeremo semplicemente sotto il nome del primo di questi due grandi scienziati; ma va ricordato che nelle stesse opere di Maxwell esse non appaiono nella forma che di solito viene loro data oggi.

Non è facile spiegare in cosa consiste la teoria di Maxwell. In essa si devono distinguere tre parti; 1. impostazioni ipotetiche e nozioni fondamentali; 2. lo sviluppo delle conseguenze che da esse possono dedursi; 3. come conclusione, un sistema di equazioni che legano le grandezze che l'osservazione e la sperimentazione rendono note.

La cosa principale nella prima parte è l'ampia traduzione delle idee di Faraday sul ruolo del mezzo dielettrico e dell'etere o del vuoto nei fenomeni considerati. La forma che assumono queste idee conduce alla tabella B, discussa all'inizio del volume IV. In questa immagine l'elettricità, in quanto substrato dotato di esistenza reale, non trova posto. La parte più debole della teoria di Maxwell è la seconda: la costruzione di equazioni utilizzando le nozioni prese come punto di partenza. Il modo in cui Maxwell ha ottenuto le sue equazioni non supporta una critica rigorosa, come hanno dimostrato Hertz, H. Poincaré, P. Duhem e altri. Ma non si tratta tanto di stabilire quanto di interpretare le equazioni, la cui accuratezza non può essere messa in dubbio per un determinato ambito di fenomeni. Questo è ciò che Hertz ha espresso con particolare precisione dicendo che la teoria di Maxwell sono le equazioni di Maxwell. Si può, infatti, attenersi a un tale punto di vista, quando si considerino queste equazioni come rapporti ipoteticamente stabiliti tra le determinate e ben note grandezze fisiche che caratterizzano il mezzo da un lato, e i campi

---

<sup>1</sup>Capitolo redatto dall'autore.

elettrici e magnetici esistenti in questo mezzo dall'altro. Boltzmann ha giustamente messo, in testa al suo libro sulla teoria di Maxwell, questa epigrafe "è stato un dio a scrivere questi segni?"

Ciò che è più caratteristico e più fondamentale nella teoria di Maxwell è, come già detto, il ruolo del mezzo materiale dielettrico e dell'etere, con conseguente abbandono di ogni azione a distanza. La teoria dell'azione propagata attraverso un mezzo e le vecchie teorie dell'azione istantanea a distanza si trovano ancora in quel che segue. Consideriamo, ad esempio, l'elettrostatica; nelle vecchie teorie la comparsa di una forza elettrica dipendeva dalla presenza di due cariche; una carica isolata non produce alcun fenomeno fisico nell'ambiente circostante. Il potenziale e l'intensità del campo hanno un significato puramente matematico; sono solo grandezze molto utili per calcolare le forze che si generano quando una seconda carica viene portata in un dato luogo. Nella teoria di Faraday-Maxwell una carica presa isolatamente produce già, nello spazio circostante modificazioni realmente esistenti, sotto forma di tensioni e depressioni che abbiamo studiato in precedenza come finzioni atte a facilitare la descrizione dei fenomeni.

Indichiamo ancora questa particolarità, forse la più significativa, della teoria di Maxwell. Abbiamo visto che, nei dielettrici posti in un campo elettrico, avviene un fenomeno particolare che abbiamo chiamato polarizzazione dielettrica e che abbiamo considerato consistente nell'applicazione di cariche di nomi opposti sulle particelle della sostanza. Maxwell attribuisce a una variazione della polarizzazione dielettrica tutte le proprietà della corrente elettrica nei conduttori; tale variazione produce di conseguenza, nello spazio circostante, un campo magnetico. Si è già indicato in quest'opera che Maxwell introduce una particolare grandezza che chiama *spostamento elettrico*, la quale effettivamente esiste in tutte le sezioni dei tubi di forza, e questa, non solo all'interno di un materiale dielettrico, ma anche nel vuoto, cioè nell'etere. Quest'ultima ipotesi è particolarmente caratteristica della teoria di Maxwell, che vede una differenza solo quantitativa tra i dielettrici materiali e l'etere, potendo quest'ultimo anche essere soggetto all'azione di forze elettriche e magnetiche.

Maxwell identifica qualsiasi spostamento elettrico con la corrente elettrica. Di conseguenza, nella sua teoria, non può esistere una corrente aperta. Quando, ad esempio, in un tratto di conduttore fluisce una corrente elettrica, si deve considerare la corrente come chiusa da una serie ininterrotta di spostamenti elettrici nei dielettrici circostanti o nell'etere. Se un condensatore viene caricato e scaricato, la corrente di carica o di scarica viene chiusa dalla corrente di spostamento nel dielettrico che separa le piastre del condensatore.

Le equazioni di Maxwell possiedono, entro determinati limiti, una certezza incomparabilmente maggiore di quella di tutti i principi, più o meno solidi, sui quali ci si può attualmente basare per ottenerle. Questa deduzione deve partire da un'ipotesi chiaramente espressa sul ruolo, anche parziale, delle proprietà dell'etere. Ma proprio su questo punto la scienza oggi offre il caos più completo, è priva di qualsiasi visione orientativa, e gli scienziati più autorevoli professano le idee più contraddittorie.

Anticipando un po' quanto segue, ricordiamo ora che Hertz supponeva che l'etere si muovesse contemporaneamente alla materia, mentre H. A. Lorentz considera l'etere come immobile e non ammette l'esistenza di alcuna azione, qualunque essa sia, sull'etere. Molti scienziati oggi negano l'esistenza stessa dell'etere.

## 2. Equazioni di Maxwell.

Indicheremo innanzitutto le grandezze che entrano in queste equazioni o che dovremo considerare nello stabilirle. Utilizzeremo le notazioni che abbiamo adottato nel capitolo dedicato ai principi dell'analisi vettoriale e designeremo tutti i vettori in particolare con lettere sormontate da una freccia dritta o curva.

Siano  $\vec{E}$  l'intensità del campo elettrico,  $X, Y, Z$  le sue componenti,  $\varepsilon$  la costante dielettrica del mezzo. Sotto l'azione del campo  $\vec{E}$ , si produce, in tutto il mezzo dielettrico, senza escludere

l'etere, un certo spostamento  $\vec{D}$ , uguale a

$$\vec{D} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \vec{E} \quad (3.1)$$

H. A. Lorentz, nella sua esposizione classica della teoria di Maxwell dà alla grandezza  $\vec{D}$  il nome di induzione.

Indichiamo l'intensità del campo magnetico con  $\hat{H}$  e le sue componenti con  $L, M, N$ , la permeabilità magnetica con  $\mu$ , l'induzione magnetica con  $\hat{B}$ , si ha

$$\hat{B} = \mu \hat{H} \quad (3.2)$$

Le intensità di campo  $\vec{E}$  e  $\hat{H}$  determinano le forze ponderomotrici, che agiscono su corpi materiali elettrizzati, magnetizzati o trasportati da una corrente elettrica.

Indicheremo con  $\vec{I}$  la densità della corrente di conduzione, cioè della corrente elettrica ordinaria nei conduttori, con  $\vec{V}$  la densità della corrente di spostamento (vedi sotto), con  $\vec{G}$  l'intensità totale della corrente. Siano inoltre  $\sigma$  la conducibilità della sostanza, cioè la grandezza inversa della resistenza specifica, e  $c$  la velocità della luce.

È molto importante specificare chiaramente in quali unità si esprimono grandezze che entrano nelle formule. Abbiamo fatto conoscere, nel Volume IV, due sistemi di unità, il sistema elettrostatico e quello elettromagnetico. L'origine di questi due sistemi è la seguente. Scriviamo le formule che esprimono le due leggi di Coulomb come segue:

$$F = p \frac{ee_1}{r^2} \quad (3.3)$$

$$F = q \frac{mm_1}{r^2} \quad (3.4)$$

dove  $F$  è il modulo della forza reciproca che si esercita tra  $e$  ed  $e_1$  o tra  $m$  e  $m_1$  nel vuoto e dove  $p$  e  $q$  sono due fattori di proporzionalità. Quando si considera  $p$  come un numero a dimensione zero e si pone, ad esempio,  $p = 1$ , si ottiene il sistema di unità el. st., in cui  $\varepsilon$  è anch'esso un numero a dimensione zero, ma dove  $\mu$  è una quantità di dimensione ben determinata. Viceversa, quando  $q$  ha dimensione zero e si pone, ad esempio,  $q = 1$ , si trova il sistema el. mag., in cui  $\mu$  non ha dimensione, ma dove la dimensione di  $\varepsilon$  è diversa da zero. Prenderemo un sistema misto, che è stato utilizzato, ad esempio, da Gauss, Helmholtz e Hertz, cioè esprimeremo le grandezze elettriche in unità el. st. e quelle magnetiche in unità el. mag. Ma poiché in ogni formula tutte le grandezze devono avere le stesse dimensioni, cioè essere espresse nello stesso sistema di unità, dovremo assegnare le lettere che rappresentano le grandezze di fattori di cui è facile comprendere il significato. Sia  $e_e, \vec{I}_e, \vec{E}_e$ , ecc. i valori numerici delle grandezze in unità el. st.,  $e_m, \vec{I}_m, \vec{E}_m$  ecc. i loro valori numerici in unità el. mag. Sappiamo che l'unità el. st. della quantità di elettricità è  $c$  volte inferiore all'unità el. mag. della stessa grandezza. Ne consegue che i valori numerici  $e_e$  ed  $e_m$  della stessa quantità di elettricità sono legati dall'uguaglianza

$$e_e = ce_m \quad (3.5)$$

Dalla definizione dell'intensità di corrente risulta che

$$\vec{I}_e = c \vec{I}_m \quad (3.6)$$

Inoltre, per la forza che agisce su una data carica in un campo elettrico dato; abbiamo le due espressioni  $\vec{E}_e c_e$  ed  $\vec{E}_m c_m$ ; essendo queste espressioni ovviamente uguali, otteniamo, utilizzando la formula (5),

$$\vec{E}_e = \frac{1}{c} \vec{E}_m \quad (3.7)$$

Heaviside e H. A. Lorentz si servono di un altro sistema misto, ponendo, nelle formule (3) e (4)

$$p = q = \frac{1}{4\pi} \quad (3.8)$$

È facile vedere che in questo modo introducono unità di quantità di elettricità e di magnetismo che sono  $2\sqrt{\pi}$  volte più piccole delle corrispondenti unità él. st. ed el. mag. Lo fanno per eliminare il fattore  $4\pi$  che, secondo H. A. Lorentz, distorce le formule. Cohn utilizza un sistema, che elimina pure il fattore  $4\pi$ , ma che è reso più generale dalla presenza di tre grandezze indeterminate, che possono essere scelte in vari modi per fissare definitivamente le unità.

Passiamo ora all'interpretazione fisica delle due equazioni vettoriali fondamentali della teoria di Maxwell. Esse esprimono i due fatti seguenti:

I. una corrente elettrica è circondata da un campo magnetico. La direzione, il verso e l'intensità di questo campo sono determinati dalla legge di Biot e Savart. Quando una corrente rettilinea orizzontale ha un verso che si allontana dall'osservatore, quest'ultimo vede le linee di forza del campo magnetico ruotare attorno alla corrente, nel verso orario.

II. Un flusso di induzione magnetica, di grandezza variabile, è circondato da un campo elettrico. La direzione, il verso e l'intensità di questo campo sono determinate dalla legge dell'induzione magnetoelettrica. Quando un flusso di induzione magnetica orizzontale aumenta allontanandosi dall'osservatore, quest'ultimo vede le linee di forza elettromotrice ruotare attorno al flusso di induzione, in verso antiorario.

Bisogna ricordare che, in questi due casi, le linee di forza vengono percorse in versi opposti.

Il primo dei due fatti menzionati è stato studiato in dettaglio nel Libro II, cap. III, § 6, e abbiamo stabilito le formule (47), che trascriveremo introducendo nuove notazioni; sostituiranno le componenti  $u, v, w$  della densità di corrente  $\vec{I}$  con  $I_x, I_y, I_z$  e le componenti  $\alpha, \beta, \gamma$  dell'intensità  $\hat{H}$  del campo con  $L, M, N$ . Si avrà allora

$$\begin{cases} 4\pi I_x = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} \\ 4\pi I_y = \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} \\ 4\pi I_z = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} \end{cases} \quad (3.9)$$

o più semplicemente, nella notazione vettoriale

$$4\pi \vec{I} = \text{rot} \hat{H} \quad (3.10)$$

Non è superfluo stabilire ancora una volta, ma in altro modo, l'equazione (8), relativa ad una corrente di conduzione chiusa. Dalla legge di Biot e Savart segue che, nel movimento dell'unità di massa magnetica su una qualsiasi curva attorno alla corrente, si compie il lavoro  $R = 4\pi i$ , dove  $i$  rappresenta l'intensità totale della corrente che passa all'interno della curva. Sia  $ds$  l'elemento lineare della curva e  $dS$  l'elemento d'area di qualsiasi superficie limitata da questa curva. Si ha

$$i = \int I_n dS$$

$$R = \int H_s ds$$

essendo  $I_n$  la componente normale a  $dS$  di  $I$  e  $H_s$  la componente del campo nella direzione di  $ds$ . Il teorema di Stokes dà

$$R = \int \text{rot}_n \hat{H} dS$$

Dall'uguaglianza  $R = 4\pi i$  risulta che

$$4\pi \int I_n dS = \int \text{rot}_n \hat{H} dS$$



cioè l'equazione (8), poiché la forma e il contorno della superficie  $S$  possono essere scelti arbitrariamente. Se si esprime  $\vec{I}$  in unità el. st. e  $\hat{H}$  in unità el. mag., si ottiene invece della (8), dove anche  $I$  è espresso in unità el. mag., mediante la (5,a):

$$\frac{4\pi}{c} \vec{I} = \text{rot}_n \hat{H} \quad (3.11)$$

Poniamo inoltre

$$\vec{I} = \sigma \vec{E} \quad (3.12)$$

Abbiamo già indicato che Maxwell introduce la nozione di corrente di spostamento nei dielettrici (e nell'etere), prendendo la seguente espressione per la densità  $\vec{V}$  di questa corrente, vedi (1),

$$\vec{V} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (3.13)$$

Le correnti di conduzione e di spostamento si sommano per formare una corrente, la cui densità  $\vec{G}$  è uguale a

$$\vec{G} = \vec{I} + \vec{V} = \sigma \vec{E} + \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (3.14)$$

Questa corrente produce il campo  $\hat{H}$ , in modo che si ha, invece della (9), la seguente

$$\frac{4\pi}{c} \vec{G} = \text{rot} \hat{H} \quad (3.15)$$

Portiamo in questa equazione dapprima il valore (12) di  $\vec{G}$  e poi i valori (10) e (11), si ha

$$\frac{4\pi\sigma}{c} \vec{E} + \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \text{rot} \hat{H} \quad (3.16)$$

Questa è la prima delle due equazioni vettoriali fondamentali della teoria di Maxwell. — Se si scrivono con le componenti dei vettori che contiene lungo gli assi delle coordinate ordinarie, si ha

$$\begin{cases} \frac{4\pi\sigma}{c} X + \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} \\ \frac{4\pi\sigma}{c} Y + \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} \\ \frac{4\pi\sigma}{c} Z + \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} \end{cases} \quad (3.17)$$

Occupiamoci ora della seconda equazione vettoriale della teoria di Maxwell. Sia un flusso di induzione magnetica  $\hat{B}$ . Circondiamolo con un qualsiasi curva il cui elemento lineare è  $ds$  e con questa curva tracciamo una qualsiasi superficie il cui elemento di area sarà  $dS$ . Quando varia il flusso che attraversa  $S$ , in tutti i punti della curva si genera la forza elettromotrice  $\vec{E}$ , il cui integrale lungo questa curva è uguale alla variazione del flusso nell'unità di tempo. Si ha quindi l'equazione

$$\frac{\partial}{\partial t} \int B_n dS = \frac{\partial}{\partial t} \int \mu H_n dS = - \int E_s ds \quad (3.18)$$

Il segno meno sul secondo membro deriva dalla direzione della forza  $\vec{E}$ . Nell'equazione (15), la grandezza  $\vec{E}$  è espressa in unità el. mag. Tuttavia, abbiamo concordato di esprimerla in unità el. st.; dobbiamo quindi, secondo la formula (5,b), scrivere

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \mu H_n dS = -c \int E_s ds \quad (3.19)$$

Il teorema di Stokes dà

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \mu H_n dS = -c \int E_s ds = -c \int \text{rot}_n \vec{E} ds$$

se ne ricava

$$\frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\text{rot} \vec{E} \quad (3.20)$$

Questa è la seconda delle equazioni vettoriali fondamentali della teoria di Maxwell. - Con le notazioni cartesiane, si ha

$$\begin{cases} \frac{\mu}{c} \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} \\ \frac{\mu}{c} \frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} \\ \frac{\mu}{c} \frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \end{cases} \quad (3.21)$$

Le equazioni vettoriali (13) e (16), o i sistemi (14) e (17), danno origine a una serie di osservazioni.

1. Le equazioni (13) e (16) mostrano in modo particolarmente chiaro che qualsiasi azione istantanea a distanza è estranea alla teoria di Maxwell, perché tutte le grandezze che entrano in queste equazioni si riferiscono a uno stesso punto dello spazio. Il valore di una grandezza in un punto qualsiasi e in un dato istante dipende quindi dai valori delle altre grandezze in un dominio infinitamente piccolo attorno al punto considerato e nello stesso istante o nell'istante immediatamente precedente.

2. L'assenza nell'equazione (16) del termine analogo al primo termine del primo membro dell'equazione (13) appare come conseguenza del fatto che, nel campo dei fenomeni magnetici, non esiste alcun fenomeno analogo alla corrente elettrica di conduzione.

3. I segni contrari dei secondi membri delle equazioni: (13) e (16) risultano dalla differenza di verso delle linee di forza elettrica e magnetica.

4. Nei sistemi (14) e (17), questa differenza si manifesta con la disposizione inversa delle derivate nei membri secondi delle equazioni di questi sistemi.

5. *Maxwell ammette che le sue equazioni sono ancora adatte per campi che variano tanto rapidamente quanto si vuole e seguendo qualsiasi legge.*

Quando non c'è corrente di conduzione, l'equazione (13) e il corrispondente sistema (14) diventano

$$\frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \text{rot} \vec{H} \quad (3.22)$$

$$\begin{cases} \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} \\ \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} \\ \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} \end{cases} \quad (3.23)$$

Quando si differenzia la prima delle equazioni (19) rispetto a  $x$ , la seconda rispetto a  $y$ , la terza rispetto a  $z$  e si sommano, o, più semplicemente, quando si prende la divergenza dei due membri dell'equazione (18), si ottiene, utilizzando la formula (1-25),

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{div} \varepsilon \vec{E} = 0 \quad (3.24)$$

Questa equazione mostra che la grandezza  $\text{div} \varepsilon \vec{E}$  è costante in un campo elettrostatico; essa è uguale a  $4\pi\rho$ , dove  $\rho$  è la densità di volume dell'elettricità:

$$\text{div} \varepsilon \vec{E} = 4\pi\rho \quad (3.25)$$

L'equazione (16) dà

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{div} \mu \vec{H} = 0$$

da cui segue che  $\text{div} \mu \hat{H} = \text{cost}$ . Questa costante deve essere uguale a  $4\pi\omega$ , se  $\omega$  è la densità di volume del magnetismo effettivo, corrispondente alla densità di volume dell'elettricità. Se si ammette che non esiste magnetismo effettivo, si ha l'equazione

$$\text{div} \mu \hat{H} = 0 \quad (3.26)$$

Con le notazioni attuali l'energia  $W_e$  dell'unità di volume del campo elettrico assume la forma

$$W_e = \frac{\varepsilon}{8\pi} \vec{E}^2 \quad (3.27)$$

Questa formula può essere ottenuta come segue. Quando, sotto l'azione del campo crescente da 0 a  $\vec{E}$ , lo spostamento  $\vec{D}$  aumenta progressivamente, si compie un lavoro uguale a  $W_e$  nell'unità di volume. Il lavoro elementare  $dW_e$  è uguale a  $(\vec{E} d\vec{D})$ , dove  $\vec{E}$  è un valore intermedio dell'intensità del campo. L'equazione (1) dà

$$dW_e = (\vec{E} d\vec{D}) = \frac{\varepsilon}{4\pi} (\vec{E} d\vec{E})$$

e quindi

$$W_e = \frac{\varepsilon}{4\pi} \int_0^{\vec{E}} (\vec{E} d\vec{E}) = \frac{\varepsilon}{8\pi} \vec{E}^2$$

Analogamente, l'energia  $W_m$  dell'unità di volume del campo magnetico è uguale a

$$W_m = \frac{\mu}{8\pi} \hat{H}^2 \quad (3.28)$$

Ammetteremo che quando il campo elettrico e magnetico esistono simultaneamente, l'energia  $W$  dell'unità di volume è

$$W = W_e + W_m = \frac{1}{8\pi} \left( \varepsilon \vec{E}^2 + \mu \hat{H}^2 \right) \quad (3.29)$$

Si può dimostrare che questa espressione (23) verifica il principio di conservazione dell'energia. Consideriamo infatti l'energia del campo esteso all'intero spazio

$$J = \int W dv = \int \frac{dv}{8\pi} \left( \varepsilon \vec{E}^2 + \mu \hat{H}^2 \right)$$

differenziando rispetto a  $t$ , si ha

$$\frac{\partial J}{\partial t} = \int \frac{dv}{4\pi} \left\{ \varepsilon \left( \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) + \mu \left( \frac{\partial \hat{H}}{\partial t} \right) \right\} \quad (3.30)$$

Sostituendo in questa relazione  $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  e  $\frac{\partial \hat{H}}{\partial t}$  con i loro valori ottenuti dalle equazioni (13) e (16), viene

$$\frac{dJ}{dt} = \int \frac{cdv}{4\pi} \left\{ \varepsilon \left( \vec{E} \text{rot} \hat{H} \right) - \left( \hat{H} \text{rot} \vec{E} \right) \right\} - \int dv \sigma \vec{E}^2$$

Ora, il primo integrale si può scrivere

$$- \int \frac{cdv}{4\pi} \text{div} \left[ \vec{E} \hat{H} \right]$$

essendo questo integrale esteso all'intero spazio, si annulla, poiché tutte le grandezze che consideriamo si annullano all'infinito. Si ha pertanto

$$\frac{dJ}{dt} = - \int dv \sigma \vec{E}^2$$

Prendiamo per elemento di volume  $dv$  un piccolo cilindro di sezione  $dS$  e di lunghezza  $ds$  parallela alla direzione della corrente in un punto del campo. Si potrà scrivere

$$\frac{dJ}{dt} = - \int (\vec{E} ds \cdot \sigma \vec{E} dS)$$

dove  $\vec{E} ds$  rappresenta la forza elettromotrice,  $\sigma \vec{E} dS$  l'intensità di corrente e il prodotto scalare di questi vettori è pertanto il calore di Joule. Il principio di conservazione dell'energia è verificato e l'espressione (22,a) dell'energia magnetica  $W_m$  e quindi l'espressione (23) dell'energia totale  $W$  sono le sole accettabili.

F. Richarz ha dimostrato che da una delle equazioni (13) o dalla (16) si può dedurre l'altra equazione, ammettendo l'espressione (23) dell'energia e partendo dal principio di conservazione dell'energia; basta per questo sostituire una sola delle grandezze  $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  o  $\frac{\partial \hat{H}}{\partial t}$  con il suo valore tratto da quello delle equazioni (13) e (16) che si ammettono e porre  $\frac{\partial J}{\partial t} = 0$ .

Abbiamo ipotizzato finora che il campo  $\vec{E}$  è prodotto da cariche elettriche o da un campo magnetico variabile. Ma, in un dato spazio, può ancora agire una forza elettromotrice di contatto, che indicheremo con  $\vec{E}'$ ; una forza di termoelettromotrice deve naturalmente essere rappresentata con la stessa notazione. Le forze di questo tipo devono entrare nell'espressione di  $\vec{E}$ , che possiamo scrivere, nel caso più generale, nella forma seguente:

$$\vec{E} = \vec{E}_e + \vec{E}_m + \vec{E}' \quad (3.31)$$

essendo  $\vec{E}_e$  il campo delle cariche elettriche e  $\vec{E}_m$  il campo elettrico prodotto dalla variazione del campo magnetico. Poiché  $\vec{E}_e$  rappresenta un vettore lamellare, il cui rotore è dappertutto nullo ( $\text{rot } \vec{E}_e = 0$ ), si può scrivere

$$\frac{\mu}{c} \frac{\partial \hat{H}}{\partial t} = -\text{rot} (\vec{E} - \vec{E}') \quad (3.32)$$

Indichiamo ora le condizioni al limite, alle quali devono soddisfare le grandezze  $\vec{E}$  e  $\hat{H}$  sulla superficie separatrice dei due mezzi, caratterizzate dalle grandezze  $\varepsilon', \mu', \sigma'$  e  $\varepsilon'', \mu'', \sigma''$ . Indicheremo con  $n$  la normale alla superficie  $s$ , con  $E'_s, E''_s, H'_s, H''_s$  le componenti tangenziali dei campi, con  $E'_n, E''_n, H'_n, H''_n$  le loro componenti normali. Si dimostra che le componenti tangenziali non subiscono salti quando si attraversa la superficie, cioè che si ha

$$E'_s = E''_s \quad H'_s = H''_s \quad (3.33)$$

Anche le derivate delle componenti tangenziali, lungo le direzioni tangenti a  $s$ , non subiscono salti. Anche le componenti normali dell'induzione magnetica rimangono continue, cioè si ha

$$\mu' H'_n = \mu'' H''_n \quad (3.34)$$

L'equazione corrispondente per  $\varepsilon \vec{E}$  sarà esatta solo nel caso in cui non vi sia elettricità libera sulla superficie  $s$ , ovvero quando si abbia  $\sigma' = \sigma'' = 0$ ; in altre parole i due mezzi sono dielettrici e non hanno assolutamente conducibilità. Scriviamo ora la prima delle equazioni (14) per due

punti posti da una parte e dall'altra della superficie  $s$  e infinitamente vicini a questa superficie; prendiamo la normale  $n$  per asse delle  $x$ . Si ha allora

$$\frac{4\pi\sigma'}{c}E'_n + \frac{\varepsilon'}{c}\frac{\partial E'_n}{\partial t} = \frac{\partial N'}{\partial y} - \frac{\partial M'}{\partial z}$$

$$\frac{4\pi\sigma''}{c}E''_n + \frac{\varepsilon''}{c}\frac{\partial E''_n}{\partial t} = \frac{\partial N''}{\partial y} - \frac{\partial M''}{\partial z}$$

Da quanto esposto, i termini corrispondenti dei secondo membri di queste equazioni sono uguali e sottraendoli si ha

$$-4\pi(\sigma'E'_n - \sigma''E''_n) = \varepsilon'\frac{\partial E'_n}{\partial t} - \varepsilon''\frac{\partial E''_n}{\partial t}$$

o

$$\sigma'E'_n - \sigma''E''_n = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\varepsilon'}{4\pi}E'_n - \frac{\varepsilon''}{4\pi}E''_n\right) \quad (3.35)$$

Nel secondo membro abbiamo la derivata rispetto al tempo della differenza degli spostamenti elettrici da una parte e dall'altra della superficie  $s$ , essendo i due spostamenti presi nella stessa direzione  $n$ . Questa differenza è uguale alla densità superficiale  $k$  dell'elettricità. Nel primo membro, si trova la differenza tra le componenti normali della corrente di conduzione. Il significato dell'equazione (28) è quindi completamente spiegato. Quando i due mezzi non sono conduttori ( $\sigma' = \sigma'' = 0$ ), la grandezza tra parentesi è indipendente dal tempo e si ha

$$\sigma'E'_n - \sigma''E''_n = 4\pi k \quad (3.36)$$

cioè la formula (21) richiamata in precedenza. In assenza della carica, si ha un'analogia condizione alla relazione (27)

$$\varepsilon'E'_n = \varepsilon''E''_n \quad (3.37)$$

### 3. Teorema di Poynting e flusso di energia

Poynting (1885) ha introdotto una formula significativa, la cui interpretazione fornisce un'immagine molto chiara e molto originale del movimento dell'energia nel campo elettromagnetico e mette in particolare risalto il ruolo del mezzo. Per stabilire questa formula utilizzeremo considerazioni vettoriali, i cui vantaggi appaiono qui abbastanza chiaramente.

Sia  $\Sigma$  una superficie chiusa, all'interno della quale sono presenti riserve di energia elettromagnetica di qualsiasi origine e sia  $dv$  un elemento di volume limitato dalla superficie  $\Sigma$ . Diamo a questo elemento di volume la forma di un cilindro, la cui sezione trasversale è uguale a  $dS$  e la lunghezza a  $ds$  con direzione della corrente elettrica e passante attraverso  $dv$  e con densità  $\vec{I} = \sigma\vec{E}$ . L'intensità di corrente, che attraversa l'elemento  $dv$  è uguale a  $\vec{I}ds$  e la forza elettromotrice, che agisce su questo elemento di volume, è  $\vec{E}ds$ ; pertanto, la quantità di calore  $dQ$  liberata, secondo la legge di Joule, nell'elemento  $dv$ , per unità di tempo, è uguale a

$$dQ = (\vec{I}ds \cdot \vec{E}ds) = (\vec{I} \cdot \vec{E})dv = \sigma\vec{E}^2dv \quad (3.38)$$

Si hanno le equazioni

$$\frac{4\pi\sigma}{c}\vec{E} + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \text{rot}\vec{H}$$

$$\frac{\mu}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \text{rot}\vec{E}$$

Moltiplichiamo scalarmente la prima equazione per  $\vec{E}$ , la seconda per  $\hat{H}$  e sommiamo; moltiplicando la somma per  $dv$  e integrando su tutto il volume limitato dalla superficie  $\Sigma$ , si ha

$$\frac{4\pi}{c} \int \sigma \vec{E}^2 dv + \frac{1}{c} \int \varepsilon \left( \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) dv + \frac{1}{c} \int \mu \left( \hat{H} \frac{\partial \hat{H}}{\partial t} \right) dv = \int \left\{ \left( \vec{E} \text{rot} \hat{H} \right) - \left( \hat{H} \text{rot} \vec{E} \right) \right\} dv \quad (3.39)$$

Dalla (1-29) e anche (1-8,a), il secondo membro è uguale a

$$\int \text{div} \left[ \hat{H} \vec{E} \right] dv = - \int \text{div} \left[ \vec{E} \hat{H} \right] dv$$

La formula di Gauss (21), dà

$$- \int \text{div} \left[ \vec{E} \hat{H} \right] dv = - \int \left[ \vec{E} \hat{H} \right] d\Sigma$$

Abbiamo infine

$$\int \sigma \vec{E}^2 dv + \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{\varepsilon \vec{E}^2 + \mu \hat{H}^2}{8\pi} dv = - \frac{c}{4\pi} \int \left[ \vec{E} \hat{H} \right] d\Sigma \quad (3.40)$$

Nel secondo membro di questa equazione,  $n$  è la direzione della normale esterna alla superficie  $\Sigma$ . Il primo termine del primo membro rappresenta, secondo la (29), la quantità totale  $Q$  di calore di Joule, che è emessa all'interno il volume considerato per unità di tempo. Si può scrivere il secondo termine come segue, vedere la formula (23),

$$\frac{\partial}{\partial t} \int W dv = \frac{\partial J}{\partial t}$$

indicando con  $J$  la quantità totale di energia elettromagnetica contenuta nel sistema delimitato dalla superficie  $\Sigma$ . L'equazione (30) diviene pertanto

$$\frac{\partial J}{\partial t} + Q = - \frac{c}{4\pi} \int \left[ \vec{E} \hat{H} \right] d\Sigma \quad (3.41)$$

Abbiamo qui, nel primo membro, l'incremento totale per unità di tempo dell'energia elettromagnetica e dell'energia termica contenute nel sistema delimitato dalla superficie  $S$ . Introduciamo il nuovo vettore

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \left[ \vec{E} \hat{H} \right] \quad (3.42)$$

detto *vettore* di Poynting; Il suo modulo è

$$|\vec{S}| = \frac{c}{4\pi} |\vec{E}| \cdot |\hat{H}| \sin \angle \vec{E} \hat{H} = \frac{c}{4\pi} \left( \vec{E} \hat{H} \right) \quad (3.43)$$

È normale al piano che contiene i vettori  $\vec{E}$  e  $\hat{H}$ ; la rotazione di  $\vec{E}$  verso  $\hat{H}$  imprime alla vite un moto di traslazione nella direzione e nel verso di  $\vec{S}$ . Se portiamo questo vettore nell'equazione (31), abbiamo

$$\frac{\partial J}{\partial t} + Q = - S_n d\Sigma \quad (3.44)$$

essendo  $S_n$  la componente del vettore  $\vec{S}$  lungo la normale esterna alla superficie  $\Sigma$ . Il secondo membro dell'equazione (32,b) è uguale al flusso per unità di tempo del vettore  $\vec{S}$  attraverso la superficie  $\Sigma$ , nel verso proveniente dal esterno. Questo flusso è uguale all'aumento dell'energia contenuta nello spazio limitato da  $\Sigma$ . *Si può quindi considerare, come sorgente di questo aumento*

di energia, il flusso del vettore  $\vec{S}$ , che entra nello spazio dove si ha l'aumento passando per la superficie  $\Sigma$ ; anche il vettore di Poynting è detto flusso di energia. Dalla formula (32), è chiaro che in ogni punto di  $\Sigma$  il flusso di energia è perpendicolare a  $\vec{E}$  e  $\hat{H}$ , essendo la densità del flusso determinata dalla (32) o (32,a). Quando l'apporto di energia diminuisce all'interno dello spazio considerato, il corrispondente flusso di energia esce all'esterno passando attraverso la superficie  $\Sigma$ .

Se, come nel § 2, prendiamo uno spazio infinitamente esteso, in allontanando la superficie  $\Sigma$  all'infinito, si deve fare, in tutti i punti di questa superficie,  $\vec{E} = \hat{H} = 0$ ; l'equazione diventa quindi (32,b) diviene allora

$$\frac{\partial J}{\partial t} + Q = 0 \quad (3.45)$$

che esprime il principio di conservazione dell'energia nel dominio dei fenomeni elettromagnetici e giustifica, come abbiamo visto, l'espressione (23) adottata per  $W$ .

Applichiamo le formule (31) o (32,b) ad un filo, nel quale passa una corrente elettrica costante  $\vec{i}$ , espressa in unità elettromagnetiche. Sia  $\vec{R}$  il raggio della sezione del filo; sia  $\Sigma$  la superficie del filo. Si ha, in questo caso,

$$\hat{H} = \frac{2\vec{i}}{\vec{R}} \quad (3.46)$$

Il vettore  $\hat{H}$  è perpendicolare alla lunghezza del filo e al raggio  $\vec{R}$ ; guardando nella direzione della corrente,  $\hat{H}$  ha un moto in senso orario. Il vettore  $\vec{E}$  ha la stessa direzione della corrente elettrica ed è chiaro che i vettori  $\hat{H}$  ed  $\vec{E}$  sono rettangolari e posti in un piano tangente a  $\Sigma$ . Ne consegue che il vettore  $\vec{S}$  è normale alla superficie  $\Sigma$  del filo. Una rotazione di  $\vec{E}$  verso  $\hat{H}$  produce un moto di traslazione avente verso contrario a quello del raggio  $\vec{R}$  e, poiché nell'equazione (32,b), la normale esterna  $n$  a  $\Sigma$  ha la stessa direzione e verso di  $\vec{R}$ , si ha  $\vec{S} = -\vec{S}_n$ . L'equazione (32,a) dà

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \hat{H}]$$

Introducendo il valore (32,d) di  $\hat{H}$ , si trova

$$\vec{S} = \frac{c}{2\pi} \left[ \frac{\vec{i} \vec{E}}{\vec{R}} \right] \quad (3.47)$$

I vettori  $\vec{E}$ ,  $\hat{H}$ ,  $\vec{S}$  rimangono costanti ovunque lungo il filo, basta considerare un tratto di filo di lunghezza  $l$ . Prendiamo quindi l'equazione (32,b). Poiché nel filo abbiamo una corrente costante, cioè uno stato stazionario, l'energia elettromagnetica  $J$  è indipendente dal tempo; ponendo  $\vec{S} = -\vec{S}_n$  e osservando che  $\vec{S}$  ha la stessa grandezza in tutti i punti della superficie  $2\pi Rl$  del filo, si dà all'equazione (32,b) la seguente forma

$$Q = 2\pi l (\vec{R} \vec{S}) \quad (3.48)$$

Verificheremo questa formula. Si ha, dalla (32,e)

$$Q = 2\pi l (\vec{R} \vec{S}) = cl (\vec{E} \vec{i})$$

Qui  $\vec{E}$  è espresso in unità el. st. e la (5.b) dà

$$Q = l (\vec{E}_m \vec{i})$$

dove  $\vec{E}_m$  è espressa in unità el. mag. Il prodotto  $lE_m$  è uguale alla forza elettromotrice che agisce nel tratto del filo; dalla legge di Ohm, questo prodotto è quindi uguale a  $r\vec{i}$ , dove  $r$  è la resistenza del tratto. Otteniamo così

$$Q = r\vec{i}^2 \quad (3.49)$$

Nel secondo membro abbiamo la nota espressione della quantità di calore ceduta nell'unità di tempo, nella tratto di filo, secondo la legge di Joule; risulta quindi verificata la formula (32,f), così come la (32,b) per il caso particolare da noi considerato. *La quantità di calore rilasciata in un filo percorso da una corrente elettrica costante è quindi effettivamente uguale al flusso di energia o flusso del vettore di Poynting, che penetra nel filo attraverso la sua superficie.*

#### 4. Potenziale vettore della corrente

Sia un campo elettrico stazionario o almeno così lentamente variabile da poter, nell'equazione (13), trascurare il secondo termine del primo membro. Supponiamo inoltre  $\mu = cost$  nell'intero spazio a cui si riferiscono le quantità  $\vec{E}, \hat{H}$ . Possiamo scrivere le equazioni (13), (16) e (21) come segue:

$$\frac{4\pi\sigma\mu}{c}\vec{E} = rot\mu\hat{H} \quad (3.50)$$

$$\frac{\mu}{c}\frac{\partial\hat{H}}{\partial t} = -rot\vec{E} \quad (3.51)$$

$$div\mu\hat{H} = 0 \quad (3.52)$$

Il problema della determinazione del vettore  $\mu\hat{H}$  è identico a quello già risolto nel primo capitolo, salvo che ora abbiamo

$$\hat{A} = \mu\hat{H} \quad (3.53)$$

$$\vec{B} = \frac{4\pi\sigma\mu}{c}\vec{E} \quad (3.54)$$

Conformemente alla formula (1-42,a), abbiamo

$$\mu\hat{H} = rot\vec{C} \quad (3.55)$$

dove  $\vec{C}$  è un *potenziale vettore*. Dalla (1-44) abbiamo

$$\vec{C} = \int \frac{\vec{B}dv}{4\pi r} = \frac{\mu}{c} \int \frac{\sigma\vec{E}dv}{r} = \frac{\mu}{c} \int \frac{\vec{I}dv}{r} \quad (3.56)$$

dove  $\vec{I}$  indica la densità di corrente che attraversa l'elemento di volume  $dv$ ,  $r$  la distanza dal punto  $(x, y, z)$ , a cui si riferisce il vettore  $\vec{E}$ , al punto  $(x', y', z')$  dove si trova l'elemento  $dv$ . Non va dimenticato che tutte le sommatorie indicate simbolicamente nella (36) dai simboli di integrazione sono sommatorie vettoriali. Designando le componenti del vettore  $\vec{I}$  con  $I_x, I_y, I_z$ , si ottengono, per le componenti del potenziale vettore, le espressioni

$$\begin{cases} C_x &= \frac{\mu}{c} \int \frac{I_x dv}{r} \\ C_y &= \frac{\mu}{c} \int \frac{I_y dv}{r} \\ C_z &= \frac{\mu}{c} \int \frac{I_z dv}{r} \end{cases} \quad (3.57)$$

Dalla (35) e (36), si ha

$$\hat{H} = \frac{1}{c} rot \int \frac{\vec{I}dv}{r} \quad (3.58)$$



Si deduce dalla (33)

$$\sigma \vec{E} = \vec{I} = \frac{c}{4\pi} \text{rot} \hat{H}$$

Portando  $\vec{I}$  nella (37), viene

$$\hat{H} = \text{rot} \int \frac{\text{rot}' \hat{H} dv}{4\pi r} \quad (3.59)$$

La notazione  $\text{rot}'$  significa che, sotto il segno di integrazione, il rotore del vettore  $\hat{H}$  è preso nel punto  $(x', y', z')$  dove si trova  $dv$ , mentre il rotore del vettore espresso simbolicamente dall'integrale si riferisce al punto  $(x, y, z)$  a cui si applica la quantità desiderata  $\hat{H}$ , che compare nel primo membro della (37,a). Le equazioni (33,a) e (35) danno

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \hat{H}}{\partial t} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \vec{C} = \text{rot} \left[ -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\vec{C}}{c} \right) \right]$$

Quando i rotori dei due vettori sono uguali, possono differire solo per un vettore lamellare, che si presenta come il gradiente di un certo potenziale scalare. Indichiamo con  $-\varphi$  questo potenziale scalare; il suo vettore è nullo, e si ha

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{C}}{\partial t} - \text{grad} \varphi \quad (3.60)$$

Qui  $-\varphi$  è il potenziale delle cariche elettriche libere. Nelle formule (35) e (38),  $\vec{E}, \hat{H}$  sono espressi dal potenziale vettore; nella (37) il vettore  $\hat{H}$  è espresso dalla corrente elettrica presente nello spazio dato. Risulta utile scrivere le (35) e (38) nella forma cartesiana

$$\begin{cases} H_x &= \frac{1}{c} \left( \frac{\partial \vec{C}_z}{\partial y} - \frac{\partial \vec{C}_y}{\partial z} \right) \\ H_y &= \frac{1}{c} \left( \frac{\partial \vec{C}_x}{\partial z} - \frac{\partial \vec{C}_z}{\partial x} \right) \\ H_z &= \frac{1}{c} \left( \frac{\partial \vec{C}_y}{\partial x} - \frac{\partial \vec{C}_x}{\partial y} \right) \end{cases} \quad (3.61)$$

$$\begin{cases} E_x &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{C}_x}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ E_y &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{C}_y}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ E_z &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{C}_z}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{cases} \quad (3.62)$$

Le grandezze  $C_x, C_y, C_z$  si determinano con le formule (36,a), quando si conosce la distribuzione della corrente elettrica. Particolarmente interessanti sono le formule (35) e (38) oppure (39) e (39,a), perché è assente ogni riferimento all'azione istantanea a distanza; i vettori  $\vec{E}, \hat{H}$ , nonché le loro componenti, sono espressi dalle quantità  $\vec{C}$  e  $\varphi$  relative allo stesso punto dello spazio a cui si riferiscono i vettori  $\hat{H}$  ed  $\vec{E}$  cercati:  $\hat{H}$  è determinato dalle derivate delle componenti del potenziale vettoriale rispetto alle coordinate ed  $\vec{E}$  mediante le derivate rispetto al tempo.

Dalla (38), si può facilmente dedurre la formula fondamentale (15) dell'induzione; basta per questo integrare i due membri lungo una linea chiusa: il secondo termine nel secondo membro dà un integrale nullo e al rimanente si applica il teorema di Stokes.

Applichiamo le formule introdotte nel caso di una corrente costante chiusa di intensità  $\vec{i}$  passante in un conduttore di sezione  $q$ ; indichiamo un suo elemento con  $dl$ . Si ha allora  $dv = qdl$  e  $\vec{I} dv = \vec{I} qdl = i \vec{dl}$ . La formula (36) dà

$$\vec{C} = \frac{\mu i}{c} \int \frac{\vec{dl}}{r} \quad (3.63)$$

Qui l'integrale appare nuovamente come simbolo della sommatoria vettoriale dei vettori  $\vec{dl}$ , ognuno dei quali è diviso per la grandezza corrispondente

$$r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} \quad (3.64)$$

dove  $r$  rappresenta un semplice numero. Abbiamo, per le componenti del potenziale vettore,  $dx', dy', dz'$ , essendo le componenti di  $\vec{dl}$

$$C_x = \frac{\mu i}{c} \int \frac{dx'}{r} \quad (3.65)$$

con espressioni analoghe per  $C_y$  e  $C_z$ . La formula (39) ci dà ora

$$H_x = \frac{i}{c} \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \gamma} dx' - \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} dy'$$

cioè, si veda la (40,a)

$$H_x = \frac{i}{c} \int \frac{(z - z') dy' - (y - y') dz'}{r^2} \quad (3.66)$$

Questa formula conferma che l'intensità del campo magnetico è indipendente dalla permeabilità magnetica  $\mu$  del mezzo circostante omogeneo. Si può ancora scrivere la (40,c) nel modo seguente:

$$H_x = \int \frac{\cos(r, z) \cos(dl, y) - \cos(r, y) \cos(dl, z)}{r^2} dl \quad (3.67)$$

Si può ora considerare  $H_x$  come la componente della risultante di tutte le intensità prodotte separatamente dagli elementi della corrente  $i \vec{dl}$ . Siano  $h_x, h_y, h_z$  le componenti di queste intensità elementari; si ha allora, ad esempio,

$$h_x = \frac{idl}{cr^2} \{ \cos(r, z) \cos(dl, y) - \cos(r, y) \cos(dl, z) \} \quad (3.68)$$

Mediante la (40,c) o la (40,e) si dimostra facilmente che  $h$  è normale al piano passante per  $dl$  e  $r$  e che

$$|\hat{h}| = \frac{idl}{cr^2} \sin(dl, r)$$

cioè si ottiene la formula di Biot e Savart. È chiaro che così si passa alla nozione di azione istantanea a distanza e che si possono facilmente ritrovare tutti i risultati ottenuti nel Libro II, considerando il campo magnetico di una corrente (Cap. II, § 6 e Cap. VII, §3).

## 5. Dielettrici e magneti

Supponiamo che non si abbia nello spazio considerato alcun conduttore di corrente, di modo che si ha dappertutto  $\sigma = 0$ . Le equazioni fondamentali (13), (16), (20) e (21) assumono allora la forma seguente:

$$\frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \text{rot } \hat{H} \quad (3.69)$$

$$\frac{\mu}{c} \frac{\partial \hat{H}}{\partial t} = -\text{rot } \vec{E} \quad (3.70)$$

$$\text{div } \varepsilon \vec{E} = 4\pi\rho \quad (3.71)$$

$$\text{div } \mu \hat{H} = 0 \quad (3.72)$$

Supponiamo dapprima i campi stazionari, cioè  $\vec{E}$  ed  $\hat{H}$  indipendenti dal tempo.. Abbiamo

$$\text{rot } \vec{E} = 0 \quad (3.73)$$

$$\text{div } \varepsilon \vec{E} = 4\pi\rho \quad (3.74)$$

L'equazione (42) mostra che  $\vec{E}$  è un vettore lamellare, uguale al gradiente di un certo potenziale scalare che indicheremo con  $-\varphi$ . Si ha pertanto

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi \quad (3.75)$$

Portando la (42,b) nella (42,a) e supponendo che  $\varepsilon = \text{cost}$ , si ottiene mediante la (1-19)

$$4\pi\rho = -\varepsilon\Delta\varphi \quad (3.76)$$

Si sa che una soluzione di questa equazione è

$$\varphi = \frac{1}{\varepsilon} \int \frac{\rho dv}{r} \quad (3.77)$$

essa si può considerare come il potenziale delle cariche elettriche. È importante notare che le formule (42,b) e (42,d) derivano dalle equazioni (41,a) e (41,b) di Maxwell, ma che queste ultime, come abbiamo già detto, non sono state finora stabilite in modo tale da eliminare ogni obiezione. La formula (22) dà l'espressione dell'energia elettrostatica contenuta in tutto lo spazio infinito:

$$W = \frac{\varepsilon}{8\pi} \int \vec{E}^2 dv = \frac{\varepsilon}{8\pi} \iiint \left\{ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right\} dxdydz \quad (3.78)$$

Nelle opere di Richarz, pp. 43-46 e di Abraham, vol. 1, pagg. 173-176 si indica come dalla formula (42,e) si possa dedurre la legge di Coulomb.

Abbiamo, per il campo magnetico, quando  $\mu$  è costante ed  $\vec{E}$  ed  $\hat{H}$  sono indipendenti dal tempo,  $\text{rot } \hat{H} = 0$  e  $\text{div } \hat{H} = 0$ , cioè.  $\hat{H} = 0$ ; ma questo risultato è in contraddizione con il fatto noto che esistono campi magnetici stazionari da soli, prodotti dal magnetismo residuo dei magneti di acciaio, o sovrapposti al campo magnetico delle correnti, quando queste ultime danno origine allo stato magnetico dei corpi ferromagnetici (elettromagneti). Diremo solo poche parole su questo tema, senza entrare nei dettagli. Nelle sostanze ferromagnetiche  $\mu$  è funzione di  $\hat{H}$ , dipendenza ulteriormente complicata da fenomeni di isteresi. Dalla (41,c) non segue che  $\text{div } \hat{H} = 0$  e si deve porre

$$\text{div } \hat{H} = 4\pi\rho' \quad (3.79)$$

dove  $\rho'$  è la densità di volume del magnetismo libero. Scrivendo, come nella (42,b)

$$\hat{H} = -\text{grad } \psi \quad (3.80)$$

si vede che  $\psi$  è il potenziale delle masse magnetiche libere. La teoria del magnetismo rimanente non si adatta bene al quadro della teoria di Maxwell. Per maggiori dettagli su questo argomento si può consultare l'opera già citata di Abraham, pp. Da 368 a 390.

Passiamo al caso fondamentale del campo elettromagnetico variabile in un dielettrico omogeneo ed isotropo. Poiché le due equazioni relative a tale campo hanno grandissima importanza, le stabiliremo in due modi, uno, molto rapido, facendo appello a considerazioni vettoriali, il secondo, più lungo, dove si utilizza solo la forma cartesiana, destinato a lettori non ancora sufficientemente familiari con l'analisi vettoriale.

Supponiamo che  $\mu = cost$ ,  $\varepsilon = cost$  e inoltre che non vi siano cariche libere, cioè  $\rho = 0$ . Abbiamo allora le seguenti equazioni:

$$\frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = rot \hat{H} \quad (3.81)$$

$$\frac{\mu}{c} \frac{\partial \hat{H}}{\partial t} = -rot \vec{E} \quad (3.82)$$

$$div \varepsilon \vec{E} = 0 \quad (3.83)$$

$$div \mu \hat{H} = 0 \quad (3.84)$$

Prendendo le derivate rispetto a  $t$  della (44) e il rotore dell'equazione (44,a), si ottiene, tenendo conto della (1-31) e della (44,b):

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= rot \frac{\partial \hat{H}}{\partial t} \\ \frac{\mu}{c} \frac{\partial \hat{H}}{\partial t} &= -rot rot \vec{E} = -grad div \vec{E} + \Delta \vec{E} = \Delta \vec{E} \end{aligned}$$

Da queste due equazioni si deduce

$$\frac{\varepsilon \mu}{c} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \Delta \vec{E} \quad (3.85)$$

Prendendo la derivata rispetto a  $t$  della (44,a) e il rotore della (44) si trova allo stesso modo

$$\frac{\varepsilon \mu}{c} \frac{\partial^2 \hat{H}}{\partial t^2} = \Delta \hat{H} \quad (3.86)$$

con  $\vec{E}$  e  $\hat{H}$  che soddisfano la stessa equazione differenziale.

Introduciamo ora le equazioni fondamentali (45) e (46) in un altro modo, partendo dalle (17) e (19). Differenziando la prima delle (19) rispetto a  $t$  si ha

$$\frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial N}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial M}{\partial t} \right) \quad (3.87)$$

La seconda e la terza delle equazioni (17) danno pure per differenziazione

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial M}{\partial t} \right) &= \frac{\mu}{c} \left( \frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 X}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial N}{\partial t} \right) &= \frac{\mu}{c} \left( \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial y} \right) \end{aligned}$$

Sottraendo la prima di queste ultime equazioni dalla seconda e sommano al secondo membro  $\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}$  e tenendo conto della (46,a) si ottiene

$$\frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 X}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}$$

o

$$\frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right)$$

Dalla (44,b), la quantità tra parentesi nel secondo membro è nulla, di modo che

$$\frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \Delta X \quad (3.88)$$

Si ottiene esattamente la stessa equazione per  $Y, Z, L, M, N$ . Se si sommano vettorialmente le prime tre equazioni così trovate e le ultime tre, si riottengono le equazioni (45) e (46).

I lettori che hanno familiarità con le equazioni della forma (45) e (46) vedranno immediatamente che qualsiasi valore di  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  si propaga attraverso il mezzo con la velocità

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \quad (3.89)$$

Stabiliremo questo risultato in modo più dettagliato. Supponiamo che i vettori  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  siano funzioni di un'unica coordinata  $x$ , cioè siano indipendenti da  $y$  e da  $z$ . Ciò significa che  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  sono assolutamente identici in tutti i punti di un qualunque stesso piano perpendicolare all'asse  $x$ .

In questo caso, tutte le derivate rispetto a  $y$  e  $z$  scompaiono dalle nostre equazioni. Abbiamo un totale di 14 equazioni, cioè le 6 equazioni (17) e (19), le 6 equazioni della forma (47) e le equazioni (44,b) e (44,c). Naturalmente esse non sono indipendenti, poiché le 6 equazioni della forma (47) sono state dedotte dalle altre. Le prime equazioni dei sistemi (17) e (19), nonché le equazioni (44,b) e (44,c), danno

$$\frac{\partial X}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial X}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (3.90)$$

ne risulta che  $X$  e  $L$  sono indipendenti da  $t$  e da  $x$ ; poiché nei punti infinitamente lontani,  $X$  e  $L$  devono annullarsi, si ha pertanto

$$X = 0 \quad L = 0 \quad (3.91)$$

Ne segue che la prima e la quarta delle equazioni della forma (47), cioè quelle relative a  $X$  e  $L$ , scompaiono. Le equazioni (48,b) mostrano che  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  sono perpendicolari all'asse  $x$ .

Delle 14 equazioni ne abbiamo considerate 6; ne risultano otto. La seconda e la terza equazione dei sistemi (17) e (19) danno

$$\frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial Y}{\partial t} = -\frac{\partial N}{\partial x} \quad (3.92)$$

$$\frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial M}{\partial x} \quad (3.93)$$

$$\frac{\mu}{c} \frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial x} \quad (3.94)$$

$$\frac{\mu}{c} \frac{\partial N}{\partial t} = -\frac{\partial Y}{\partial x} \quad (3.95)$$

Le componenti  $Y$  e  $N$  sono legate dalle equazioni (49) e (49,c) i, le componenti  $Z$  e  $M$  dalle equazioni (49,a) e (49,c). Queste due coppie di equazioni non sono costruite allo stesso modo: i segni dei secondi membri sono contrari. Torneremo su questo punto più tardi. Ricordiamo però, d'ora in poi, che la disposizione degli assi coordinati è tale che se, nella successione  $x, y, z, \infty, y$  degli assi, si fa ruotare uno qualsiasi degli assi verso quello che lo segue, ciò corrisponde a una rotazione di quota accompagnata da una traslazione nel verso del terzo asse. Quando, ad esempio, l'asse  $z$  punta verso l'alto, l'asse  $x$  punta verso destra, l'asse  $y$  si allontana dall'osservatore; quando invece l'asse  $y$  è diretto verso destra, l'asse  $x$  va verso l'osservatore. Adotteremo quest'ultima disposizione di facile progettazione.

Supponiamo che il vettore  $\vec{E}$  perpendicolare all'asse delle  $x$  sia diretto lungo l'asse  $y$  (verso destra). Si ha allora  $Z = 0$ ; indicheremo che il vettore  $\vec{E}$  ha la direzione dell'asse  $y$  con il simbolo  $E[y]$ . Le equazioni (49,a) e (49,b) mostrano che se  $Z = 0$ , si ha  $M = 0$ , cioè  $\hat{H} = H[z]$ . Reciprocamente, quando  $M = 0$ , si ha  $Z = 0$ . Se quindi  $\vec{E}$  è diretto lungo l'asse  $y$ ,  $\hat{H}$  è diretto lungo l'asse delle  $z$  e viceversa. Se si pone  $Y = 0$ , cioè  $\vec{E} = E[z]$ , le equazioni (49) e (49,c) danno  $N = 0$ , cioè  $\hat{H} = H[y]$  e reciprocamente quando  $\hat{H} = H[y]$  si ha  $\vec{E} = E[z]$ . Giungiamo a questo risultato fondamentale

$$\left( \vec{E} \hat{H} \right) = 0 \quad (3.96)$$

*I vettori  $\vec{E} \hat{H}$  sono perpendicolari tra loro e all'asse delle coordinate  $x$  da cui dipendono.*  
Distingueremo due casi:

I.  $Z = 0, M = 0$ ;  $\vec{E} = E[y]$ ,  $\hat{H} = H[z]$ ; le equazioni (49) e (49,c) danno

$$\begin{cases} \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E[y]}{\partial t} = -\frac{\partial H[z]}{\partial x} \\ \frac{\mu}{c} \frac{\partial H[z]}{\partial t} = -\frac{\partial E[y]}{\partial x} \end{cases} \quad (3.97)$$

II.  $Y = 0, N = 0$ ;  $\vec{E} = E[z]$ ,  $\hat{H} = H[y]$ ; le equazioni (49,a) e (49,b) diventano

$$\begin{cases} \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E[z]}{\partial t} = \frac{\partial H[y]}{\partial x} \\ -\frac{\mu}{c} \frac{\partial H[y]}{\partial t} = \frac{\partial E[z]}{\partial x} \end{cases} \quad (3.98)$$

La differenza tra questi due casi è chiaramente marcata dai sistemi (50,a) e (50,b). Si noti che la questione del verso delle grandezze  $\vec{E} \hat{H}$  è rimasta finora aperta; noi non sappiamo, ad esempio, su quale lato dell'asse  $z$   $\vec{E}$  è diretto, quando  $\hat{H}$  è diretto verso il lato positivo delle  $y$ .

Considerata la (48,b), restano quattro equazioni della forma (47) per  $Y, Z, M, N$ . Essendo i vettori  $\vec{E} \hat{H}$  indipendenti da  $x$  e  $y$ , il segno  $\Delta$  si riduce alla derivata seconda rispetto alla coordinata  $x$ . Le equazioni della forma (47) sono tutte della stessa natura; non è quindi necessario distinguere il caso  $E[y], H[z]$  dal caso  $E[z], H[y]$ , e in generale si ha

$$\frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} \quad (3.99)$$

$$\frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \hat{H}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \hat{H}}{\partial x^2} \quad (3.100)$$

Otteniamo infine 4 equazioni, cioè (51), (52) e (50,a) o (50,b).

L'equazione (51) è soddisfatta dall'espressione

$$\vec{E} = \varphi(x - vt) \quad (3.101)$$

dove  $\varphi$  rappresenta una funzione assolutamente arbitraria e  $v$  una costante. Se si porta la (53) nella (51), si ha

$$\frac{\varepsilon\mu}{c^2} v^2 \varphi'' = \varphi'' \quad (3.102)$$

da cui

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \quad (3.103)$$

Il valore della funzione  $\varphi(x - vt)$  non cambia quando di aggiunge  $v$  a  $x$  e uno a  $tm$  poiché

$$\varphi[(x + v) - v(t + 1)] = \varphi(x - vt) \quad (3.104)$$

Ciò significa che  $\vec{E}$  avrà, al termine dell'unità di tempo e nel punto  $x + v$ , lo stesso valore che ha al tempo  $t$  nel punto  $x$ ; percorre, nell'unità di tempo, la distanza  $v$ . Questo risultato vale per tutti i punti  $x$  e possiamo quindi tradurlo come segue: in un dato istante, il vettore  $\vec{E}$  è distribuito secondo una qualsiasi legge lungo l'asse  $x$ ; tale distribuzione si sposta lungo l'asse  $x$  con velocità  $v$ , senza subire alcuna variazione.

La formula (54) mostra che  $v$  può essere sia positivo che negativo; nel primo caso la propagazione avviene nel verso crescente di  $x$ ; nel secondo in quello decrescente. Prenderemo per  $v$  il valore positivo, in modo che il secondo caso sia espresso dalla formula

$$\vec{E} = \varphi(x + vt) \quad (3.105)$$

Sostituendo la (54,b) nella (51), si ottiene nuovamente la (53,a) e la (54), cosicché la relazione

$$\varphi[(x - v) + v(t + 1)] = \varphi(x + vt)$$

il che conferma che il valore dato di  $\vec{E}$  si sposta, nell'unità di tempo, dal punto  $x$  al punto  $x - v$ , cioè nel verso decrescente di  $x$ . La soluzione generale dell'equazione (51) assume quindi la forma

$$\vec{E} = \varphi_1(x - vt) + \varphi_2(x + vt) \quad (3.106)$$

dove  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  sono due funzioni arbitrarie.

L'equazione (52) dà allo stesso modo

$$\hat{H} = \psi(x - vt) \quad (3.107)$$

$$\hat{H} = \psi(x + vt) \quad (3.108)$$

e la soluzione generale è

$$\hat{H} = \psi_1(x - vt) + \psi_2(x + vt)$$

dove  $\psi, \psi_1, \psi_2$  sono funzioni arbitrarie e dove  $v$  è determinato dalla (54).

Chiameremo *perturbazione elettromagnetica* la distribuzione arbitraria dei vettori  $\vec{E}$  e  $\hat{H}$  lungo l'asse  $x$ . Si vede che la perturbazione elettromagnetica si propaga in entrambi i versi sull'asse  $x$  con la velocità  $v$  data dalla formula (54).

Nel vuoto, si ha  $\varepsilon = 1$  e  $\mu = 1$ , e quindi  $v = c$ . La grandezza  $c$  è la *velocità di propagazione della perturbazione elettromagnetica nel vuoto*. Ma si sa che

$$c = \frac{e_e}{e_m} \quad (3.109)$$

e che gli esperimenti hanno dato a questo rapporto un valore uguale alla velocità della luce. Si è quindi portati a pensare che la luce sia una perturbazione elettromagnetica in propagazione. La si può considerare un'ipotesi, ma è confermata dall'uguaglianza della velocità della luce e dal rapporto  $e_e : e_m$  determinato sperimentalmente. Una seconda conferma è data dalla verifica sperimentale di un altro risultato dedotto dalla formula (54):

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\varepsilon\mu} \quad (3.110)$$

dove  $n$  è l'indice di rifrazione della luce per il mezzo considerato. Si può porre, per la maggior parte dei mezzi,  $\mu = 1$ ; si ha allora

$$n^2 = \varepsilon \quad (3.111)$$

Il quadrato dell'indice di rifrazione di un mezzo è uguale alla costante dielettrica di quel mezzo. Abbiamo già ricordato più volte la relazione (57) e abbiamo visto che essa è confermata

sperimentalmente, solo in pochi casi è vera, ma allora completamente. I risultati negativi sono spesso spiegati da fenomeni di dispersione, che non rientrano nel quadro della teoria originaria di Maxwell qui esposta.

Chiameremo in seguito raggio la direzione  $+x$  o  $-x$  nella quale si propaga la perturbazione magnetica.

Riprendiamo ora i sistemi (50,a) e (50,b), aggiungendo loro le soluzioni (53) e (55) o (54,b) e (55,a). Sono possibili quattro casi.

$$Ia. \quad E[y], H[z] \quad \vec{E} = \varphi(x - vt) \quad \hat{H} = \psi(x - vt)$$

Le equazioni (50,a) danno, cambiando tutti i segni

$$\frac{\varepsilon}{c}v\varphi' = \psi' \quad \frac{\mu}{c}v\psi' = \varphi'$$

Moltiplicando queste equazioni membro a membro, si ritrova la (54); introducendo il valore (54) di  $v$ , si ha

$$\sqrt{\varepsilon}\varphi' = \sqrt{\mu}\psi'$$

Ne risulta che  $\sqrt{\varepsilon}\varphi = \sqrt{\mu}\psi$ , senza tener conto delle costanti di integrazione che sono indipendenti da  $t$  e da  $x$ . Si ottiene così

$$\sqrt{\varepsilon}E = \sqrt{\mu}H \quad (3.112)$$

$$IIa. \quad E[z], H[y] \quad \vec{E} = \varphi(x - vt) \quad \hat{H} = \psi(x - vt)$$

Il sistema (50,b) dà

$$-\frac{\varepsilon}{c}v\varphi' = \psi' \quad -\frac{\mu}{c}v\psi' = \varphi'$$

da cui

$$-\sqrt{\varepsilon}E = \sqrt{\mu}H \quad (3.113)$$

$$Ib. \quad E[y], H[z] \quad \vec{E} = \varphi(x + vt) \quad \hat{H} = \psi(x + vt)$$

Dal sistema (50,a) si ha

$$-\sqrt{\varepsilon}E + \sqrt{\mu}H \quad (3.114)$$

$$IIb. \quad E[z], H[y] \quad \vec{E} = \varphi(x + vt) \quad \hat{H} = \psi(x + vt)$$

Si ottiene con (50,b)

$$\sqrt{\varepsilon}E = \sqrt{\mu}H \quad (3.115)$$

Nel primo e nel quarto caso  $\vec{E}$  e  $\hat{H}$  hanno lo stesso segno; nel secondo e nel terzo segno contrario. Se assumiamo il verso di  $\vec{E}$  come positivo, otteniamo la seguente tabella per il verso del raggio e quelli di  $\vec{E}$  e  $\hat{H}$ :

	Raggio	$\vec{E}$	$\hat{H}$
Ia	$+x$	$+y$	$+z$
IIa	$+x$	$+z$	$-y$
Ib	$-x$	$+y$	$-z$
IIb	$-x$	$+z$	$+y$



In tutti i casi considerati, il raggio, i vettori  $\vec{E}$  e  $\hat{H}$  definiscono un movimento della vite, cioè che la rotazione di  $\vec{E}$  verso  $\hat{H}$  imprime a una vite un movimento di traslazione nel verso e nella direzione del raggio. Quando il raggio è diretto verso l'osservatore, questi vede la rotazione di  $\vec{E}$  verso  $\hat{H}$  in senso antiorario. Così si trova completamente risolta la questione della disposizione reciproca dei vettori  $\vec{E}$  e  $\hat{H}$  in un dato raggio. Tutte le formule dalla (58) alla (58,c) danno, tra le grandezze assolute dei vettori  $\vec{E}$  e  $\hat{H}$ , la relazione

$$\sqrt{\varepsilon} |\vec{E}| = \sqrt{\mu} |\hat{H}| \quad (3.116)$$

che si può ancora scrivere

$$\varepsilon \vec{E}^2 = \mu \hat{H}^2 \quad (3.117)$$

Nel vuoto si ha

$$|\vec{E}| = |\hat{H}| \quad (3.118)$$

Nel vuoto, i moduli dei vettori  $\vec{E}$  e  $\hat{H}$  sono pertanto uguali.

Il confronto dei casi Ia e Ib, o IIa e IIb, mostra che quando, in due raggi diretti in versi opposti, uno dei vettori  $\vec{E}$  o  $\hat{H}$  ha lo stesso verso del raggio, l'altro vettore ha, in entrambi i raggi, versi contrari.

Tenuto conto della relazione (58,e), le formule (22), (22,a) e (23) danno, per la densità di volume dell'energia,

$$W_e = W_m \quad (3.119)$$

$$W = \frac{\varepsilon}{4\pi} \vec{E}^2 = \frac{\mu}{4\pi} \hat{H}^2 \quad (3.120)$$

Le densità di volume delle energie del campo elettrico e del campo magnetico sono uguali nel vuoto.

Dalla (32), la direzione e il verso del vettore  $\vec{S}$  di Poynting, cioè del flusso di energia, coincide sempre con la direzione e il verso del raggio. Poiché  $\vec{E}$  è perpendicolare a  $\hat{H}$ , vedere (50) e (a) dà

$$|\vec{S}| = \frac{c}{4\pi} |\vec{E}| \cdot |\hat{H}| \quad (3.121)$$

Portando in questa formula il valore di  $c$  dedotto dalla (48) e tenendo conto della (58,d), si ottiene

$$|\vec{S}| = \frac{v\varepsilon}{4\pi} \vec{E}^2 = \frac{v\mu}{4\pi} \hat{H}^2$$

cioè, vedere la (59,a)

$$|\vec{S}| = vW \quad (3.122)$$

Ciò conferma ancora una volta che il vettore Poynting rappresenta in realtà un flusso di energia (per unità di tempo e attraverso l'unità di area della sezione rettilinea), perché  $W$  è l'energia contenuta nell'unità di volume. Si vede anche che  $\vec{E}$  e  $\hat{H}$  sono perpendicolari alla direzione del flusso di energia, almeno nel mezzo isotropo da noi considerato.

Finora abbiamo lasciato le funzioni  $\varphi(x - vt)$  e  $\psi(x - vt)$  completamente indeterminate. Supponiamo ora che la dipendenza del vettore  $\vec{E}$  da  $x$  e  $t$  sia espressa dalla legge di propagazione del moto vibratorio armonico in un mezzo isotropo. Dobbiamo porre di conseguenza

$$\vec{E} = \varphi(x - vt) = \vec{E} \sin a(vt - x)$$

dove  $\vec{\mathcal{E}}$  è un vettore il cui modulo è uguale all'ampiezza del vettore di grandezza variabile  $\vec{E}$ . Si sa che  $vT = \lambda$ , dove  $T$  è il periodo della vibrazione e  $\lambda$  la lunghezza d'onda; ponendo  $a = 2\pi : \lambda$ , si ottiene per  $\vec{E}$  la ben nota equazione

$$\vec{E} = \vec{\mathcal{E}} \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \quad (3.123)$$

Se  $\vec{E} = E[y]$ , si deduce dalla (58)

$$\hat{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \hat{\mathcal{E}} \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

essendo  $\hat{\mathcal{E}}$  un vettore assiale con lo stesso modulo del vettore polare  $\vec{\mathcal{E}}$ , ma parallelo a  $\hat{H}$ , ciò che si può ancora scrivere

$$\hat{H} = \hat{\mathcal{H}} \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \quad (3.124)$$

dove  $\hat{\mathcal{H}}$  è un vettore il cui modulo è uguale all'ampiezza del vettore della grandezza variabile  $\hat{H}$ , tale che

$$\sqrt{\mu H} = \sqrt{\varepsilon E} \quad (3.125)$$

Nel vuoto le ampiezze dei vettori  $\vec{E}$  e  $\hat{H}$  sono uguali. Le formule (60) e (60,a) mostrano che in ogni punto di un raggio si trovano i vettori “oscillanti”  $\vec{E}$  e  $\hat{H}$  sono in fasi identiche, cioè si annullano a vicenda contemporaneamente e raggiungono contemporaneamente le loro grandezze massime.

Quando la perturbazione si propaga nella direzione dell'asse  $+x$  e in un dato istante il vettore  $\vec{E}$  assume, in qualsiasi punto del raggio, il suo valore massimo  $\vec{\mathcal{E}}$  nella direzione dell'asse  $+y$ ,  $\hat{H}$  assume contemporaneamente in questo punto il suo valore massimo  $\hat{\mathcal{H}}$  nella direzione dell'asse  $+z$ . Ma se la perturbazione si propaga nel verso delle  $x$  decrescenti, al valore massimo  $\vec{E} = \vec{\mathcal{E}}$  lungo la direzione  $+y$  corrisponde nello stesso punto del raggio nello stesso istante il valore massimo  $\hat{H} = \hat{\mathcal{H}}$  nella direzione  $-z$ . Da ciò deriva una conseguenza molto importante. Supponiamo che lungo l'asse  $x$  si propagino due perturbazioni assolutamente identiche in versi opposti. In questo caso i due vettori  $\vec{E}$  e  $\hat{H}$  devono dar luogo ad onde stazionarie. Se in un certo punto dell'asse  $x$  i vettori  $\vec{E}$  delle due perturbazioni hanno la stessa fase, in quel punto i vettori  $\hat{H}$  delle due perturbazioni saranno in fasi opposte. Al contrario, dove i vettori  $\vec{E}$  saranno in fasi opposte, le fasi dei vettori  $\hat{H}$  saranno identiche. Possiamo quindi introdurre la seguente proposizione: *Quando due perturbazioni identiche, che si propagano in versi contrari, danno origine a onde stazionarie, i ventri del vettore  $\vec{E}$  coincidono con i nodi del vettore  $\hat{H}$ , e i nodi del vettore  $\vec{E}$  con i ventri del vettore  $\hat{H}$ . I due sistemi di onde stazionarie dei vettori  $\vec{E}$  e  $\hat{H}$  sono traslati l'uno rispetto all'altro di un quarto di lunghezza d'onda.*

Abbiamo parlato nel Volume II degli esperimenti che confermano l'esistenza della pressione della luce e abbiamo mostrato nel Volume III che tale pressione è una conseguenza necessaria dei principi della Termodinamica. Calcoleremo ora l'entità di questa pressione con due metodi diversi, entrambi basati sulle nozioni generali e sulle equazioni della teoria di Maxwell.

Lungo le linee o più precisamente i tubi di forza elettrica esiste una certa tensione  $P_e$  e, normalmente alla superficie laterale di tali tubi, una pressione uguale  $P_e$ , avente per valore, per unità di area della sezione o della superficie laterale,

$$P_e = \frac{\varepsilon \vec{E}^2}{8\pi}$$

Nel campo magnetico, esistono anche una tensione e una pressione laterale

$$P_m = \frac{\mu \hat{H}^2}{8\pi}$$

Quando un'onda piana cade normalmente su una superficie che assorbe la radiazione, i vettori  $\vec{E}$  e  $\hat{H}$  sono, come abbiamo visto, paralleli a tale superficie e, di conseguenza, essa è sottoposta alla pressione  $P = P_e + P_m$  così che

$$P = \frac{\varepsilon \vec{E}^2}{8\pi} + \frac{\mu \hat{H}^2}{8\pi}$$

cioè, vedere la (23)

$$P = W \quad (3.126)$$

Nel caso considerato la pressione è uguale all'energia contenuta nell'unità di volume. Quando l'onda viene riflessa completamente, sulla superficie si trovano due flussi di energia, il flusso incidente e quello riflesso; allora si ha

$$P = 2W \quad (3.127)$$

Se il coefficiente di riflessione è uguale a  $r$ , l'onda incidente produce la pressione  $W$  e l'onda riflessa la pressione  $rW$ ; si ha pertanto

$$P = (1 + r) W \quad (3.128)$$

Nello stabilire le ultime tre formule, abbiamo utilizzato le nozioni di tensione e pressione dei tubi di forza elettrica e di forza magnetica. Planck, nella sua opera classica *Vorlesungen über die Théorie der Wärmestrahlung*, 1906, p. P. 46-58, parte esclusivamente dalle equazioni fondamentali di Maxwell e tratta il caso generale in cui i raggi cadono sulla superficie del corpo in tutte le direzioni possibili. Limitiamoci alla normale incidenza di un'onda piana sulla superficie del corpo. Planck suppone che la sostanza del corpo riflettente abbia una conduttività molto elevata e che si abbia, per questa sostanza,  $\mu = 1$ . In un tale mezzo, un vettore  $\vec{E}$  molto piccolo produce una corrente finita; di conseguenza  $\vec{E}$  non può raggiungere un valore significativo. Dalla (26) dobbiamo concludere che, anche nel vuoto, sulla superficie del corpo stesso,  $\vec{E}$  è molto piccolo. Ciò mostra che la riflessione deve essere totale e che vi è la perdita di una mezza lunghezza d'onda, perché, sulla superficie stessa il vettore  $\vec{E}$  dell'onda incidente e quello dell'onda riflessa vengono quasi completamente distrutti. All'interno del corpo circola una corrente  $\vec{I}$ , la cui direzione coincide con quella del piccolissimo vettore  $\vec{E}$ ; in questo stesso corpo esiste anche il vettore  $\hat{H}$ , che chiameremo  $\hat{H}_i$ . La densità di corrente  $\vec{I}$  e il vettore  $\hat{H}_i$  sono legati dall'equazione,

$$\frac{4\pi \vec{I}}{c} = \text{rot } \hat{H}_i \quad (3.129)$$

Prendiamo l'asse  $x$  nella direzione del raggio incidente, l'asse  $y$  in quella di  $\vec{I}$  e l'asse  $z$  parallelo a  $\hat{H}_i$ . Quindi  $\text{rot } \hat{H}_i$  si riduce alla sua componente, lungo l'asse  $y$ , come richiede l'equazione (60,f). Si ha quindi

$$\frac{4\pi \vec{I}}{c} = \text{rot } \hat{H}_i = -\frac{\partial \hat{H}_i}{\partial x}$$

Sia  $S$  un elemento della superficie del corpo; consideriamo all'interno di questo corpo un cilindro di base  $S$  e le cui generatrici sono parallele all'asse  $x$ ; supponiamo l'origine delle

coordinate scelta in modo che sulla superficie si abbia  $x = 0$ . Sull'elemento di volume  $Sdx$  di questo cilindro agisce, la forza

$$d\vec{P} = \frac{Sdx}{c} \left[ \vec{T} \hat{H}_i \right]$$

Introducendo il valore di  $\vec{T}$  dato dall'equazione precedente, si trova

$$d\vec{P} = -\frac{Sdx}{4\pi} \left[ \hat{H}_i \frac{\partial \hat{H}_i}{\partial x} \right]$$

e, osservando che  $\left[ \vec{T} \hat{H}_i \right] = \left( \hat{H}_i \frac{\partial \hat{H}_i}{\partial x} \right) = 0$

$$|d\vec{P}| = -\frac{Sdx}{8\pi} \frac{\partial \hat{H}_i^2}{\partial x}$$

Questa forza  $d\vec{P}_i$  è normale alla superficie  $S$ , poiché essa è perpendicolare a  $\vec{T}$  e a  $\hat{H}$ ; essa è diretta verso l'interno del corpo. Il modulo della forza totale agente sul cilindro è uguale a

$$|\vec{P}| = -\frac{S}{8\pi} \int_0^\infty \frac{\partial \hat{H}_i^2}{\partial x} dx$$

Poiché, per  $x = \infty$ , il vettore  $\hat{H}_i$  deve essere nullo, si ha

$$|\vec{P}| = -\frac{S}{8\pi} \hat{H}_{i,0}^2$$

dove  $\hat{H}_{i,0}$  è il valore del vettore sulla superficie dello stesso corpo. La forza, che agisce sull'unità di area, è uguale alla pressione che abbiamo chiamato in precedenza  $P$ , di modo che

$$P = \frac{1}{8\pi} \hat{H}_{i,0}^2 \quad (3.130)$$

Dalla (26), il vettore  $\hat{H}_{i,0}$  deve essere uguale al vettore  $\hat{H}_{e,0}^2$  nello spazio esterno alla superficie stessa. Il raggio incidente e quello riflesso danno evidentemente insieme  $\hat{H}_{e,0}^2 = \hat{H}$  e abbiamo quindi

$$P = \frac{1}{2\pi} \hat{H}^2 = 2W$$

cioè la formula (60,d).

Questa dimostrazione mostra che il vettore  $\vec{E}$  perde mezza lunghezza d'onda durante la riflessione e spiega così ancora una volta il fatto che, nelle onde stazionarie, i nodi di uno dei vettori  $\vec{E}$  e  $\hat{H}$  coincidono con i ventri dell'altro; il vettore  $\vec{E}$  presenta un nodo sulla superficie riflettente e il vettore  $\hat{H}$  un ventre.

Quanto appena esposto costituisce il punto di partenza della teoria elettromagnetica della luce. Abbiamo fatto conoscere, nel Volume II, le vecchie teorie di Fresnel e F. Neumann, che differiscono tra loro solo per l'ipotesi sulla direzione delle vibrazioni elastiche. Quando il raggio luminoso è interamente polarizzato in un certo piano, secondo Fresnel le vibrazioni elastiche avvengono perpendicolarmente a tale piano, secondo F. Neumann invece nel piano stesso. La teoria elettromagnetica della luce toglie ogni controversia al riguardo perché mostra che un raggio presenta due tipi di vibrazioni, una elettrica e l'altra magnetica, disposte rispettivamente su piani perpendicolari. Le vibrazioni luminose della teoria di Fresnel corrispondono alle vibrazioni del vettore  $\vec{E}$ , che si svolgono perpendicolarmente al piano di polarizzazione del raggio.

## 6. Conduttori e semiconduttori dell'elettricità

Qui ci limiteremo ad alcune delle questioni più basilari. L'argomento verrà sviluppato più approfonditamente nel Capitolo dedicato all'approfondimento della teoria elettromagnetica della luce. Supponiamo che, nello spazio dato, le grandezze  $\sigma$  ed  $e$  siano diverse da zero. Dobbiamo allora considerare le equazioni (13) e (16) o i sistemi (14) e (17), nonché le equazioni (10) e (21). Inoltre, considereremo l'equazione (20) ancora esatta, nonostante la (19,a), dedotta dalla (18) si riferisca al caso in cui  $\sigma = 0$ . Come prima, chiameremo la densità di volume dell'elettricità la grandezza  $\rho$ , ma ora sarà una quantità variabile, dipendente dal tempo  $t$ . Quindi abbiamo le equazioni

$$\frac{4\pi\sigma}{c}\vec{E} + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \text{rot}\vec{H} \quad (3.131)$$

$$\frac{\mu}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = -\text{rot}\vec{E} \quad (3.132)$$

$$\text{div}\mu\vec{H} = 0 \quad (3.133)$$

$$\text{div}\varepsilon\vec{E} = 4\pi\rho \quad (3.134)$$

$$\vec{I} = \sigma\vec{E} \quad (3.135)$$

Consideriamo alcuni dei casi particolari più semplici.

I. Consideriamo un mezzo omogeneo isotropo, nel quale, all'istante  $t = 0$ , sono distribuite eventuali cariche elettriche, di cui indicheremo la densità di volume con  $\rho_0$ ; la distribuzione di queste cariche è del tutto arbitraria. In un mezzo omogeneo,  $\varepsilon$  e  $\sigma$  sono grandezze costanti. Prendiamo la divergenza dei due membri dell'equazione (61): dalla formula (1-25), otteniamo

$$4\pi\sigma\text{div}\vec{E} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\text{div}\vec{E} = 0 \quad (3.136)$$

L'equazione (61,c) dà

$$\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}\rho + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

che si può ancora scrivere

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}\rho \quad (3.137)$$

L'integrale di questa equazione è

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}t} \quad (3.138)$$

Introduciamo la notazione

$$\frac{\varepsilon}{4\pi\sigma} = \tau \quad (3.139)$$

si ha allora

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3.140)$$

Si vede che, in un mezzo conduttore, la densità di volume dell'elettricità tende a zero. All'istante  $t = \tau$ , la densità che rimane è

$$\rho = \frac{\rho_0}{e} = \frac{\rho_0}{2,718} \quad (3.141)$$

in generale, dopo ogni intervallo di tempo  $\tau$ , la densità  $\rho$  diventa  $e = 2,718...$  volte più piccola. Questo intervallo è chiamato tempo di rilassamento. Quanto più grande è  $\sigma$ , tanto più piccolo è  $\tau$  e tanto più rapidamente le cariche diventano molto deboli e praticamente impercettibili.

Anche per corpi cattivi conduttori, il tempo  $\tau$  è molto breve. Dobbiamo concepire la scomparsa di  $\rho$  come il passaggio di cariche alla superficie di corpi nei quali  $\sigma$  è diverso da zero

II. Sia  $S$  una superficie chiusa, che limita un qualsiasi spazio. Dalle equazioni (61,c), (61,d) e (61,e), si deduce

$$\operatorname{div} \vec{I} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Moltiplicando il primo membro di questa equazione per l'elemento di volume  $dv$  e integrando su l'intero spazio considerato, si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dv + \int \operatorname{div} \vec{I} dv = 0$$

Indicando la quantità totale di elettricità all'interno della superficie  $S$  da  $E$  e considerando la (1-21), si ha

$$-\frac{\partial E}{\partial t} = \int I_n dS \quad (3.142)$$

Questa equazione esprime che *la riduzione della quantità di elettricità in un dato spazio è uguale al flusso del vettore  $\vec{I}$ , che attraversa la superficie  $S$  tracciata in questo spazio*. Ciò conferma che il vettore  $\vec{I}$ , che abbiamo chiamato densità della corrente elettrica, è effettivamente misurato dalla quantità di elettricità che attraversa nell'unità di tempo l'area unitaria della sezione perpendicolare alla direzione del flusso di elettricità. Non abbiamo utilizzato una tale definizione del vettore  $\vec{I}$  in questo Capitolo, perché abbiamo introdotto le equazioni (61,c) e (61,d), cioè (20) e (10), indipendentemente l'una dall'altra.

III. Abbiamo stabilito le equazioni (45) e (46), assumendo  $\sigma = 0$ . Scriveremo le equazioni corrispondenti, nel caso generale in cui  $\sigma$  è diverso da zero. Poiché per  $\sigma > 0$  la grandezza  $\rho$  scompare rapidamente, assumeremo  $\rho = 0$ ; si ha quindi, assumendo  $\varepsilon$  e  $\mu$  costanti

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \quad (3.143)$$

cioè

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0 \quad (3.144)$$

Differenziamo la (61) rispetto a  $t$  e prendiamo il rotore dei due membri dell'equazione (61,a); viene

$$\frac{4\pi\sigma}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{c}{\mu} \Delta \vec{E}$$

o

$$\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{c}{\mu\varepsilon} \Delta \vec{E}$$

Introducendo le grandezze

$$\tau = \frac{\varepsilon}{4\pi\sigma} \quad v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \quad (3.145)$$

si ha infine

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = v^2 \Delta \vec{E} \quad (3.146)$$

Differenziando la (61,a) rispetto a  $t$  e prendendo il rotore dei due membri della (61), si ottiene

$$\frac{\partial^2 \hat{H}}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial \hat{H}}{\partial t} = v^2 \Delta \hat{H} \quad (3.147)$$

I vettori  $\vec{E}$  e  $\hat{H}$  soddisfano quindi ancora, per  $\sigma > 0$ , la stessa equazione. Per  $\sigma = 0$ , le equazioni (66) e (67) diventano le (45) e (46). Restano da determinare le componenti dei vettori  $\vec{E}$  e  $\hat{H}$ , i sistemi (14) e (17).

Consideriamo nuovamente il caso particolare in cui i vettori  $\vec{E}$  e  $\hat{H}$  dipendono solo da  $x$ . Le (66) e (67) assumono allora la forma seguente:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = v^2 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} \quad (3.148)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{H}}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial \hat{H}}{\partial t} = v^2 \frac{\partial^2 \hat{H}}{\partial x^2} \quad (3.149)$$

Dalle equazioni (61,b) e (65,a), che sostituisce la (61,c) danno

$$\frac{\partial X}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (3.150)$$

Inoltre, le prime equazioni dei sistemi (14) e (17) danno

$$\frac{1}{\tau} X + \frac{\partial X}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (3.151)$$

Ne consegue, come prima, che  $L = 0$  o  $X = 0$ , perché la prima equazione (69,b) mostra che se  $X$  è indipendente da  $x$ , esistesse, svanirebbe rapidamente, secondo una legge analoga a quella espressa dalla (64). Supponiamo inoltre che  $\vec{E} = E[y]$  sia diretto lungo l'asse  $y$  e che di conseguenza  $Z = 0$ . La terza equazione del sistema (14) e la seconda equazione del sistema (17) danno allora  $M = 0$ , cioè  $\hat{H} = H[z]$ ; in altre parole, il vettore  $\hat{H}$  è diretto lungo l'asse  $z$ .

Vediamo che, nel caso generale ( $\sigma > 0$ ), anche i vettori  $\vec{E}$  e  $\hat{H}$  sono perpendicolari tra loro. La seconda equazione del sistema (14) e la terza equazione del sistema (17), che permangono, danno ora

$$\begin{cases} \frac{4\pi\sigma}{c} \vec{E} + \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial x} \\ \frac{\mu}{c} \frac{\partial \hat{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} \end{cases} \quad (3.152)$$

Per  $\sigma = 0$ , il sistema (70) si trasforma nel sistema (50,a). Le equazioni (68), (69), (70) e (65,c) consentono lo studio completo del caso considerato. Tratteremo questo studio, con tutti i necessari sviluppi, nel capitolo dedicato alla teoria elettromagnetica della luce.

## 7. Le equazioni di Hertz per i corpi in movimento

Sia un campo vettoriale  $\vec{E}$  e  $\hat{H}$  e supponiamo i corpi, che si trovano in esso, in movimento. Questi corpi possono essere sorgenti che danno origine a  $\vec{E}$  e  $\hat{H}$ , ad esempio corpi elettricamente carichi, conduttori percorsi da correnti elettriche preesistenti, corpi ferromagnetici, magneti in acciaio, dielettrici polarizzati; questi corpi possono essere anche conduttori che, allo stato di riposo, non presentano né carica né corrente. Per capire come Hertz (1890) ha modificato le equazioni di Maxwell, nel caso di corpi in movimento, scriveremo queste equazioni per le componenti nella direzione  $n$  della normale a una qualsiasi superficie  $S$ , limitata da una curva arbitraria. Le equazioni (61) e (61,a) danno

$$\begin{aligned} \frac{4\pi\sigma}{c} E_n + \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E_n}{\partial t} &= \text{rot}_n \hat{H} \\ \frac{\mu}{c} \frac{\partial H_n}{\partial t} &= -\text{rot}_n \vec{E} \end{aligned}$$

Moltiplicando i due membri di queste equazioni per  $dS$  e integrando sull'intera superficie  $S$ , viene

$$\begin{cases} \frac{4\pi}{c} \int \sigma E_n dS + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \varepsilon E_n dS &= - \int \text{rot}_n \hat{H} dS \\ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \mu H_n dS &= - \int \text{rot}_n \vec{E} dS \end{cases} \quad (3.153)$$

Queste equazioni sono relative a una superficie stazionaria nello spazio. Hertz ammette che le equazioni (71) rimangono vere nel caso di un sistema in movimento, ma si riferiscono a una superficie mobile, invariabilmente legata al corpo in movimento. Hertz ammette allo stesso tempo che l'etere si muove con il corpo; prende quindi la costante dielettrica del corpo in movimento pari a  $\varepsilon$ , mentre bisognerebbe prenderla pari a  $\varepsilon - 1$ , se si suppone che l'etere non partecipi al movimento del corpo.

Abbiamo considerata nel primo capitolo la variazione col tempo di un vettore. Abbiamo indicato con  $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$  la variazione del vettore  $\vec{A}$  in un punto dato fisso dello spazio e con  $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$  la variazione in un punto invariabilmente legato a un corpo in moto con la velocità  $\vec{v}$ . L'ipotesi di Hertz, nel caso di un sistema mobile, consiste nel sostituire, nelle equazioni (71), il simbolo  $\frac{\partial}{\partial t}$  con  $\frac{d}{dt}$ , di modo che queste equazioni assumono la forma seguente:

$$\begin{cases} \frac{4\pi}{c} \int \sigma E_n dS + \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int \varepsilon E_n dS &= \int \text{rot}_n \hat{H} dS \\ \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int \mu H_n dS &= - \int \text{rot}_n \vec{E} dS \end{cases}$$

In precedenza è stata stabilita la relazione

$$\frac{d}{dt} \int A_n dS = \int \left\{ \frac{\partial A_n}{\partial t} + v_n \text{div} \vec{A} + \text{rot}_n [\vec{A}, \vec{v}] \right\} dS$$

Trasformando mediante questa relazione le equazioni (71,a), viene

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{c} \int \sigma E_n dS + \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int \left\{ \frac{\partial E_n}{\partial t} + v_n \text{div} \varepsilon \vec{E} + \text{rot}_n [\varepsilon \vec{E}, \vec{v}] \right\} dS &= \int \text{rot}_n \hat{H} dS \\ \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int \left\{ \frac{\partial \mu H_n}{\partial t} + v_n \text{div} \mu \hat{H} + \text{rot}_n [\mu \hat{H}, \vec{v}] \right\} dS &= - \int \text{rot}_n \vec{E} dS \end{aligned}$$

In precedenza abbiamo introdotto la relazione

$$\frac{d}{dt} \int A_n dS = \int \left\{ \frac{\partial A_n}{\partial t} + v_n \text{div} \varepsilon \vec{E} + \text{rot}_n [\vec{A}, \vec{v}] \right\} dS$$

Trasformando mediante questa relazione la (71,1), viene

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{c} \int \sigma E_n dS + \frac{1}{c} \int \left\{ \frac{\partial \varepsilon E_n}{\partial t} + v_n \text{div} \varepsilon \vec{E} + \text{rot}_n [\varepsilon \vec{E}, \vec{v}] \right\} dS &= \int \text{rot}_n \hat{H} dS \\ \frac{1}{c} \int \left\{ \frac{\partial \mu H_n}{\partial t} + v_n \text{div} \mu \hat{H} + \text{rot}_n [\mu \hat{H}, \vec{v}] \right\} dS &= - \int \text{rot}_n \vec{E} dS \end{aligned}$$

Moltiplichiamo la prima di queste equazioni per  $c/4\pi$  e introduciamo l'espressione  $\vec{D} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \vec{E}$  e  $\text{div} \varepsilon \vec{E} = 4\pi\rho$ ; applichiamo d'altra parte, nella seconda equazione, la relazione  $\text{div} \mu \hat{H} = 0$ . Si ottiene allora

$$\int \sigma E_n dS + \left\{ \frac{\partial D_n}{\partial t} + v_n \rho + \text{rot}_n [\vec{D}, \vec{v}] \right\} dS = \frac{\varepsilon}{4\pi} \int \text{rot}_n \hat{H} dS$$



$$\frac{\mu}{c} \int \left\{ \frac{\partial H_n}{\partial t} + \text{rot}_n [\hat{H}, \vec{v}] \right\} dS = - \int \text{rot}_n \vec{E} dS$$

Poiché la superficie  $S$  e di conseguenza anche la direzione  $n$  sono del tutto arbitrarie, è chiaro che le stesse equazioni valgono per funzioni sotto il segno di sommatoria, cioè si ha

$$\sigma \vec{E} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{v} \rho + \text{rot}_n [\vec{D}, \vec{v}] = \frac{c}{4\pi} \text{rot} \hat{H} \quad (3.154)$$

$$\frac{\mu}{c} \frac{\partial \hat{H}}{\partial t} + \frac{\mu}{c} \text{rot} [\hat{H}, \vec{v}] = -\text{rot} \vec{E} \quad (3.155)$$

Queste equazioni sostituiscono, nel caso di un sistema in movimento, le equazioni (61) e (61,a) di Maxwell. Tutte le grandezze che entrano in queste equazioni si riferiscono al punto dello spazio in cui si trova in un dato istante il punto materiale animato dalla velocità  $\vec{v}$ . Per  $\vec{v} = 0$ , le equazioni (72) e (73) si trasformano nella (61) e (61,a).

Consideriamo innanzitutto l'equazione (72). Torniamo all'equazione (12,a), cioè

$$\vec{G} = \frac{c}{4\pi} \text{rot} \hat{H} \quad (3.156)$$

dove  $\vec{G}$ , densità di corrente che produce il campo  $\hat{H}$ , è uguale a

$$\vec{G} = \vec{I} + \vec{V} = \sigma \vec{E} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (3.157)$$

Nel caso di un sistema a riposo, questa corrente è formata dalla corrente di conduzione  $\sigma \vec{E}$  e dalla corrente di spostamento  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ , Manterremo ancora la formula (73,a), cioè supporremo che il rotore di  $\hat{H}$  è pure legato alla densità di corrente totale  $\vec{G}$  dalla (73,a), nel caso di un sistema in movimento, avendo  $\vec{G}$  ora l'espressione

$$\vec{G} = \sigma \vec{E} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{v} \rho + \text{rot} [\vec{D}, \vec{v}] \quad (3.158)$$

La corrente totale  $\vec{G}$  quindi non è più composta da due, ma da quattro parti:  $\sigma \vec{E}$  e  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  sono le densità delle correnti di conduzione e spostamento;  $\vec{v} \rho$  è la densità della corrente di convezione, dovuta al trasporto di una carica elettrica, la cui densità di volume è  $\rho$ , con la velocità  $\vec{v}$  del corpo. Rowland (1876) fu il primo a mostrare l'esistenza del campo magnetico di una tale corrente di convezione. Torneremo su questa questione in uno dei capitoli successivi. Per quanto riguarda il  $\text{rot} [\vec{D}, \vec{v}]$ , è la densità di quella che chiamiamo corrente di Röntgen. Tale corrente esiste quando nel campo elettrico si muove un dielettrico polarizzato, la cui polarizzazione e di conseguenza anche lo spostamento  $\vec{D}$  sono dovuti a questo campo. Röntgen (1888) ha osservato il campo magnetico  $\hat{H}$  di una corrente di questo tipo; altre ricerche molto importanti su questo argomento sono state fatte da A. A. Eichenwald (1903); ce ne occuperemo più tardi.

Passiamo all'equazione (73), dove introdurremo l'induzione magnetica  $\hat{B} = \mu \hat{H}$ ; allora abbiamo

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \hat{B}}{\partial t} + \frac{1}{c} \text{rot} [\hat{B}, \vec{v}] = -\text{rot} \vec{E} \quad (3.159)$$

Poniamo  $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ , dove

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \hat{B}}{\partial t} = -\text{rot} \vec{E}_1 \quad (3.160)$$

$$\frac{1}{c} \text{rot} \left[ \widehat{B} \vec{v} \right] = -\text{rot} \vec{E}_2 \quad (3.161)$$

L'equazione (75,a), che corrisponde alla (16), determina la forza elettromotrice indotta in un dato punto dalla variazione del flusso di induzione magnetica  $\widehat{B}$ . Applicando la formula Stokes al secondo membro, si torna alla (15,a).

$$-c \int (\vec{E}_1 d\vec{s}) = \frac{\partial}{\partial t} \int B_n dS \quad (3.162)$$

che ci è servita come punto di partenza per stabilire la seconda equazione di Maxwell, nel caso di un sistema fisso. Applicando la formula Stokes ai due membri dell'equazione (75,b), otteniamo

$$-c \int (\vec{E}_2 d\vec{s}) = \int \left( \left[ \widehat{B} \vec{v} \right] d\vec{s} \right) \quad (3.163)$$

Ne consegue che su ciascun elemento  $d\vec{s}$  della curva di integrazione, che assumiamo conduttrice e chiusa, agisce la forza elettromotrice  $-c \vec{E}_2$ , che differisce da  $\left[ \widehat{B} \vec{v} \right]$  per un vettore, il cui integrale lungo la curva chiusa è nullo. Tale vettore deve essere della forma  $\text{grad} \varphi$ , dove  $\varphi$  denota un potenziale scalare di cariche elettriche arbitrarie. Nei conduttori chiusi, non è necessario tener conto di questo vettore; rimane quindi, cambiando i segni,

$$c \vec{E}_2 = \left[ \vec{v} \widehat{B} \right] \quad (3.164)$$

Il modulo del vettore  $\vec{E}_2$  è dato dalla relazione

$$c \vec{E}_2 = |\vec{v}| \cdot \left| \widehat{B} \right| \sin \left( \vec{v} \widehat{B} \right) \quad (3.165)$$

Il vettore  $\vec{E}_2$  è normale al piano contenente la direzione del flusso magnetico  $\widehat{B}$  e quella del movimento  $\vec{v}$ , la rotazione di una vite nel senso di  $\vec{v}$  verso  $\widehat{B}$  dando a questa vite un moto di traslazione nella direzione del vettore  $\vec{E}_2$ . Ne consegue ovviamente che  $\vec{E}_2$  è la forza elettromotrice indotta nell'elemento di volume del corpo dal suo movimento nel campo magnetico. Abraham ha mostrato come si spiegano i fenomeni di induzione unipolare utilizzando l'equazione (75.b).

CONCLUSIONE. - Abbiamo esposto i fondamenti della teoria di Maxwell, lasciando da parte molte questioni di carattere più particolare. Questa teoria fornisce un quadro straordinariamente accurato di un gran numero di fenomeni elettrici e magnetici; tuttavia, ci sono anche molti fenomeni che non rientrano in questo quadro. Per spiegarli sono state proposte diverse varianti della teoria, che portano a modifiche più o meno profonde delle equazioni che abbiamo incontrato in questo capitolo. In un Trattato di Fisica Generale è impossibile studiare queste teorie. Essi sono attualmente soppiantate dalla teoria elettronica, di cui indicheremo i tratti principali nel capitolo successivo.

## 8. Determinazione sperimentale della grandezza “ $v$ ”

In genere si conviene designare con  $v$  (spesso tra virgolette) una grandezza che può essere ottenuta mediante misure elettromagnetiche di diversa natura e il cui valore numerico deve, come prevede la teoria, essere pari alla velocità  $c$  della luce nel vuoto. Qui daremo una rapida rassegna dei metodi per determinare  $v$ , essendo l'uguaglianza  $v = c$  strettamente legata alla teoria di Maxwell.

Nel 1863 Maxwell e Fleming Jenkin hanno indicato cinque metodi per determinare  $v$ ; ma solo i tre seguenti sono stati praticamente realizzati e hanno dato risultati soddisfacenti. Si basano sulla misura di una stessa grandezza elettrica in unità elettrostatiche (indice  $e$ ) e in unità elettromagnetiche (indice  $m$ ).

1. Si misura una certa quantità di elettricità in unità el. st. ( $e_e$ ) e nelle unità el. mag. ( $e_m$ ); si ha allora

$$v = \frac{e_e}{e_m} \quad (3.166)$$

2. Si misura allo stesso modo una forza elettromotrice o una differenza di potenziale ( $E_e$  e  $E_m$ ); si ha

$$v = \frac{E_m}{E_e} \quad (3.167)$$

3. Si opera anche con una capacità ( $C_e$  e  $C_m$ ); si ha

$$v^2 = \frac{C_e}{C_m} \quad (3.168)$$

Nelle ultime tre formule si trovano al secondo membro, non le unità delle grandezze  $e$ ,  $E$ , e  $C$ , ma i valori numerici di grandezze concrete, misurate sia in unità elettrostatiche che in unità elettromagnetiche. Assumeremo che tutte le misure siano effettuate in unità C.G.S.; sappiamo che, in questo caso, il valore di  $v$  è vicino a

$$v = 3 \cdot 10^{10} \quad (3.169)$$

Molte misure sperimentali della quantità  $v$  sono state effettuate utilizzando questi tre metodi. Tutte queste misure oggi hanno poco più che un interesse storico, perché non può più esserci alcun dubbio sull'identità della grandezza " $v$ " e della velocità e della luce nel vuoto. Ci limiteremo quindi a descrivere molto brevemente i metodi elencati e ad indicare i lavori ad essi relativi. Daremo i risultati delle misure, scrivendo nella formula (80) solo il coefficiente di  $10^{10}$ , cioè un numero vicino a 3.

I. METODO PER LA MISURA DI UNA QUANTITÀ DI ELETTRICITÀ. — Questo metodo fu usato da Weber e Kohlrausch (1856), e successivamente da Rowland (1879, lavoro pubblicato nel 1889).

Weber e Kohlrausch hanno misurato la carica di una bottiglia di Leida in unità el. st., trasportando una determinata frazione di questa carica sulla sfera fissa di una bilancia di torsione di Coulomb. La bottiglia veniva poi scaricata attraverso un galvanometro e, dalla deflessione dell'ago magnetico, era possibile determinare la quantità di carica, in unità el. mag. La variazione nel tempo della carica della bottiglia è stata osservata utilizzando un elettrometro collegato a questa bottiglia. Il risultato, corretto da W. Voigt (1877), è risultato uguale a 3,1140.

Rowland e i suoi collaboratori hanno utilizzato, al posto della bottiglia di Leida, un condensatore sferico, di cui hanno misurato il per mezzo di un elettrometro assoluto Thomson; il risultato è stato 2,9815.

II. METODO PER MISURARE UNA FORZA ELETTROMOTRICE O UNA DIFFERENZA DI POTENZIALE. — Si misura in unità el. st., utilizzando l'elettrometro assoluto, la differenza di potenziale più grande possibile; si determina poi l'intensità della corrente prodotta da questa stessa differenza di potenziale in un conduttore, di cui conosciamo la resistenza in ohm. Varie varianti di questo metodo furono eseguite da Maxwell (1868), W. Thomson e King (1869), Mc Kichan (1874), Shida (1880), Exner (1882), Thomson, Ayrton e Perry (1888), Pellat (1891), Hurmuzescu (1896), Perot e Fabry (1898).

Maxwell ha misurato l'intensità di una corrente con un elettrodinamometro assoluto, abbinato ad un elettrometro assoluto in modo tale che la repulsione delle bobine del primo sia bilanciata dall'attrazione delle armature cariche del secondo. A questo scopo erano necessarie due batterie

di elementi, una che serviva a caricare le piastre dell'elettrometro e l'altra a mandare corrente nelle bobine fissate alle facce esterne delle piastre; il rapporto tra le forze elettromotrici delle due batterie è stato determinato mediante misure speciali. Il risultato è stato 2,84.

Non ci soffermeremo sulle altre opere che abbiamo citato; indicheremo solo i risultati: Mc Kichan, da 2,863 a 2,999; Thomson, Ayrton e Perry, 2,92; Exner, 2,87; Pellat, 3,0092; Hurmuzescu, 3,001; Perot e Fabry, 2,9973.

III. METODO PER MISURARE UNA CAPACITÀ. - Rosa e Dorsey indicano nella loro memoria (1907) otto varianti di questo metodo; ritengono che la terza e la quarta di queste varianti forniscano i migliori risultati, tra tutti i metodi generalmente adottati per la determinazione della quantità  $v$ . Quasi in tutti i casi la capacità  $C_e$  di un condensatore si calcola in base alla sua forma e alle sue dimensioni; per la determinazione di  $C_m$  è sempre necessario conoscere l'entità di una certa resistenza in misura assoluta. Daremo l'enumerazione di Rosa e Dorsey, limitandoci ai sei metodi di misurazione messi in pratica.

1. *Metodo del galvanometro balistico* — La carica di un condensatore di capacità nota  $C_e$  è misurata utilizzando un galvanometro balistico. Il condensatore viene caricato dalla stessa batteria utilizzata per calibrare il galvanometro. In questo modo si ottiene il valore  $e_m : E_m$ , che è uguale a quello della grandezza  $C_m$  cercata. È necessario conoscere la resistenza assoluta del circuito di corrente chiuso. Le misure sono state effettuate seguendo questo metodo da Ayrton e Perry (in Giappone, 1879; il risultato fu 2,96) e da Hockin (1879, il risultato è stato 2,967).

2. *Metodo di deviazione costante del galvanometro* — Il condensatore è periodicamente caricato da una batteria e scaricato; le correnti di carica o scarica passano attraverso un galvanometro, che mostra una deviazione costante. L'entità di questa deviazione viene confrontata con quella data dallo stesso galvanometro inserito nel circuito chiuso della stessa batteria. La resistenza dell'intero circuito deve essere nota in unità assolute risolte; è inoltre necessario conoscere il numero  $n$  di cariche al secondo del condensatore. L'intensità  $i$  della corrente è, nel primo caso, determinata dall'equazione

$$nEC_m = Ai_i$$

indicando  $E$  la forza elettromotrice della batteria e  $A$  la costante del galvanometro. Nel secondo esperimento si ha, per l'intensità  $i_2$  della corrente, l'espressione

$$\frac{Er''}{rr'' + rr' + r'r''} = Ai_2$$

essendo  $r$  la resistenza del circuito principale,  $r'$  la resistenza del galvanometro ed  $r''$  quella dello shunt. Se dividiamo la prima uguaglianza per la seconda,  $E$  e  $A$  svaniscono e si ottiene  $C_m$ . Le misure sono state effettuate seguendo questo metodo da Stolietoff (1881, risultato da 2,98 a 3,00), utilizzando un interruttore rotante per la carica e la scarica del condensatore, e da Klemencic (1881, risultato 3,0188), che ha utilizzato per lo stesso scopo, un interruttore a diapason.

3. *Metodo del ponte di Wheatstone* — Il circuito di una batteria di elementi presenta una derivazione corrispondente al ponte di Wheatstone. Su uno dei rami del ponte sono inseriti un condensatore e un interruttore. Variando il numero di interruzioni al secondo o la resistenza dell'altro ramo si può azzerare la corrente del ponte. In questo caso la quantità  $C_m$  è determinata da una formula piuttosto complicata, data da J. J. Thomson (1883) e che non indicheremo. Le misure sono state effettuate seguendo questo metodo da Himstedt (1887, risultato 3,0067), Rosa (1889, risultato 3,000), J. J. Thomson e Searle (1890, risultato 2,996), Rosa e Dorsey (1907; la media dei loro risultati, secondo il presente metodo e quello successivo, è 2,9971).

4. *Metodo del galvanometro differenziale* — Questo metodo differisce dal secondo in quanto le correnti di carica e di scarica, nonché la corrente costante, passano attraverso le due bobine di un galvanometro differenziale; la deviazione di questo galvanometro viene così ricondotta a zero. Questo metodo è stato utilizzato da Klemencic (1884, risultato 3,0188), Himstedt (1886 e

1888, risultato 3,015), Abraham (1892, risultato 2,991), Rosa e Dorsey (1907, risultato indicato sopra).

5. *Metodo di scarica oscillante di un condensatore* — Quando un circuito contiene un condensatore di capacità  $C_m$  e autoinduzione  $L_m$ , la durata  $t$  delle oscillazioni della scarica è data dalla formula

$$t = 2\pi\sqrt{C_m L_m}$$

Misurando  $t$  e  $L_m$ , si deduce  $C_m$  e quindi si ottiene  $v$ , dopo che  $C_e$  è stato calcolato come nei metodi precedenti o determinato mediante confronto con una capacità nota. Per misurare il tempo  $t$  nel modo più accurato possibile è necessario che esso non sia troppo piccolo e di conseguenza la capacità  $C_m$  e l'autoinduzione  $L_m$  devono avere valori grandi. Questo metodo è stato applicato da Colley: (1886, risultato 3,0259), Webster (1898, risultato 3,0259), Lodge e Glazebrook (1899, risultato 3,009). Utilizzando grandi valori di  $C_m$  e  $L_m$ , Colley ha ottenuto oscillazioni elettriche molto lente; la scarica passava attraverso un galvanometro, il cui ago magnetico poteva seguire queste oscillazioni. La durata dell'oscillazione dell'ago del galvanometro, che era dotato di un piccolo specchio, veniva determinata mediante il metodo ottico. Webster utilizzava un elettrometro, il cui ago seguiva le oscillazioni della scarica. Il circuito del condensatore viene dapprima chiuso dalla caduta di un peso, ciò che produce la scarica; quindi l'elettrometro è scollegato dal circuito dallo stesso peso. Si determinano le posizioni di un secondo commutatore, per il quale l'ago dell'elettrometro passa attraverso la sua posizione di equilibrio. Lodge e Glazebrook hanno fotografato la scintilla su una piastra fotosensibile in movimento.

6. *Metodo per confrontare capacità e autoinduzione utilizzando corrente alternata* — Nel circuito di una corrente alternata (di periodo  $t$ ) è inserito un elettrometro. L'ago è collegato tramite due conduttori ai due elettrodi dell'elettrometro (foglia d'oro, per esempio); uno dei conduttori contiene un condensatore di capacità  $C_m$ , il secondo una resistenza non induttiva  $R$ . L'elettrometro rimane a riposo quando

$$\pi R C_m = t$$

da cui si deduce  $C_m$ . Questo metodo è stato applicato da Miss Maltby (1897, risultato 3,015).

L'insieme dei risultati indicati in questo paragrafo, conferma, in modo soddisfacente, che la grandezza " $v$ " è numericamente uguale alla velocità della luce.



# 4 I fondamenti della teoria elettronica<sup>1</sup>

## 1. Introduzione

Abbiamo presentato per la prima volta la nozione di elettrone, indicando nel Volume IV (sotto forma di immagini A, B e C) le tre direzioni principali lungo le quali si è sviluppata la storia della teoria dei fenomeni elettrici. Nella prima abbiamo ammesso l'esistenza reale di almeno una o, più facilmente, di due sostanze particolari chiamate elettricità. L'azione istantanea a distanza è il segno caratteristico di questo primo modo di vedere. La seconda ha trovato il suo interprete più profondo nell'autore della teoria alla quale è stato dedicato il capitolo precedente. Maxwell, sviluppando le idee di Faraday, ha trasportato in qualche modo il baricentro dei fenomeni nel mezzo dielettrico, essendo da lui considerato tale anche l'etere. Ha eliminato del tutto l'idea di particolari sostanze reali, in quanto non necessaria. Dopo gli esperimenti di Hertz, la teoria di Maxwell ha raggiunto l'apogeo del suo sviluppo e sembrò che, attraverso le sue equazioni, fosse esaurito il problema di spiegare i fenomeni elettrici e magnetici; solo i fenomeni dell'elettrolisi non rientravano nel quadro della teoria di Maxwell e rimanevano in un singolare isolamento. Uno ione monovalente trasporta una quantità di elettricità  $e$  interamente determinata e sempre la stessa; uno ione bivalente viene caricato con una quantità di elettricità  $2e$ , ecc. Quando si studiano i fenomeni dell'elettrolisi, bisogna abbandonare la teoria di Maxwell, dimenticarla, per così dire, perché le cariche vi svolgono solo il ruolo di finzioni che si dispongono geometricamente alle estremità delle linee o tubi di forza che attraversano il dielettrico. Ma a questo difetto, nella teoria così armonicamente costruita da Maxwell, se ne aggiungevano molti altri, emersi attraverso uno studio più approfondito di fenomeni conosciuti da tempo, quindi attraverso la scoperta di un'intera serie di nuovi fenomeni. Tra quelli già conosciuti appartengono innanzitutto i raggi catodici, che studieremo in dettaglio in uno dei capitoli successivi. Ai fenomeni recentemente scoperti appartengono quelli osservati nelle scariche elettriche attraverso gas rarefatti, inoltre alcuni fenomeni manifestati da corpi incandescenti e, in specifiche condizioni, da corpi la cui superficie è esposta a radiazione ultravioletta, infine il fenomeno di Zeemann, fenomeni di radioattività e fenomeni magneto-ottici.

Ben prima della scoperta di questi nuovi fenomeni, H. A. Lorentz (1895, *Versuch einer Théorie*, ecc.) ha costruito una teoria, nella quale ha introdotto esplicitamente e in modo determinato la nozione di cariche elettriche elementari, di particelle estremamente piccole o atomi di elettricità. Le prime opere di H. A. Lorentz in questo percorso risalgono già al 1880; inoltre hanno espresso idee Helmholtz (1881), Arrhenius (1887, 1888), Elster e Geitel (1888), Giese (1889), Schuster (1889), F. Richarz (1804) e in particolare J. J. Thomson (1894) coinvolgendo più o meno chiaramente la struttura atomistica dell'elettricità. La denominazione di *elettrone* è stata proposta nel 1894 da Stokey; J. Larmor (1896) e Wiechert (1896) sono tra i primi dei numerosi scienziati che svilupparono la teoria elettronica, che iniziò intorno al 1900, sotto la spinta della scoperta dei nuovi fenomeni sopra menzionati. Il merito di H. A. Lorentz è quello di essere stato il primo ad elaborare dettagliatamente una teoria, nella quale l'antica nozione di un substrato particolare, realmente esistente, dei fenomeni elettrici è intimamente associata ai fondamenti della teoria di Maxwell; ha conservato infatti il principio dell'azione tramite mezzo e la forma generale delle equazioni fondamentali di questa teoria, ma ha fatto subire a queste equazioni una modifica, insensibile all'esterno, del tutto essenziale al senso interno.

---

<sup>1</sup>Capitolo redatto dall'autore

Attualmente abbiamo la chiara idea che gli elettroni negativi hanno un'esistenza ben consolidata, cioè molecole o atomi molto piccoli, in apparenza indivisibili, del substrato che è stato chiamato elettricità negativa. È certo che, in una serie di fenomeni (raggi catodici, raggi  $\beta$ ), si tratta di *elettroni negativi liberi*, cioè non legati alla materia ordinaria. Fino ad ora (1914) non sono stati osservati elettroni positivi liberi; ma un piccolo numero di fatti isolati, sebbene non ancora sufficientemente stabiliti o studiati, suggeriscono che esistano elettroni positivi. Le particelle della materia infatti si mostrano sempre elettrizzate positivamente, come ad esempio nei raggi  $\alpha$ . Non si può dire con certezza se l'elettricità positiva abbia qualcosa di reale, che differisca essenzialmente nella sua natura dall'elettricità negativa. L'elettrizzazione positiva può essere dovuta sia alla presenza di una particolare elettricità positiva, sia alla sottrazione di uno o più elettroni negativi dalla quantità corrispondente allo stato possibile, cioè all'assenza di elettrizzazione osservabile. Lo dobbiamo a J. J. Thomsom uno schema, secondo il quale l'atomo sostanziale è costituito da un nucleo relativamente grande di elettricità positiva, all'interno o attorno al quale si muovono gli elettroni negativi. In seguito, quando parleremo di elettroni, penseremo esclusivamente agli elettroni negativi.

La teoria elettronica, ammettendo l'esistenza di atomi indivisibili di elettricità, è analoga per molti aspetti alla teoria molecolare o cinetica della materia ordinaria. Per spiegare i fenomeni osservati capita anche di calcolare, allo scopo di determinare questa o quella grandezza fisica, *valori numerici medi* relativi ad un numero molto elevato di elettroni; qualcosa di simile accade nella teoria cinetica dei gas, ad esempio nel calcolo della pressione esercitata da un gas sui corpi che lo limitano,

Il valore numerico della carica  $e$  si può ottenere con i dati dell'elettrolisi. Abbiamo visto (Libro II, Cap. V, § 1) che il grammo equivalente di uno ione contiene  $F = 96540 \text{ coulomb} = 9654$  unità el. mag. C.G.S.  $= 9654,3 \cdot 10^{10}$  unità. el. st.. C.G.S. quantità di energia elettrica. Per il numero  $N$  di molecole contenute nel grammo equivalente di una sostanza, ad esempio in 2 grammi di idrogeno, si danno numeri poco diversi tra loro; assumeremo  $N = 5,9 \cdot 10^{23}$ , quindi,

$$e = \frac{F}{N} \cdot 4,9 \cdot 10^{-10} \text{ unità el. st. C.G.S.} \quad (4.1)$$

Ci sono vari modi di vedere la struttura degli elettroni. Talvolta si ammette che l'elettrone è un atomo di elettricità, la cui densità ha il suo massimo valore all'interno e diminuisce gradualmente fino a scomparire verso l'esterno, sicché l'elettrone non ha una superficie definita, ciò che permette di non introdurre condizioni al contorno. Si è anche introdotta l'ipotesi di una densità elettrica ovunque uniforme nell'elettrone, e si ha allora un confine preciso, o l'ipotesi estrema di una distribuzione esclusivamente superficiale. Resta aperta la questione se l'elettrone sia deformabile o si comporti come se fosse un corpo assolutamente invariabile. La maggior parte degli autori preferisce la possibilità di deformazione degli elettroni. In ogni caso, l'ipotesi che l'elettrone sia puntiforme non può essere ammessa.

Per spiegare molti fenomeni, la teoria elettronica ha dovuto introdurre la nozione di vari tipi di elettroni, che però non differiscono né per la loro sostanza, né per l'entità della carica, né per le loro proprietà geometriche e fisiche, ma solo per il ruolo che svolgono in questo o quel fenomeno, che è determinato soprattutto dalla posizione occupata dall'elettrone e dai gradi di libertà che possiede in tale posizione. Si distinguono, ad esempio,

1. elettroni completamente liberi (raggi catodici, raggi  $\beta$ );
2. elettroni che si muovono liberamente e in modo disorganizzato all'interno della materia, negli spazi intermolecolari. Il loro movimento generale di traslazione, che si sovrappone al movimento non organizzato, corrisponde al fenomeno della corrente elettrica nei conduttori; è analogo al flusso di un gas in un tubo;
3. elettroni legati agli atomi della materia, ma che abbandonano questi ultimi e si attaccano ad essi con relativa facilità (ioni di elettroliti, gas, ecc.);



4. gli elettroni sono legati alla materia e possono subire solo piccoli spostamenti all'interno delle molecole. Questi sono gli elettroni nei dielettrici e la polarizzazione di un dielettrico consiste proprio nel movimento degli elettroni in esso contenuti. I movimenti degli elettroni all'interno dell'atomo della materia producono i fenomeni dell'energia radiante; questi elettroni possono anche, in determinate circostanze, assorbire l'energia radiante che li raggiunge.

5. gli elettroni che sono; muoversi su curve chiuse attorno a molecole materiali, che appaiono così come magneti elementari; è ben possibile che agli elettroni si possano ancora attribuire altri ruoli, che non appartengono a nessuna delle categorie precedenti; forse, ad esempio, entrano nella composizione costante dell'atomo.

La teoria elettronica si basa su alcune ipotesi fondamentali, di cui qui indicheremo le seguenti:

I. *L'etere è immobile*; non partecipa al movimento dei corpi e le deformazioni sono impossibili.

II. L'etere non penetra solo la materia, ma è presente anche "all'interno degli elettroni".

III. Il moto degli elettroni produce un campo elettromagnetico nell'etere.

È molto importante notare che qui si deve intendere per etere il mezzo in cui possono nascere forze elettromagnetiche o anche campi elettrici e magnetici. Si potrebbe sostituire il termine "etere" con le parole "spazio elettromagnetico".

IV. Il campo elettromagnetico agisce sull'elettrone; un tale campo può esistere anche all'interno dell'elettrone. Il campo prodotto da un elettrone reagisce su quest'ultimo.

V. La costante dielettrica  $\varepsilon$ , la permeabilità magnetica  $\mu$  e la conducibilità elettrica specifica  $\sigma$  non sono considerate grandezze date e fondamentali, che caratterizzano una sostanza; sono determinate dalle proprietà, dalla posizione e dai moti degli elettroni contenuti in questa sostanza.

VI. Nella teoria elettronica, la terza legge di Newton, cioè il principio di uguaglianza di azione e reazione, non sempre viene rispettato. Ciò risulta dalla trasmissione di azioni con velocità finita. Quando un qualsiasi corpo A cambia posizione, l'azione dovuta a questo movimento raggiunge un secondo corpo B solo dopo un tempo finito ed è necessario lo stesso intervallo o un tempo diverso affinché l'azione di B raggiunga A. Ciò si esprime in modo ancora più chiaro dicendo che l'etere o meglio i campi che ivi nascono agiscono sull'elettrone, mentre l'elettrone viceversa non esercita alcuna azione meccanica sull'etere.

La teoria elettronica ha dato luogo allo sviluppo di una nuova dottrina, che porta alle conseguenze più singolari e che è conosciuta sotto il nome di *Principio di Relatività*. A queste nuove visioni teoriche dedicheremo il prossimo capitolo, in cui *si rifiuta completamente l'esistenza dell'etere*.

## 2. Le equazioni fondamentali della teoria elettronica

Queste equazioni, nella loro forma esteriore, sono appena distinguibili dalle equazioni della teoria di Maxwell introdotte nel capitolo precedente. Esiste però in realtà una differenza essenziale tra i due sistemi di formule; essa deriva dal fatto che non bisogna confondere lo spazio occupato da un particolare elettrone, che contiene una carica di densità di volume  $\rho$ , con tutto il resto dello spazio, cioè l'etere libero. All'interno dei corpi materiali e degli elettroni è presente lo stesso etere, con le stesse proprietà che nel vuoto; ma se i fenomeni all'interno dei corpi materiali si distinguono dai fenomeni che si manifestano fuori di essi e se non sono identici quando i corpi sono diversi, ciò è dovuto al fatto che all'interno dei corpi ci sono gli elettroni, la cui distribuzione, mobilità e movimento sono condizionate dalle proprietà speciali della materia data. La quantità  $\rho$  esiste solo all'interno dell'elettrone; al di fuori di esso si ha ovunque  $\rho = 0$ . Va inoltre notato che la teoria elettronica non utilizza la nozione di corrente di conduzione, che è sostituita dalla nozione più specifica di elettrone in movimento, cioè di corrente di convezione. Non c'è, in questa teoria, alcuna differenza essenziale tra il moto dell'elettrone all'interno di un corpo in riposo e il trasporto dell'elettrone da parte di un corpo in movimento in cui si trova.

Introduciamo di nuovo le quantità  $\vec{E}$  e  $\hat{H}$ , che misurano i campi elettrico e magnetico. Indichiamo inoltre con  $\vec{v}$  la velocità di un elemento di volume  $d\omega$  dell'elettrone; tale velocità può, in generale, essere considerata come il risultato della velocità del movimento di traslazione complessivo dell'elettrone e della velocità dell'elemento di volume  $d\omega$ , dovuta alla rotazione dell'elettrone attorno ad un qualsiasi asse. Quando la quantità di elettricità  $\rho d\omega$  si muove con velocità  $\vec{v}$ , in un dato punto esiste una corrente, la cui densità  $\vec{I}$ , riferita all'unità di superficie, è uguale a  $\vec{v}\rho$ . Si ha quindi

$$\vec{I} = \vec{v}\rho \quad (4.2)$$

A parte questa corrente, la teoria elettronica conserva ancora la corrente di spostamento  $\vec{V}$  nell'etere, che può esistere in tutti i punti senza eccezione dello spazio, cioè sia all'esterno che all'interno dell'elettrone, è uguale a

$$\vec{V} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4.3)$$

(nell'etere si ha  $\varepsilon = 1$  in ogni caso). La corrente totale  $\vec{G}$  è quindi uguale a

$$\vec{G} = \rho \vec{v} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4.4)$$

Nella teoria di Maxwell, si ha la formula

$$\vec{G} = \sigma \vec{v} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4.5)$$

Da un punto di vista puramente formale la teoria di Maxwell e quella elettronica differiscono solo per la non identità dei primi termini nelle formule (4) e (5). Non introdurremo altre modifiche nelle equazioni fondamentali della teoria di Maxwell, cioè nelle equazioni (3-12,a), (3-16), (3-20) e (3-21), salvo che porremo  $\varepsilon = 1$  e  $\mu = 1$ . Queste equazioni, con la formula (4), danno

$$\frac{4\pi}{c} \vec{v}\rho + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \text{rot} \hat{H} \quad (4.6)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \hat{H}}{\partial t} = -\text{rot} \vec{E} \quad (4.7)$$

$$\text{div} \vec{E} = 4\pi\rho \quad (4.8)$$

$$\text{div} \hat{H} = 0 \quad (4.9)$$

La (6) sostituisce la (3-13), Dalle equazioni (4), (6) e (8) si possono immediatamente ricavare alcune conseguenze. La formula (1-25) da  $\text{div} \text{rot} \hat{H} = 0$ ; pertanto

$$\text{div} \left( \vec{v}\rho + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0 \quad (4.10)$$

o

$$\text{div} \vec{G} = 0 \quad (4.11)$$

Portando il valore (8) della  $\text{div} \vec{E}$  nella (9,a), si ottiene l'importante equazione

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} (\vec{v}\rho) = 0 \quad (4.12)$$

che esprime il principio di conservazione dell'elettricità.

All'interno di un elettrone in quiete ( $\vec{v} = 0$ ) può esistere la grandezza  $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ , ma si vede, dalla (9,a) che

$$\text{div} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \quad (4.13)$$

Quando l'elettrone si trova in un campo elettromagnetico, ognuno dei suoi elementi  $d\omega$ , che contiene la quantità di elettricità  $\rho d\omega$  e si muove con la velocità  $\vec{v}$ , è soggetto a una forza  $\vec{F} \rho d\vec{v}$ , dove  $\vec{F}$  indica la forza che agisce sull'unità di quantità di elettricità. Questa forza  $\vec{F}$  è la risultante, cioè la somma vettoriale di due forze. La prima uguale a  $\vec{E}$ , rappresenta l'azione del campo elettrico, la seconda, l'azione del campo magnetico, che secondo la legge di Biot e Savart, è uguale a  $\frac{1}{c} [\vec{v} \hat{H}]$ ; il suo modulo è

$$\frac{1}{c} |\vec{v}| \cdot |\hat{H}| \cdot \sin(\vec{v} \hat{H})$$

e la sua direzione è perpendicolare a  $\vec{v}$  e  $\hat{H}$ . Si ha quindi

$$\vec{F} = \vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v} \hat{H}] \quad (4.14)$$

Quando l'elettrone si muove, il lavoro della seconda componente della forza è nullo, poiché questa componente è perpendicolare alla direzione della velocità  $\vec{v}$  del moto. Il lavoro compiuto dal campo nel tempo  $dt$ , nel movimento della quantità di energia elettrica  $\rho d\omega$ , è uguale al prodotto scalare ( $\vec{F} \rho d\omega \cdot \vec{v} dt$ ) che equivale a  $(\vec{F} \cdot \rho \vec{v}) d\omega dt$ . Sostituendo in tale espressione il valore (12) di  $\vec{F}$  e tenendo conto di quanto detto sopra, si ottiene, per il lavoro, l'espressione  $(\vec{E} \cdot \rho \vec{v}) d\omega dt$ . Il lavoro totale  $dA$ , svolto nel tempo  $dt$  in qualsiasi volume  $\omega$ , è

$$dA = dt \int (\vec{E} \cdot \rho \vec{v}) d\omega$$

Il lavoro compiuto nell'unità di tempo da tutti gli elettroni che si trovano nello spazio  $\omega$  è uguale a  $\frac{\partial A}{\partial t}$  e possiamo considerarlo, almeno in casi particolari, uguale al calore  $Q$  liberato nel volume  $\omega$ . Si ha quindi

$$\frac{\partial A}{\partial t} = Q = \int (\vec{E} \cdot \rho \vec{v}) d\omega \quad (4.15)$$

Conserveremo, per l'energia dell'unità di volume del campo elettromagnetico, l'espressione analoga alla formula (3-23)

$$W = \frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 + \hat{H}^2) \quad (4.16)$$

di cui verificheremo l'esattezza. L'energia totale  $J$  nello spazio è uguale a

$$J = \int W d\omega = \frac{1}{8\pi} \int (\vec{E}^2 + \hat{H}^2) d\omega \quad (4.17)$$

Stabiliamo che l'equazione di Poynting rimane vera, cioè può essere dedotta dalle equazioni fondamentali (6) e (7). Non è necessario dare qui l'intera dimostrazione, che difficilmente differisce da quella dell'equazione (3-32,b). Moltiplichiamo scalarmente i due membri dell'equazione (6) per  $\vec{E}$ , i due membri dell'equazione (7) per  $\hat{H}$  e sommiamo, quindi moltiplichiamo per  $d\omega$  e integriamo nel volume dato  $\omega$ , limitato dalla superficie  $\Sigma$ . Si ottiene come risultato un'equazione che non differisce dalla (3-29,a), che è quanto al posto del primo termine  $\frac{4\pi}{c} \int \sigma \vec{E}^2 d\omega$  figura il termine

$$\frac{4\pi}{c} \int (\vec{E} \cdot \rho \vec{v}) d\omega$$

Invece dell'equazione (3-30), si ha ora

$$\int (\vec{E} \cdot \rho \vec{v}) d\omega + \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{\vec{E}^2 + \vec{H}^2}{8\pi} d\omega = -\frac{c}{4\pi} \int [\vec{E} \hat{H}]_n d\Sigma \quad (4.18)$$

Ma dalla (13), il primo termine è il lavoro compiuto sugli elettroni dello spazio  $\omega$ , cioè è uguale alla grandezza  $Q$ . Introduciamo ancora il vettore di Poynting

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \hat{H}] \quad (4.19)$$

e abbiamo l'equazione (3-32,b), cioè

$$\frac{\partial J}{\partial t} + Q = - \int S_n d\Sigma \quad (4.20)$$

Se il secondo membro è nullo, si ha l'equazione

$$\frac{\partial J}{\partial t} + Q = 0 \quad (4.21)$$

o,

$$\frac{\partial J}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \quad (4.22)$$

che esprime nel caso attuale, il principio di conservazione dell'energia; è in questo che consiste la verifica dell'esattezza della formula (14).

### 3. Moto dell'elettrone nei campi elettrico e magnetico

Considereremo, in questo paragrafo, l'elettrone come un punto avente la carica  $e$  misurata in unità el. st. e una massa  $m$ , intesa nel senso ordinario della meccanica, cioè come il rapporto tra la forza agente sull'elettrone e l'accelerazione. Non prenderemo qui in considerazione il campo magnetico prodotto dall'elettrone stesso in movimento, né la reazione di questo campo sull'elettrone.

I. MOTO DELL'ELETTRONE NEL CAMPO ELETTRICO — Date le quantità  $e, m, \vec{E}$  e la velocità  $\vec{v}$  dell'elettrone,  $m$  e  $\vec{v}$  in unità C.G.S., ed  $\vec{E}$  in unità el. st. C.G.S. Sull'elettrone agisce la forza  $\vec{E}e$ , che ha la stessa direzione del vettore  $-\vec{E}$  ed è quindi chiaro che il moto dell'elettrone non è in alcun modo distinguibile da quello di un corpo di massa  $m$  in un campo di qualsiasi natura. forza. Nel caso particolare di un campo uniforme, dove  $\vec{E}$  ha ovunque la stessa intensità e la stessa direzione, l'elettrone si muove su una parabola, come un corpo pesante sotto l'influenza della gravità in prossimità della superficie terrestre. Abbiamo già accennato che i raggi catodici rappresentano un flusso di elettroni liberi, emessi dal catodo in un tubo contenente un gas molto rarefatto. Cerchiamo la deviazione prodotta in un raggio catodico da un campo elettrico trasversale. Supponiamo che dal punto A (fig. 34) parta un elettrone con velocità  $\vec{v}$  nella direzione AC; in assenza di qualsiasi campo, incontrerà uno schermo SU sul punto C.

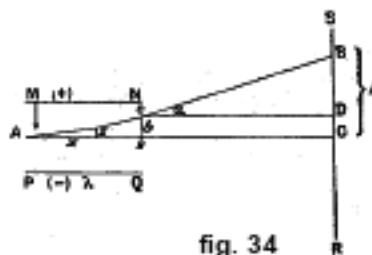


fig. 34

Ma siano MN e PQ le armature di un condensatore; tra di esse esiste il campo elettrico trasversale  $\vec{E}$ , che costringe l'elettrone a spostarsi sull'arco di parabola Ac; nel punto c l'elettrone esce dal campo elettrico e continua il suo moto lungo la retta cB, incontrando lo schermo SR nel punto B. La distanza  $BC = h$  è la misura della deviazione da determinare. Sia  $Ak = \lambda$  la lunghezza del condensatore e sia  $cD = l$ . Indichiamo con  $x$  e  $z$  le coordinate di un punto qualunque sulla curva Ac con  $t$  il tempo impiegato dall'elettrone a percorrere l'arco di parabola fino a questo punto dall'inizio del moto in A. Si ha allora, riprendendo le notazioni cartesiane per  $v$  ed  $E$ ,  $x = vt$ ,  $z = \frac{eE}{2m}t^2$ ; pertanto l'equazione della parabola è la seguente

$$z = \frac{eEx^2}{2mv^2}$$

Se ne deduce, per  $b = ck$ ,

$$b = \frac{eE\lambda^2}{2mv^2} \quad (4.23)$$

e per  $\tan \alpha = \tan BcD$ , valore di  $\frac{dx}{dt}$  per  $x = \lambda$

$$\tan \alpha = \frac{eE\lambda}{mv^2} \left( l + \frac{\lambda}{2} \right) \quad (4.24)$$

da cui

$$\frac{e}{mv^2} = \frac{h}{E\lambda \left( l + \frac{\lambda}{2} \right)} \quad (4.25)$$

Osservando la deviazione  $h$ , si può determinare il rapporto tra la carica dell'elettrone e la forza del suo moto.

Se i vettori  $\vec{E}$  e  $\vec{v}$  sono paralleli, il moto dell'elettrone è rettilineo e uniformemente variato. Quando passa dal potenziale  $V_0$  al potenziale  $V$ , la sua velocità cartesiana  $v$  è legata alla velocità iniziale  $v_0$  dall'equazione

$$\frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2) = e(V - V_0)$$

Per  $v_0 = 0$ , si ha

$$\frac{e}{mv^2} = \frac{1}{2(V - V_0)} \quad (4.26)$$

II - MOTO DELL'ELETTRONE NEL CAMPO MAGNETICO — Sull'elettrone agisce la forza  $\vec{F}_e = \frac{e}{c} [\vec{v} \hat{H}]$ , che è perpendicolare a  $\vec{v}$  e a  $\hat{H}$ , essendo la disposizione di  $\vec{v}$ ,  $\hat{H}$  e  $\vec{F}_e$  tale che quando si guarda nella direzione delle linee di forza del campo supposto orizzontale e l'elettrone si muove nel piano orizzontale da destra a sinistra, la forza  $\vec{F}_e$  è diretta verso il basso. Poiché la forza  $\vec{F}_e$  rimane sempre perpendicolare alla direzione del moto dell'elettrone, è chiaro che questo moto è uniforme. Dalla formula nota per l'accelerazione normale, si deduce l'equazione

$$\frac{e}{c} [\vec{v} \hat{H}] = \frac{m \vec{v}}{\vec{R}}$$

dove  $\vec{R}$  rappresenta il raggio di curvatura della traiettoria dell'elettrone. Se ne deduce, riprendendo le notazioni cartesiane

$$R = \frac{cmv^2}{evH \sin(v, H)} = \frac{cmv}{eH \sin(v, H)} \quad (4.27)$$

Supponiamo  $\vec{v}$  perpendicolare a  $\hat{H}$ ; in questo caso, l'elettrone si muove su una circonferenza di raggio  $R'$  uguale a

$$R' = \frac{cmv}{eH} \quad (4.28)$$

Quando  $\vec{v}$  forma con  $\hat{H}$  l'angolo  $\alpha$ , questo angolo non varia più. Il cammino  $x$ , percorso nella direzione  $\hat{H}$  a partire dal tempo  $t$ , è

$$x = vt \cos \alpha \quad (4.29)$$

La proiezione della traiettoria su un piano perpendicolare a  $\hat{H}$  è una circonferenza, da cui si ottiene il raggio  $R''$  sostituendo semplicemente  $v$  con  $v \sin \alpha$  nella (20,a), di modo che

$$R'' = \frac{cmv \sin \alpha}{eH} \quad (4.30)$$

L'elettrone si muove su una spirale, il cui raggio di curvatura è determinato dalla formula (20). L'intervallo  $T$  di un giro completo è

$$T = \frac{2\pi R'}{v} = \frac{2\pi R''}{v \sin \alpha} = \frac{2\pi cm}{eH} \quad (4.31)$$

La durata di un giro non dipende del tutto dalla velocità  $v$ . La distanza  $L$  tra le spire (non della spirale) è uguale a  $Tv \cos \alpha$ , di modo che

$$L = \frac{cmv \cos \alpha}{eH} \quad (4.32)$$

Consideriamo ora la deflessione di un raggio catodico da un campo magnetico trasversale. Possiamo utilizzare la figura 34, immaginando che le armature MN e PQ del condensatore rappresentino due grandi poli magnetici, paralleli al piano della figura, con il polo nord davanti a questo piano e il polo sud dietro di esso, in modo che le linee del campo  $\hat{H}$  hanno la direzione in cui guarda l'osservatore. Invece di  $\lambda$ ,  $l$  e  $h$ , prendiamo ora le notazioni  $\lambda_1, l_1, h_1$ . Nel caso considerato, l'elettrone si muove su un arco di cerchio Ac di raggio  $R'$ . Le coordinate  $x$  e  $z$  di un punto di questo cerchio sono unite dall'equazione  $x^2 = z(2R' - z)$  o, poiché  $z$  è molto piccolo rispetto a  $R'$ ,  $z = \frac{x^2}{2R'}$ , da cui  $\frac{dz}{dt} = \frac{x}{R'}$ . Ponendo  $x = \lambda_1$  e  $z = b$ , si ha  $b = \frac{\lambda_1^2}{2R'}$  e  $\tan \alpha = \frac{\lambda_1}{R'}$ . Se si porta in queste uguaglianze il valore (20,a) di  $R'$ , viene

$$b = \frac{\lambda_1^2 eH}{2cmv} \quad \tan \alpha = \frac{\lambda_1 eH}{cmv}$$

Si ha, per la deviazione totale  $h_1 = b + l_1 \tan \alpha$

$$h_1 = \frac{eH\lambda_1}{cmv} \left( l_1 + \frac{\lambda_1}{2} \right) \quad (4.33)$$

da cui

$$\frac{e}{mv} = \frac{ch_1}{H\lambda_1 \left( l_1 + \frac{\lambda_1}{2} \right)} \quad (4.34)$$

Osservando la deviazione  $h_1$ , è possibile determinare il rapporto tra la carica dell'elettrone e la sua quantità di moto.

Dividendo membro a membro la (22) per la (19) si trova

$$v = \frac{cE\lambda \left( l + \frac{\lambda}{2} \right) h_1}{H\lambda_1 \left( l_1 + \frac{\lambda_1}{2} \right) h} \quad (4.35)$$

Poi, le formule (19) e (22) danno

$$\frac{e}{m} = \frac{c^2 E \lambda \left( l + \frac{\lambda}{2} \right) h_1^2}{H^2 \lambda_1^2 \left( l_1 + \frac{\lambda_1}{2} \right)^2 h} \quad (4.36)$$

Osservando successivamente le deviazioni nei campi elettrici e magnetici trasversali, possiamo trovare il rapporto  $e/m$ , detto talvolta carica specifica dell'elettrone. Non va dimenticato che, nell'equazione (24), le quantità  $e$  ed  $E$  sono espresse in unità el. st.,  $H$  in unità el. mag. Le relazioni (5) e (5,b), mostrano che quando tutte le grandezze sono espresse in unità el. mag., il fattore  $c^2$  scompare. Le osservazioni, che saranno discusse in uno dei capitoli successivi, hanno dato per  $e/m$  numeri che differiscono più o meno tra loro. Noi ammetteremo

$$\frac{e}{m} = 1,7 \cdot 10^7 \text{ unità el. mag.} = 5,1 \cdot 10^{17} \text{ unità el. st.} \quad (4.37)$$

Prendendo per  $e$  il valore

$$e = 4,9 \cdot 10^{-10} \text{ unità el. st} \quad (4.38)$$

si trova per la massa dell'elettrone

$$m = 0,96 \cdot 10^{-27} g \quad (4.39)$$

La massa  $m_H$  di un atomo di idrogeno è uguale alla massa di una molecola di idrogeno (cioè  $2g$ ) divisa per  $2N$  dove  $N = 5,9 \cdot 10^{23}$ ; si ha quindi  $m_H = 1,7 \cdot 10^{-24} g$ , dove

$$\frac{m}{m_H} = \frac{0,96 \cdot 10^{-27}}{1,7 \cdot 10^{-24}} = \frac{1}{1800} \quad (4.40)$$

La massa di un elettrone è circa 1800 volte più piccola della massa di un atomo di idrogeno. Se si porta il valore (25) e si pone  $c = 3 \cdot 10^{10}$  nelle formule (20,a) e (20,d), si ottiene, per il raggio  $R'$  della circonferenza descritta dall'elettrone, l'espressione

$$R' = \frac{1}{1,7 \cdot 10^7 H} \frac{v}{cm} \quad (4.41)$$

e per il periodo  $T$

$$T = \frac{1}{0,3 \cdot 10^7 H} \frac{1}{sec} \quad (4.42)$$

Prendendo, ad esempio,  $v = \frac{1}{3}c = 10^{10} \frac{cm}{s}$ , si ottiene

$$R' = \frac{530}{H} cm \quad (4.43)$$

Nelle ultime tre formule  $H$  deve essere espresso in unità el. mag. C.G.S., cioè in gauss.

III. Abbiamo considerato il moto dell'elettrone rispettivamente in un campo elettrico e in un campo magnetico uniformi. Non considereremo i casi più complicati di campi non uniformi. Diremo solo poche parole nel caso in cui esistano contemporaneamente due campi uniformi  $\vec{E}$  e  $\hat{H}$ .

Supponiamo innanzitutto che i vettori  $\vec{E}$  e  $\hat{H}$  siano paralleli: l'elettrone si muove allora nella direzione dei campi con accelerazione costante; la proiezione della sua traiettoria su un piano normale ai campi sarà una circonferenza, il cui raggio è determinato dalla formula (20,c), dove  $-v \sin \alpha$  è una quantità costante. È chiaro che l'elettrone si muove su una traiettoria, che differisce dalla spirale perché la distanza (passo) tra due spire consecutive aumenta costantemente man mano che gli spazi percorsi in tempi uguali in un moto uniformemente accelerato, è cioè come i numeri dispari 1, 3, 5, ecc., quando la velocità iniziale è nulla.

Ci limiteremo a dare le equazioni differenziali del moto nel caso di due campi rettangolari uniformi  $\vec{E}$  e  $\hat{H}$ . Usiamo gli assi delle coordinate ordinarie e assumiamo che  $\hat{H}$  abbia la direzione dell'asse  $z$  ed  $\vec{E}$  quella dell'asse  $y$ . Inoltre la velocità iniziale si troverà nel piano  $xy$  e possiamo, in

particolare, supporre che sia nulla. La traiettoria dell'elettrone sarà quindi interamente disposta nel piano  $xy$ . La formula (12) dà

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = Ee + \frac{e}{c} \left[ \vec{v} \hat{H} \right]_x \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = Ee + \frac{e}{c} \left[ \vec{v} \hat{H} \right]_y$$

Dalla (1-9), si ha, poiché  $\hat{H}_x = H$  e  $\hat{H} = 0$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = Ee + \frac{e}{c} v_y H \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{e}{c} v_x H$$

da cui

$$\begin{cases} m \frac{d^2x}{dt^2} = Ee + \frac{H}{c} \frac{dy}{dt} \\ m \frac{d^2y}{dt^2} = -e \frac{H}{c} \frac{dx}{dt} \end{cases} \quad (4.44)$$

Queste sono le equazioni cercate del moto.

#### 4. Determinazione elementare dell'energia e della massa dell'elettrone in movimento

Manteniamo ancora le notazioni cartesiane e supponiamo che un elettrone, la cui carica è uguale a  $e$  unità el. st., si muove su una retta con velocità  $v$ . Un elettrone in moto non solo è analogo ad un elemento della corrente elettrica, ma è identico ad esso per sua stessa natura. Sia  $i$  l'intensità di questa corrente in unità el. st.,  $ds$  la lunghezza dell'elemento; dobbiamo scrivere

$$ev = ids \quad (4.45)$$

Un elettrone in moto produce in tutto lo spazio circostante un campo magnetico  $H$ , al quale corrisponde una determinata quantità di energia  $W$ . Questa energia è creata dalle forze che mettono in moto l'elettrone. Calcoliamo  $W$  supponendo che l'elettrone è una sfera di raggio  $a$ , nella quale la carica è uniformemente distribuita in strati concentrici della stessa densità. Prendiamo la direzione del moto per l'asse delle coordinate polari  $r, \varphi, \psi$ . Avremo allora, secondo la legge di Biot e Savart, in un punto esterno  $(r, \varphi, \psi)$  alla sfera, il campo

$$H = \frac{ids \sin \varphi}{cr^2} = \frac{ev \sin \varphi}{cr^2}$$

L'energia  $dW$ , in un elemento di volume  $d\omega$  che circonda questo punto, è uguale a

$$dW = \frac{H^2}{8\pi} d\omega = \frac{e^2 v^2 \sin^2 \varphi}{8\pi c^2 r^4} d\omega$$

dove  $d\omega = r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\psi$ . Integrando rispetto a  $r$  da  $a$  a  $\infty$ , rispetto a  $\varphi$  da  $0$  a  $\pi$  e rispetto a  $\psi$  da  $0$  a  $2\pi$  si ottiene l'energia totale  $W$  del campo prodotta dall'elettrone in moto. Si ha pertanto

$$W = \frac{e^2 v^2}{8\pi c^2} \int_{r=a}^{\infty} \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{\psi=0}^{2\pi} \frac{\sin^2 \varphi}{r^2} dr d\varphi d\psi$$

cioè

$$W = \frac{e^2 v^2}{3ac^2} \quad (4.46)$$

Supponiamo che l'elettrone abbia una certa massa  $m_0$  avente esattamente lo stesso carattere di quella della materia ordinaria. La quantità totale di energia  $J$  che appare nel movimento dell'elettrone è uguale a

$$J = \frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{e^2 v^2}{3ac^2} = \frac{v^2}{2} \left( m_0 + \frac{2e^2}{3ac^2} \right) \quad (4.47)$$



Questa formula mostra che il sorgere del campo magnetico produce un certo aumento della massa dell'elettrone, la quale è uguale a

$$m = m_0 + \frac{2e^2}{3ac^2} \quad (4.48)$$

Il secondo termine di questa espressione di  $m$  è detta la massa elettromagnetica dell'elettrone. Siam  $m_0 = 0$ , cioè supponiamo che tutta la massa  $m$  dell'elettrone sia di natura elettromagnetica: si ha allora

$$m = \frac{2e^2}{3ac^2}$$

dove  $e$  è espresso in unità el. st. Dalla (29), si deduce che

$$a = \frac{2e^2}{3c^2m} \quad (4.49)$$

Portando in questa formula i valori (25) e (25,a), cioè  $e = 4,9 \cdot 10^{-10}$ ,  $e : m = 5,6 \cdot 10^{17}$  e  $c^2 = 9 \cdot 10^{20}$ , si ottiene

$$a = 2 \cdot 10^{-13} \text{ cm} = 2 \cdot 10^{-12} \text{ mm} = 2 \cdot 10^{-6} \mu\mu \quad (4.50)$$

Abbiamo così un'idea dell'ordine di grandezza delle dimensioni di un elettrone. Ma, il ragionamento che ci ha portato alla formula (29) può ritenersi del tutto rigoroso; la teoria più esatta, che presenteremo nel § 7, dà risultati molto meno semplici.

## 5 Potenziali ritardati. Integrazione delle equazioni della teoria elettronica

Abbiamo fornito le equazioni fondamentali della teoria elettronica e abbiamo studiato alcune questioni particolari. Passiamo ora ad una serie di altri problemi, che però non possono essere trattati in un'opera di fisica generale in modo completo. Per maggiore comodità, scriveremo ancora le equazioni (6), (7), (8), (9), (11) e (12):

$$\frac{4\pi}{c} \vec{v} \rho + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \text{rot} \hat{H} \quad (4.51)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \hat{H}}{\partial t} = -\text{rot} \vec{E} \quad (4.52)$$

$$\text{div} \vec{E} = 4\pi\rho \quad (4.53)$$

$$\text{div} \hat{H} = 0 \quad (4.54)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} (\vec{v} \rho) = 0 \quad (4.55)$$

$$\vec{F} = \vec{E} + \frac{1}{c} \left[ \vec{v} \hat{H} \right] \quad (4.56)$$

Dati  $\rho$  e  $\vec{v}$  in funzione del tempo e del luogo, nonché i campi  $\vec{E}$  e  $\hat{H}$  all'istante  $t = 0$ , ci proponiamo di determinare  $\vec{E}$  e  $\hat{H}$  in funzione del tempo.

Nel capitolo III. § 4, partendo dalle equazioni di Maxwell, abbiamo espresso  $\vec{E}$  e  $\hat{H}$  con il potenziale scalare  $\varphi$  e con il potenziale vettoriale  $\vec{C}$ . Introduciamo potenziali analoghi nella

teoria elettronica. Dalla (1-25), l'equazione (30,d) mostra che possiamo eguagliare  $\hat{H}$  al rotore di un certo potenziale vettore  $\vec{C}$ . Poniamo quindi

$$\hat{H} = \text{rot} \vec{C} \quad (4.57)$$

L'equazione (30,b) dà allora

$$\text{rot} \left( \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0$$

Dalla (1-24), si vede che la quantità tra parentesi è il gradiente di un certo scalare che indicheremo con  $-\varphi$ ; chiameremo lo scalare  $\varphi$  il potenziale scalare. Si ha quindi

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{C}}{\partial t} - \text{grad} \varphi \quad (4.58)$$

Quando si conoscono  $\varphi$  e  $\vec{C}$ , la (31) e (32) danno  $\vec{E}$  e  $\hat{H}$ . Tuttavia, rimane una certa indeterminazione: infatti, siano  $\vec{C}_0$  e  $\varphi_0$  due funzioni particolari, che determinano  $\vec{E}$  e  $\hat{H}$  mediante le formule (31) e (32); allora

$$\begin{cases} \vec{C} &= \vec{C}_0 + \text{grad} \psi \\ \varphi &= \varphi_0 - \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} \end{cases} \quad (4.59)$$

dove  $\psi$  è una scalare completamente arbitrario, daranno gli stessi valori per  $\vec{E}$  e  $\hat{H}$ . Possiamo quindi sottoporre  $\vec{E}$  e  $\hat{H}$  a una condizione supplementare. Portando i valori (31) e (32) di  $\hat{H}$  e  $\vec{E}$  nella (30,a), abbiamo, dalla (1-31)

$$\frac{4\pi}{c} \vec{v} \rho - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{C}}{\partial t^2} - \frac{1}{c} \text{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \text{rot} \text{rot} \vec{C} = \text{grad} \text{div} \vec{C} - \Delta \vec{C}$$

Introdurremo la condizione supplementare

$$c \text{div} \vec{C} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (4.60)$$

di modo che rimane l'equazione

$$\Delta \vec{C} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{C}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \rho \vec{v} \quad (4.61)$$

Portiamo ora il valore (32) di  $\vec{E}$  nella (30,c); abbiamo

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{div} \vec{C} - \text{div} \text{grad} \varphi = 4\pi \rho$$

Dalla (1-19), e dalla condizione (33) si ha allora l'equazione

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi \rho \quad (4.62)$$

Le equazioni (34) e (35), che presentano una stretta analogia di forma, determinano i potenziali  $\varphi$  e  $\vec{C}$ . Si portano i valori (32,a) di  $\vec{C}$  e  $\varphi$  nella (33), si ottiene la condizione seguente, alla quale deve soddisfare la grandezza  $\psi$ ,

$$\Delta \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\text{div} \vec{C}_0 - \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} \quad (4.63)$$

Si vede che la condizione (33) non è incompatibile con le equazioni (34) e (35). Infatti, prendendo  $c \operatorname{div}$  dei due membri della derivata rispetto a  $t$  dei due membri della (35) e sommando membro a membro i risultati, si ha

$$\Delta \left( c \operatorname{div} \vec{C} - \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( c \operatorname{div} \vec{C} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = -4\pi \left\{ \operatorname{div} (\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right\} \quad (4.64)$$

Dalla (30,e), il secondo membro è nullo ed è uguale, secondo la (33), al primo membro.

L'integrazione delle equazioni (34) e (35) si basa sulla nozione di *potenziale ritardato* che abbiamo già introdotto nello studio della diffrazione (Volume II, Cap. XIV, § 5) e sulla formula di Kirchhoff, di cui abbiamo dato una semplice dimostrazione in Acustica (Volume I, Parte 7, Cap. I, § 11). Ci basterà qui indicare i risultati essenziali relativi al problema che stiamo attualmente considerando.

Si sa che l'equazione

$$\Delta V = -4\pi k \quad (4.65)$$

dove  $k$  può essere una funzione arbitraria di coordinate  $x, y, z$ , è soddisfatta dall'equazione

$$V = \int \frac{k d\omega}{r} \quad (4.66)$$

L'integrazione si estende all'intero volume all'interno del quale  $k$  non è nullo. Se  $x', y', z'$  sono le coordinate dell'elemento di volume  $d\omega$ ,  $k$  è sotto il segno di integrale una funzione di  $x', y', z'$ ;  $r$  è la distanza dell'elemento  $d\omega$  dal punto  $M(x, y, z)$  al quale si riferisce la grandezza  $V$  ed è di conseguenza una funzione delle sei coordinate  $x, y, z, x', y', z'$ , mentre  $k$  dipende solo dalle tre coordinate  $x', y', z'$ . Consideriamo ora l'equazione

$$\Delta V - \frac{1}{c} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -4\pi k \quad (4.67)$$

dove  $k$  è una funzione delle coordinate e del tempo e dove  $c$  è una costante, che per comodità prenderemo uguale alla velocità della luce. Si può determinare una soluzione  $V$  di questa equazione, in funzione delle coordinate  $x, y, z$  e del tempo  $t$ , come segue. Supponiamo che le coordinate dell'elemento di volume  $d\omega$  siano  $x', y', z'$  e che al tempo  $t$  la grandezza  $k$  abbia nel punto  $(x', y', z')$  il valore  $k(x', y', z', t)$ . Prendiamo il valore di questa quantità che, nello stesso punto  $(x', y', z')$ , corrisponderebbe al precedente istante  $t' = t - \frac{r}{c}$ , e lo denotiamo con  $\bar{k}$ , in modo che

$$\bar{k} = k \left( x', y', z', t - \frac{r}{c} \right) \quad (4.68)$$

Si ha allora

$$V = \int \frac{\bar{k} d\omega}{r} \quad (4.69)$$

È essenziale notare che  $\bar{k}$  è ora funzione non solo delle coordinate  $x', y', z'$  dell'elemento di volume  $d\omega$ , ma anche delle coordinate  $x, y, z$  del punto  $M$  a cui si riferisce  $V$ , perché  $r$  dipende dalle sei coordinate  $x, y, z, x', y', z'$  ed è così anche  $t' = t - \frac{r}{c}$ . È facile comprendere il significato della formula (37). Sia  $t' = t - \tau$ ;  $\tau$  è allora il tempo necessario affinché la luce o un qualsiasi perturbazione elettromagnetica si propaghi nell'etere dall'elemento di volume  $d\omega$  al punto  $M$ . Il valore della funzione  $V$  nel punto  $M(x, y, z)$  e all'istante  $t$  dipende quindi dal valore di  $k$  nel punto  $(x', y', z')$  che non si riferisce allo stesso istante  $t$ , ma ad un istante  $t'$  anteriore dell'intervallo necessario affinché l'azione elettromagnetica si propaghi da  $d\omega$  a  $M$ . Si può immaginare che da tutti gli elementi di volume sono emessi continuamente azioni che, all'istante  $t$ , sono determinate dalla grandezza  $k(x', y', z', t')$  e si propagano con la velocità  $c$ . Il valore di  $V$  nel punto  $M(x, y, z, t)$  risulta da tutte le azioni che giungono contemporaneamente

(all'istante  $t$ ) nel punto M e di conseguenza sono state emesse dai vari elementi di volume  $d\omega$  in istanti diversi  $t' = t - \frac{r}{c}$ .

Il confronto tra la (34) e (35) con la (36,b) mostra che, secondo la (37), si ha

$$\vec{C} = \frac{1}{c} \int \frac{\overline{\rho \vec{v}}}{r} d\omega \quad (4.70)$$

$$\varphi = \int \frac{\bar{\rho}}{r} d\omega \quad (4.71)$$

Si ha  $\bar{\rho} = \rho(x', y', z', t - \frac{r}{c})$  e  $\overline{\rho \vec{v}} = \rho \vec{v}(x', y', z', t - \frac{r}{c})$ . I potenziali  $\vec{C}$  e  $\varphi$ , i cui valori nel punto  $(x, y, z)$  si stabiliscono in qualche modo con un certo ritardo, sono per questo motivo chiamati *potenziali ritardati*. Si può ancora rappresentare, in modo forse più espressivo, il carattere speciale di questi potenziali: consideriamo attorno al punto M una superficie sferica, il cui raggio diminuisce con la velocità  $c$  fino ad annullarsi nell'istante  $t$ . Attraversando i volumi elementari  $d\omega$ , questa superficie afferra, per così dire, i valori degli elementi degli integrali (38) e (39) che vi incontra e li trasporta con la velocità  $c$  al punto M.

Sostituendo le espressioni (38) e (39) nella (33), si può verificare che quest'ultima condizione è soddisfatta.

Le quantità  $\bar{\rho}$  e  $\overline{\rho \vec{v}}$  nella (38) e (39) si riferiscono allo stesso punto e allo stesso istante e sono legate di conseguenza dall'equazione (30,e).

Le equazioni (31), (32), (38) e (39) ci portano alla soluzione che vogliamo ottenere. In realtà danno

$$\hat{H} = \frac{1}{c} \text{rot} \int \frac{\overline{\rho \vec{v}}}{r} d\omega \quad (4.72)$$

$$\vec{E}^2 = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{\overline{\rho \vec{v}}}{r} d\omega - \text{grad} \int \frac{\bar{\rho}}{r} d\omega \quad (4.73)$$

Quando i campi sono stazionari, il vettore  $\vec{E}$  è determinato dalla sola grandezza  $\bar{\rho}$  e il vettore  $\hat{H}$  dalla singola grandezza  $\overline{\rho \vec{v}}$ . La formula (40) richiama la formula (37) del Capitolo precedente.

Stabiliremo inoltre le equazioni differenziali che soddisfano i vettori  $\vec{E}$  e  $\hat{H}$ . Differenziamo i due membri dell'equazione (30,a) rispetto a  $t$  e prendiamo il rotore dei due membri dell'equazione (30,b); noi abbiamo,

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{c} \frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} + \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= \text{rot} \frac{\partial \hat{H}}{\partial t} \\ \text{rot} \frac{\partial \hat{H}}{\partial t} &= -c \text{rot rot rot} \hat{H} = -c \text{grad div} \vec{E} + c \Delta \vec{E} \end{aligned}$$

Tenendo conto della (30,c), deduciamo

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 4\pi \text{grad} \rho + \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} \quad (4.74)$$

Differenziamo i due membri della (30,b) rispetto a  $t$  e prendiamo il rotore dei due membri dell'equazione (30,a), otteniamo

$$\Delta \hat{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \hat{H}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \text{rot}(\rho \vec{v}) \quad (4.75)$$

Vediamo che  $\vec{E}$  e  $\hat{H}$  soddisfano, come i potenziali  $\vec{C}$  e  $\varphi$ , si veda (34) e (35), a equazioni del tipo (36,b).

Menzioneremo ancora un vettore interessante, che indicheremo con  $\vec{Z}$  e che Abraham chiama vettore di Hertz. Supponiamo dato un campo elettrico all'istante  $t = 0$ , cioè le grandezze  $\rho_0, \varphi_0$  e  $\vec{E}_0$ . Introduciamo il nuovo vettore

$$\vec{q} = \int_0^t \rho \vec{v} dt \quad (4.76)$$

Si ha allora, dalla (30,e)

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{q} &= \int_0^t \operatorname{div} (\rho \vec{v}) dt = - \int_0^t \frac{\partial \rho}{\partial t} dt = \rho_0 - \rho \\ \rho - \rho_0 &= -\operatorname{div} \vec{q} \end{aligned} \quad (4.77)$$

La divergenza del vettore  $\vec{q}$  determina la variazione della densità  $\rho$  in un punto dato nell'intervallo di tempo da  $t = 0$  a  $t = t$ . Si ha inoltre

$$\frac{\partial \vec{q}}{\partial t} = \rho \vec{v} \quad (4.78)$$

Sia

$$\vec{Z} = \int \frac{\vec{q}}{r} d\omega \quad (4.79)$$

dove  $\vec{q} = \vec{q}(x', y', z', t - \frac{r}{c})$ : si vede che  $\frac{\partial \vec{q}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{q}}{\partial t}$  e che, per esempio,  $\frac{\partial \vec{q}}{\partial x'}$  e  $\frac{\partial \vec{q}}{\partial x'}$  sono due grandezze diverse. Dalla (44) risulta, secondo la (43,c), che

$$\frac{\partial \vec{Z}}{\partial t} = \int \frac{\partial \vec{q}}{\partial t} \frac{d\omega}{r} = \int \frac{\partial \vec{q}}{\partial t} \frac{d\omega}{r} = \int \frac{\rho \vec{v}}{r} d\omega$$

si ha pertanto, dalla (38)

$$\vec{C} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{Z}}{\partial t} \quad (4.80)$$

D'altra parte, si può vedere che

$$\varphi - \varphi_0 = -\operatorname{div} \vec{Z} \quad (4.81)$$

Si ha quindi, dalle (31) e (32)

$$\hat{H} = \frac{1}{c} \operatorname{rot} \frac{\partial \vec{Z}}{\partial t} \quad (4.82)$$

$$\vec{E} - \vec{E}_0 = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{Z} - \frac{\partial^2 \vec{Z}}{\partial t^2} \quad (4.83)$$

Le ultime quattro formule mostrano la possibilità di esprimere per mezzo del vettore  $\vec{Z}$  così come i campi  $\vec{E}$  e  $\hat{H}$  e anche tramite  $\vec{C}$  e  $\varphi$ .

## 6. Forze agenti su un sistema dato. Quantità di moto elettromagnetica

La forza che agisce in un dato punto sull'unità di quantità di elettricità è determinata dalla formula (30,f). Se la densità dell'elettricità in questo punto è uguale a  $\rho$ , la forza relativa all'unità di volume lo è

$$\vec{F}\rho = \vec{E}\rho + \frac{1}{c} [\rho \vec{v} \cdot \hat{H}] = \vec{E}\rho - \frac{1}{c} [\hat{H} \cdot \rho \vec{v}]$$

Portando in questa formula il valore di  $\rho$  dato dalla (30,c) e il valore di  $\rho \vec{v}$  dato dalla (30,a), si ha

$$\vec{F}\rho = \frac{1}{4\pi} \vec{E} \operatorname{div} \vec{E} + \left[ \left( \operatorname{rot} \hat{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \hat{H} \right] \quad (4.84)$$

In questo modo  $\vec{F}\rho$  è espresso utilizzando i vettori  $\vec{E}$  e  $\hat{H}$ . Consideriamo una parte  $\omega$  dello spazio limitato dalla superficie  $\Sigma$  e supponiamo che le forze che agiscono su tutti gli elettroni contenuti in questa porzione di spazio abbiano un'unica risultante, che indicheremo con la stessa lettera  $\vec{F}$ . Possiamo quindi scrivere, secondo la (1-9a),

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi} \int \left\{ \vec{E} \operatorname{div} \vec{E} + [\operatorname{rot} \hat{H} \cdot \hat{H}] - \frac{1}{c} \left[ \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \hat{H} \right] \right\} d\omega \quad (4.85)$$

Ma si ha, dalla (1-9c) e dalla (30,b)

$$\left[ \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \hat{H} \right] = \frac{\partial}{\partial t} [\vec{E} \cdot \hat{H}] - \left[ \vec{E} \cdot \frac{\partial \hat{H}}{\partial t} \right] = \frac{\partial}{\partial t} [\vec{E} \cdot \hat{H}] - c \operatorname{rot} [\vec{E} \cdot \vec{E}]$$

Ciò posto, la forza  $\vec{F}$  può essere così scomposta

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \quad (4.86)$$

dove

$$\vec{F}_1 = \frac{1}{4\pi} \int \left\{ \vec{E} \operatorname{div} \vec{E} + [\operatorname{rot} \hat{H} \cdot \hat{H}] + \operatorname{rot} [\vec{E} \cdot \vec{E}] \right\} d\omega \quad (4.87)$$

$$\vec{F}_2 = -\frac{1}{4\pi c} \int \frac{\partial}{\partial t} [\vec{E} \cdot \hat{H}] d\omega \quad (4.88)$$

Se introduciamo il vettore  $\vec{S}$  di Poynting, abbiamo

$$\vec{F}_2 = -\frac{1}{c^2} \int \frac{\partial \vec{S}}{\partial t} d\omega \quad (4.89)$$

Nella formula (46,b), i vettori  $\vec{E}$  e  $\hat{H}$  compaiono allo stesso modo, perché si può sommare, sotto il segno di integrazione, il termine  $\hat{H} \operatorname{div} \hat{H}$ , che è nullo dall'equazione (30,d). La componente  $\vec{F}_1$  si può quindi scomporre a sua volta in due forze, che sono rispettivamente funzioni identiche a  $\vec{E}$  e  $\hat{H}$ . Poniamo

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_1(\vec{E}) + \vec{F}_1(\hat{H}) \quad (4.90)$$

avremo

$$\vec{F}_1(\vec{E}) = \frac{1}{4\pi} \int \left\{ \vec{E} \operatorname{div} \vec{E} + \operatorname{rot} [\vec{E} \cdot \vec{E}] \right\} d\omega \quad (4.91)$$

con espressione analoga per  $\vec{F}_1(\hat{H})$ . L'integrale (48,a), che si estende al volume  $\omega$ , può, mediante l'equazione seguente, essere trasformato in un integrale sulla superficie  $\Sigma$ . Sia  $n$  la

direzione della normale all'elemento  $d\Sigma$  di questa superficie,  $\alpha, \beta, \gamma$  gli angoli che  $n$  forma con gli assi coordinati,  $U$  una funzione qualunque delle coordinate  $x, y, z$  dell'elemento  $d\omega$ , è facile dimostrare che

$$\int \frac{\partial U}{\partial x} d\omega = \int U \cos \alpha d\Sigma \quad (4.92)$$

Indichiamo con  $\vec{F}_{1,x}(\vec{E})$  la componente lungo l'asse  $x$  della forza  $\vec{F}_1(\vec{E})$ . Dalla formula (48,a) risulta allora,

$$\vec{F}_{1,x}(\vec{E}) = \frac{1}{4\pi} \int \left\{ \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) X + \left( \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) Z - \left( \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) Y \right\} d\omega$$

essendo  $X, Y, Z$  le componenti del vettore  $\vec{E}$ , o ancora

$$\vec{F}_{1,x}(\vec{E}) = \frac{1}{4\pi} \int \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (X^2 - Y^2 - Z^2) + \frac{\partial}{\partial y} (XY) + \frac{\partial}{\partial y} (XZ) \right\} d\omega$$

Dalla (48-b), si ha pertanto

$$\vec{F}_{1,x}(\vec{E}) = \frac{1}{4\pi} \int \left\{ \frac{1}{2} (X^2 - Y^2 - Z^2) \cos \alpha + XY \cos \beta + XZ \cos \gamma \right\} d\omega$$

Sia  $E_n = X \cos \alpha + Y \cos \beta + Z \cos \gamma$  la componente del vettore  $\vec{E}$  nella direzione della normale  $n$ ; si vede che

$$\vec{F}_{1,x}(\vec{E}) = \frac{1}{8\pi} \int (2E_n X - \vec{E}^2 \cos \alpha) d\Sigma \quad (4.93)$$

con espressioni analoghe per le componenti di  $\vec{F}_1(\vec{E})$  lungo le direzioni degli assi  $y$  e  $z$ . Sommiamo vettorialmente le tre componenti  $\vec{F}_{1,x}(\vec{E})$ ,  $\vec{F}_{1,y}(\vec{E})$ ,  $\vec{F}_{1,z}(\vec{E})$  e indichiamo con  $\vec{n}$  un vettore unitario nella direzione della normale  $n$ ; avremo

$$\vec{F}_1(\vec{E}) = \frac{1}{8\pi} \int (2\vec{E} E_n - \vec{n} \vec{E}^2 \cos \alpha) d\Sigma$$

con un'espressione del tutto analoga per  $\vec{F}_1(\vec{H})$ ; di conseguenza

$$\vec{F}_1 = \frac{1}{8\pi} \int \left\{ 2\vec{E} E_n + 2\vec{H} H_n - \vec{n} (\vec{E}^2 + \vec{H}^2) \right\} d\Sigma \quad (4.94)$$

La formula (50) mostra che l'azione del campo elettromagnetico sui corpi situati nello spazio  $\omega$  limitato dalla superficie  $\Sigma$  è composta di due parti. La prima parte  $\vec{F}_1$  è il risultato delle forze esercitate sugli elementi della superficie  $\Sigma$ , cioè delle pressioni sulla superficie  $\Sigma$  dovute al campo. La seconda parte riguarda l'azione sugli elementi del volume  $\omega$ , ed è data dalla formula (47).

Abraham chiama la grandezza

$$\vec{K} = \frac{1}{c^2} \int \vec{S} d\omega \quad (4.95)$$

la quantità di moto elettromagnetica del campo dato. La grandezza

$$\vec{k} = \frac{1}{c^2} \vec{S} \quad (4.96)$$

che differisce dal vettore di Poynting solo per il fattore  $1 : c^2$ , si chiama la densità della quantità di moto elettromagnetica nel punto dato. Dalla (47) si ha

$$\vec{F}_2 = -\frac{\partial \vec{K}}{\partial t} \quad (4.97)$$

In uno stato stazionario,  $\vec{F}_2 = 0$ . Si vede che quando  $\vec{E}$  e  $\hat{H}$  e di conseguenza anche  $\vec{S}$  sono funzioni periodiche del tempo, il valore medio della forza  $F_2$  si annulla, dopo ogni intervallo di tempo uguale a un numero intero di periodi e, in generale, per ogni durata  $t$  grande rispetto ad un periodo; in altre parole

$$\frac{1}{t} \int \vec{F}_2 dt = 0 \quad (4.98)$$

Nei due casi indicati, l'azione del campo si riduce a  $\vec{F}_1$ , cioè alle forze applicate sugli elementi della superficie  $\Sigma$ .

Quando la superficie  $\Sigma$  abbraccia l'intero campo, in modo che in ogni punto di questa superficie  $\vec{E} = 0$  e  $\hat{H} = 0$ , si ha  $\vec{F}_1 = 0$  e rimane solo  $\vec{F}_2$ . La formula (52) mostra che *l'azione dell'intero campo elettromagnetico sui corpi in esso contenuti è uguale alla derivata, cambiata di segno, della quantità di moto elettromagnetica del campo rispetto al tempo.*

Il principio dell'uguaglianza tra azione e reazione non è qui osservata, perché la teoria elettronica non ammette alcuna azione meccanica sull'etere.

Non è privo di interesse notare che quando non esistono elettroni nello spazio  $\omega$ , cioè quando dappertutto si ha  $\rho = 0$ , allora  $\vec{F} = 0$ , cioè  $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ . Infatti, l'equazione (8) dà  $\text{div } \vec{E} = 0$  e quindi, dalle (48) e (48,a) e dalla formula analoga per  $\vec{F}_1(\hat{H})$

$$\vec{F}_1 = \frac{1}{4\pi} \int \left\{ \text{rot} [\vec{E} \cdot \vec{E}] + [\text{rot} \hat{H} \cdot \hat{H}] \right\} d\omega$$

Sostituendo  $\text{rot} \vec{E}$  e  $\text{rot} \hat{H}$  con i loro valori dedotti dalla (6) e (7) per  $\rho = 0$ , si ha

$$\begin{aligned} \vec{F}_1 &= \frac{1}{4\pi c} \int \left\{ \left[ \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \hat{H} \right] - \left[ \frac{\partial \hat{H}}{\partial t} \cdot \vec{E} \right] \right\} d\omega = \\ &= \frac{1}{4\pi c} \int \left\{ \left[ \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \hat{H} \right] + \left[ \vec{E} \cdot \frac{\partial \hat{H}}{\partial t} \right] \right\} d\omega = \frac{1}{4\pi c} \int \left\{ \frac{\partial}{\partial t} [\vec{E} \cdot \hat{H}] \right\} d\omega \end{aligned}$$

Ne deriva, dalla (15) e (47), che

$$\vec{F}_1 = c^2 \int \frac{\partial \vec{S}}{\partial t} dt = -\vec{F}_2$$

Mediante la formula (50), si può calcolare la pressione esercitata da un flusso di energia radiante sulla superficie di un corpo. Ci limiteremo al caso di una superficie nera e piana e di un flusso di energia che cade normalmente su questo piano. Supponiamo che la superficie  $\Sigma$  sia infinitamente vicina alla superficie del corpo. L'ultimo termine della formula (50) è nullo; si ha inoltre  $E_n = 0$ ,  $H_n = 0$ , e rimane

$$\vec{F} = -\frac{\vec{n}}{8\pi} \int \left( \vec{E}^2 + \hat{H}^2 \right) \quad (4.99)$$

La direzione della forza  $\vec{F}$  è opposta a quella della normale  $n$  alla superficie del corpo. Le formule (14) e (53) mostrano che la pressione per unità di area è numericamente uguale alla quantità di energia contenuta nell'unità di volume.



## 7. Elettroni animati da un moto rettilineo e uniforme e campo di questi elettroni

Applichiamo quanto esposto al caso in cui tutti gli elettroni si muovono con la stessa velocità costante  $\vec{v}$  nella direzione dell'asse  $x$ . Si ha allora, dalla (38), per le componenti del potenziale vettore  $\vec{C}$ ,

$$C_y = 0 \quad C_z = 0 \quad C_x = C \quad (4.100)$$

con le notazioni cartesiane. Poniamo

$$\frac{v}{c} = \beta \quad (4.101)$$

e supponiamo che  $v$  sia minore o al limite uguale a  $c$ , per cui  $\beta \leq 1$ . Contemporaneamente all'elettrone in movimento, si sposta il campo da esso creato. Tutte le grandezze che caratterizzano questo campo, per esempio i potenziali  $C$  e  $\varphi$  non cambiano quando si aumenta  $t$  di  $dt$  e contemporaneamente  $x$  di  $dx = vdt$ . Si ha quindi in particolare

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} dt + \frac{\partial \varphi}{\partial x} dt = 0$$

cioè

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -v \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (4.102)$$

Si trova pure, considerando la grandezza  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -v \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = v^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad (4.103)$$

In modo analogo, si ottiene per  $C$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (4.104)$$

Portiamo nella (34) e (35) questi valori delle derivate seconde rispetto al tempo e introduciamo  $\beta$  al posto di  $v$ . Abbiamo allora

$$(1 - \beta^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -4\pi\rho \quad (4.105)$$

$$(1 - \beta^2) \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} = -4\pi\beta\rho \quad (4.106)$$

Da queste due equazioni, risulta che

$$C = C_x = \beta\varphi \quad (4.107)$$

Questa formula semplice determina il potenziale vettore  $C$ , quando si è ottenuto il potenziale scalare  $\varphi$ . Tutta la questione si riduce quindi all'integrazione della (55).

Indichiamo simbolicamente con  $P$  il sistema mobile considerato, determinato dagli elettroni in movimento, i potenziali  $\varphi$  e  $C$ , i campi  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  e gli elementi di volume  $d\omega$  e consideriamo un altro sistema a riposo  $P'$ , determinato da  $\varphi'$ ,  $C'$ , i  $\vec{E}'$  e  $\vec{H}'$  e  $d\omega'$ , tali che a ciascun punto  $(x, y, z)$  del sistema  $P$  corrisponde il punto  $(x', y', z')$  del sistema  $P'$ , le cui coordinate sono definite da:

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}x \quad y' = y \quad z' = z \quad (4.108)$$

Il sistema a riposo  $P'$  si deduce dal sistema in movimento  $P$  mediante una dilatazione, nella direzione del moto degli elettroni, essendo tutte le dimensioni aumentate lungo questa direzione, che è quella dell'asse  $x$ , nel rapporto  $1 : \sqrt{1 - \beta^2}$ . Nel nuovo sistema, la forma degli elettroni è cambiata e la grandezza  $\varphi'$ , ad esempio, è una funzione di  $x', y, z$ . Tra gli elementi di volume  $d\omega$  e  $d\omega'$  e tra le densità  $\rho$  e  $\rho'$ , abbiamo le relazioni

$$d\omega' = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} d\omega \quad (4.109)$$

$$\rho' = \sqrt{1 - \beta^2} \rho \quad (4.110)$$

Con le nuove coordinate  $x', y, z$ , l'equazione (55) diviene

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -4\pi \rho \quad (4.111)$$

D'altra parte, il potenziale scalare (elettrostatico)  $\varphi'$  nel sistema a riposo  $P'$  soddisfa all'equazione

$$\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial z^2} = -4\pi \rho' = -4\pi \sqrt{1 - \beta^2} \rho \quad (4.112)$$

Confrontando queste ultime due equazioni, si trova

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \varphi' \quad (4.113)$$

Si può quindi ottenere la quantità desiderata  $\varphi$  nel punto  $x, y, z$ , del sistema mobile  $P$ , costruendo, mediante le formule (56) e (56,b), un sistema a riposo  $P'$  e determinando per questo sistema il potenziale scalare ordinario; le quantità  $\varphi$  e  $\varphi'$ , che si riferiscono ai punti corrispondenti dei due sistemi, sono legate tra loro dall'equazione (57). La funzione  $\varphi(x, y, z)$  così trovata è sufficiente per esprimere tutte le grandezze relative al sistema mobile  $P$  considerato. Il potenziale vettore  $C = C_x$ , è determinato dalla formula (55,b). Inoltre, la (54,a) e la (55,b) danno

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial t} = -v \frac{\partial C}{\partial x} = -\beta^2 c \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (4.114)$$

Dalle equazioni (31) e (32), si deducono le componenti  $X, Y, Z$  e  $L, M, N$  dei vettori  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$ ; si ha

$$\begin{cases} X &= -\frac{1}{c} \frac{\partial C_x}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -(1 - \beta^2) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ Y &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ Z &= -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{cases} \quad (4.115)$$

$$\begin{cases} L &= \text{rot } \vec{C} = \frac{\partial C_z}{\partial y} - \frac{\partial C_y}{\partial z} = 0 \\ M &= \text{rot } \vec{C} = \frac{\partial C_x}{\partial z} - \frac{\partial C_z}{\partial x} = \beta \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ N &= \text{rot } \vec{C} = \frac{\partial C_y}{\partial x} - \frac{\partial C_x}{\partial y} = -\beta \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{cases} \quad (4.116)$$

Esprimiamo mediante  $\varphi'$  l'energia, il vettore di Poynting e la quantità di moto elettromagnetica. L'energia elettrica  $W_e$  è, dalla (57,b), (57) e (56,a), uguale a

$$\begin{aligned} W_e &= \frac{1}{8\pi} \int \vec{E}^2 d\omega = \frac{1}{8\pi} \int (X^2 + Y^2 + Z^2) d\omega = \\ &= \frac{1}{8\pi} \int \left\{ (1 - \beta^2)^2 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right\} d\omega \\ W_e &= \frac{1}{8\pi} \int \left\{ \sqrt{1 - \beta^2} \left( \frac{\partial \varphi'}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \left[ \left( \frac{\partial \varphi'}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi'}{\partial z} \right)^2 \right] \right\} d\omega' \end{aligned} \quad (4.117)$$

L'energia magnetica  $W_m$  è, dalla (57,c), uguale a

$$W_m = \frac{1}{8\pi} \int \hat{H}^2 d\omega = \frac{1}{8\pi} \int (L^2 + M^2 + N^2) d\omega = \frac{\beta^2}{8\pi} \int \left\{ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right\} d\omega$$

$$W_m = \frac{\beta^2}{8\pi\sqrt{1-\beta^2}} \int \left\{ \left( \frac{\partial \varphi'}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi'}{\partial z} \right)^2 \right\} d\omega' \quad (4.118)$$

Le componenti del vettore di Poynting sono determinate dalla formule seguenti

$$\begin{cases} S_x = \frac{c}{4\pi} \left[ \vec{E} \hat{H} \right]_x = \frac{c}{4\pi} (YN - ZM) = \frac{c\beta}{1-\beta^2} \left\{ \left( \frac{\partial \varphi'}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi'}{\partial z} \right)^2 \right\} \\ S_y = \frac{c}{4\pi} \left[ \vec{E} \hat{H} \right]_y = \frac{c}{4\pi} (ZL - XN) = -\frac{c\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{\partial \varphi'}{\partial x'} \frac{\partial \varphi'}{\partial y} \\ S_z = \frac{c}{4\pi} \left[ \vec{E} \hat{H} \right]_z = \frac{c}{4\pi} (XM - YL) = -\frac{c\beta}{1-\beta^2} \frac{\partial \varphi'}{\partial x'} \frac{\partial \varphi'}{\partial z} \end{cases} \quad (4.119)$$

Infine si ha per le componenti della quantità di moto elettromagnetica, dalle (51) e (56,a),

$$\begin{cases} K_x = \frac{1}{c^2} \int S_x d\omega = \frac{\beta}{c\sqrt{1-\beta^2}} \int \left\{ \left( \frac{\partial \varphi'}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi'}{\partial z} \right)^2 \right\} d\omega' \\ K_y = \frac{1}{c^2} \int S_y d\omega = -\frac{\beta}{c} \int \frac{\partial \varphi'}{\partial x'} + \frac{\partial \varphi'}{\partial y} d\omega' \\ K_z = \frac{1}{c^2} \int S_z d\omega = -\frac{\beta}{c} \int \frac{\partial \varphi'}{\partial x'} + \frac{\partial \varphi'}{\partial z} d\omega' \end{cases} \quad (4.120)$$

Abbiamo così mostrato come sia possibile determinare le grandezze relative al sistema mobile  $P$  utilizzando solo il potenziale scalare  $\varphi'$  del sistema a riposo  $P'$ .

Consideriamo in particolare un elettrone *sferico*; designiamo la sua carica con  $e$ , il suo raggio con  $a$ . Secondo la (56), si ha, nel sistema a riposo  $P'$ , un ellissoide di rivoluzione allungato, i cui assi sono

$$b = \frac{a}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad a \quad a \quad (4.121)$$

Distingueremo due casi: il primo in cui la carica  $e$  è uniformemente distribuita sulla superficie della sfera, e il secondo in cui è uniformemente distribuita su tutto il volume.

Prendiamo il primo caso, dove nel sistema  $P$  è dato un elettrone sferico con carica superficiale  $e$ . Ad esso corrisponde, nel sistema  $P'$ , l'ellissoide di rivoluzione (59), sulla cui superficie è distribuita la carica  $e$  come lo sarebbe sulla superficie di un conduttore della stessa forma. L'equazione della superficie dell'ellissoide è

$$\frac{x'^2}{b^2} + \frac{y^2 + z^2}{a^2} = 1 \quad (4.122)$$

Le superfici di livello del potenziale  $\varphi'$  sono ellissoidali omofocali della (59,a); la loro equazione è

$$\frac{x'^2}{b^2 + h^2} + \frac{y^2 + z^2}{a^2 + h^2} = 1 \quad (4.123)$$

Il potenziale  $\varphi'$  sulla superficie del parametro  $h$  è uguale a

$$\varphi' = \frac{e}{2\sqrt{b^2 - a^2}} \log \frac{\sqrt{b^2 + h^2} + \sqrt{b^2 - a^2}}{\sqrt{b^2 + h^2} - \sqrt{b^2 - a^2}}$$

Introducendo il valore (59) di  $b$ , si ha

$$\varphi' = \frac{e\sqrt{1-\beta^2}}{2\beta a} \log \frac{\sqrt{a^2 + h^2}(1-\beta^2) + \beta a}{\sqrt{a^2 + h^2}(1-\beta^2) - \beta a} \quad (4.124)$$

Alla superficie dell'ellissoide  $h = 0$ , il potenziale  $\varphi'$  è uguale a

$$\varphi'_0 = \frac{e\sqrt{1-\beta^2}}{2\beta a} \log \frac{1+\beta}{1-\beta} \quad (4.125)$$

Per  $\beta = 0$ , si ritrova il potenziale di una sfera, cioè  $\varphi'_0 = e : a$ . Il secondo fattore nella (59,d) è uguale a

$$\log \frac{1+\beta}{1-\beta} = 2\beta \left( 1 + \frac{1}{3}\beta^2 + \frac{1}{5}\beta^4 + \dots \right) \quad (4.126)$$

Non proseguiremo oltre con questi calcoli e ci limiteremo a scrivere i risultati forniti dalle formule dalla (57) alla (58,c).

All'interno dell'ellissoide il potenziale  $\varphi'_0$  assume il valore costante (59,d) in tutti i punti; ne risulta che, nel sistema  $P$ , il potenziale  $\varphi'_0$  assume all'interno dell'elettrone il valore  $\varphi_0 = \varphi'_0 : \sqrt{1-\beta^2}$ , anch'esso costante. Le formule (57,b) e (57,c) mostrano che all'interno di un elettrone sferico, avente carica superficiale uniforme  $e$  che si muove con velocità costante in modulo e direzione, si ha  $\vec{E} = 0$  e  $\vec{H} = 0$ , cioè non esiste campo elettromagnetico.

Le formule (58) e (58,a) danno

$$W_e = \frac{e^2}{4a} \left\{ \frac{3-\beta^2}{2\beta} \log \frac{1+\beta}{1-\beta} - 1 \right\} \quad (4.127)$$

$$W_m = \frac{e^2}{4a} \left\{ \frac{1+\beta^2}{2\beta} \log \frac{1+\beta}{1-\beta} - 1 \right\} \quad (4.128)$$

Se nello sviluppo in serie (59,e), si trascurano tutte le potenze di  $\beta$  superiori alla seconda, si ottiene

$$W_e = \frac{e^2}{2a} \quad W_m = \frac{e^2}{3a} \beta^2 \quad (4.129)$$

Quando la velocità  $v$  dell'elettrone è piccola rispetto alla velocità  $c$  della luce, l'energia elettrica del campo è indipendente dalla velocità  $v$  dell'elettrone, mentre l'energia magnetica è proporzionale al suo quadrato. La formula (27,a) è identica alla seconda formula (60,b).

L'energia totale del campo è uguale a

$$W = W_e + W_m = \frac{e^2}{2a} \left\{ \frac{1}{\beta} \log \frac{1+\beta}{1-\beta} - 1 \right\} \quad (4.130)$$

Le formule (58,c) danno, per la quantità di moto elettromagnetico

$$K = \frac{e^2}{2ac\beta} \left\{ \frac{1+\beta^2}{2\beta} \log \frac{1+\beta}{1-\beta} - 1 \right\} \quad (4.131)$$

Confrontando la (60,a) con la (6a,d), si ha

$$K = \frac{2}{v} W_m \quad (4.132)$$

Tutte le formule introdotte si riferiscono al caso di un elettrone sferico, avente una carica superficiale uniforme. Quando la carica  $e$  è distribuita uniformemente in tutto il volume della sfera, si ottengono le stesse formule, con l'unica differenza che tutte le quantità si moltiplicano per il fattore  $\frac{6}{5}$ .

## 8. Massa elettromagnetica dell'elettrone

Abbiamo visto che l'azione dell'intero campo sugli elettroni in esso contenuti è espressa dalla formula (52). Per  $\vec{v} = cost$ , il valore di  $\vec{K}$  è indipendente da  $t$  e di conseguenza *la reazione del campo, dovuta a un elettrone in moto rettilineo uniforme, è nulla su questo elettrone. L'elettrone si muove di moto rettilineo ed uniforme come la materia ordinaria, cioè come se fosse dotato di inerzia.*

Passiamo al caso del moto vario dell'elettrone. Possiamo scrivere la formula (62)

$$\vec{F} = -\frac{\partial \vec{K}}{\partial t} \quad (4.133)$$

infatti, poiché consideriamo l'intero campo,  $\vec{F}_1 = 0$  e di conseguenza  $\vec{F} = \vec{F}_2$ . Manterremo l'espressione (60,d) per  $K$ , sebbene sia stabilita sull'ipotesi di uno stato stazionario, cioè per una velocità  $\vec{v}$  costante. Ciò è possibile solo a condizione che il tempo  $\lambda/c$ , dove  $\lambda$  è la dimensione lineare maggiore dell'elettrone (ad esempio  $2a$ , per una sfera), sia estremamente piccolo rispetto al tempo durante il quale il moto dell'elettrone subisce una significativa variazione; ammetteremo che questa condizione è soddisfatta. Supponiamo innanzitutto che l'elettrone abbia un moto rettilineo con accelerazione  $w'$  in notazioni cartesiane. La formula (61) dà

$$F = -\frac{\partial K}{\partial t} = -\frac{\partial K}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{t} \frac{\partial K}{\partial \beta} w' \quad (4.134)$$

Se introduciamo la notazione

$$m' = \frac{1}{c} \frac{\partial K}{\partial \beta} \quad (4.135)$$

si ha con la notazione vettoriale

$$\vec{F} = m' \vec{w}' \quad (4.136)$$

Questa formula mostra che, *in un moto rettilineo vario dell'elettrone, il campo prodotto da questo elettrone reagisce su di esso con una forza proporzionale alla sua accelerazione, diretta in direzione opposta a tale accelerazione. Il coefficiente  $m'$  ha il carattere di una massa ed è chiamata massa elettromagnetica longitudinale dell'elettrone.*

Consideriamo ora il caso di un moto uniforme, ma curvilineo, dell'elettrone. Durante il tempo  $\Delta t$ , i vettori  $\vec{v}$  e  $\vec{K}$  della stessa direzione prendono incrementi vettoriali  $\Delta \vec{v}$  e  $\Delta \vec{K}$  che sono loro rispettivamente perpendicolari. Sia  $\alpha$  il piccolo angolo di cui ruotano i due vettori  $\vec{v}$  e  $\vec{K}$  durante il tempo  $\Delta t$ . Si ha allora in notazione cartesiana  $\Delta v = \alpha v$  e  $\Delta K = \alpha K$ . Dividendo per  $\Delta t$  e passando al limite, si ottiene

$$\frac{\partial K}{\partial t} = K \lim_{\Delta t} \frac{\alpha}{\Delta t} \quad \frac{\partial v}{\partial t} = v \lim_{\Delta t} \frac{\alpha}{\Delta t}$$

Ma  $\lim_{\Delta t} \frac{\alpha}{\Delta t} = \frac{v}{R}$ , dove  $R$  indica il raggio di curvatura della traiettoria dell'elettrone nel punto dato. Sia  $w'' = v^2 : R$  l'accelerazione normale; si ha  $\lim_{\Delta t} \frac{\alpha}{\Delta t} = w'' : v$ . Pertanto

$$\frac{\partial K}{\partial t} = \frac{K}{v} w''$$

e di conseguenza

$$F = -\frac{K}{v} w'' \quad (4.137)$$

Introducendo la notazione

$$m'' = \frac{K}{v} = \frac{1}{c} \frac{K}{\beta} \quad (4.138)$$

si ottiene, con la notazione vettoriale

$$\vec{F} = -m''\vec{w}'' \quad (4.139)$$

La forza  $\vec{F}$  è quindi ancora proporzionale all'accelerazione ed è direttamente opposta ad essa in direzione. La grandezza  $m''$  è chiamata *massa elettromagnetica trasversale*.

Consideriamo infine il caso generale di un qualsiasi moto curvilineo in cui l'accelerazione è  $\vec{w}$ . Questa accelerazione si scompone in una componente tangenziale  $\vec{w}'$  e una componente normale  $\vec{w}''$ , in modo che

$$\vec{w} = \vec{w}' + \vec{w}'' \quad (4.140)$$

La forza  $\vec{F}$ , che agisce sull'elettrone, possiede pure due componenti, una tangenziale  $\vec{F}'$  e l'altra normale  $\vec{F}''$ :

$$\vec{F} = \vec{F}' + \vec{F}'' \quad (4.141)$$

Si ha  $\vec{F}' = -m'\vec{v}'$  e  $\vec{F}'' = -m''\vec{v}''$ , dove  $m'$  e  $m''$  sono determinati dalle formule (62) e (63). È chiaro che le forze  $\vec{F}'$  e  $\vec{F}''$  non essendo nella stessa proporzione rispetto alle accelerazioni che hanno la loro stessa direzione, la forza  $F$  non ha la direzione  $-\vec{w}$ . Un elettrone mobile si distingue quindi essenzialmente da una particella materiale che ha una sola massa. L'elettrone ha due masse elettromagnetiche, una longitudinale  $m'$  e l'altra trasversale  $m''$ ; reagisce diversamente alle cause esterne, a seconda che queste cambino la velocità in modulo o in direzione.

Si potrebbe ammettere che l'elettrone abbia una certa massa ordinaria  $m_0$ , oltre le masse elettromagnetiche. Quando esiste un campo esterno, escluso quello prodotto dall'elettrone, e quando questo campo esterno esercita una forza  $\vec{F}_0$ , la forza totale che agisce sull'elettrone, è uguale a

$$\vec{f} = \vec{F}_0 - \vec{F} = \vec{F}_0 - m'\vec{w}' - m''\vec{w}'' + m_0\vec{w} = m_0(\vec{w}' + \vec{w}'')$$

di modo che

$$\vec{F}_0 = (m_0 + m')\vec{w}' + (m_0 + m'')\vec{w}'' \quad (4.142)$$

Se si suppone che  $m_0 = 0$ , cioè che l'elettrone possieda la sola massa elettromagnetica, si ha

$$\vec{f} = \vec{F}_0 - m'\vec{w}' - m''\vec{w}'' = 0 \quad (4.143)$$

Applichiamo le nostre formule al caso di un elettrone sferico di raggio  $a$ , con una carica superficiale  $e$ . Le formule (60,d), (62) e (63) danno

$$m' = \frac{e^2}{2\beta^3 c^2 a} \left\{ \frac{2\beta}{1 - \beta^2} - \log \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right\} \quad (4.144)$$

$$m'' = \frac{e^2}{4\beta^3 c^2 a} \left\{ -2\beta + (1 + \beta^2) \log \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right\} \quad (4.145)$$

Nel caso in cui la carica  $e$  è uniformemente distribuita nel volume della sfera, bisogna moltiplicare per  $6/5$  i secondi membri della (65) e della (66). Sviluppando le espressioni (65) e (66) secondo le potenze intere di  $\beta$ , si ha

$$m' = \frac{2e^2}{3ac^2} \left\{ 1 + \frac{6}{5}\beta^2 + \frac{9}{7}\beta^4 + \frac{12}{9}\beta^6 + \dots \right\} \quad (4.146)$$

$$m'' = \frac{2e^2}{3ac^2} \left\{ 1 + \frac{6}{3 \cdot 5}\beta^2 + \frac{9}{5 \cdot 7}\beta^4 + \frac{12}{7 \cdot 9}\beta^6 + \dots \right\} \quad (4.147)$$

Queste formule mostrano che la massa longitudinale  $m'$  è più grande di quella trasversale  $m''$ . Quando la velocità  $\vec{v}$  è piccola rispetto alla velocità  $c$  della luce, si ottiene

$$m' = m'' = m = \frac{2e^2}{3ac^2} \quad (4.148)$$

in accordo con la (29).

La teoria esposta in questo paragrafo è dovuta a Max Abraham. Essa si basa sull'ipotesi che l'elettrone sferico non cambi forma nel suo movimento, che sia invariabile. Ma H. A. Lorentz ha considerato il caso in cui l'elettrone sarebbe deformabile, allo scopo di spiegare alcuni fenomeni di cui parleremo più avanti (esperimento di Michelson); ammette che l'elettrone, sferico a riposo, cambia di forma nel movimento, le sue dimensioni diventano  $1 : \sqrt{1 - \beta^2}$  volte più piccole nella direzione della velocità  $\vec{v}$ . La sfera mobile diventa un ellissoide di rivoluzione appiattito, i cui assi sono uguali a

$$a\sqrt{1 - \beta^2} \quad a \quad a \quad (4.149)$$

Questo è chiamato ellissoide di Heaviside. Questa ipotesi semplifica i calcoli, perché l'ellissoide (67) nel sistema  $P$  corrisponde, nel sistema  $P'$  non più a un ellissoide, ma a una sfera di raggio  $a$ , come mostrano le formule (56) e (59). Si ottengono infine le seguenti espressioni molto semplici:

$$m' = \frac{m}{(1 - \beta^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (4.150)$$

$$m'' = \frac{m}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (4.151)$$

dove  $m$  è determinato dalla (66,c). Sviluppando secondo le potenze di  $\beta$ , viene

$$m' = \frac{2e}{3ac^2} \left( 1 + \frac{3}{2}\beta^2 + \frac{15}{8}\beta^4 + \frac{35}{16}\beta^6 + \dots \right) \quad (4.152)$$

$$m'' = \frac{2e}{3ac^2} \left( 1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{3}{8}\beta^4 + \frac{5}{16}\beta^6 + \dots \right) \quad (4.153)$$

Abbiamo anche in questo caso  $m' > m''$ . La dipendenza delle masse  $m'$  e  $m''$  rispetto da  $\beta$ , cioè dalla velocità  $v$  è, nella teoria di Lorentz, diversa da quella di Max Abraham. Gli esperimenti, di cui parleremo più avanti, non ci permettono ancora di decidere tra le due teorie; sembrano però più favorevoli alla teoria di Lorentz.

La variazione di forma dell'elettrone in movimento, ammessa nella teoria di Lorentz, comporta una variazione del volume di questo elettrone.

## 9. Dielettrici, conduttori e magneti

Abbiamo già accennato al § 1 che la costante dielettrica  $\varepsilon$ , la conducibilità specifica  $\sigma$  e la permeabilità magnetica  $\mu$  di una sostanza devono essere determinate dalle proprietà, dalla posizione e dal moto degli elettroni in essa contenuti.

Non riteniamo necessario soffermarci qui sulla questione della costante dielettrica, che è legata a quella della dispersione della luce. In uno dei capitoli successivi studieremo in dettaglio la teoria dei fenomeni relativi a questo argomento.

La corrente elettrica nei conduttori rappresenta un flusso di elettroni che si muovono liberamente tra gli atomi materiali della sostanza conduttrice. Questo libero movimento degli elettroni è analogo a quello delle molecole di un gas, per cui si può paragonare la corrente elettrica ad una corrente gassosa. Daremo solo una dimostrazione elementare dell'espressione per la conducibilità

elettrica  $\sigma$ . Sia  $\vec{E}$  il campo elettrico nel conduttore. Gli  $N$  elettroni contenuti nell'unità di volume sono soggetti alla forza meccanica

$$\vec{F}_e = Ne\vec{E} \quad (4.154)$$

Al moto degli elettroni si oppone una forza interna analoga all'attrito; si può supporla uguale a  $kN\vec{v}$ , dove  $\vec{v}$  è la velocità del moto generale di traslazione degli elettroni e  $k$  un coefficiente che dipende dalla natura della sostanza conduttrice. La forza di attrito bilancia la forza meccanica  $\vec{F}_e$ , quindi si ha  $Ne\vec{E} = kN\vec{v}$ , da cui

$$e\vec{E} = k\vec{v} \quad (4.155)$$

Indicheremo la densità di corrente con  $\vec{I} = Ne\vec{v}$ ; si ha pertanto

$$\vec{I} = \frac{Ne^2}{k}\vec{E} \quad (4.156)$$

Ponendo  $\vec{I} = \sigma\vec{E}$ , si ottiene

$$\sigma = \frac{Ne^2}{k} \quad (4.157)$$

Si è così trovata l'espressione della conducibilità elettrica. Quando si ammette l'esistenza di diverse specie di elettroni, si ha

$$\sigma = \sum \frac{N_i e_i^2}{k_i} \quad (4.158)$$

Se esiste un campo magnetico esterno e designiamo con  $\vec{v}'$  la velocità del moto del conduttore in questo campo, con  $\vec{v}''$  la velocità degli elettroni rispetto al conduttore, con  $\vec{v}$  la loro velocità rispetto al campo  $\vec{H}$ , si ha

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}'' \quad (4.159)$$

La formula (12) mostra che, in questo caso, alla forza  $\vec{F}_e$  si aggiunge la forza

$$\vec{F}_m = \frac{1}{c} [\vec{v} \hat{H}] = \frac{1}{c} [\vec{v}' \hat{H}] + \frac{1}{c} [\vec{v}'' \hat{H}] \quad (4.160)$$

Il primo termine del secondo membro determina l'intensità della corrente indotta prodotta dal moto del conduttore, il secondo termine l'azione meccanica del campo  $\vec{H}$  sulla corrente.

In uno dei capitoli successivi studieremo più approfondito la teoria elettronica dei conduttori.

La teoria elettronica del magnetismo presuppone l'esistenza, nelle molecole materiali, di elettroni di natura particolare, che sono animati da un moto circolare. Se il periodo di questo moto circolare è pari a  $T$ , un tale elettrone in movimento equivale ad una corrente d'Ampère di intensità  $i = e : T$ . Il campo magnetico non modifica la velocità del moto dell'elettrone, ma ne cambia il raggio della traiettoria e il periodo  $T$ ; si può anche ammettere una rotazione del piano in cui avviene il moto. La spiegazione dei fenomeni magnetici, in particolare del paramagnetismo e del ferromagnetismo, presenta però grandi difficoltà e non può essere ottenuta senza varie ipotesi complementari. Non considereremo qui le teorie molto complicate che sono state costruite.

## 10. La nozione di azione nella dinamica dell'elettrone<sup>2</sup>

H. A. Lorentz, K. Schwarzschild (1903) e poi H. Poincaré (1905) hanno proposto di introdurre nella dinamica dell'elettrone una nozione analoga a quella di azione nella dinamica classica.

<sup>2</sup>Questo paragrafo è stato aggiunto all'edizione francese da E. e F. Cosserat.



Daremo alla alle loro ricerche una forma che la avvicini a quella adottata da E. e F. Cosserat nelle note da loro aggiunte a questo lavoro.

Consideriamo un elemento volume dello spazio, che parte da una posizione iniziale  $dx_0 dy_0 dz_0$  e porta con sé una carica invariabile; tale carica può essere definita come segue. Desigriamo con  $\Delta$  il determinante funzionale di  $x, y, z$  rispetto a  $x_0, y_0, z_0$ :

$$\Delta = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x_0, y_0, z_0)}$$

Definiremo, per ogni punto  $(x, y, z)$  nell'istante  $t$ , una funzione che soddisfa alla condizione che  $\rho\Delta$  dipende solo da  $x_0, y_0, z_0$  e non da  $t$ ; la carica invariabile portata dall'elemento  $dx_0 dy_0 dz_0$  è allora

$$\rho\Delta dx_0 dy_0 dz_0$$

Sia ora  $\vec{C}(C_x, C_y, C_z)$  un vettore associato a ogni punto  $(x, y, z)$  all'istante  $t$ ; poniamo, assumendo uguale all'unità la velocità della luce

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial C_x}{\partial t} & E_y &= -\frac{\partial C_y}{\partial t} & E_z &= -\frac{\partial C_z}{\partial t} \\ H_x &= \frac{\partial C_z}{\partial y} - \frac{\partial C_y}{\partial z} & H_y &= \frac{\partial C_x}{\partial z} - \frac{\partial C_z}{\partial x} & H_z &= \frac{\partial C_y}{\partial x} - \frac{\partial C_x}{\partial y} \end{aligned}$$

siano d'altra parte

$$x = x_0 + U_x \quad y = y_0 + U_y \quad z = z_0 + U_z$$

Le funzioni che abbiamo appena introdotto possono essere viste sia come dipendenti dalle variabili di Lagrange  $x_0, y_0, z_0$ , sia come dipendenti dalle variabili di Eulero  $x, y, z, t$ . Denotando con  $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$  la velocità dell'elettrone, si avrà

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dU_x}{dt} = \frac{\partial U_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial U_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial U_x}{\partial z}$$

con formule analoghe per  $v_y$  e  $v_z$ . Chiamando  $\rho_1$  la massa cinetica assunta invariabile nel punto  $x_0, y_0, z_0$ , che si trasporta in  $x, y, z$ , prenderemo la seguente espressione per l'azione che vogliamo studiare:

$$2V = \int \left\{ (E_x^2 + E_y^2 + E_z^2) - (H_x^2 + H_y^2 + H_z^2) + 2\rho(C_x v_x + C_y v_y + C_z v_z) + \rho_1(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \right\} dt d\omega$$

essendo  $d\omega$  l'elemento di volume. Supporremo, per semplificare, come Lorentz e Poincaré, che il campo di integrazione sia infinito.

Si ha, pertanto

$$\delta V = \int \left\{ - \left( \vec{E} \frac{\partial \delta \vec{C}}{\partial t} \right) - \left( \vec{H} \text{rot} \delta \vec{C} \right) + \rho (\vec{v} \delta \vec{C}) + (\vec{C} \delta \rho \vec{v}) + \rho_1 (\vec{v} \delta \vec{v}) \right\} dt d\omega$$

da cui

$$\delta V = - \int \left\{ \left( \left( \text{rot} \vec{H} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \rho \vec{v} \right) \delta \vec{C} \right) - (\vec{C} \delta \rho \vec{v}) + \rho_1 \left( \frac{d\vec{v}}{dt} \delta \vec{U} \right) \right\} dt d\omega$$

Per chiarire il significato dell'espressione  $\delta$ , consideriamo le nostre funzioni come contenenti, oltre alle variabili  $x_0, y_0, z_0, t$ , o  $x, y, z, t$ , un quarto parametro  $\varepsilon$ ; allora essendo  $F$  una funzione qualsiasi, si avrà

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} \delta \varepsilon$$

La carica di un elemento  $dx_0 dy_0 dz_0$  deve rimanere costante quando  $t$  o  $\varepsilon$  variano, per cui si ha

$$\frac{d\rho\Delta}{dt} = \frac{d\rho\Delta}{d\varepsilon} = 0$$

se ne deduce

$$\frac{d^2 \rho \Delta \vec{U}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \rho \Delta \frac{d\vec{U}}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left( \rho \Delta \frac{d\vec{U}}{d\varepsilon} \right)$$

Supponiamo che la funzione qualunque  $F$  sia sommata all'elemento di volume  $dx_0 dy_0 dz_0$ ; si avrà

$$\frac{dF\Delta}{dt} = \Delta \frac{dF}{dt} + F \frac{d\Delta}{dt}$$

o,

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + v_x \frac{\partial F}{\partial x} + v_y \frac{\partial F}{\partial y} + v_z \frac{\partial F}{\partial z}$$

e

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

pertanto

$$\frac{1}{\Delta} \frac{dF\Delta}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F v_x}{\partial x} + \frac{\partial F v_y}{\partial y} + \frac{\partial F v_z}{\partial z}$$

e

$$\frac{1}{\Delta} \frac{dF\Delta}{d\varepsilon} = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial F \frac{dU_x}{d\varepsilon}}{\partial x} + \frac{\partial F \frac{dU_y}{d\varepsilon}}{\partial y} + \frac{\partial F \frac{dU_z}{d\varepsilon}}{\partial z}$$

quindi

$$\frac{1}{\Delta} \frac{d}{d\varepsilon} \left( \rho \Delta \frac{dU_x}{dt} \right) = \frac{\partial \left( \rho \frac{dU_x}{dt} \right)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial \left( \rho \frac{dU_x}{dt} \frac{dU_x}{d\varepsilon} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left( \rho \frac{dU_x}{dt} \frac{dU_y}{d\varepsilon} \right)}{\partial y} + \frac{\partial \left( \rho \frac{dU_x}{dt} \frac{dU_z}{d\varepsilon} \right)}{\partial z}$$

$$\frac{1}{\Delta} \frac{d}{dt} \left( \rho \Delta \frac{dU_x}{d\varepsilon} \right) = \frac{\partial \left( \rho \frac{dU_x}{d\varepsilon} \right)}{\partial t} + \frac{\partial \left( \rho \frac{dU_x}{dt} \frac{dU_x}{d\varepsilon} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left( \rho \frac{dU_y}{dt} \frac{dU_x}{d\varepsilon} \right)}{\partial y} + \frac{\partial \left( \rho \frac{dU_z}{dt} \frac{dU_x}{d\varepsilon} \right)}{\partial z}$$

I primi membri di queste ultime relazioni sono uguali e si ha, dalla definizione  $\delta F = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} \delta \varepsilon$ ,

$$\delta \rho v_x + \frac{\partial(\rho v_x \delta U_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y \delta U_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z \delta U_z)}{\partial z} = \frac{\partial(\rho v_x \delta U_x)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x \delta U_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y \delta U_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z \delta U_z)}{\partial z}$$

Si ha, di conseguenza, scrivendo per maggiore chiarezza in notazioni cartesiane

$$\begin{aligned} C_x \delta \rho v_x = & C_x \left[ \frac{\partial(\rho \delta U_x)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_y \delta U_x)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z \delta U_x)}{\partial z} - \frac{\partial(\rho v_x \delta U_y)}{\partial y} - \frac{\partial(\rho v_x \delta U_z)}{\partial z} \right] \\ & + C_y \left[ \frac{\partial(\rho \delta U_y)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_z \delta U_y)}{\partial z} + \frac{\partial(\rho v_x \delta U_y)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho v_y \delta U_z)}{\partial z} - \frac{\partial(\rho v_y \delta U_x)}{\partial x} \right] \\ & + C_z \left[ \frac{\partial(\rho \delta U_z)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x \delta U_z)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y \delta U_z)}{\partial y} - \frac{\partial(\rho v_z \delta U_x)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho v_z \delta U_y)}{\partial y} \right] \end{aligned}$$

e con una integrazione per parti

$$\begin{aligned} & \int (C_x \delta \rho v_x + C_y \delta \rho v_y + C_z \delta \rho v_z) dt d\omega = \\ & - \int \left\{ \left( \frac{\partial C_x}{\partial t} + v_y \frac{\partial C_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial C_x}{\partial z} \right) \rho \delta U_x - v_x \frac{\partial C_x}{\partial y} \rho \delta U_y - v_x \frac{\partial C_x}{\partial z} \rho \delta U_z \right. \\ & + \left( \frac{\partial C_y}{\partial t} + v_z \frac{\partial C_y}{\partial z} + v_x \frac{\partial C_y}{\partial x} \right) \rho \delta U_y - v_y \frac{\partial C_y}{\partial z} \rho \delta U_z - v_y \frac{\partial C_y}{\partial x} \rho \delta U_x + \\ & \left. + \left( \frac{\partial C_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial C_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial C_z}{\partial y} \right) \rho \delta U_z - v_z \frac{\partial C_z}{\partial x} \rho \delta U_x - v_z \frac{\partial C_z}{\partial y} \rho \delta U_y \right\} dt d\omega \end{aligned}$$

Si ha infine, in notazioni vettoriali

$$\delta V = - \int \left\{ \left( \vec{F}' \delta \vec{C} \right) + \left( \vec{F}' \delta \vec{U} \right) \right\} dt d\omega$$

dove

$$\vec{\mathcal{F}} = \text{rot} \vec{H} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \rho \vec{v} \quad \vec{F}' = \rho_1 \frac{d\vec{v}}{dt} - \rho \left( \vec{E} + \left[ \vec{v} \vec{H} \right] \right)$$

Detto questo, quando si dice che il moto degli elettroni determina lo stato del sistema, si sottintende che si ha uno stato stabilito, per cui il moto è permanente o stazionario. Si può immaginare che si sia innanzitutto molto vicini all'istante in cui gli elettroni iniziano a muoversi e inoltre che ci sia una sorta di inerzia che si oppone al movimento.

Ciò indica che si può dapprima fare una teoria in cui  $\vec{C}$  è indipendente dal moto degli elettroni, per poi passare al caso particolare in cui si stabilisce il regime. L'espressione  $\vec{\mathcal{F}}$  corrisponde all'ipotesi che il regime non è stabilito e il suo annullarsi significherebbe che il regime è diventato permanente. Se lo si annulla, si ha la definizione di corrente

$$\vec{I} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \rho \vec{v} = \text{rot} \hat{H}$$

D'altra parte, l'equazione che definisce  $\vec{F}'$  si scrive

$$\vec{F}' + \rho \left( \vec{E} + \text{rot} \hat{H} \right) = \rho_1 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

e si può interpretare dicendo che l'elemento di volume  $dx dy dz$  subisce una forza ponderomotrice che, riferita all'unità di quantità di elettricità, è espressa da

$$\vec{F} = \vec{E} + \text{rot} \hat{H}$$

Lorentz, dopo aver richiamato la formula

$$\int \rho \vec{F} d\omega = \int \rho \vec{E} d\omega + \int \rho \text{rot} \hat{H} d\omega \quad (4.161)$$

dove gli integrali sono estesi al volume dell'elettrone, poi le formule

$$\frac{d\vec{E}}{dt} + \rho \vec{v} = \text{rot} \hat{H} \quad (4.162)$$

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial t} = -\text{rot} \vec{E} \quad (4.163)$$

si esprime così: "il fisico, che volesse ammettere le equazioni (I), (II) e (III) senza dedurle dai principi della meccanica, sarebbe costretto a giustificare la sua scelta dimostrando che tali equazioni sono compatibili con la legge di conservazione dell'energia. Ecco come lo si verifica.

Siano  $m$  la massa di una particella carica,  $\vec{F}'$  la forza esterna alla quale è sottoposta; allora

$$\rho \vec{F} + \vec{F}' = m \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (4.164)$$

È necessario che il lavoro delle forze esterne nell'unità di tempo, cioè l'espressione

$$A = \sum (\vec{F}' \cdot \vec{v})$$

sia uguale a  $\frac{dJ}{dt}$ , essendo  $J$  una funzione determinata dallo stato del sistema. Impiegando le formule (I) e (IV), si trova dapprima

$$J = \frac{d}{dt} \sum \frac{1}{2} m \vec{v}^2 - \sum \left( \vec{v} \int \rho \vec{E} d\omega \right) = \frac{d}{dt} \sum \frac{m}{2} \vec{v}^2 - \sum \int \rho (\vec{v} \cdot \vec{E}) d\omega$$

Nell'ultimo integrale, che deve essere esteso allo spazio infinito, si può sostituire il valore di  $\rho \vec{v}$  che si ricava dalla (II); poi, si può integrare per parti e impiegare l'equazione (III). Al termine

$$A = \frac{dJ}{dt}$$

se si pone

$$J = \sum \frac{m}{2} \vec{v}^2 - \frac{1}{2} \int \vec{E}^2 d\omega + \frac{1}{2} \int \hat{H}^2 d\omega$$

Questo è il valore dell'energia del sistema, tenendo conto del sistema di unità qui adottato. Il primo termine non è altro che l'energia cinetica che le particelle possiedono in virtù delle loro masse. Gli altri due termini hanno la forma che già conosciamo. Tuttavia, dal punto di vista in cui ci siamo posti, non è necessario considerare come potenziale l'energia  $\frac{1}{2} \int \vec{E}^2 d\omega$  e come cinetica l'energia  $\frac{1}{2} \int \hat{H}^2 d\omega$ .

Si osserverà, da quanto esposto, il cambiamento di segno della forza, quando si interpreta il moto di un punto. Si osserverà inoltre che ponendo

$$\vec{C} = \vec{C}_1 + grad\psi$$

poi

$$\psi = \frac{\partial \psi_1}{\partial t}$$

si hanno le notazioni di H. Poincaré, l'ausiliare  $\psi_1$  che può essere utilizzato per sottoporre  $\vec{C}_1$  a un'opportuna relazione, così da effettuare, ad esempio, la scomposizione classica. Va anche notato che, nell'esposizione attuale, non si è supposto

$$\rho = div \vec{E}$$

cioè

$$\rho = \frac{\partial}{\partial t} div C_1$$

è una condizione di legame in qualche modo, che viene introdotta a posteriori e che quindi è arbitraria; si potrebbe ricercare se essa non sia introdotta come  $\vec{I}$ , che appare nell'opera di H. Poincaré in modo arbitrario e a priori. H. Poincaré trascura anche la condizione  $div C_1 = 0$ , che non appare nella sua memoria del Cerchio di Palermc. Lorentz ha generalizzato il calcolo che abbiamo sopra citato nel suo *Versuch* e § 6, p. 159 del suo articolo nell'*Enciclopedia*; invece di considerare lo spazio infinito, considera un dominio limitato da una superficie.

# 5 Il principio di Relatività

## 1. Introduzione. Il principio di relatività nella meccanica newtoniana

Quello che oggi chiamiamo il *principio di relatività* costituisce la base di una nuova dottrina, applicata dapprima allo spazio e al tempo, poi a tutte le altre quantità fisiche. Per la portata della concezione iniziale di questa teoria, formulata e sviluppata per la prima volta da Einstein nel 1905 con estrema audacia, ribaltando radicalmente le prime idee su cui si era basata fino ad oggi la Fisica, non c'è forse nulla di analogo nella storia delle varie scienze dedicate ai fenomeni che ci circondano e che osserviamo. Essa conduce ad una nuova immagine del mondo, che differisce radicalmente da quella a cui eravamo arrivati in precedenza e in cui proprio quei tratti che consideravamo come assiomi, come verità evidenti che non hanno bisogno di essere stabilite e nemmeno definite, ma ammesse quasi inconsciamente da tutti come dotate di assoluta certezza. La rivoluzione prodotta dalla sostituzione della concezione eliocentrica dell'universo col sistema geocentrico è minuscola rispetto alle prospettive aperte all'umanità, se aderisce definitivamente al principio di relatività, confida in esso e ne fa la pietra angolare di una nuova struttura della filosofia naturale. Occorsero meno di otto anni perché il nuovo principio desse luogo ad un vasto edificio scientifico, di notevole armonia dal punto di vista formale; ad esso è stata dedicata una letteratura enorme, che cresce ogni giorno; il campo che abbraccia è in continua espansione e non c'è capitolo della Fisica che non debba risentirne l'influenza, ritrovandosi distrutte tutte le nozioni fissate dalla tradizione e una revisione totale di tutte le acquisizioni che sono state il frutto del lavoro secolare delle fiamme della scienza che sono assolutamente necessarie.

In un Trattato di Fisica Generale dobbiamo limitarci ad esporre solo i punti più essenziali della nuova dottrina.

I termini *relativo* e *assoluto* sono usati sia nel linguaggio quotidiano che in quello scientifico. Ma in quest'ultimo hanno talvolta un significato puramente convenzionale, come dimostra, ad esempio, la designazione di unità assoluta. Stiamo parlando della distanza assoluta tra due punti e della loro distanza relativa da un terzo. Anche qui la differenza è solo una semplice convenzione, perché la distanza assoluta tra due punti è numericamente uguale al rapporto tra questa distanza e l'unità di lunghezza.

Ciò che più ci interessa attualmente è la questione del *moto assoluto* e del *moto relativo*. Chiamiamo sistema  $S$  un certo numero di corpi fisici e di figure geometriche ad essi collegate, che possiamo supporre animati da un moto d'insieme. Consideriamo come data la nozione di retta e di assi coordinati nel sistema  $S$ . Designiamo un altro sistema con  $S'$  e ammettiamo che le posizioni geometriche dei sistemi  $S$  e  $S'$ , o almeno degli assi coordinati che essi contengono, coincidono geometricamente in un dato momento, sebbene i corpi fisici riferiti a questi sistemi possano ovviamente occupare posti diversi nello spazio. Chiameremo moto relativo dei due sistemi  $S$  e  $S'$  il moto che un osservatore vede invariabilmente legato ad uno dei sistemi. Nel seguito ci occuperemo quasi esclusivamente del moto relativo rettilineo ed uniforme. È chiaro che se  $v$  è la velocità di tale moto del sistema  $S'$  rispetto al sistema  $S$ , cioè di un moto che si osserva dai punti di quest'ultimo sistema, il sistema  $S$  ha un moto relativo di velocità  $-v$  rispetto a  $S'$ .

Affrontiamo ora la questione fondamentale dell'introduzione nella scienza della nozione di moto assoluto. Questa nozione ha in generale un senso o esiste addirittura un tale moto assoluto? La questione è ovviamente identica a quella della quiete assoluta. Se tale quiete esiste e se

consideriamo il sistema  $S_0$ , con gli assi coordinati ad esso fissati, in uno stato di quiete assoluta, il moto di qualsiasi sistema  $S'$  rispetto a  $S_0$  apparirà come quello che possiamo a buon diritto chiamare il moto assoluto del sistema  $S'$ . Ma come costruire e dove prendere il sistema  $S_0$ ? È chiaro che non possiamo immaginarlo legato alla Terra, né al Sole, né al centro d'inerzia di alcun sistema stellare. Se fossimo convinti che esista un numero infinito di corpi nell'universo e che tutti questi corpi non abbiano moto complessivo nello spazio, il centro d'inerzia del mondo rappresenterebbe il punto fisso che potremmo prendere come origine di un sistema di assi coordinati in quiete assoluta e come base per la costruzione del sistema  $S_0$ . Questa strada ci è naturalmente preclusa, ma ce n'è un'altra. *La questione della quiete assoluta è strettamente legata a quella dell'esistenza dell'etere.* Se l'etere esiste come sostanza che riempie tutto lo spazio e se abbiamo il diritto di considerarlo immobile, almeno al di fuori della materia, anche la quiete relativa all'etere sarà quiete assoluta e ogni moto riferito agli assi coordinati immobili nell'etere rappresenterà anche moto assoluto. Ma lasceremo da parte, per il momento, la questione dell'etere e ne considereremo prima un'altra.

Alcune proprietà determinate del movimento possono avere carattere assoluto. Supponiamo infatti che un osservatore A si trovi in un sistema chiuso  $S$ , che possa fare osservazioni di ogni genere all'interno di questo sistema, ma che tutto ciò che si trova al di fuori di  $S$  gli sia nascosto. Cosa può imparare, attraverso le sue osservazioni, sul movimento del sistema  $S$ ? L'osservatore A può osservare qualsiasi accelerazione nel movimento del sistema  $S$ , sia un'accelerazione normale che un'accelerazione tangenziale, e di conseguenza, in particolare, qualsiasi rotazione del sistema. È facile immaginare un gran numero di strumenti che mostreranno qualsiasi accelerazione del sistema; ci basterà indicare che se, in un sistema  $S'$ , su un liquido agisce un campo di forze uniforme, la superficie di questo liquido diventa un paraboloide di rivoluzione quando il sistema  $S$  è animato da un moto rotatorio. Esiste una rotazione assoluta, così come esiste una curvatura assoluta in qualsiasi traiettoria e un'accelerazione assoluta in un moto rettilineo. Ecco perché l'esistenza del moto assolutamente rettilineo ed uniforme e la possibilità di determinarne la velocità  $v$  sono le uniche che ci interessano; nel seguito prenderemo in considerazione solo tale movimento.

Quando l'osservatore A, che si trova in  $S$ , nota che un corpo M si muove di moto rettilineo ed uniforme di velocità  $v$ , non può ovviamente dedurre alcuna indicazione sul proprio moto, perché il moto relativo  $v$  può essere il risultato di un'infinità di moti assoluti del sistema  $S$  e del corpo M, diversi in modulo e direzione. Siamo qui in presenza di un caso particolare della proposizione molto più generale nota come principio di relatività della meccanica, intendendo con quest'ultimo la meccanica fondata da Newton. Questo principio è il seguente:

*Tutti i processi meccanici, in un sistema in moto rettilineo e uniforme, avvengono esattamente come nel sistema in quiete.*

Consideriamo come processi meccanici tutti i fenomeni fisici nei corpi legati al sistema  $S$ , escludendo però provvisoriamente i fenomeni di energia radiante. Nello studio dei fenomeni meccanici, l'osservatore A non trova mai in essi alcuna indicazione dell'esistenza e ancor meno dell'entità della velocità  $v$ . Questo principio deriva dalla legge fondamentale della dinamica di Newton, che determina, dalla accelerazione prodotta in un corpo, la forza che agisce su di esso. Questa legge è tradotta dalle formule

$$X = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad Y = m \frac{d^2y}{dt^2} \quad Z = m \frac{d^2z}{dt^2} \quad (5.1)$$

dove  $m$  indica la massa,  $x, y, z$  le coordinate di un punto materiale nel sistema  $S$ ,  $t$  il tempo;  $X, Y, Z$  sono le componenti della forza che agisce sul punto. Le espressioni nei secondi membri delle formule (1) rimangono invariate nella forma o, come si dice ancora, *invarianti*, nei due casi seguenti, dove si sostituisce il sistema  $S$  con gli assi coordinati  $x, y, z$  con un altro sistema  $S'$  con gli assi coordinati  $x', y', z'$ . Nel primo caso  $S'$  è in quiete rispetto a  $S$ ; si ha semplicemente una trasformazione ordinaria delle coordinate, i nuovi assi risultano dai vecchi per spostamento

dell'origine senza rotazione del triedro di riferimento, oppure per rotazione degli assi senza cambiamento della loro origine, o infine, più in generale, per cambiamento dell'origine e della direzione degli assi. In tutte queste trasformazioni, le nuove coordinate e quelle vecchie sono legate tra loro da equazioni lineari, per cui sostituendo le vecchie coordinate con quelle nuove, la forza si esprime come segue:

$$X' = m \frac{d^2 x'}{dt^2} \quad Y' = m \frac{d^2 y'}{dt^2} \quad Z' = m \frac{d^2 z'}{dt^2} \quad (5.2)$$

cioè con formule identiche alle (1). Il secondo caso è molto più importante: il sistema S' è animato da un moto rettilineo e uniforme di velocità  $v$  rispetto al sistema S. Assumiamo l'asse  $x$  preso nella direzione di  $v$  e ammettiamo che all'istante  $t = 0$  gli assi coordinati dei due sistemi coincidono; allora si ha

$$x' = x - vt \quad y' = y \quad z' = z \quad (5.3)$$

o

$$x = x' + vt \quad y = y' \quad z = z' \quad (5.4)$$

Se si portano i valori (3,a) di  $x, y, z$  nei secondi membri delle formule (1), si ottengono i secondi membri delle formule (2); le espressioni (1) della forza rimangono invarianti nelle trasformazioni (3) e (3,a). Assumendo che tutti i fenomeni fisici osservati nei corpi appartenenti rispettivamente ai sistemi dati S e S' siano ridotti ad azioni meccaniche, concludiamo che gli osservatori non noteranno alcuna differenza tra le trasformazioni fenomeni che si verificano in S e S'.

Chiameremo *fondamentale* un sistema al quale sono applicabili le leggi della meccanica newtoniana, ad esempio un corpo che, ricevuto un impulso e poi lasciato a se stesso, assume, in virtù dell'inerzia, un moto rettilineo e uniforme. Un tale sistema non ha accelerazione assoluta, in particolare nessuna rotazione. Possiamo quindi formulare il principio di relatività della meccanica newtoniana nel modo seguente: *quando un sistema S è fondamentale, anche qualsiasi altro sistema S', che sia animato da un moto rettilineo e uniforme rispetto a S, è un sistema fondamentale.*

Aggiungeremo un'osservazione importante sul passaggio da S a S' utilizzando le equazioni (3). Abbiamo, nei secondi membri delle formule (1), quattro grandezze variabili come,  $x, y, z$  e  $t$ . Passando a S', abbiamo sostituito le coordinate  $x, y, z$  con le coordinate  $x', y', z'$ , ma abbiamo lasciato invariata la variabile  $t$ , perché ammettiamo che il tempo è lo stesso in entrambi i sistemi, cioè dire che ha un carattere assoluto. Introduciamo così tacitamente la nozione di simultaneità di due fenomeni, dei quali uno ha luogo nel sistema S (dove il punto M ha coordinata  $x$ ), l'altro nel sistema S' (dove lo stesso punto M ha coordinata  $x'$ ). Se si indica con  $t'$  la variabile tempo nel sistema S' e se si suppone che al momento della coincidenza dei due sistemi si abbia  $t = 0$ ,  $t' = 0$ , si ammette inoltre che in tutti gli istanti successivi  $t' = t$  valga. Per chiarezza, scriveremo ora le equazioni (3) come segue:

$$x' = x - vt \quad y' = y \quad z' = z \quad t' = t \quad (5.5)$$

Vedremo in seguito quale considerevole importanza possiede l'ipotesi  $t' = t$ , imponendosi da sé in apparenza. Invece della (3,a), abbiamo

$$x = x' + vt' \quad y = y' \quad z = z' \quad t = t' \quad (5.6)$$

e ciò porta a sostituire  $t$  con  $t'$  nei secondi membri delle formule.

Indicheremo ancora un'interpretazione molto curiosa delle equazioni (3) o (4), che dovremo generalizzare in seguito. Supponiamo che il sistema S non abbia tre, ma solo due dimensioni, e che giaccia su un piano P contenente gli assi coordinati  $x$  e  $y$ . Il punto M si muove in questo sistema. Conduciamo per l'origine delle coordinate un terzo asse normale al piano P e chiamiamolo asse del tempo  $t$ ; cioè, in ogni punto della traiettoria del punto M nel piano P,

alziamo una perpendicolare a P e portiamo sulla perpendicolare una lunghezza numericamente uguale al tempo. Otteniamo così una curva  $\Sigma$  nello spazio tridimensionale, che è a tutti gli effetti caratteristica del movimento del punto M nel piano P. La proiezione di questa linea sul piano di  $x, y$  dà la traiettoria reale del punto in movimento M; la distanza di un punto N da  $\Sigma$  al piano P definisce l'istante in cui M è la proiezione di N su P. Proiettiamo ulteriormente la curva tridimensionale  $\Sigma$  sui piani di  $x, t$  e  $y, t$ . Le direzioni delle tangenti a queste proiezioni determinano le componenti  $dx/dt$  e  $dy/dt$  della velocità del moto del punto M. Supponiamo questo moto definito dalle prime due equazioni (1). Consideriamo un sistema S' con gli assi delle coordinate di  $x', y', t'$ , che, per  $t = t' = 0$ , coincidono con gli assi  $x, y, t$  e supponiamo che S' si muova con velocità  $v$  nella direzione dell'asse  $x$ ; si ha allora

$$x' = x - vt \quad y' = y \quad t' = t \quad (5.7)$$

$$x = x' + vt \quad y = y' \quad t = t' \quad (5.8)$$

Portando i valori (5,b) di  $x, y, t$  nelle prime due equazioni (1), si ottengono le prime due equazioni (2). Si vede quindi che la legge del moto in S' è la stessa che in S e che questa legge può essere caratterizzata da una curva  $\Sigma'$  nel sistema  $S'(x', y', t')$ , identica alla curva  $\Sigma$  nel sistema  $S(x, y, t)$ , ma muoventesi contemporaneamente a S'. La trasformazione (5,a) permette di passare da S a S', cioè dalla quiete relativa al moto relativo, la curva  $\Sigma$ , senza cambiare forma, passando dalla quiete al movimento. Ma si possono interpretare in altro modo le equazioni (5,a); le si può considerare come le formule di trasformazione degli assi coordinati rettangolari  $x, y, t$ , che sono fissi, negli assi di coordinate oblique  $x', y', t'$ , coincidendo gli assi  $x', y'$  con gli assi  $x, y$  e l'asse  $t'$  ruotato nel piano delle  $t, x$  dell'angolo  $\alpha = \arctan v$ , di modo che

$$\tan(t, t') = \tan \alpha = v \quad (5.9)$$

L'asse  $t'$  ha ruotato dello stesso angolo nel piano  $t, y$ . Si vede subito che le nuove coordinate sono allora legate a quelle vecchie mediante le equazioni (5,a). Le curve  $\Sigma$  e  $\Sigma'$  hanno equazioni identiche in entrambi i sistemi e sono entrambe fisse. Il passaggio dalla quiete relativa al moto relativo rettilineo e uniforme può quindi essere rappresentato formalmente da una rotazione dell'asse del tempo, restando invariate non solo le equazioni fondamentali del moto, ma anche le equazioni della curva caratteristica  $\Sigma$ .

Franck (1909) ha dimostrato la seguente proposizione. Sia  $E$  l'energia di un sistema di punti materiali, composta dall'energia cinetica di questi punti e dalla loro energia potenziale. Secondo il principio di conservazione dell'energia si ha  $\frac{dE}{dt} = 0$ . Se si esprime che questa equazione rimane invariata nella trasformazione (3,a), si arriva all'equazione

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = 0 \quad (5.10)$$

dove  $\xi$  è l'ascissa del centro di inerzia del sistema; in altre parole si ottiene il noto teorema secondo cui il centro d'inerzia di un sistema di punti materiali, non soggetto a forze esterne, può avere solo un moto rettilineo ed uniforme.

Ci si può anche chiedere<sup>1</sup> se non esiste altra trasformazione oltre la (4) o (5) che conserva le equazioni del moto di Newton. Per semplicità consideriamo l'equazione del moto rettilineo

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = X \quad (5.11)$$

e proponiamoci di trovare una funzione  $t'$  di  $t$  e una funzione  $x = \varphi(x', t)$  tale che il primo membro dell'equazione (alfa) sia riprodotto a meno di un fattore.

<sup>1</sup>Questa parte finale del §1 è stata aggiunta all'edizione francese da E. e F. Cosserat.



Si ha

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial x'} \frac{dx'}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x'^2} \left( \frac{dx'}{dt} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x' \partial t} \frac{dx'}{dt} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial x'} \frac{d^2 x'}{dt^2}$$

D'altra parte

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{\partial x'}{\partial t'} \frac{dt'}{dt}$$

$$\frac{d^2 x'}{dt^2} = \frac{d^2 x'}{dt'^2} \left( \frac{dt'}{dt} \right)^2 + \frac{dx'}{dt} \frac{d^2 t'}{dt^2}$$

Si trova quindi

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{\partial \varphi}{\partial x'} \left( \frac{dt'}{dt} \right)^2 \frac{d^2 x'}{dt'^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x'^2} \left( \frac{dt'}{dt} \right)^2 \left( \frac{dx'}{dt'} \right)^2 + \left[ 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x' \partial t} \frac{dt'}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial x'} \frac{d^2 t'}{dt^2} \right] \frac{dx'}{dt'} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

Se si vuole che

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \lambda \frac{d^2 x'}{dt'^2}$$

si deve avere

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x'^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$

$$2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x' \partial t} \frac{dt'}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial x'} \frac{d^2 t'}{dt^2} = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x'} \left( \frac{dt'}{dt} \right)^2 = \lambda$$

Se ne conclude che la funzione  $\varphi$  è della forma

$$\varphi = a_0 + a_1 x' + a_2 t + a_3 x' t$$

essendo  $a_0, a_1, a_2, a_3$  delle costanti; inoltre

$$2a_3 \frac{dt'}{dt} + (a_1 + a_2 t) \frac{d^2 t'}{dt^2} = 0$$

Se  $a_3 = 0$ , si ha

$$\frac{d^2 t'}{dt^2} = 0$$

e si ritrova una trasformazione come la (4) o la (5). Ma se  $a_3 \neq 0$ , si ha

$$\frac{dt'}{dt} = \frac{k}{(a_1 + a_3 t)^2}$$

$$\lambda = \frac{k^2}{(a_1 + a_3 t)^3}$$

La massa  $m$ , che è costante nel sistema di variabili  $x, t$ , diventa quindi, se si vuole, una funzione del tempo nel sistema di variabili  $x', t'$ .

## 2. Mezzi di propagazione; aria ed etere

Nel paragrafo precedente abbiamo considerato i fenomeni fisici che avvengono nei sistemi  $S$  e  $S'$  e che si riducono ad azioni meccaniche reciproche tra i corpi appartenenti a questi sistemi. Supponiamo che lo spazio in cui si trovano questi sistemi sia riempito da un mezzo in cui qualsiasi fenomeno può propagarsi. Consideriamo innanzitutto il mezzo in cui si propaga il suono, l'aria dove gli osservatori in  $S$  e  $S'$  possono misurare la velocità  $w$  di propagazione di una perturbazione sonora. Sono possibili due casi.

Innanzitutto l'aria può essere collegata ai sistemi e muoversi con essi. È chiaro che allora gli osservatori in  $S$  e  $S'$  ottengono dalla formula la stessa velocità  $w$  del suono

$$w = \frac{l}{t} \quad (5.12)$$

dove  $l$  indica la distanza tra due punti  $A$  e  $B$  del sistema considerato, e  $t$  il tempo dopo il quale il suono ha percorso lo spazio da  $A$  a  $B$  o da  $B$  ad  $A$ . La misura della velocità  $w$  del suono non dà indicazioni sulla velocità  $v$  del moto comune al sistema e all'aria.

Si ottiene un risultato completamente diverso quando l'aria è immobile e il sistema  $S'$  si muove rispetto ad essa con velocità  $v$ . Tralasciamo il fatto che il moto relativo può essere rilevato dalla sensazione dovuta al vento o dal movimento di corpi leggeri e che la velocità  $v$  può essere misurata mediante un anemometro. Misuriamo la velocità del suono tra due punti  $A$  e  $B$  del sistema  $S'$ , ammettendo che la velocità  $v$  del sistema abbia la direzione e il verso del segmento di retta che congiunge  $A$  con  $B$ . Sembrerà all'osservatore in  $S'$  che il suono si propaghi da  $A$  a  $B$  con velocità  $w - v$  e da  $B$  ad  $A$  con velocità  $w + v$ . Sia  $AB = l$ , e supponiamo che l'intervallo di tempo misurato nel primo caso sia  $t_1$  e nel secondo  $t_2$ ; questi intervalli di tempo non sono uguali, perché si ha

$$t_1 = \frac{l}{w-v} \quad t_2 = \frac{l}{w+v} \quad (5.13)$$

da cui

$$t_1 - t_2 = \frac{2v}{w^2 - v^2} l \quad (5.14)$$

Mediante le formule

$$v = \frac{l(t_1 - t_2)}{2t_1 t_2} \quad w = \frac{l(t_1 + t_2)}{2t_1 t_2} \quad (5.15)$$

che si deduce dalla (6), l'osservatore troverà la velocità relativa  $v$  e la velocità reale  $w$  del suono. Ma otterrà lo stesso risultato anche quando il sistema  $S'$  è fermo e l'aria si muove con velocità  $v$  nel verso da  $B$  ad  $A$ . Le misure quindi gli danno solo la velocità relativa dell'aria e del sistema  $S'$ , ma non la velocità assoluta dell'aria o del sistema.

Affrontiamo ora il caso ben più importante nel quale il mezzo di propagazione è l'etere, che propaga le onde luminose o onde elettromagnetiche con la velocità  $c = 3 \cdot 10^5$  km/s. Per semplificare parleremo solo di onde luminose.

Per determinare cosa succede con l'etere, quando i corpi fisici vi sono in movimento, abbiamo fatto tre ipotesi, alle quali ne aggiungeremo una quarta, che elimina radicalmente proprio il problema che stiamo considerando.

I. IPOTESI DI HERTZ. - L'etere è completamente trasportato dai corpi in movimento, tanto che la velocità dell'etere contenuto in questo corpo è uguale alla velocità di quest'ultimo.

II. IPOTESI DI H. A. LORENTZ. - L'etere è assolutamente immobile; l'etere che è dentro i corpi in movimento non partecipa al loro movimento.

III. IPOTESI DI FRESNEL E FIZEAU. - L'etere è parzialmente trascinato dalla materia in movimento; formuleremo questa ipotesi con maggiore precisione un po' più avanti.

IV. IPOTESI DI EINSTEIN E PLANCK. - Non esiste l'etere. Questa ipotesi non risponde alla domanda posta; lo sopprime radicalmente. Vedremo che questa ipotesi è strettamente legata al

nuovo principio di relatività a cui è dedicato questo capitolo e appare come una conseguenza necessaria o addirittura, se si vuole, come una parte essenziale di tale principio.

Consideriamo innanzitutto l'ipotesi di Hertz; indicheremo i fatti e le considerazioni che ci costringono a respingerlo assolutamente.

1. Abbiamo studiato in precedenza il fenomeno dell'aberrazione della luce e abbiamo citato l'esperimento di Airy (1871), il quale ha trovato che l'angolo di aberrazione rimane lo stesso, quando viene determinato mediante un tubo pieno d'aria o un d'acqua. È molto difficile spiegare non solo questa esperienza, ma anche il fenomeno stesso dell'aberrazione, se accettiamo l'ipotesi di Hertz.

2. Il principio di Doppler può, come abbiamo visto, essere applicato ai fenomeni luminosi. Questo fatto sarebbe difficile da spiegare anche nell'ipotesi che l'etere sia trasportato dalla sorgente luminosa oltre che dalla Terra.

3. Fresnel (1818) ha introdotto la formula

$$u = \frac{n^2 - 1}{n^1} v \quad (5.16)$$

dove  $v$  indica la velocità di movimento di un mezzo materiale,  $n$  l'indice di rifrazione di questo mezzo,  $u$  la velocità con cui viene portato contemporaneamente l'etere contenuto nel mezzo, nonché l'energia luminosa che in esso si propaga. Sia  $c$  la velocità della luce nel vuoto,  $c : n$  la velocità della luce nel mezzo a riposo e  $c'$  la velocità della luce nel mezzo in movimento; si ha

$$c' = \frac{c}{n} \pm \frac{n^2 - 1}{n^1} v \quad (5.17)$$

quando la direzione del movimento del mezzo coincide (segno +) con la direzione di propagazione della luce oppure è opposta ad essa (segno -). Abbiamo stabilito la formula (7) basata sul fatto che l'entità dell'aberrazione è indipendente dalla natura del mezzo attraversato dai raggi luminosi (esperimento di Airy). Abbiamo anche descritto il classico esperimento di Fizeau (1871), il quale ha mostrato che nell'acqua in movimento la velocità della luce differisce effettivamente dalla velocità nell'acqua a riposo ed è determinata dalla formula (7,a). Quando l'esperimento è stato ripetuto con aria invece che con acqua, non è stato possibile notare l'influenza del movimento dell'aria sulla velocità della luce ivi propagata, il che è anche coerente con l'equazione (7,a), perché  $n$  è molto poco diverso dall'unità per l'aria. È chiaro che l'esperimento di Fizeau contraddice l'ipotesi di Hertz; questo esperimento fu ripreso da Michelson e Morley (1886), che confermarono l'esattezza della formula (7,a).

4. Gli esperimenti di Röntgen, Wilson e A. Eichewald riguardano fenomeni elettromagnetici nei corpi in movimento; di queste esperienze parleremo in uno dei capitoli successivi. Ci limiteremo qui a segnalare che i risultati di questi esperimenti contraddicono la teoria di Hertz, tutta costruita sull'ipotesi di un movimento comune all'etere e ai corpi mobili.

5. Lodge (1893) ha mostrato, mediante esperimenti diretti, che l'etere che si trova nelle immediate vicinanze di corpi in movimento, ad esempio tra due dischi orizzontali di acciaio che ruotano rapidamente attorno allo stesso asse, non è mosso da questi corpi.

6. È difficile immaginare che i gas in movimento, le cui molecole occupano solo una piccola parte del volume totale, possano trascinare completamente tutto l'etere che contengono, in particolare quando questi gas sono portati al limite estremo della possibile rarefazione e si immagina questo grado di rarefazione sempre crescente.

Da quanto sopra consegue che bisogna abbandonare l'ipotesi di Hertz, che presuppone la perfetta mobilità dell'etere. È inoltre inutile soffermarsi sulla teoria di Fresnel e Fizeau, secondo la quale l'etere è parzialmente sospinto dalla materia in movimento. Lorentz (1895) ha infatti dimostrato che la sua ipotesi di un etere completamente immobile porta alla formula (7,a). Se la formula (7,a) stabilisce un'esatta dipendenza quantitativa tra la velocità della luce e quella

del mezzo, non è quindi affatto necessario vedere in questa esattezza la prova del trascinamento dell'etere da parte della materia in movimento.

Ammettendo l'esistenza dell'etere siamo quindi costretti a considerarlo del tutto immobile e non partecipante al movimento dei corpi ordinari. Dall'ipotesi dell'etere immobile segue subito una conseguenza molto importante, che divideremo in due parti.

A. Se esiste un etere immobile, o almeno un etere la cui intera massa interstellare è a riposo, devono esistere anche la quiete assoluta e il moto assoluto rettilineo e uniforme. Dobbiamo considerare come in quiete assoluta un corpo fisso rispetto all'etere; dobbiamo considerare come moto assoluto anche il moto rettilineo ed uniforme rispetto all'etere in quiete.

SE RINUNCIAMO COMPLETAMENTE ALL'IDEA DELL'ESISTENZA DELLA QUIETE ASSOLUTA E DEL MOTO ASSOLUTO RETTILINEO E UNIFORME, SIAMO COSTRETTI A RINUNCIARE ANCHE ALL'IDEA DELL'ESISTENZA DELL'ETERE.

B. *Assumendo che l'etere sia assolutamente immobile e non è mosso da corpi in movimento (ipotesi Lorentz), dobbiamo aspettarci che il moto assolutamente rettilineo e uniforme di un corpo, ad esempio la Terra, si manifesti nei fenomeni di propagazione delle perturbazioni elettromagnetiche osservate su questo corpo.*

Dobbiamo infatti trovare qualcosa di del tutto analogo a quanto si osserva nella determinazione della velocità del suono su un corpo in movimento nell'aria in quiete. C'è di più: misurando la velocità del suono in due direzioni opposte, non possiamo riconoscere se l'osservatore si sta muovendo rispetto all'aria in quiete, oppure se l'aria si sta muovendo rispetto all'osservatore in quiete, o infine se entrambi sono in movimento, ma con velocità diverse. Con l'etere questi dubbi scompaiono; se gli esperimenti mostrano un moto relativo, ad esempio della Terra e dell'etere, non c'è dubbio che è la Terra a muoversi nell'etere e non l'etere rispetto alla Terra.

Il più importante dei fenomeni che potrebbe manifestare il moto della Terra rispetto all'etere è la propagazione delle perturbazioni elettromagnetiche nell'etere. Scegliamo la Terra perché è su di essa che effettuiamo le nostre osservazioni e perché la sua velocità assoluta rispetto all'etere, se è legittimo parlare di tale velocità assoluta, supera di gran lunga la velocità di tutti i corpi che si muovono sulla sua superficie. Secondo la natura delle perturbazioni elettromagnetiche distingueremo, per maggiore comodità, fenomeni ottici (luminosi) e fenomeni elettrici.

Durante un breve intervallo di tempo il moto della Terra può essere considerato rettilineo e uniforme. Sia la sua velocità  $v$  uguale a  $30 \text{ km/s}$ ; la velocità di propagazione  $c$  delle perturbazioni elettromagnetiche nell'etere o, in breve, la velocità della luce è pari a  $300000 \text{ km/s}$ . Quindi si ha

$$\frac{v}{c} = 10^{-4} \quad \left(\frac{v}{c}\right)^2 = 10^{-8} \quad (5.18)$$

da cui, per il valore numerico della quantità  $\beta$ ,

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \beta = 1 - 5 \cdot 10^{-9} \quad (5.19)$$

L'influenza del movimento della Terra sui fenomeni ottici ed elettrici deve teoricamente manifestarsi con una variazione dei valori numerici di alcune grandezze misurate ed è facile vedere che tale variazione deve essere funzione del rapporto  $v : c$ . A seconda che sia proporzionale a  $v^2/c^2$ , diremo che l'azione del movimento della Terra è del primo o del secondo ordine. I numeri (8) mostrano che, nei fenomeni in cui la teoria rivela un'azione di secondo ordine, solo molto raramente possiamo sperare di evidenziare questa azione attraverso l'esperienza e misurarla.

### 3. Ricerca sperimentale. Ipotesi di Fitzgerald e Lorentz. Tempo locale di Lorentz

Numerosissime ricerche sperimentali sono state effettuate da vari autori allo scopo di dimostrare l'influenza del movimento della Terra sui fenomeni ottici ed elettrici che si verificano sulla

sua superficie. La presentazione di tutta l'opera relativa a questo argomento si deve a Laub (1910), che ne fornisce una bibliografia completa, e a Boursiane (1912). Rimandiamo il lettore a queste presentazioni, perché possiamo qui presentare solo alcune brevi indicazioni sulle opere più importanti.

Affrontiamo dapprima una ricerca nella quale ci si aspetta un'azione del primo ordine, vale a dire, secondo la (8), dell'ordine di  $10^{-4}$ ; si pensava che tale azione fosse facile da osservare sulle grandezze misurate, ma gli esperimenti ottici di Fizeau (1861), Klinkerfues (1870), Haga (1902), Ketteler (1872), Mascart (1872 e 1874), Lord Rayleigh (1902), Nordmeyer (1903), Brace (1905), Strasser (1907) e Smith (1902), Nonché gli esperimenti elettrici di Röntgen (1885), Des Coudres (1889), Trouton (1902) e Koenigsberger (1905) hanno dato esito negativo. Non è stato possibile dimostrare alcuna azione del movimento della Terra sui fenomeni osservati, cioè sulle quantità misurate. L'idea fondamentale di tutta questa ricerca può essere caratterizzata nel modo seguente: osserviamo un fenomeno ottico o elettrico che si propaga in una determinata direzione; si fa una prima osservazione, mentre tale direzione è, in un dato momento, parallela al movimento della Terra attorno al Sole, ed una seconda quando è direttamente opposta o perpendicolare ad esso. Se l'etere è immobile e se c'è un movimento assoluto della Terra rispetto all'etere, si deve notare una differenza nei valori numerici di alcune quantità caratteristiche del fenomeno osservato. Ricorderemo brevemente, a titolo esemplificativo, alcune di queste esperienze.

Ketteler ha osservato l'interferenza di due raggi che attraversano, in direzioni opposte, due tubi quasi paralleli pieni d'acqua, disposti nella direzione del movimento della Terra. Ruotando l'intero apparato (di  $90^\circ$  o  $180^\circ$ , ad esempio), non si verifica alcun movimento delle frange di interferenza, anche se bisogna aspettarsi un cambiamento nel numero di onde in ciascuno dei due raggi, cioè una variazione nella loro differenza ottica di percorso.

Fizeau ha fatto passare un raggio polarizzato attraverso una lamina a facce parallele, che era obliqua a questo raggio; il piano di polarizzazione ruota allora di un angolo che dipende dall'indice di rifrazione della lamina, cioè dalla velocità di propagazione della luce in essa. L'entità della rotazione deve dipendere dalla direzione del raggio rispetto al movimento della Terra. Fizeau ha riscontrato una piccola variazione dell'angolo di rotazione nel cambio di direzione, ma gli esperimenti di Brace e Strasser hanno mostrato che questa variazione, nella realtà, non esiste. Gli esperimenti di Mascart e Lord Rayleigh sulla rotazione naturale del piano di polarizzazione hanno dato lo stesso risultato.

Qualsiasi carica elettrica che si muove con la Terra deve creare una corrente di convezione e quindi essere circondata da un campo magnetico. Röntgen ha scoperto che tale campo non si produce.

Des Coudres ha posto, a metà strada tra due bobine identiche A e B percorse da una corrente costante in versi opposti, una terza bobina C collegata ad un galvanometro sensibile; quando la direzione della corrente cambiava, nel galvanometro non appariva alcuna azione induttrice. La direzione da A a B coincideva con quella del movimento della Terra. Ruotando l'intero apparato di  $180^\circ$  non si osserva alcuna azione induttrice, anche se è da prevedere, a causa della diminuzione della distanza AC e del contemporaneo aumento della distanza BC nel rapporto  $v : c$ .

Ma i risultati negativi degli esperimenti precedenti non furono considerati risolutivi della questione, fondamentale da un punto di vista scientifico molto generale, del movimento della Terra rispetto all'etere. Passiamo ora alle ricerche che sono servite da punto di partenza e base per la teoria della relatività, che presenteremo nel corso di questo capitolo. Si deve collocare in prima linea in questa ricerca il classico esperimento di Michelson (1881), ripetuto poi da Michelson e Morley (1887), di Morley e Miller (1904). L'opera di Michelson fu oggetto di una discussione critica alla quale presero parte Lodge (1898), Sutherland (1900), Lüroth (1909), Debye (1909), Kohl (1910), Laue (1910) e altri ancora. Si è finalmente riconosciuto che i risultati

ottenuti da Michelson sono certamente accurati. Ricerche di tutt'altro carattere si devono a Lord Rayleigh (1902), Brace (1904), Trouton e Noble (1903), infine a Trouton e Rankine (1908). Rivediamo queste quattro serie di lavori.

I. Abbiamo già detto che l'esperienza di Michelson è da considerarsi classica; una descrizione dettagliata si trova nell'opera di Michelson, *Wave length and their uses*. In questo esperimento, che descriveremo in dettaglio, l'interferometro Michelson, di cui abbiamo parlato in precedenza, gioca un ruolo essenziale. Tale interferometro è rappresentato in maniera puramente schematica in Figura 35; le parti accessorie sono state rimosse. Un raggio emesso dalla sorgente S è riflesso parzialmente in *o* su una lastra di vetro leggermente argentata A; è riflesso dallo specchio  $R_2$  e parte di questo raggio riflesso attraversa la lamina A ed entra nel cannocchiale F. L'altra parte del raggio  $S_0$  passa attraverso la lamina A, è riflessa dallo specchio  $R_1$  e poi in *o*, da dove raggiunge anche il cannocchiale F.

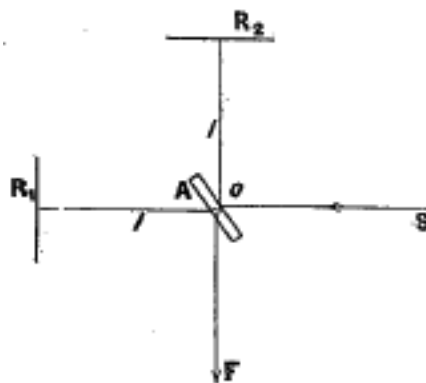


Fig. 35

L'osservatore vede le frange di interferenza in F, che risultano dalla differenza di percorso tra  $oR_1o$  e  $oR_2o$ . Abbiamo visto nel Volume II che queste frange possono presentarsi sotto forma di righe parallele o di cerchi concentrici; ma questa differenza non ha importanza in ciò che segue. Quando consideriamo il fenomeno da un punto di vista puramente geometrico e non teniamo conto anzitutto del movimento comune a tutto l'apparato e alla Terra, possiamo dire che in una determinata posizione del piano focale del cannocchiale F appare una frangia di interferenza che risponde alla differenza effettiva nel percorso ottico dei due raggi.

Cerchiamo ora quale influenza possa avere sull'insieme del fenomeno dell'interferenza il movimento comune a tutto l'apparato e alla Terra nell'etere immobile. Supponiamo che questo movimento si effettui parallelamente ad una delle direzioni  $oR_1$  o  $oR_2$  e che le distanze  $oR_1$  e  $oR_2$  siano uguali; designiamo queste distanze con  $l$ . Uno dei raggi interferenti compie un percorso  $2l$ , da un punto di vista puramente geometrico, nella direzione del moto della Terra e nella direzione opposta; l'altro, invece, percorre lo stesso percorso  $2l$  in direzione perpendicolare a questo movimento. Quali cammini percorrono questi raggi nella realtà, cioè nell'etere immobile? Possiamo pensare alla sorgente luminosa come se si trovasse al punto *o*.

Se la sorgente luminosa e lo specchio, che distano  $l$ , sono immobili rispetto all'etere, il cammino  $2l$  percorso nell'intervallo di tempo

$$t = \frac{2l}{c} \quad (5.20)$$

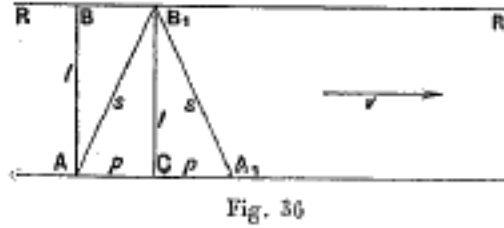
ma se la sorgente e lo specchio si muovono, rispetto all'etere, lungo la retta che li congiunge e con la stessa velocità  $v$ , è chiaro che uno dei cammini  $l$  verrà percorso con la velocità  $c + v$ , l'altro con la velocità  $c - v$ . È quindi necessario, affinché la luce percorra il viaggio di andata e di ritorno, l'intervallo di tempo

$$t_1 = \frac{l}{c+v} + \frac{l}{c-v} = \frac{2lc}{c^2 - v^2} = \frac{2l}{c} \cdot \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{2l}{c} \cdot \frac{1}{\beta^2} \quad (5.21)$$

Poiché  $v^2 : c^2$  è uguale alla frazione molto piccolo  $10^{-8}$ , si può scrivere

$$t_1 = \frac{2l}{c} \left( 1 + \frac{v^2}{c^2} \right) \quad (5.22)$$

Passiamo ora al caso in cui la sorgente luminosa A (fig. 36) e lo specchio RR si muovono con velocità  $v$  nella direzione perpendicolare alla linea  $AB = l$ , essendo AB perpendicolare a RR. Quando il raggio riflesso ritorna alla sorgente, la sorgente è già in un altro luogo, ad esempio in  $A_1$ .



La sorgente è quindi raggiunta da un raggio che è caduto un poco obliquamente sullo specchio e ha percorso il cammino  $AB_1A$ . Sia  $AB_1 = B_1A_1 = s$ ,  $AC = CA_1 = p$ . La luce percorre il cammino  $2s$  con la velocità  $c$ , nell'intervallo di tempo in cui la sorgente percorre il cammino  $2p$  con la velocità  $v$ ; ne risulta che  $p : s = v : c$ , cioè  $p = \frac{vs}{c}$ . Si ha

$$s^2 = l^2 + p^2 = l^2 + \frac{s^2 v^2}{c^2}$$

pertanto

$$s = \frac{l}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

L'intervallo di tempo  $t_2$  necessario alla luce per percorrere il cammino  $2s$  è uguale a

$$t_2 = \frac{2s}{c} = \frac{2l}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{2l}{c} \cdot \frac{1}{\beta} \quad (5.23)$$

o

$$t_2 = \frac{2l}{c} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right) \quad (5.24)$$

Si vede che si ha  $t_1 > t_2 > t$  e che

$$t_1 - t_2 = \frac{1}{c} \cdot \frac{v^2}{c^2} \quad (5.25)$$

A causa del movimento dell'intero sistema, gli intervalli di tempo durante i quali la luce percorre il percorso tra la sorgente e lo specchio in due direzioni opposte, diventano quindi diversi. Questa differenza corrisponde ad una differenza ottica di tante lunghezze d'onda quante volte è contenuta la durata  $T$  di un periodo di vibrazione luminosa in  $t_1 - t_2$ . Ruotando di  $90^\circ$  l'intero interferometro si cambia il seno di quest'ultima differenza, che introduce una doppia differenza di percorso. Sia  $N$  il numero di frange di cui deve spostarsi l'intero sistema di frange; si ha

$$N = \frac{2(t_1 - t_2)}{T} = \frac{1}{c} \cdot \frac{v^2}{c^2} = \frac{2l}{\lambda} \cdot \frac{v^2}{c^2} \quad (5.26)$$

essendo la lunghezza d'onda  $\lambda = cT$ . La formula (15) mostra che lo spostamento delle frange di interferenza prevedibile è una piccola quantità del secondo ordine. Michelson non ha osservato

alcun movimento delle frange. Ha ripetuto i suoi esperimenti con Morley, utilizzando un dispositivo migliorato in cui i raggi percorrevano un cammino più lungo, riflettendosi su diversi specchi. Si aveva allora  $l = 2200 \text{ cm}$ ,  $\lambda(Na) = 5,9 \cdot 10^{-5} \text{ cm}$ , per cui le equazioni (15) e (8) davano  $N = 0,37$ ; in realtà,  $N$  è risultato non superiore a 0,02. Infine, negli esperimenti di Morley e Miller, teoricamente si aveva  $N = 1,5$ , mentre  $N$  osservato non è risultato superiore a 0,0076. Abbiamo già accennato al dibattito critico che si è aperto su queste esperienze. Non c'è il minimo dubbio che, nell'esperimento di Michelson, l'effetto teoricamente prevedibile del movimento della Terra nell'etere immobile non si manifesta, anche se un esperimento analogo, nel campo dei fenomeni sonori, indicherebbe certamente il movimento relativo dell'osservatore e dell'aria.

Fitzgerald e Lorentz hanno proposto, indipendentemente l'uno dall'altro, una nuova e molto ardita ipotesi, per spiegare la contraddizione tra gli esperimenti appena descritti e i risultati attesi dalla teoria. Essi hanno ammesso che in ciascun corpo le dimensioni lineari parallele al movimento del corpo nell'etere, subiscono un accorciamento, dovuto unicamente a questo movimento, nel rapporto  $1 : \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ , cioè  $1 : \beta$ . Sia  $l$  la dimensione lineare di un corpo a riposo o che si muove in direzione perpendicolare a  $l$ . Quando, nel primo caso, si mette in movimento il corpo e, nel secondo, lo si fa ruotare di  $90^\circ$ , in modo che  $l$  prenda la direzione del movimento, la lunghezza  $l$  cambia e diventa uguale a

$$l' = \beta l = l \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = l \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right) \quad (5.27)$$

Un'asta lunga  $1 \text{ m}$ , disposta perpendicolarmente alla direzione del movimento della Terra, si accorcia di  $5,10^{-8} \text{ mm} = 5 \mu\mu$ , quando viene ruotata di  $90^\circ$ . Una sfera in movimento si trasforma in un ellissoide di rivoluzione di Heaviside appiattito nella direzione del movimento. È facile comprendere che questa ipotesi spiega completamente il risultato degli esperimenti di Michelson. La lunghezza  $oR_2$  (fig. 35), perpendicolare alla direzione del movimento della Terra, rimane invariata, e di conseguenza la formula (12) per l'intervallo di tempo  $t_2$  rimane esatta; ma la lunghezza  $l = oR_1$  cambia in  $l' = \beta l$ , quindi la formula (10) diventa

$$l_1 = \frac{2l'}{c} \cdot \frac{1}{\beta^2} = \frac{2l}{c} \frac{1}{\beta}$$

Confrontando questo valore con la (12), si vede che  $l_1 = l_2$  e che non ci si deve aspettare alcun movimento delle frange quando si ruota l'intero dispositivo di Michelson di  $90^\circ$ . La lastra di pietra su cui era posto l'interferometro ha subito un accorciamento della sua lunghezza. Morley e Miller (1905) si sono chiesti se la sostanza di questa lastra non giocasse un certo ruolo, hanno ripetuto l'esperimento posizionando il dispositivo su un vassoio di legno e hanno ottenuto lo stesso risultato negativo.

L'ipotesi appena descritta deve sembrare strana e perfino improbabile. Lorentz ha però potuto in una certa misura giustificarla con le seguenti considerazioni. Supponiamo che gli atomi materiali siano costituiti principalmente o anche esclusivamente da elettroni e che le forze coesive, che determinano le loro condizioni di equilibrio interno e di conseguenza anche la forma di ogni corpo, possiedano parzialmente o anche esclusivamente un carattere elettromagnetico. Quando un corpo, cioè gli elettroni che lo costituiscono, cominciano a muoversi, si verifica una deformazione dei campi magnetici interni, cambiano le forze di coesione e con esse le condizioni di equilibrio. Si stabilisce un nuovo equilibrio, in cui le dimensioni del corpo cambiano secondo la formula (16).

II. Gli esperimenti di Lord Rayleigh e Brace sono stati intrapresi allo scopo di verificare una delle possibili conseguenze dell'ipotesi di Fitzgerald e Lorentz. Se si assume che gli elettroni non cambino forma nel loro movimento, l'accorciamento in un'unica direzione delle dimensioni



di un corpo isotropo deve produrre un'anisotropia ottica in questo corpo e di conseguenza dar luogo ad una doppia rifrazione. Lord Rayleigh (1902) ha posto dei tubi riempiti con acqua o con solfuro di carbonio tra nichel incrociati; ruotando i tubi di  $90^\circ$ , non ha potuto osservare alcuna traccia di doppia rifrazione; una colonna di vetro ha dato lo stesso risultato negativo. Brace (1904) ha ripetuto questi esperimenti con l'acqua e il vetro, in condizioni migliori, facendo in modo che i raggi percorressero nell'acqua  $28,5\text{ m}$ ; ma ha trovato che il ritardo di un raggio non superava un valore dell'ordine di  $7 \cdot 10^{-12}$ , sebbene era prevedibile un numero dell'ordine di  $10^{-8}$ .

III. Esperimenti di Trouton e Noble. - Ad un'estremità dell'asta orizzontale di una bilancia a filo singolo è fissato un condensatore; all'altra estremità c'è un contrappeso. Sia  $\alpha$  l'angolo tra la direzione del movimento della Terra e la normale alle armature del condensatore. Secondo la teoria di Max Abraham, sul condensatore agisce una coppia; il momento  $M$  di questa coppia è uguale a

$$M = \frac{U}{c^2} v^2 \sin 2\alpha \quad (5.28)$$

dove  $U$  indica l'energia del condensatore carico. Il momento  $M$  raggiunge il suo massimo per  $\alpha = 45^\circ$ .  $U$  che designa l'energia del condensatore carico. L'istante  $M$  raggiunge il suo massimo per  $\alpha = 45^\circ$ . Trouton e Noble (1903) non hanno osservato alcuna rotazione. Lorentz spiega questo risultato con la variazione, secondo la sua ipotesi, delle dimensioni del dispositivo.

IV. Esperienza di Rankine e Trouton. - Secondo l'ipotesi di Fitzgerald e Lorentz ci si deve aspettare che la resistenza  $r$  di un filo rettilineo dipenda dalla sua posizione rispetto alla direzione del movimento della Terra. Se la lunghezza del filo è parallela a  $v$ , esso deve accorciarsi e  $r$  deve diminuire; se invece è perpendicolare a  $v$ , il filo deve assottigliarsi e di conseguenza deve aumentare. Trouton e Rankine (1908) hanno disposto un ponte di Wheatstone molto sensibile, in cui due rami opposti erano paralleli a  $v$ , gli altri due perpendicolari. L'intero dispositivo poteva facilmente ruotare di  $90^\circ$ . In tale rotazione, non si è potuto osservare una variazione relativa della resistenza raggiungente  $5 \cdot 10^{-10}$ , anche se ci si doveva aspettare una variazione dell'ordine di  $10^{-8}$ .

Abbiamo indicato gli esperimenti più importanti che hanno avuto un ruolo nella nascita e nello sviluppo del nuovo principio di relatività e mostrato come, mediante l'ipotesi di Fitzgerald e Lorentz, si potessero spiegare i risultati sperimentali. Ma, per dare una visione più completa dello stato della scienza al momento della comparsa del principio di relatività, dobbiamo ancora far conoscere la geniale idea di Lorentz del tempo locale. Le equazioni del campo elettromagnetico cambiano forma quando, utilizzando le formule (4) o (5), si passa dal sistema fisso  $S$  al sistema mobile  $S'$ . Torneremo su questa questione più tardi; ma Lorentz ha dimostrato che si può passare da  $S$  a  $S'$ , senza cambiare le equazioni del campo elettromagnetico, trascurando le piccole quantità del secondo ordine ( $v^2 : c^2$ ) e introducendo nel sistema mobile un modo originale di misura del tempo. Sia  $t$  il tempo nel sistema fisso; supponiamo che all'istante  $t = 0$  gli assi coordinati dei sistemi  $S$  e  $S'$  coincidano e che la velocità  $v$  del sistema  $S'$  sia parallela all'asse  $x$  e  $x'$ . Si deve allora, per i punti del sistema  $S'$ , introdurre un tempo  $t'$  particolare, determinato dalla formula

$$t' = t - \frac{vx}{c^2} \quad (5.29)$$

e riferentesi al momento in cui, in tutti i punti del sistema fisso  $S$ , il tempo è uguale a  $t$ . La formula (18) mostra che ogni punto del sistema  $S'$  ha il suo tempo speciale, il suo *tempo locale*. Quanto più un punto del sistema  $S'$  è lontano dall'origine fissa delle coordinate del sistema  $S$ , tanto più il suo tempo locale differisce dal tempo  $t$  dell'intero sistema  $S$ .

L'idea di tempo locale  $t$  può essere resa più chiara dalle seguenti considerazioni. Supponiamo che all'istante  $t = 0$  venga inviato un segnale luminoso dall'origine delle coordinate; ci si può chiedere quando questo segnale raggiungerà il punto  $M$  del sistema  $S'$ , la cui coordinata è pari a

$x$  per  $t = 0$ . L'osservatore in  $S$  dirà che questo tempo è uguale a

$$t = \frac{x}{c} + \frac{\xi}{c} \quad (5.30)$$

indicando  $\xi$  il cammino percorso dal punto  $M$  nella durata della propagazione del segnale. Si ha  $\xi : x = v : c$ , da cui

$$t = \frac{x}{c} + \frac{vx}{c^2} \quad (5.31)$$

L'osservatore che si trova in  $S'$  e che non percepisce il proprio movimento, dirà che il segnale ha percorso il cammino  $x$  nel tempo

$$t' = \frac{x}{c} \quad (5.32)$$

Dalle (18,b) e (18,c), si deduce la formula (18). È molto importante notare che Lorentz non attribuiva importanza fisica alla formula (18) e all'idea stessa di ora locale. L'espressione (18) di  $t$  ha per lui un carattere matematico puramente formale. Introduce il tempo locale solo con lo scopo di preservare le equazioni del campo elettromagnetico nella loro forma, almeno entro certi limiti, quando si passa dal sistema immobile  $S$  al sistema mobile  $S'$ .

Si ottengono le formule (16) e (18), trascurando le quantità del secondo ordine nelle formule più complete che Lorentz ha introdotto e che hanno preso il nome di formule di trasformazione di Lorentz; sono analoghe alle formule di trasformazione di Newton. Faremo conoscere queste formule più complete nel paragrafo successivo.

#### 4. Il principio di relatività. Le idee di Einstein

Il classico lavoro di Einstein, pubblicato nel 1905, ha attirato grande attenzione. La sua notevole importanza e la rivoluzione che esso tende ad apportare nell'intera Fisica e nelle nozioni più fondamentali ed elementari sono già state caratterizzate in precedenza.

Nella teoria della relatività di Einstein è in primo piano una nozione di tempo completamente nuova e a prima vista strana e difficile da comprendere. Ci vuole molto impegno e un lavoro prolungato per abituarsi a questa nuova concezione del tempo. Ma è ancora incomparabilmente più difficile ammettere le numerose conseguenze che derivano dal principio di relatività e riguardano quasi tutte le parti della fisica. Molte di queste conseguenze sconvolgono ciò a cui siamo abituati, anche se spesso senza motivo sufficiente, a chiamare *senso comune*. Si può dire che questi sono i paradossi della nuova teoria e ne renderemo noti alcuni in seguito.

Affrontiamo la presentazione dei fondamenti della nuova teoria; in un Trattato di Fisica Generale, sono più importanti del grandissimo edificio attualmente eretto su di essi.

Abbiamo appena visto che tutti i tentativi fatti per dimostrare sperimentalmente l'azione del movimento della Terra nell'etere immobile hanno dato esito negativo, e abbiamo reso nota l'ipotesi di Fitzgerald e Lorentz, proposta per spiegare questo insuccesso, così come l'ora locale di Lorentz.

Si possono formulare le idee di Einstein sul tempo nel modo seguente: *Non esiste un tempo generale o assoluto. Il tempo locale di Lorentz non è una finzione matematica e non esprime qualcosa di puramente formale, servendo solo alla trasformazione di certe equazioni differenziali; ha un significato reale ed è il tempo reale nel sistema considerato.* Ciascuno dei due sistemi  $S$  e  $S'$ , in movimento l'uno rispetto all'altro, ha in realtà un proprio tempo, percepito e misurato dall'osservatore che si muove con il sistema, così come ogni punto di uno stesso sistema ha delle coordinate relative a questo sistema, percepite e misurate anche dall'osservatore di detto sistema.

*La simultaneità, in senso generale, non esiste.* Due eventi, che si svolgono in luoghi diversi, possono, per l'osservatore in  $S$ , apparire simultanei (tempo  $t$ ), mentre, per l'osservatore in  $S'$ , sembrano verificarsi in istanti diversi  $t'_1$  e  $t'_2$ . *È possibile che in  $S$  lo stesso fenomeno avvenga*

*prima che in  $S'$  e viceversa.* Non è troppo difficile abituarsi a una simile concezione del tempo; ma non è così per i numerosi altri paradossi a cui porta il principio di relatività e che indicheremo nel prossimo paragrafo. Riteniamo utile enunciare ora una serie di proposizioni, che scaturiscono dallo stesso principio di relatività ammesso nella sua piena portata o che ad esso possono essere strettamente legate. Non si tratta di paradossi, ma tutti cambiano radicalmente le nozioni fondamentali su cui finora abbiamo costruito il mondo.

1. L'etere non esiste.

2. *Bisogna rinunciare alle leggi del moto di Newton e di conseguenza anche a quasi tutta la meccanica di Newton, che è stata la vita e lo sviluppo della Fisica per due secoli.* Queste leggi rappresentano solo una prima approssimazione delle leggi reali, che sono molto più complicate.

3. *La nozione di spazio, presa isolatamente, non ha alcun significato. Solo l'insieme dello spazio e del tempo ha realtà.*

4. *Nessuna velocità relativa può superare la velocità  $c$  della luce.* Ciò riguarda sia i movimenti dei corpi che la propagazione dei segnali. *La velocità  $c$  gioca quindi, nell'universo relativista, un ruolo assolutamente esclusivo; il valore di questa quantità è un valore limite; possiamo chiamarla una velocità critica.*

5. *L'energia è dotata di inerzia;* essa è analoga alla materia e quella che chiamiamo massa della materia ponderabile può trasformarsi in massa di energia e viceversa.

6. *L'energia può avere una esistenza propria,* indipendente da ogni substrato materiale nel senso più generale del termine. Può essere emessa e assorbita dai corpi e può propagarsi nello spazio, che è assolutamente e letteralmente vuoto.

7. *L'energia può avere una struttura atomistica.* Si tratta principalmente di energia radiante (vedi uno dei capitoli successivi). *Le proposizioni 5 e 6 nel loro insieme rappresentano un ritorno alla teoria dell'emissione di Newton, anche se in forma modificata.*

Spieghiamo questa proposizione e, in questa occasione, introduciamo le notazioni che utilizzeremo in seguito. Supponiamo, come prima, di avere due sistemi  $S$  e  $S'$ ; in ciascuno di essi sono disposti gli assi coordinati. Le coordinate e i tempi sono  $x, y, z, t$  in  $S$ ,  $x', y', z', t'$  in  $S'$ . Le origini  $O$  e  $O'$  degli assi coordinati coincidono nell'istante in cui si ha rispettivamente  $t = t' = 0$  nei sistemi  $S$  e  $S'$ ; gli assi  $x$  e  $x'$  coincidono, gli assi  $y$  e  $y'$  così come gli assi  $z$  e  $z'$  sono paralleli. Entrambi i sistemi hanno un moto *relativo* rettilineo e uniforme nella direzione comune degli assi  $x$  e  $x'$ . La velocità del sistema  $S'$  rispetto a  $S$  è uguale a  $-v$ , quella del sistema  $S$  rispetto a  $S'$  è uguale a  $-v$ . Supponiamo che nel sistema  $S'$  vi sia un corpo in quiete  $P$ , di cui designeremo ogni punto con  $M'$ . Tutti i punti  $M'$  in  $S'$  danno la forma geometrica del corpo  $P$  in  $S'$ , cioè la forma che l'osservatore in  $S'$  percepisce. A un istante qualunque  $t$  (del sistema  $S$ ), i punti  $M'$  in  $S'$  coincidono con determinati punti  $M$  del sistema  $S$ . L'insieme di questi punti  $M$  in  $S$  dà la forma cinematica del corpo  $P$  in  $S$ , cioè la forma che percepisce l'osservatore che si trova in  $S$ . È molto importante notare che tutti i punti  $M'$  si trovano nei punti  $M$  contemporaneamente per l'osservatore in  $S$ , ma in istanti  $t'$  diversi per l'osservatore in  $S'$ .

Possiamo ora formulare le basi della teoria di Einstein in modo più preciso. Ripetiamo ancora una volta che non si è riusciti a stabilire sperimentalmente il moto rettilineo e uniforme della Terra nell'etere. La teoria di Einstein consiste fondamentalmente nel sostituire le parole "non si è riusciti" con le parole "non ci si può riuscire". Questa sostituzione cambia completamente il significato e il carattere della prima locuzione verbale.

"Non si è riuscito" è un fatto un po' storico, risultato inatteso di numerose ricerche sperimentali. Possiamo cercare di spiegare questo fatto, ad esempio introducendo nuove ipotesi, come quella di Fitzgertald e Lorentz.

"Non ci si può riuscire" è un'affermazione *a priori*, un assioma o un postulato, sul quale possiamo proporre di costruire una nuova concezione dell'universo; ma non si tratta di dimostrare questo assioma, né di tentare di spiegarlo. Ammettendolo, dobbiamo prenderlo come il fondamento principale su cui è costruita la Fisica; dobbiamo sforzarci di trarre tutte le conclu-

sioni possibili e, se ciò appare fattibile, verificare sperimentalmente l'esattezza delle deduzioni ottenute.

Einstein ha basato tutta la sua teoria su due postulati. Si può formulare il primo nel modo seguente: *il mondo in cui viviamo è costruito in modo tale che nessuna osservazione in nessun sistema  $S$ , ad esempio sulla Terra, può evidenziare il moto rettilineo e uniforme di questo sistema, a fortiori, non può servire a determinare la velocità di questo moto.*

In altre parole, *le leggi dei fenomeni che si verificano in qualsiasi sistema sono indipendenti da questo sistema, a condizione che non abbia accelerazione.*

Tra le grandezze  $x, y, z, t$  in  $S$  e quelle in  $x', y', z', t'$  in  $S'$  esistono relazioni che dipendono dalla velocità relativa  $v$  dei sistemi  $S$  e  $S'$ . *Le formule che esprimono le leggi dei fenomeni in  $S$  non cambiano forma quando si passa al sistema  $S'$  sostituendo  $x, y, z, t$  con  $x', y', z', t'$ .* Il principio di relatività di Einstein è una generalizzazione del principio di relatività di Newton, che si riferisce a fenomeni puramente meccanici; il principio di Einstein si applica in generale a tutti i fenomeni fisici, compresi i fenomeni elettromagnetici.

Il secondo postulato di Einstein può essere enunciato così: *qualunque sia il sistema (senza accelerazione) in cui si misura la velocità della luce, e qualunque siano le condizioni in cui viene effettuata questa misura, otteniamo sempre per la velocità cercata lo stesso valore numerico  $c$ .*

In altre parole, gli osservatori in  $S$  e in  $S'$  ottengono lo stesso valore per la grandezza  $c$ . Consideriamo anche due punti  $A$  e  $B$  dello stesso sistema  $S$ . *Il tempo (di questo sistema) in cui avviene la propagazione della luce da  $A$  a  $B$  è uguale al tempo in cui avviene la propagazione della luce da  $B$  in  $A$ , qualunque sia il moto non accelerato del sistema  $S$ .*

Il secondo postulato permette di precisare la nozione di simultaneità di due eventi che si verificano in due punti  $A$  e  $B$  dello stesso sistema  $S$ . Sia  $AB = l$  e supponiamo che nell'istante in cui si verifica un evento qualunque nel punto  $A$ , da questo punto esce un segnale luminoso. Se arriva in  $B$  dopo un tempo  $l : c$  dopo che è avvenuto un altro evento in  $B$ , gli eventi in  $A$  e  $B$  nel sistema  $S$  si sono verificati contemporaneamente, cioè simultaneamente, cioè nello stesso istante  $t$ .

Dal secondo postulato segue un'altra conseguenza. Supponiamo che in  $S$  e  $S'$  ci siano rispettivamente gli osservatori  $A$  e  $A'$  e che nell'istante in cui questi osservatori occupano lo stesso posto (cioè sono uno accanto all'altro), da questa posizione venga inviato un segnale luminoso che si propaga in tutte le direzioni. Ci si dovrebbe aspettare che l'osservatore a riposo trovi di rimanere costantemente al centro della sfera sulla quale a un istante dato è arrivato il segnale; ma l'osservatore, che si muove con velocità  $v$ , nota di essere circondato da una sfera il cui raggio aumenta con velocità  $c$ , mentre il centro della sfera si allontana da lui con velocità  $v$ . Il secondo postulato porta quindi a questo risultato paradossale che i due osservatori si trovano, ciascuno separatamente, al centro di una sfera che si estende, qualunque sia la velocità relativa  $v$  degli osservatori, ad esempio anche nel caso in cui  $v = 0,99c$ . Questo paradosso appare come una conseguenza del fatto che i due osservatori contano il tempo in modo diverso.

Abbiamo appena visto che Einstein introduce due postulati; ma Planck (*Sechs Vorlesungen*, ecc., 1910), Kordisch (1911), v. Ignatowsky (1911), Franck e Rothe (1911) ed altri ancora ritengono possibile limitarsi al primo postulato e considerare il secondo come un caso particolare o come diretta conseguenza del primo.

Stabiliamo ora le formule fondamentali che esprimono il principio di relatività, cioè le formule che legano le quantità  $x, y, z, t$  del sistema  $S$  alle quantità  $x', y', z', t'$  del sistema  $S'$ . La disposizione degli assi nei due sistemi è stata indicata in precedenza. Queste formule risultano dalle seguenti proposizioni:

1. *Le quantità  $x', y', z', t'$  sono funzioni lineari delle quantità  $x, y, z, t$ .* Un'altra dipendenza, più complessa, porta a risultati contraddittori, come mostrato ad esempio da Kordish (1911). Queste funzioni, per piccoli valori di  $v : c$ , devono assumere la forma (4), perché tutte le deduzioni tratte dalla (4) sono di fatto verificate.

2. I coefficienti, nelle relazioni lineari precedenti, non possono che essere funzioni della velocità relativa  $v$ .

3. Le grandezze  $x, y, z, t$  si devono esprimere con le stesse funzioni lineari di  $x', y', z', t'$ , ma  $-v$  deve prendere il posto di  $+v$  nei coefficienti.

4. Il secondo postulato può essere tradotto come segue. Supponiamo che nell'istante in cui le origini  $O$  e  $O'$  delle coordinate coincidono parta da questi punti un segnale luminoso. Gli osservatori in  $S$  e  $S'$  misurano la stessa velocità  $c$  della luce; l'equazione della sfera su cui si trova il segnale all'istante  $t$  in  $S$  è quindi  $x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$  e l'equazione della sfera su cui si trova lo stesso segnale all'istante  $t'$  a  $S'$  è

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2$$

Dal primo postulato, le formule che esprimono le leggi dei fenomeni non cambiano forma quando si passa da  $S$  a  $S'$ . Si deve avere pertanto l'identità

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 \quad (5.33)$$

5. La posizione relativa che abbiamo ammesso per gli assi coordinati mostra che i piani  $xz$  e  $xy$  coincidono costantemente con i piani  $x'z'$  e  $x'y'$ . Si hanno quindi le seguenti espressioni coniugate:

$$\forall y, z \quad x' = 0 \quad e \quad x = vt \quad (5.34)$$

$$\forall x, z, t \quad y' = 0 \quad e \quad y = 0 \quad (5.35)$$

$$\forall x, y, t \quad z' = 0 \quad e \quad z = 0 \quad (5.36)$$

Secondo la proposizione 1, le relazioni che vogliamo determinare contengono 16 coefficienti, che sono funzioni di  $v$ . Ma le altre proposizioni riducono prima il loro numero a sette, poi a tre. Infatti, le equazioni (20,a) e (20,b) mostrano che  $x'$  è indipendente da  $y$  e  $z$ , che  $y'$  è indipendente da  $x, z$  e  $t$  e che  $z'$  è indipendente da  $x, y$  e  $t$ . In questo modo scompaiono otto coefficienti e ne rimangono solo otto. Inoltre, la relazione tra  $y$  e  $y'$  deve essere identica a quella tra  $z$  e  $z'$ , poiché le direzioni degli assi  $y$  e  $z$  sono arbitrarie e possono essere scambiate; due dei coefficienti devono quindi essere uguali, in modo che rimangono solo sette coefficienti:

$$x' = bx + ht \quad (5.37)$$

$$y' = ay \quad (5.38)$$

$$z' = az \quad (5.39)$$

$$t' = kx + py + qz + nt \quad (5.40)$$

Sia  $a = \varphi(v)$ , di modo che  $y' = \varphi(v)y$ ; la relazione tra  $y$  e  $y'$  è indipendente dal segno di  $v$  e quindi  $\varphi(v) = \varphi(-v)$ . Dalla proposizione 3,  $y = \varphi(-v)y'$ , da cui  $y = \varphi(v)\varphi(-v)y$ , cioè  $\varphi(v)\varphi(-v) = 1$ . Chiaramente  $\varphi(v) = a = 1$ , e otteniamo così

$$y' = y \quad z' = z \quad (5.41)$$

Rimangono ancora sei coefficienti. In virtù della (20)

$$bx + ht = b \left( x + \frac{h}{b} t \right) = 0$$

per  $x = vt$ ; si ha quindi  $h = -bv$ , da cui

$$x' = b(x - vt) \quad (5.42)$$

Sostituendo (21,c), (22) e (22,a) nella (19), si ha l'identità

$$b^2 (x - vt)^2 + y^2 + z^2 + c^2 (kx + py + qz + nt)^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 \quad (5.43)$$

da cui si conclude che

$$p = q = 0 \quad (5.44)$$

$$b^2 = c^2 k^2 + 1 \quad (5.45)$$

$$b^2 v = -c^2 kn \quad (5.46)$$

$$b^2 v^2 = c^2 n^2 - c^2 \quad (5.47)$$

Dalla (23,a) risulta che

$$k = -\frac{b^2 v}{c^2 n} \quad (5.48)$$

e portando la (23,c) nella (23), si ha

$$n^2 = \frac{b^4 v^2}{c^2 (b^2 - 1)} \quad (5.49)$$

Se introduciamo quest'ultimo valore nella (23,b), viene

$$b = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\beta} \quad (5.50)$$

la (23,c) e la (23,d) danno allora

$$\begin{cases} n &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\beta} \\ k &= -\frac{v}{c^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = -\frac{1}{\beta} \frac{v}{c^2} \end{cases} \quad (5.51)$$

Infine, tenendo conto di questi ultimi valori di  $n$  e  $k$  e ricordando che  $p = q = 0$ , la (22,a), (21,c) e (22) danno le celebri formule di trasformazione di Lorentz.

$$\begin{cases} x' &= \frac{1}{\beta} (x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \frac{1}{\beta} \left( t - \frac{vx}{c^2} \right) \\ \beta &= \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \end{cases} \quad (5.52)$$

Queste formule costituiscono la base della teoria della relatività di Einstein. Danno subito luogo alle seguenti osservazioni:

1. Quando  $v$  è molto piccolo rispetto a  $c$ , si può porre  $\beta = 1$ , e le formule (26) si riducono alle formule (4), cioè la trasformazione di Lorentz diventa la trasformazione di Newton.

2. Se si risolvono le equazioni (25) rispetto a  $x, y, z, t$ , si ottiene

$$\begin{cases} x &= \frac{1}{\beta} (x' + vt') \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \frac{1}{\beta} \left( t' + \frac{vx'}{c^2} \right) \end{cases} \quad (5.53)$$

È dunque verificata la proposizione 3, che abbiamo già utilizzato per stabilire le equazioni (22). I sistemi  $S$  e  $S'$  svolgono assolutamente lo stesso ruolo; nessuno dei due ha alcun privilegio

sull'altro; il passaggio dall'uno all'altro dipende esclusivamente dalla velocità relativa  $\pm v$  di questi sistemi.

3. Ciò che è essenziale nella trasformazione di Lorentz è espresso nella prima e nella quarta relazione (25), cioè

$$x' = \frac{1}{\beta} (x - vt) \quad (5.54)$$

$$t' = \frac{1}{\beta} \left( t - \frac{vx}{c^2} \right) \quad (5.55)$$

Su queste due formule si basa la nuova Fisica e la vasta teoria della relatività così ricca di conseguenze notevoli, ma in parte paradossali. Dobbiamo meditare su queste due formule, familiarizzando con esse, bandendo dai nostri pensieri tutto ciò che ci dà assuefazione e tutto ciò che fino ad ora ci sembrava ovvio. Dato che le coordinate  $y$  e  $z$  non giocano alcun ruolo particolare, è più semplice considerare solo i punti per i quali  $y = 0$ ,  $z = 0$ , che si trovano sugli assi coincidenti  $Ox$  e  $O'x'$ ,  $O$  e  $O'$  aventi velocità relativa  $\pm v$ .

La formula (25,b) esprime quanto segue. In un dato istante i punti  $M$  e  $M'$  dei sistemi  $S$  e  $S'$  coincidono. L'osservatore  $A$  in  $S$  trova che la distanza  $OM = x$  e ne conclude che la distanza  $O'M' = x - vt$ , per cui  $OO' = vt$ . Ma l'osservatore  $A'$  in  $S'$  misura la distanza  $O'M'$  e la trova uguale a  $x'$ , cioè  $1 : \beta$  volte maggiore. Bisogna ammettere questo come un dato di fatto, non soggetto a spiegazione, e nemmeno a chiarificazione, come una proprietà del mondo in cui viviamo.

La formula (25,c) è incomparabilmente più paradossale. Quando  $O$  e  $O'$  coincidono, si ha nei punti  $x = 0$ ,  $x' = 0$  il tempo  $t = 0$  nel sistema  $S$  e il tempo  $t' = 0$  nel sistema  $S'$ . Un osservatore  $A_0$  in  $O(x = 0)$  ritiene che all'istante  $t$ , dove il punto  $M'_0$  del sistema  $S'$  coincide con  $O$ , anche l'osservatore  $A'_0$  in  $M'_0$  nota l'istante  $t$ ; in realtà quest'ultimo rileva l'istante  $t' = t : \beta$ .

Inoltre gli osservatori  $A_1, A_2, A_3, \dots$  in  $S$  credono che quando si ha lo stesso tempo  $t$  nei punti  $M_1, M_2, M_3, \dots$ , dove si trovano, nei punti  $M'_1, M'_2, M'_3, \dots$  del sistema  $S'$  che coincidono simultaneamente (tempo  $t$  di  $S$ ) con  $M_1, M_2, M_3, \dots$ , vi è anche almeno lo stesso istante. In realtà non è così: gli osservatori  $A'_1, A'_2, A'_3, \dots$  in  $M'_1, M'_2, M'_3, \dots$  notano istanti diversi  $t'$ , che dipendono dalle distanze  $OM_i = x_i$  e sono determinati dalla formula (25,c). Quanto più  $M_i$  è lontano da  $O$  e tanto più il tempo  $t'_i$  in  $M'_i$  differisce dal tempo  $t$  in  $M_i$ . Gli osservatori  $A'_i$  trovano conseguentemente che i loro punti  $M'_i$  non coincidono simultaneamente coi punti  $M_i$ . *Questo fatto illustra nel modo più chiaro possibile l'affermazione che non esiste un tempo assoluto e che ciascuno dei sistemi  $S$  e  $S'$  ha il suo tempo proprio.*

## 5. Conseguenze del principio di relatività

Indicheremo ora alcune delle conseguenze più importanti del principio di relatività, senza pretendere di esaurire nemmeno l'enumerazione delle questioni che appartengono a questo immenso dominio.

I. VELOCITÀ LIMITE. - La velocità relativa  $v$  dei due sistemi non può mai superare la velocità  $c$  della luce nel vuoto, che è anche la velocità relativa limite. Infatti, per  $v > c$ , la quantità  $\beta$  nella (25) diviene immaginaria, e anche il caso  $v = c$  porta a conseguenze nettamente inammissibili. Indicheremo in seguito che segnali non possono più propagarsi, relativamente a un sistema qualsiasi, con una velocità superiore a  $c$ .

II. ETERE. - La questione dell'esistenza dell'etere è attualmente (1914) una delle più scottanti. Il dibattito pro o contro l'esistenza dell'etere è condotto con estrema vivacità, talvolta con amarezza. Contro l'etere si sono espressi Einstein, Planck, Laue, Corbino, Campbell, ecc.; per l'etere, Lorentz, Goldhammer, Wiechert, Lenard, Helm, Weinstein, ecc. È chiaro che non si può accettare l'esistenza dell'etere, se si ammette il principio di relatività in tutta la sua portata, cioè quando a priori si considerano inesistenti la quiete assoluta e il moto assoluto

e si considerano addirittura queste nozioni come prive di significato. Ma tutto l'aspetto della questione cambia se, accettati i postulati di Einstein, li si considera come l'espressione di determinate proprietà del nostro mondo, compreso l'etere, e forse anche della nostra psiche in quanto la nostra intuizione dello spazio e del tempo dipende da questo. Helm (1911) ha mostrato che l'ipotesi dell'etere, considerato come un substrato fondamentale e addirittura unico, dove gli elettroni, e di conseguenza anche la materia costituita da elettroni, sono posti in uno stato speciale (nodi), conduce immediatamente al principio di relatività. Va qui ricordato che Witte, attraverso un'analisi molto completa e molto approfondita, arriva alla conclusione che le proprietà del campo elettromagnetico non possono, con alcuna ipotesi complementari, essere spiegate utilizzando la meccanica ordinaria, se si ammette l'esistenza di un etere continuo. Witte considera inammissibile addirittura l'ipotesi di un etere con struttura atomistica.

III. RISULTATI DEGLI ESPERIMENTI. - I risultati negativi degli esperimenti descritti nel § 3 non richiedono alcuna spiegazione, quando si accetta la teoria della relatività. Al contrario, un risultato positivo contraddirebbe i postulati fondamentali di questa teoria.

IV. LUNGHEZZA E VOLUME. — Abbiamo indicato che bisogna distinguere la forma geometrica di un corpo e la sua forma cinematica. Supponiamo che un'asta sia in quiete nel sistema  $S'$ , e la sua lunghezza  $l'$  coincida con l'asse  $Ox'$ . Siano  $x'_1$  e  $x'_2$  le ascisse delle sue estremità  $M'_1$  e  $M'_2$ , in modo che  $x'_2 - x'_1 = l$  rappresenti la lunghezza geometrica dell'asta, misurata dall'osservatore  $A'$  in  $S'$ . Due osservatori  $A_1$  e  $A_2$  in  $S$  notano i punti  $M_1$  e  $M_2$  con i quali coincidono nello stesso istante  $t$  le estremità  $M'_1$  e  $M'_2$ . Se designiamo l'ascissa dei punti  $M_1$  e  $M_2$  con  $x_1$  e  $x_2$ ,  $x_2 - x_1 = l$  rappresenta la lunghezza cinematica dell'asta, misurata dagli osservatori in  $S$ . La prima delle formule (25) dà

$$x'_2 - x'_1 = \frac{1}{\beta} (x_2 - x_1) \quad l' = \frac{1}{\beta} l$$

o

$$l = \beta l' \quad (5.56)$$

*La lunghezza cinematica è inferiore alla lunghezza geometrica.* Supponiamo ora che un'altra asta  $N_1N_2 = l$  si trovi in quiete in  $S$  e sia  $x_2 - x_1 = l$ . Due osservatori  $A'_1$  e  $A'_2$  in  $S'$  notano nello stesso istante  $t'$  che i punti  $N_1$  e  $N_2$  coincidono con i punti  $N'_1$  e  $N'_2$  aventi per ascissa rispettivamente  $x'_1$  e  $x'_2$ . Allora  $l = x_2 - x_1$  è la lunghezza geometrica dell'asta (in  $S$ ) e  $l' = x'_2 - x'_1$  la sua lunghezza cinematica (in  $S'$ ); la formula (25,a) dà

$$x_2 - x_1 = \frac{1}{\beta} (x'_2 - x'_1) \quad l = \frac{1}{\beta} l'$$

o

$$l' = \beta l \quad (5.57)$$

Le formule (26) e (26,a) non sono in alcun modo contraddittorie, perché il tempo  $t'$  viene contato diversamente rispetto al tempo  $t$ . L'asta, in quiete in un sistema, appare sempre accorciata, quando la sua lunghezza viene misurata in un altro sistema in movimento rispetto al primo. Da quanto sopra risulta evidente il metodo di misura. L'accorciamento determinato dalle formule (26) e (26,a) corrisponde esattamente all'ipotesi di Fitzgerald e Lorentz che abbiamo espresso con le formule (16), cioè

$$l' = l\beta \quad (5.58)$$

C'è però una grande differenza tra queste relazioni: nella (26,b),  $l$  è la lunghezza dell'asta in quiete assoluta (nell'etere),  $l'$  è la sua lunghezza reale quando è in movimento nell'etere. Le formule (26) e (26,a) determinano l'accorciamento apparente misurato dagli osservatori che si muovono rispetto all'asta. Le lunghezze  $l'$  nelle (26) e  $l$  nella (26,a) sono per così dire analoghe alla lunghezza  $l$  nella (26,b);  $l$  nella (26) e  $l'$  nella (26,a) sono pure analoghe a  $l'$  nella (26,b);



ma  $l'$  nella (26) e  $l$  nella (26,a) si riferiscono al caso di quiete relativa, mentre  $l$  nella (26,b) si riferisce al caso di quiete assoluta.

Per un'asta perpendicolare a  $v$ , la lunghezza geometrica è uguale alla lunghezza cinematica, come si vede dalla (25) e (25,a).

Una sfera in quiete in  $S'$  appare all'osservatore in  $S$  come un ellissoide di rivoluzione appiattito (ellissoide di Heaviside). L'asse di rivoluzione parallelo a  $v$  è  $\beta$  volte più piccolo del diametro della sezione equatoriale. Quanto più  $v$  si avvicina a  $c$ , tanto più la lunghezza dell'asse di rivoluzione si avvicina a zero. Per  $v = c$ , la figura cinematica di una sfera geometrica diventa un cerchio.

Se  $V'$  è il volume di un corpo a riposo in  $S'$ , il volume  $V$  misurato da un osservatore in  $S$  è uguale a

$$V = \beta V' \quad (5.59)$$

*Il volume cinematico è inferiore al volume geometrico.* Ciò è facilmente riscontrabile considerando, ad esempio, un parallelepipedo, i cui bordi sono paralleli agli assi coordinati.

V. VELOCITÀ RELATIVA. - Passiamo ora a una delle conseguenze più paradossali del principio di relatività; si tratta della composizione delle velocità. Supponiamo che un punto  $M'$  sia abbia nel sistema  $S'$  un moto rettilineo e uniforme di velocità  $v'$ , le cui componenti indicheremo lungo gli assi  $x', y', z'$  con  $v'_x, v'_y, v'_z$  e che si trovi all'istante  $t' = 0$  in  $O'$ . Allora si ha

$$x' = v'_x t' \quad y' = v'_y t' \quad z' = v'_z t' \quad (5.60)$$

L'osservatore  $A'$  in  $S'$  misura tutte le quantità che entrano nella (27). L'osservatore  $A$  in  $S$  vede ad ogni istante  $t$  il punto in coincidenza con un certo punto  $M$  del sistema  $S$ ; indichiamo la velocità del punto  $M$  in  $S$  con  $u$  e le sue componenti lungo gli assi  $x, y, z$  con  $u_x, u_y, u_z$ . Si ha

$$x = v_x t \quad y = v_y t \quad z = v_z t \quad (5.61)$$

Poiché  $S'$  si muove rispetto a  $S$  con la velocità  $v$  lungo l'asse  $x$ , ci si deve aspettare, rispetto alle scelte fatte dei sistemi di assi, che si abbia

$$u_x = v'_x + v \quad u_y = v'_y \quad u_z = v'_z \quad (5.62)$$

cioè che  $\vec{u}$  sia la somma vettoriale delle velocità  $\vec{v}$  e  $\vec{v}'$ . Se  $\vec{v}'$  forma l'angolo  $\alpha'$  con l'asse delle  $x'$ , cioè con  $v$ , si deve avere

$$u^2 = v^2 + v'^2 + 2vv' \cos \alpha \quad (5.63)$$

Ma, sostituiamo nella (27)  $x', y', z', t'$  con le loro espressioni (25); invece di  $x' = v'_x t'$ , otteniamo

$$\frac{1}{\beta} (x - vt) = v'_x \cdot \frac{1}{\beta} \left( t - \frac{vx}{c^2} \right)$$

da cui

$$x = \frac{v + v'_x}{1 + \frac{vv'_x}{c^2}} t \quad (5.64)$$

Invece di  $y' = v'_y t'$ , abbiamo

$$y = v'_y \cdot \frac{1}{\beta} \left( t - \frac{vx}{c^2} \right)$$

o introducendo il valore (27,d) di  $x$

$$y = \frac{\beta v'_y}{1 + \frac{vv'_x}{c^2}} t \quad (5.65)$$

con una formula analoga per  $z$ . Portando la (27,d) e (27,e) nella (27,a), si ottengono le formule classiche della composizione delle velocità (sostituiamo gli indici  $x', y', z'$  con gli indici  $x, y, z$ , secondo la convenzione fatta in precedenza sulle direzioni dei due sistemi di assi)

$$u_x = \frac{v + v'}{1 + \frac{vv'_x}{c^2}} \quad (5.66)$$

$$u_y = \frac{\beta v'_y}{1 + \frac{vv'_x}{c^2}} \quad (5.67)$$

$$u_z = \frac{\beta v'_z}{1 + \frac{vv'_x}{c^2}} \quad (5.68)$$

che devono essere sostituite alle formule (27,b) inizialmente introdotte.

Facciamo ruotare gli assi in modo che  $\vec{v}'$  venga nel piano  $x'Oy'$ ; si ha allora  $v'_x = 0$  e  $u_x = 0$ . Sia  $\alpha'$  l'angolo tra  $\vec{v}'$  e  $O'x'$ , misurato nel sistema  $S'$ ; si ha  $\cos \alpha' = v'_x : v$  e  $\sin \alpha' = v'_y : v$ . Poiché  $v'^2$  e  $u^2$  sono uguali alla somma dei quadrati delle loro componenti, si deduce dalle (28) e (28,a) che

$$u^2 = \frac{v^2 + v'^2 + 2vv' \cos \alpha' - \left(\frac{vv' \sin \alpha'}{c}\right)^2}{\left(1 + \frac{vv' \cos \alpha'}{c}\right)^2} \quad (5.69)$$

invece della formula (27,c) inizialmente prevista.

La regola ben nota del parallelogramma delle velocità dà, per l'angolo  $\alpha_0$  tra  $\vec{u}$  e  $Ox$ , l'espressione

$$\tan \alpha_0 = \frac{v' \sin \alpha'}{v + v' \cos \alpha'} \quad (5.70)$$

Per contro, l'angolo  $\alpha$  tra  $\vec{u}$  e  $Ox$ , misurato nel sistema  $S$ , ha per espressione, dalla (28) e (28,a)

$$\tan \alpha = \frac{u_y}{u_x} = \frac{\beta v'_y}{v + v'_x} = \frac{\beta v' \sin \alpha'}{v + v' \cos \alpha'}$$

da cui

$$\tan \alpha = \beta \tan \alpha_0 \quad (5.71)$$

Questa relazione mostra nella maniera più netta che la regola del parallelogrammo delle velocità è qui inapplicabile. Quando  $\alpha' = 90^\circ$ , cioè quando  $\vec{v}'$  è perpendicolare a  $\vec{v}$ , si ha

$$u^2 = v^2 + v'^2 - \left(\frac{vv'}{c}\right)^2 \quad (5.72)$$

Se nello stesso tempo  $v = v'$  e ci si deve quindi attendere che  $\alpha_0 = 45^\circ$  e  $\tan \alpha_0 = 1$ , si ottiene  $\tan \alpha = \beta = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ . Il caso in cui  $\vec{v}'$  ha la direzione dell'asse  $O'x'$  presenta un particolare interesse: si ha allora  $v'_x = v'$ ,  $v'_y = v'_z = u_y = u_z = 0$  e pertanto  $u_x = u$ ; ci si attendeva

$$u = v + v'$$

ma la (28) dà

$$u = \frac{v + v'}{1 + \frac{vv'}{c^2}} \quad (5.73)$$

Questa formula distrugge completamente la nozione che abbiamo di velocità relativa. Quando una nave si sposta lungo una riva con velocità  $v$  e un oggetto si muove sul ponte di questa nave con velocità  $v'$  nella stessa direzione, l'osservatore, che misura la velocità dalla riva dell'oggetto,

non troverà il valore  $u + v'$ , ma quello dato dalla formula (30). La grandezza  $u$  non può mai superare  $c$ , per quanto vicine a  $c$  possano essere  $v$  e  $v'$ . Poniamo  $v = (1 - \alpha)c$ ,  $v' = (1 - \alpha')c$ , dove  $\alpha$  e  $\alpha'$  sono frazioni arbitrarie piccole; la (30) dà

$$u = \frac{2 - \alpha - \alpha'}{2 - \alpha - \alpha' + \alpha\alpha'}c < c \quad (5.74)$$

Poniamo  $v = c$  nella (30), si ottiene allora  $u = c$ . Non importa quale sia la velocità  $v'$  che si somma a  $c$ , il risultato è sempre uguale a  $c$ . La velocità  $c$  gioca in fisica un ruolo analogo a quello dell'infinito in matematica; è una velocità limite. Anche se  $v = c$  e  $v' = c$ , la formula (30) dà  $u = c$ . Supponiamo che, nel sistema S, il punto O' si muova lungo  $Ox$  con la velocità  $v = c$ ; l'osservatore A in S trova al tempo  $t$ , per l'ascissa del punto O', il valore  $x = ct$ . Consideriamo anche un punto M' che si muove in S', lungo  $O'x'$ , con velocità  $c$ ; l'osservatore A' in S' si trova all'istante  $t'$ , per l'ascissa del punto M', il valore  $x' = ct'$ . Tuttavia l'osservatore A in S rileva che all'istante  $t$  l'ascissa del punto M' è  $x = ct$ , in altre parole che il punto M' coincide con O'. In questo caso singolare, la quantità  $\beta$ , nelle formule (25), si annulla. Non è tutto: se  $v = c$  e se  $\vec{v}'$ , avente un valore qualsiasi, forma in S' un qualsiasi angolo  $\alpha'$  con l'asse  $O'x'$  (anche se  $\alpha' = 90^\circ$ ), si ha  $u = u_x = c$ ,  $u_y = u_z = 0$ , cioè M' appare all'osservatore A (in S) coincidere costantemente con O'.

È molto interessante notare che la (30) porta immediatamente alla formula (7,a), che esprime il risultato del famoso esperimento di Fizeau. L'acqua (S') scorre rispetto all'osservatore A (in S) con velocità  $v$ . Il raggio luminoso si propaga in S' con velocità  $v' = c : n$ , essendo  $n$  l'indice di rifrazione dell'acqua. L'osservatore A in S ottiene, per la velocità del raggio, il valore  $u = c'$ . Portiamo questi valori nella (30); abbiamo, essendo  $v$  molto piccolo rispetto a  $c$ ,

$$c' = \frac{v + \frac{c}{n}}{1 + \frac{v}{cn}} = v + \frac{c}{n} \left(1 - \frac{v}{cn}\right) = \frac{c}{n} + \frac{n^2 - 1}{n^2}v$$

vale a dire la formula (7,a), che appare solo come approssimata; per grandi valori di  $v$ , bisognerebbe mantenere la formula esatta per  $c'$ , senza fare i calcoli di approssimazione effettuati. L'osservatore A', che misurasse la velocità  $v'$  della luce nell'acqua che scorre a qualsiasi velocità, troverebbe per questa velocità il valore  $v' = c : n$ .

Einstein, Laue e altri hanno dimostrato che, per l'osservatore A in S, non solo la velocità di un corpo, ma anche la velocità di qualsiasi segnale non può superare la grandezza  $c$ . Nel Volume II (Cap. VI, § 9 e Cap. VII, § 21), abbiamo visto che, in certi casi, l'indice di rifrazione  $n$  è minore dell'unità e quindi la velocità della luce è maggiore di  $c$ . Ma Sommerfeld (1907) ha spiegato questa apparente contraddizione con una delle conseguenze del principio di relatività.

Abbiamo spiegato in dettaglio, in primo luogo le considerazioni ed i fatti che conducono alla nuova teoria; abbiamo poi formulato le basi su cui si fonda questa teoria e indicato alcune delle sue conseguenze. Nel seguito dovremo limitarci ad una più rapida panoramica degli altri risultati che fornisce; ci concentreremo principalmente nel dare un'idea chiara delle questioni affrontate, tralasciando le dimostrazioni.

VI. IL PRINCIPIO DOPPLER. ABERRAZIONE. - Abbiamo fatto conoscere, nel volume I, il principio di Doppler e abbiamo stabilito la formula

$$n_1 = n \frac{V + u}{V - u'} \quad (5.75)$$

dove  $n$  rappresenta il numero di vibrazioni nell'unità di tempo della sorgente Q (del suono o della luce),  $V$  la velocità di propagazione della vibrazioni nel mezzo intermedio tra la sorgente Q e l'osservatore A (ad esempio aria, etere),  $u$  la velocità dell'osservatore A diretta verso Q,  $u'$  la velocità della sorgente Q diretta verso A, per cui  $u$  e  $u'$  positivi corrispondono al reciproco

avvicinamento della sorgente Q e dell'osservatore A; infine  $n$  è il numero di vibrazioni percepite dall'osservatore A. Adesso cambieremo un po' le notazioni; scriveremo in particolare  $c$  invece di  $V$ . Considereremo inoltre QA come la direzione positiva delle velocità. Sia  $v$  la velocità dell'osservatore nella direzione della retta prolungata QA; si ha allora, nella formula (31),  $u = -v$ ; indichiamo la velocità della sorgente (da Q verso A) con  $v' = u'$  e scriviamo  $n_0$  invece di  $n_1$ . La formula (31) assume quindi la forma seguente:

$$n_0 = n \frac{c - v}{c - v'} \quad (5.76)$$

Si vede che  $v$  e  $v'$  hanno ruoli differenti. Quando  $v$  e  $v'$  sono molto piccoli rispetto a  $c$ , si ottiene, introducendo la velocità relativa  $u = v - v'$

$$n_0 = n \left( 1 - \frac{v}{c} \right) \quad (5.77)$$

Nella teoria della relatività non si può parlare di velocità assolute  $v$  e  $v'$ , né, in particolare, di velocità simultanee  $v$  e  $v'$ , a meno di introdurre, al di fuori dei sistemi S e S' a cui appartengono rispettivamente Q e A, un terzo sistema S" rispetto al quale Q e A sarebbero in movimento, il che costituirebbe una complicazione inutile. Dobbiamo distinguere due casi, che ora considereremo generalizzandoli.

A. Nel sistema S si trova la sorgente Q e, in questo sistema, la velocità  $\vec{v}$  dell'osservatore A' forma con la retta QA prolungata l'angolo  $\varphi$ . Si ha allora

$$n_1 = n \frac{1 - \frac{v}{c} \cos \varphi}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = n \frac{1 - \frac{v}{c} \cos \varphi}{\beta} \quad (5.78)$$

Per  $\varphi = 0$

$$n_1 = \frac{n}{\beta} \left( 1 - \frac{v}{c} \right) \quad (5.79)$$

mentre, dalla (31,a)

$$n_0 = n \left( 1 - \frac{v}{c} \right) \quad (5.80)$$

B. Nel sistema S si trova l'osservatore Ae, in questo sistema, la velocità  $\vec{v}$  della sorgente Q forma con la retta QA l'angolo  $\varphi'$ . Si ha in questo caso

$$n_1 = n \frac{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}}{1 - \frac{v'}{c} \cos \varphi'} = \frac{n\beta'}{1 - \frac{v'}{c} \cos \varphi'} \quad (5.81)$$

Per  $\varphi' = 0$

$$n_1 = \frac{n\beta'}{1 - \frac{v'}{c}} \quad (5.82)$$

mentre dalla (31,a)

$$n_0 = \frac{n}{1 - \frac{v'}{c}} \quad (5.83)$$

È chiaro che, per piccoli valori di  $v$  o  $v'$ , si ottengono formule identiche alla (31,b), essendo  $u$  uguale a  $v$  oppure,  $v'$ . È interessante confrontare la (32,a) e (33,a) con la (31,a)

1. Per  $v = c$ , si ha  $n_0 = 0$  e  $n_1 = 0$ .
2. Per  $v' = c$ , si ha  $n_0 = \infty$  e  $n_1 = \infty$ .
3. Per  $v = -c$  (l'osservatore si avvicina alla sorgente con velocità  $c$ ), si ha  $n_0 = 2n$ , ma  $n_1 = \infty$ .

Per  $v' = -c$  (la sorgente si allontana dall'osservatore con la velocità  $c$ ), si ha  $n_0 = \frac{1}{2}n$ , ma  $n_1 = 0$ .

Gli ultimi due casi sono particolarmente importanti; ma ancor più importanza va data al caso in cui i movimenti avvengono perpendicolarmente alla linea QA. La vecchia teoria dà  $n_0 = n$ ; la velocità tangenziale delle stelle non sposta le righe dello spettro; ma, dalla (32), si ha, per  $\varphi = 90^\circ$

$$n_1 = \frac{n}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{n}{\beta} \quad (5.84)$$

Analogamente, dalla (33), si ha, per  $\varphi' = 90^\circ$ ,

$$n_1 = n\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}} = n\beta' \quad (5.85)$$

Una conferma sperimentale di queste ultime due formule sarebbe della massima importanza. Forse ciò si otterrà studiando i flussi luminosi prodotti nei gas rarefatti trasmessi dalle scariche elettriche.

Abbiamo già trattato dell'aberrazione astronomica nel Volume II (Cap. III, § 3). La teoria della relatività porta al seguente risultato. Supponiamo ancora che, nel sistema S a cui appartiene la sorgente Q, la velocità  $v$  dell'osservatore A formi con il raggio prolungato QA (cioè con la normale alla superficie dell'onda) l'angolo  $\varphi$ . Nel sistema S' a cui appartiene l'osservatore A, il raggio prolungato QA forma con la direzione della velocità  $v$  l'angolo  $\varphi'$  determinato dalla formula

$$\cos \varphi' = \frac{\cos \varphi - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c} \cos \varphi} \quad (5.86)$$

da cui si deduce l'angolo di aberrazione  $\alpha = \varphi' - \varphi$ ; si ha

$$\sin \alpha = \frac{\frac{v}{c} - (1 - \beta) \cos \varphi}{1 - \frac{v}{c} \cos \varphi} \sin \varphi \quad (5.87)$$

mentre il risultato dato per questa quantità dalla teoria elementare si scrive abitualmente nel modo seguente:

$$\sin \alpha_0 = \frac{v}{c} \sin \varphi \quad (5.88)$$

Per  $\varphi = 0$ , si ha  $\alpha_0 = \alpha = 0$ ; per  $\varphi = 90^\circ$ , si ha, come nella teoria elementare

$$\sin \alpha = \sin \alpha_0 = \frac{v}{c} \quad (5.89)$$

VII. IL CAMPO ELETTROMAGNETICO. - Presenteremo la teoria sviluppata da Einstein, ma in forma abbreviata e con notazioni leggermente modificate. Supponiamo che, nel sistema S, esista un campo elettrico  $\vec{E}(X, Y, Z)$  e un campo magnetico,  $\vec{H}(L, M, N)$ ; sia  $\rho$  la densità dell'elettricità, che è in movimento con la velocità  $\vec{u}(u_x, u_y, u_z)$ . Le equazioni di campo possono, come abbiamo visto, essere scritte nella forma

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{4\pi}{c} \vec{u} \rho + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \text{rot} \vec{H} \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\text{rot} \vec{E} \\ 4\pi \rho = \text{div} \vec{E} \end{array} \right. \quad (5.90)$$

Il sistema S' si muove rispetto a S con la velocità  $v$ , nella direzione comune agli assi  $Ox$  e  $Ox'$ . Le formule (25,a) danno, nel sistema S', le equazioni

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{4\pi}{c} \vec{u}' \rho' + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}'}{\partial t'} = \text{rot} \vec{H}' \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}'}{\partial t'} = -\text{rot} \vec{E}' \\ 4\pi \rho' = \text{div} \vec{E}' \end{array} \right. \quad (5.91)$$

se si definiscono le componenti  $X', Y', Z'$  della grandezza diretta  $\vec{E}'$  e le componenti  $L', M', N'$  della grandezza diretta  $\vec{H}'$  dalle formule

$$X' = X \quad Y' = \frac{1}{\beta} \left( Y - \frac{v}{c} N \right) \quad Z' = \frac{1}{\beta} \left( Z + \frac{v}{c} M \right) \quad (5.92)$$

$$L' = X \quad M' = \frac{1}{\beta} \left( M + \frac{v}{c} Z \right) \quad N' = \frac{1}{\beta} \left( N - \frac{v}{c} Y \right) \quad (5.93)$$

e se si pone

$$\rho' = \frac{1}{\beta} \left( 1 - \frac{vu_x}{c^2} \right) \rho \quad (5.94)$$

si ha inoltre dalla (28), (28,a) e (28,b)

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} \quad (5.95)$$

$$u'_y = \frac{\beta u_y}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} \quad u'_z = \frac{\beta u_z}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} \quad (5.96)$$

Le equazioni (35,a) sono di forma identica a quella delle equazioni (35) e otteniamo il risultato che la trasformazione di Lorentz non cambia la forma delle equazioni del campo elettromagnetico, se si interpreta  $\rho'$  come la densità dell'elettricità e  $\vec{E}'(X', Y', Z')$ ,  $\vec{H}'(L', M', N')$  come le rispettive intensità del campo elettrico e del campo magnetico nel sistema S'.

Particolarmente importanti sono le equazioni (35,b) e (35,c); mostrano che il campo elettrico e il campo magnetico non esistono isolatamente e da soli. Ciò che, ad esempio, in un sistema appare come campo magnetico, può apparire nell'altro sistema come campo elettrico. Quando nel sistema S c'è solo un campo magnetico  $\vec{H}$  e si suppone un elettrone in moto in questo campo, allora, nel sistema S' dove l'elettrone è immobile, su di esso agisce un campo elettrico, le cui componenti sono uguali ha  $X' = 0$ ,  $Y' = -\frac{v}{c} N$  e  $Z' = -\frac{v}{c} M$ .

Einstein ha mostrato che la questione controversa su dove viene applicata la forza elettromotrice nell'induzione unipolare è completamente rimossa; tutto dipende dal sistema in cui si considera il fenomeno.

Dalle formule (26,c) e (35,d) segue che l'intensità  $e$  della carica elettrica in S non cambia quando si passa al sistema S', vale a dire che si ha

$$e' = e \quad (5.97)$$

VIII. FORZA E MASSA. - Supponiamo che nel punto  $x', y', z'$  del sistema S' ci sia un elettrone  $e$  a riposo e che all'istante  $t'_0$  (in S l'istante corrispondente è  $t_0$ ) cominci ad agire su questo elettrone la forza  $\vec{E}'$ ; acquista allora un'accelerazione determinata dalle seguenti equazioni

$$m \frac{d^2 x'}{dt'^2} = e X' \quad m \frac{d^2 y'}{dt'^2} = e Y' \quad m \frac{d^2 z'}{dt'^2} = e Z' \quad (5.98)$$

indicando  $m$  la massa dell'elettrone a riposo in S'. Trasformiamo la (37), passando al sistema S dove l'elettrone possiede all'istante  $t = t_0$  la velocità iniziale  $v$ . Si ottiene

$$\frac{m}{\beta^3} \frac{d^2 x}{dt^2} = e X \quad (5.99)$$

$$\frac{m}{\beta} \frac{d^2 y}{dt^2} = e \left( Y - \frac{v}{c} N \right) \quad \frac{m}{\beta} \frac{d^2 z}{dt^2} = e \left( Z + \frac{v}{c} M \right) \quad (5.100)$$

Poiché  $v$  è parallela all'asse  $x$ , è chiaro che  $m : \beta^3$  non è altro che ciò che abbiamo chiamato la massa longitudinale e  $m : \beta$  quella che è stata chiamata massa trasversale. La teoria della relatività conduce quindi, per le due masse, alle stesse espressioni della teoria di Lorentz, mentre

la teoria di Max Abraham dà espressioni diverse. Faremo ulteriormente conoscere gli esperimenti di Kaufmann, Bestelmeyer, Bucherer e Hupka effettuati allo scopo di determinare quali formule corrispondono alla realtà. Gli esperimenti di Bucherer e Hupka sono favorevoli alla teoria di Lorentz e quindi alla teoria della relatività, tuttavia, anche se i risultati di questi esperimenti non potessero essere messi in dubbio in alcun modo, ciò non porterebbe ad una conferma dell'esattezza assoluta della teoria della relatività, perché la teoria di Lorentz porta alle stesse formule.

Einstein ha generalizzato le equazioni (38) e (38,a), considerando il caso in cui l'elettrone ha, nel sistema S e in un dato istante, una velocità diretta arbitrariamente.

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \quad (5.101)$$

Si ottengono allora le equazioni

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m}{\beta} \frac{dx}{dt} \right) = F_x \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{m}{\beta} \frac{dy}{dt} \right) = F_y \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{m}{\beta} \frac{dz}{dt} \right) = F_z \quad (5.102)$$

dove

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (5.103)$$

e

$$F_x = e \left( X + \frac{N}{c} \frac{dy}{dt} - \frac{M}{c} \frac{dz}{dt} \right) \quad (5.104)$$

con espressioni analoghe per  $F_y$  e  $F_z$ . Chiameremo il vettore  $\vec{F}$  ( $F_x, F_y, F_z$ ) la forza agente su  $e$ .

Per l'elettrone che si trova in un campo elettromagnetico sono state stabilite le equazioni (39) e le espressioni (39,b). Ma Einstein fa ora un'ipotesi audace: *ammette che le equazioni (39) danno anche l'espressione della forza in un sistema materiale ordinario*. Se ci si rifiutasse di fare questo nuovo passo avanti, accadrebbe che le equazioni fondamentali del moto dell'elettrone rimarrebbero invarianti nella trasformazione di Lorentz, mentre le equazioni del moto della materia ponderabile rimarrebbero invarianti solo nella trasformazione di Newton. Le equazioni del moto della meccanica newtoniana devono quindi essere sostituite dalle equazioni (39) che, per  $v : c$  molto piccolo, cioè per  $\beta = 1$ , si riducono alle equazioni della dinamica classica. Come già aveva proposto Wien, Einstein fonda la meccanica su nuove basi elettromagnetiche, alle quali si può così attribuire una nuova concezione dell'universo; *non è la meccanica newtoniana che deve spiegare tutti i fenomeni, compresi quelli elettromagnetici; ma sono, al contrario, le leggi dei fenomeni elettromagnetici che devono costituire i principi primi della meccanica della materia che ci circonda*. Planck (1907) ha proposto addirittura di costruire non solo la Meccanica, ma tutta la Fisica, a partire dal principio di relatività e dal principio di minima azione; introduce quest'ultimo principio senza modifiche nella nuova meccanica, dandogli l'importanza di un principio universale. Abbiamo già visto, nel capitolo precedente, come Schwarzschild, Lorentz e Poincaré avessero dedotto dal principio di minima azione tutta la dinamica dell'elettrone.

IX. ENERGIA. - Sia  $m$  la massa di un punto materiale in quiete relativa. Le equazioni (39) mostrano che, nel moto relativo, la massa del punto diventa uguale a

$$m = \frac{m_0}{\beta} \quad (5.105)$$

L'aumento  $\mu$  della massa è quindi

$$\mu = m - m_0 = m_0 \left( \frac{1}{\beta} - 1 \right) \quad (5.106)$$

Supponiamo che sulla massa agisca la forza  $f$  nell'intervallo di tempo  $dt$ ; la sua energia cinetica  $\eta$  riceve allora l'incremento  $d\eta = f v dt$ ; ma si ha  $f dt = d(mv) = m dv + v dm$  e quindi  $d\eta = m v dv + v^2 dm$ , o, dalla (40)

$$d\eta = m_0 \left( \frac{v dv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + v^2 d \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

Integrandola, si deduce che

$$\eta = m_0 c^2 \left( \frac{1}{\beta} - 1 \right) \quad (5.107)$$

e sviluppando il valore di  $\beta$  secondo le potenze di  $\frac{v}{c}$

$$\eta = \frac{1}{2} m_0 v^2 \left( 1 + \frac{3}{4} \frac{v^2}{c^2} + \dots \right) \quad (5.108)$$

L'espressione usuale dell'energia cinetica rappresenta quindi solo una prima approssimazione; quando  $v$  è grande, essa è molto più grande di  $\frac{1}{2} m_0 v^2$  e diventa infinita per  $v = c$ . È dunque necessaria una quantità infinita di lavoro perché la velocità di un punto materiale diventi uguale a  $c$ ; da ciò si vede molto chiaramente che questa velocità ha un limite che praticamente non può essere raggiunto. Ma il risultato più sorprendente è fornito dalle formule (40,a) e (41); si ha

$$\mu = \frac{\eta}{c^2} \quad (5.109)$$

L'ENERGIA CINETICA  $\eta$  HA UN COEFFICIENTE D'INERZIA  $\mu = \eta : c^2$ . Wien ha stabilito la formula (42) considerando l'energia radiante  $\eta$  che un corpo emette nel vuoto per unità di tempo. Questa energia radiante esercita una pressione  $\eta : c$  sul corpo, che gli darebbe un moto assoluto, il che è impossibile; ma se si ammette che l'energia  $\eta$  abbia la massa  $\mu$ , ci si riduce semplicemente ad un rinculo (come in un'arma da fuoco), restando fisso il centro d'inerzia. L'uguaglianza degli impulsi dà  $\eta : c = \mu c$ , da qui la relazione (42).

Tutte le forme di energia possono trasformarsi l'una nell'altra, questo risultato si generalizza dicendo che OGNI FORMA DI ENERGIA  $\eta$  HA UN CERTO COEFFICIENTE D'INERZIA DETERMINATO DALLA FORMULA (42);  $\mu$  rappresenta il coefficiente di inerzia. Non ci chiederemo, per il momento, se anche l'energia abbia una massa ponderabile e indicheremo la serie di notevoli conseguenze che da quanto sopra abbiamo dedotto.

1. Quando un corpo acquista o cede energia, la sua massa cambia. Se  $2 g$  di idrogeno si combinano con  $16 g$  di ossigeno, vengono rilasciati  $2,87 \cdot 10^{12} erg$  di calore; di conseguenza non si ottengono  $18 g$  di acqua, ma  $3,2 \cdot 10^{-6} mg$  in meno (Planck). La legge della costanza delle massa nelle reazioni chimiche sembra essere imprecisa.

2. *La massa di un corpo dipende dalla sua temperatura.* All'interno di ogni corpo c'è una riserva di energia radiante, che ha una certa massa e dipende dalla temperatura. Planck ha mostrato che se un gas è alla pressione di  $0,001 mm$  e alla temperatura di fusione del platino ( $1790^\circ C$ ),  $0,25$  dell'apporto termico è utilizzato per aumentare la quantità di energia radiante all'interno del gas.

3. Se tutta l'energia  $\eta$  possiede una massa  $\mu = \eta : c^2$ , ne segue che l'energia e la massa sono equivalenti e che tutta la massa  $m_0$  a riposo è identica alla colossale quantità di energia

$$E_0 = m_0 c^2 \quad (5.110)$$

Questa energia rimane quasi interamente nel corpo alla temperatura dello zero assoluto ( $T = 0$ ). L'energia percepibile che il corpo possiede anche in qualsiasi altra condizione fisica e nei moti più rapidi è estremamente piccola rispetto all'energia che contiene alla temperatura  $T = 0$



e che Planck ha chiamato *energia latente*. Egli ha proposto di considerare l'energia liberata nella disintegrazione degli atomi delle sostanze radioattive come proveniente proprio dall'energia latente. La massa di un grammo-atomo di radio diminuisce, nell'arco di un anno, di  $0,012\text{ mg}$ , che si trasformano in energia.

4. Quando una massa  $m_0$  in quiete acquista la velocità  $v$ , la sua massa diviene uguale a  $m = m_0 : \beta$  e pertanto la quantità totale di energia  $E$  diviene uguale a

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m_0 c^2 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} + \dots \right) \quad (5.111)$$

o

$$E = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{3}{8} m_0 \frac{v^4}{c^2} + \dots \quad (5.112)$$

Questa sorprendente formula dimostra che la grandezza  $\frac{1}{2} m_0 v^2$ , comunemente chiamata energia cinetica del corpo in movimento, costituisce solo una piccolissima parte dell'energia corrispondente al passaggio dal sistema  $S'$ , dove il corpo è in quiete, al sistema  $S$  rispetto al quale  $S'$  è in moto. Negli altri casi sopra considerati la variazione di quantità dell'energia cinetica non è misurabile; per i nostri sensi, la colossale quantità  $m_0 c^2$  rimane nascosta e abbiamo praticamente a che fare solo con la sua piccolissima variazione  $\frac{1}{2} m_0 v^2$ .

X. **PRESSIONE, TEMPERATURA, ENTROPIA E GRAVITAZIONE.** - Planck e Einstein hanno mostrato che, nel passaggio dal sistema  $S$  al sistema  $S'$ , si hanno le seguenti formule di trasformazione per la pressione  $p$ , la temperatura assoluta  $T$  e l'entropia  $\Sigma$  di un corpo in quiete in  $S$ ,

$$p' = p \quad (5.113)$$

$$T' = T\beta = T\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (5.114)$$

$$\Sigma' = \Sigma \quad (5.115)$$

*La pressione e l'entropia non cambiano quando si passa da  $S$  a  $S'$ . La temperatura del corpo, nel sistema rispetto al quale si muove, è inferiore a quella del sistema rispetto al quale è in quiete.*

Einstein (1907) ha esteso il principio di relatività al caso in cui un sistema è animato da un moto uniformemente vario rispetto ad un altro sistema, e ha studiato la questione strettamente legata alla precedente del campo di forze dovuto alla gravitazione e all'azione di tale un campo sui fenomeni elettromagnetici. Si parte dal fatto che, in un campo uniforme dovuto alla gravitazione, tutti i corpi cadono con la stessa velocità. Dobbiamo limitarci ad indicare i seguenti due risultati che egli ha ottenuto in questo nuovo ordine di ricerca.

1. L'energia  $E$  non solo ha un coefficiente di inerzia, ma anche la massa ponderabile  $\mu = E : c^2$ .

2. *Un raggio luminoso subisce una deviazione in un campo di forza a causa della gravitazione.* L'entità di questa deviazione è proporzionale: a  $\sin \varphi$ , dove  $\varphi$  indica l'angolo tra la direzione del raggio e quella della forza gravitazionale. Einstein (1911) ha dato, in un nuovo lavoro, la formula

$$\alpha = \frac{2kM}{c^2 R} \quad (5.116)$$

dove  $\alpha$  è la deviazione di un raggio che passa davanti ad una massa sferica  $M$  (ad esempio la massa di una stella);  $k$  è la costante gravitazionale,  $R$  è la distanza dal centro della sfera al raggio. Per un raggio che passa in prossimità della superficie del Sole troviamo  $\alpha = 0,83''$ , cioè una quantità che possiamo misurare, osservando, ad esempio, la posizione di una stella vicino al bordo della superficie Sole, durante un'eclissi solare.

6. **LA TEORIA DI MINKOWSKI.** - Nel 1907 è stata pubblicata un'opera notevole da parte di Minkowski (che purtroppo morì pochi anni dopo, nel 1909). Questo lavoro ha dato alla

teoria della relatività una forma matematica completamente nuova. Le idee di Minkowski hanno ricevuto rapidamente un ampio sviluppo, la cui esposizione si troverà nel lavoro di Laue, *Das Relativitätsprinzip*, Braunschweig, 1913.

In una conferenza del 21 settembre 1908, Minkowski esordisce con questa frase divenuta classica: “attualmente, le nozioni di spazio e di tempo, considerate come indipendenti e in se stesse, devono essere abbandonate, e solo la loro unione può possedere l'individualità.

Minkowski unisce spazio e tempo in un tutto inseparabile, che chiama universo: questo universo è tradotto in linguaggio geometrico da uno spazio quadridimensionale, in cui il tempo gioca il ruolo della quarta dimensione. Un punto nell'universo ha quattro coordinate: prima le coordinate  $x, y, z$ , poi una quarta coordinata che possiamo assumere uguale a  $ct$ . La storia di un punto nell'universo è rappresentata da una curva dell'universo, che è una generalizzazione della curva  $S$ , quando alle due coordinate  $x$  e  $y$  si aggiunge, in uno spazio bidimensionale, una terza coordinata  $t$ . Ma si ottiene un sistema di coordinate incomparabilmente più elegante, prendendo come quarta coordinata di un punto dell'universo, non  $ct$ , ma  $ict$ , dove  $i = \sqrt{-1}$ . Se si adottano le notazioni  $x_1, x_2, x_3$  invece di  $x, y, z$  e se si prende  $x_4 = ict$ , si hanno abbiamo quattro coordinate dell'universo  $x_1, x_2, x_3, x_4$  il cui uso dà alle formule, come vedremo, una marcata simmetria. Pertanto, l'equazione fondamentale (19), assume la forma

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2 \quad (5.117)$$

Anche le equazioni del campo elettromagnetico prendono una forma perfettamente simmetrica. Scegliendo opportunamente le unità, si possono scrivere queste equazioni

$$\begin{cases} \text{rot} \vec{H} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \rho \vec{v} \\ \text{div} \vec{E} = \rho \end{cases} \quad (5.118)$$

$$\begin{cases} \text{rot} \vec{E} + \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0 \\ \text{div} \vec{H} = 0 \end{cases} \quad (5.119)$$

Qui dobbiamo scrivere  $x_1, x_2, x_3, x_4$  per  $x, y, z, it$  (essendo la velocità della luce considerata uguale all'unità). Scriviamo inoltre  $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ , per  $\rho v_x, \rho v_y, \rho v_z, i\rho$ , cioè per le componenti della corrente convettiva  $\rho \vec{v}$  e la densità di volume dell'elettricità moltiplicata per  $i$ , e

$$f_{23}, f_{31}, f_{12}, f_{14}, f_{24}, f_{34}$$

per

$$H_x, H_y, H_z, -iE_x, iE_y, iE_z$$

cioè per le componenti del campo magnetico  $\vec{H}$  e per quelle di  $-i\vec{E}$ , essendo  $\vec{E}$  il campo elettrico. Supponiamo infine che si abbia

$$f_{hk} = -f_{kh}$$

La prima equazione (51) e la seconda moltiplicata per  $i$  si trasformano allora nel sistema

$$\begin{cases} \begin{matrix} \cdot & \frac{\partial f_{12}}{\partial x_2} + & \frac{\partial f_{13}}{\partial x_3} + & \frac{\partial f_{14}}{\partial x_4} & = & \rho_1 \\ \frac{\partial f_{21}}{\partial x_1} & \cdot & \frac{\partial f_{23}}{\partial x_3} + & \frac{\partial f_{24}}{\partial x_4} & = & \rho_2 \\ \frac{\partial f_{31}}{\partial x_1} + & \frac{\partial f_{32}}{\partial x_2} + & \cdot & \frac{\partial f_{34}}{\partial x_4} & = & \rho_3 \\ \frac{\partial f_{41}}{\partial x_1} + & \frac{\partial f_{42}}{\partial x_2} + & \frac{\partial f_{43}}{\partial x_3} & \cdot & = & \rho_4 \end{matrix} \end{cases} \quad (5.120)$$

Analogamente la prima equazione (52) e la seconda moltiplicata per  $i$  danno il sistema

$$\begin{cases} \begin{matrix} \cdot & \frac{\partial f_{34}}{\partial x_2} + & \frac{\partial f_{42}}{\partial x_3} + & \frac{\partial f_{23}}{\partial x_4} & = & 0 \\ \frac{\partial f_{43}}{\partial x_1} & \cdot & \frac{\partial f_{14}}{\partial x_3} + & \frac{\partial f_{31}}{\partial x_4} & = & 0 \\ \frac{\partial f_{24}}{\partial x_1} + & \frac{\partial f_{41}}{\partial x_2} + & \cdot & \frac{\partial f_{12}}{\partial x_4} & = & 0 \\ \frac{\partial f_{32}}{\partial x_1} + & \frac{\partial f_{13}}{\partial x_2} + & \frac{\partial f_{21}}{\partial x_3} & \cdot & = & 0 \end{matrix} \end{cases} \quad (5.121)$$

Questi due sistemi hanno, come vediamo, una simmetria completa rispetto agli indici 1, 2, 3, 4.

Evidenzieremo ora l'invarianza (o più precisamente la covarianza) dei sistemi (53) e (54) in un rotazione del sistema di coordinate attorno all'origine. Consideriamo innanzitutto una rotazione attorno all'asse  $z$ , ad esempio, dell'angolo  $\varphi$ :

$$x'_1 = x_1 \cos \varphi + x_2 \sin \varphi \quad x'_2 = -x_1 \sin \varphi + x_2 \cos \varphi \quad x'_3 = x_3 \quad x'_4 = x_4$$

esprimendo che i vettori  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$ , rimanendo  $\vec{v}$  fissate in queste rotazione, si ha

$$\begin{aligned} \rho'_1 &= \rho_1 \cos \varphi + \rho_2 \sin \varphi & \rho'_2 &= -\rho_1 \sin \varphi + \rho_2 \cos \varphi & \rho'_3 &= \rho_3 & \rho'_4 &= \rho_4 \\ f'_{23} &= f_{23} \cos \varphi + f_{31} \sin \varphi & f'_{31} &= -f_{23} \sin \varphi + f_{31} \cos \varphi & f'_{12} &= f_{12} \\ f'_{14} &= f_{14} \cos \varphi + f_{24} \sin \varphi & f'_{24} &= -f_{14} \sin \varphi + f_{24} \cos \varphi & f'_{34} &= f_{34} \end{aligned}$$

e si verifica che i sistemi (53) e (54) si trasformano in sistemi identici dove le nuove quantità sono accentuate.

Consideriamo ora un angolo  $i\psi$  la cui ampiezza è puramente immaginaria. A causa della simmetria che abbiamo stabilito sopra, siamo portati a considerare la rotazione

$$x'_1 = x_1 \quad x'_2 = x_2 \quad x'_3 = x_3 \cos i\psi + x_4 \sin i\psi \quad x'_4 = -x_3 \sin i\psi + x_4 \cos i\psi$$

Se si pone  $\tan i\psi = i\beta$ , si ha  $\cos i\psi = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ ,  $\sin i\psi = \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$ , dove  $-1 < \beta < 1$  e  $\sqrt{1-\beta^2}$  deve essere preso con il segno positivo. Scrivendo inoltre

$$x'_1 = x' \quad x'_2 = y' \quad x'_3 = z' \quad x'_4 = it'$$

la rotazione assume la forma

$$x' = x \quad y' = y \quad z' = \frac{z - \beta t}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad t' = \frac{-\beta z + t}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (5.122)$$

e i coefficienti di questa trasformazione diventano reali. Se si introducono le nuove grandezze

$$\begin{aligned} \rho'_1 &= \rho_1 & \rho'_2 &= \rho_2 & \rho'_3 &= \rho_3 \cos i\psi + \rho_4 \sin i\psi & \rho'_4 &= -\rho_3 \sin i\psi + \rho_4 \cos i\psi \\ f'_{41} &= f_{41} \cos i\psi + f_{13} \sin i\psi & f'_{13} &= -f_{41} \sin i\psi + f_{13} \cos i\psi & f'_{31} &= f_{34} \\ f'_{32} &= f_{32} \cos i\psi + f_{42} \sin i\psi & f'_{42} &= -f_{32} \sin i\psi + f_{42} \cos i\psi & f'_{12} &= f_{12} \end{aligned}$$

i sistemi (53) e (54) vengono ulteriormente trasformati in sistemi identici in cui le nuove quantità vengono accentuate. Passiamo alla forma vera e propria e arriviamo al risultato successivo. Se prendiamo la trasformazione reale (55) e se introduciamo le quantità (274)

$$\left\{ \begin{aligned} \rho' &= \rho \cdot \frac{-\beta v_x + 1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \rho' v'_z &= \rho \cdot \frac{v_x - \beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \rho' v'_x &= \rho v_x & \rho' v'_y &= \rho v_y \\ E'_{x'} &= \frac{E_x - \beta H_y}{\sqrt{1-\beta^2}} & H'_{y'} &= \frac{-\beta E_x + H_y}{\sqrt{1-\beta^2}} & E'_{z'} &= E_z \\ H'_{x'} &= \frac{H_x - \beta E_y}{\sqrt{1-\beta^2}} & E'_{y'} &= \frac{\beta H_x + E_y}{\sqrt{1-\beta^2}} & H'_{z'} &= H_z \end{aligned} \right. \quad (5.123)$$

si ritrovano tutte le formule che esprimono il principio di relatività nel campo elettromagnetico. Da notare che qui che  $E_x - \beta H_y$ ,  $E_y + \beta H_x$ ,  $E_z$  sono le componenti del vettore  $\vec{E} + \left[ \vec{v} \vec{H} \right]$ , essendo  $\vec{v}$  un vettore nella direzione dell'asse  $z$  positivo di modulo  $|\vec{v}| = \beta$  e  $\left[ \vec{v} \vec{H} \right]$  denotano il prodotto vettoriale dei vettori  $\vec{v}$  e  $\vec{H}$ . Allo stesso modo,  $H_x + \beta E_y$ ,  $H_y - \beta E_x$ ,  $H_z$  sono le componenti del vettore  $\vec{H} - \left[ \vec{v} \vec{E} \right]$ .

Le seconde e terze formule (56) possono essere associate a due a due e riunite, con un altro uso di grandezze immaginarie, nelle seguenti:

$$\begin{aligned} E'_{x'} + iH'_{x'} &= (E_x + iH_x) \cos i\psi + (E_y + iH_y) \sin i\psi \\ E'_{y'} + iH'_{y'} &= - (E_x + iH_x) \sin i\psi + (E_y + iH_y) \cos i\psi \\ E'_{z'} + iH'_{z'} &= E_x + iH_x \end{aligned}$$

Le prime equazioni (56) portano, con un opportuno cambio di notazione, alla formula (30) di Eistein e a tutte le conseguenze che da essa si possono dedurre. In particolare, si ha

$$\beta i = \tan i\psi = i \frac{e^\psi - e^{-\psi}}{e^\psi + e^{-\psi}}$$

per  $\psi = \infty$ , si ha quindi  $\beta = 1$ ; altrimenti, il valore limite della velocità  $\vec{v}$  è uguale alla velocità della luce.

Minkowski ha dato alla trasformazione di Lorentz, secondo le considerazioni precedenti, la forma di una trasformazione lineare omogenea

$$x_i = \alpha_{i1}x'_1 + \alpha_{i2}x'_2 + \alpha_{i3}x'_3 + \alpha_{i4}x'_4 \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (5.124)$$

tale che  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$  si trasforma in  $x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2$ . Egli ha posto così le basi di un'analisi vettoriale nello spazio quadridimensionale. In questa analisi risulta particolarmente importante la distinzione tra vettore polare e vettore assiale. Un vettore polare è definito da un qualsiasi sistema di quattro grandezze  $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$  che viene rimpiazzato dal sistema  $\rho'_1, \rho'_2, \rho'_3, \rho'_4$  ottenuto sostituendo rispettivamente questi due sistemi di grandezze a  $x_1, x_2, x_3, x_4$  e  $x'_1, x'_2, x'_3, x'_4$  nella (57). Consideriamo ora due vettori polari  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  e  $(y_1, y_2, y_3, y_4)$  e consideriamo la combinazione bilineare

$$\begin{aligned} &f_{22}(x_2y_3 - x_3y_2) + f_{31}(x_3y_1 - x_1y_3) + f_{12}(x_1y_2 - x_2y_1) \\ &+ f_{14}(x_1y_4 - x_4y_1) + f_{24}(x_2y_4 - x_4y_2) + f_{34}(x_3y_4 - x_4y_3) \end{aligned} \quad (5.125)$$

che contiene sei coefficienti  $f_{23}, \dots, f_{34}$ . Sostituendo a  $x_1, x_2, x_3, x_4$  e  $y_1, y_2, y_3, y_4$  i valori datti dalla (57), si trova la nuova combinazione bilineare

$$\begin{aligned} &f'_{22}(x'_2y'_3 - x'_3y'_2) + f'_{31}(x'_3y'_1 - x'_1y'_3) + f'_{12}(x'_1y'_2 - x'_2y'_1) \\ &+ f'_{14}(x'_1y'_4 - x'_4y'_1) + f'_{24}(x'_2y'_4 - x'_4y'_2) + f'_{34}(x'_3y'_4 - x'_4y'_3) \end{aligned} \quad (5.126)$$

dove i sei coefficienti  $f'_{23}, \dots, f'_{34}$  dipendono solo dalle sei grandezze  $f_{23}, \dots, f_{24}$  e dai sedici coefficienti  $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{44}$ . Un vettore assiale è definito da un sistema di sei grandezze  $f_{23}, f_{31}, f_{12}, f_{14}, f_{24}, f_{34}$ , che è sostituito dal nuovo sistema  $f'_{23}, f'_{31}, f'_{12}, f'_{14}, f'_{24}, f'_{34}$ , in virtù della dipendenza di cui abbiamo appena parlato, essa stessa risultante dalla trasformazione (57) di Lorentz. In particolare, le quattro grandezze  $\rho v_x, \rho v_y, \rho v_z$  e  $i\rho$  considerate in precedenza, rappresentano un vettore polare; le sei grandezze  $H_x, H_y, H_z, -iE_x, -iE_y, -iE_z$  rappresentano un vettore assiale.

L'analisi vettoriale nello spazio quadridimensionale è stata particolarmente sviluppata da Sommerfeld, nelle due memorie di *Annalen der Physik*.

Dobbiamo qui limitarci a queste rapide indicazioni sulla bella teoria di Minkowski.

## 7. Le idee relativistiche da un punto di vista matematico<sup>2</sup>

Quando ci si pone da un punto di vista matematico, il principio di relatività, così come lo prevedevano Lorentz, Einstein e Minkowski, può ricevere una forma molto più generale, che lo collega a idee il cui ruolo è già stato importante in Fisica.

<sup>2</sup>Questo paragrafo è stato aggiunto all'edizione francese da E. e F. Cosserat.

Abbiamo indicato nel § 1 che esistono diverse trasformazioni che preservano le equazioni di Newton. In queste equazioni esiste una sola variabile indipendente, il tempo  $t$ . Consideriamo ora un'equazione tale che

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

dove  $V$  è una funzione di due variabili indipendenti  $x$  e  $y$ . Si sa che ogni trasformazione dove  $x + iy$  ( $i = \sqrt{-1}$ ) è una qualsiasi funzione analitica di  $x' \pm iy'$  conserva questa equazione e rivela la nozione, così feconda in Fisica, di funzione coniugata. Si ha allora quella che chiamiamo rappresentazione conforme di un piano su un piano.

Lord Kelvin, in una celebre proposizione da cui scaturisce il principio delle immagini elettriche, ha mostrato che rimanendo nel dominio reale l'equazione

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

è conservata, non solo con una trasformazione omotetica come

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = l^2 (dx'^2 + dy'^2 + dz'^2)$$

ma anche da una inversione o trasformazione per raggi vettori reciproci come

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = \frac{k^4}{r'^4} (dx'^2 + dy'^2 + dz'^2)$$

Si ha in quest'ultimo caso

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'} = \frac{k^2}{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \frac{k^2}{r'^2}$$

e  $\frac{1}{r'} V(x, y, z)$  è una soluzione dell'equazione di Laplace relativa alle nuove variabili  $x', y', z'$ . Vito Volterra, e altri giunti dopo, è riuscito, attraverso l'introduzione della nozione di funzione di linea, a ottenere la funzione coniugata di  $V$ , analoga a quella che si verifica nel caso di due variabili. L'interpretazione di questa funzione coniugata, in un campo magnetico costante, è la seguente. Il potenziale di campo su una massa magnetica è una funzione che soddisfa l'equazione di Laplace. Se si considera il potenziale del campo su una corrente chiusa di intensità unitaria, si tratta di una funzione di linea, e un calcolo molto semplice mostra che questa funzione è proprio coniugata di  $V$ .

P. Appell ha pure studiato dal 1892, dal punto di vista in cui ci collochiamo attualmente, l'equazione della teoria della conduzione del calore, che assumeremo nella forma semplice

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

È evidente che l'equazione non cambia forma al variare delle variabili

$$x' = kx + \alpha \quad t' = k^2 t + \beta$$

qualunque siano le costanti  $k, \alpha, \beta$ ; se  $V(x, t)$  è un integrale, vale quindi la stessa cosa per  $V(kx + \alpha, k^2 t + \beta)$ . Ma esiste anche, per questa equazione, una trasformazione analoga all'inversione, che è definita dalle formule

$$x' = \frac{x}{t} \quad t' = -\frac{1}{t} \quad V = \frac{V'}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

eseguendo il calcolo, si trova che l'equazione precedente è sostituita da un'equazione della stessa forma  $\frac{\partial^2 V'}{\partial x'^2} = \frac{\partial V'}{\partial t'}$ . Per cui, se  $V(x, t)$  è un integrale dell'equazione primitiva, lo è anche la funzione

$$\frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} V\left(\frac{x}{t}, \frac{1}{t}\right)$$

P. Appel ha dimostrato che tutte le trasformazioni della forma

$$x' = \varphi(x, t) \quad t' = \psi(x, t) \quad V = \lambda(x, t) V'$$

con le quali l'equazione del calore cambia in se stessa, si riconducono a combinazioni delle trasformazioni semplici precedenti.

Passiamo alle equazioni del campo elettromagnetico e prendiamole nella forma (53) e (54) dovuta a Minkowski. Possiamo metterle sotto una forma nuova, molto simmetrica, ponendo

$$\begin{aligned} 2f_{32} &= \frac{\partial V_3}{\partial x_2} - \frac{\partial V_2}{\partial x_3} & 2f_{13} &= \frac{\partial V_1}{\partial x_3} - \frac{\partial V_3}{\partial x_1} & 2f_{21} &= \frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \\ 2f_{41} &= \frac{\partial V_4}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_4} & 2f_{42} &= \frac{\partial V_4}{\partial x_2} - \frac{\partial V_2}{\partial x_4} & 2f_{43} &= \frac{\partial V_4}{\partial x_3} - \frac{\partial V_3}{\partial x_4} \end{aligned}$$

cosa possibile per il sistema (54), e il sistema (53) assume la forma

$$\begin{cases} \Delta V_1 - \frac{\partial \Theta}{\partial x_1} = 2\rho_1 \\ \Delta V_2 - \frac{\partial \Theta}{\partial x_2} = 2\rho_2 \\ \Delta V_3 - \frac{\partial \Theta}{\partial x_3} = 2\rho_3 \\ \Delta V_4 - \frac{\partial \Theta}{\partial x_4} = 2\rho_4 \end{cases} \quad (5.127)$$

dove il simbolo  $\Delta$  indica l'operatore differenziale

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_4^2}$$

e dove

$$\Theta = \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \frac{\partial V_3}{\partial x_3} + \frac{\partial V_4}{\partial x_4}$$

Quando si avanza l'ipotesi  $\Theta = 0$ , il sistema (60) assume, nei primi membri, la forma che è stata considerata da W. Voigt nel 1887, nella sua Memoria sul principio Doppler, e che lo ha portato per la prima volta alla trasformazione ritrovata poi da Lorentz. Una trasformazione ortogonale effettuata sulle quattro funzioni  $V_1, V_2, V_3, V_4$  e sulle quattro variabili indipendenti  $x_1, x_2, x_3, x_4$  non cambia infatti i primi membri delle equazioni (60), sia che  $\Theta$  sia nullo oppure no; si ha, in questo caso,

$$dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 = dx_1'^2 + dx_2'^2 + dx_3'^2 + dx_4'^2$$

Ma se non ci si limita a quest'ultima relazione, che non è necessariamente imposta dal punto di vista fisico nel principio di relatività concepito da Lorentz, Einstein e Minkowski, e se si guardano  $x_1', x_2', x_3', x_4'$  come coordinate curvilinee, si vede che possono esistere altre trasformazioni oltre a quelle di W. Voigt e Lorentz che non cambiano il sistema (60). Se, ad esempio,  $\Theta = 0$ , le espressioni  $\Delta V_1, \Delta V_2, \Delta V_3, \Delta V_4$  possono essere riprodotte, a meno di un fattore, mediante l'inversione

$$\frac{x_1}{x_1'} = \frac{x_2}{x_2'} = \frac{x_3}{x_3'} = \frac{x_4}{x_4'} = \frac{k^2}{x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2} = \frac{k^2}{r'^2}$$

Lo spazio ipereuclideo a quattro dimensioni si trova riferito, con le variabili  $x_1', x_2', x_3', x_4'$  a un sistema di coordinate curvilineo tale che

$$dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 = \frac{k^4}{r'^4} (dx_1'^2 + dx_2'^2 + dx_3'^2 + dx_4'^2)$$

Faremo notare che l'ipotesi  $\Theta = 0$  di W. Voigt è analoga a quella fatta da G. Green per l'etere considerato come mezzo elastico isotropo nella teoria della luce, mentre il sistema (60) corrisponde all'idea dell'etere contrattile di Lord Kelvin. Supponiamo che  $\Theta$  soddisfi semplicemente la condizione

$$\Delta\Theta = 0$$

si potrà, ponendo

$$U_1 = V_1 - \frac{1}{2}x_1\Theta \quad U_2 = V_2 - \frac{1}{2}x_2\Theta \quad U_3 = V_3 - \frac{1}{2}x_3\Theta \quad U_4 = V_4 - \frac{1}{2}x_4\Theta$$

riportare il sistema (60) alla forma che ha quando  $\Theta = 0$ , ed è facile vedere che l'inversione sarà comunque una trasformazione traducibile da un principio di relatività.

## 8. La questione degli orologi. Conclusione

Il lettore un po' pratico della letteratura sul principio di relatività avrà probabilmente notato, non senza stupore, che nelle pagine precedenti nulla è stato detto sugli orologi associati ai sistemi S e S', né sul modo in cui funzionano, quali tempi sono letti su di essi dall'uno o dall'altro osservatore in determinate condizioni, ecc. Lo stesso Einstein, nella prima fondamentale memoria pubblicata nel 1905, ha utilizzato gli orologi per spiegare e illustrare le sue proposizioni e le deduzioni che ne traeva. Anche gli orologi svolgono, in molte altre opere, un ruolo importante, in particolare e senza eccezione nelle numerosissime presentazioni che divulgano il nuovo principio. Cohn (1911) ha costruito addirittura un dispositivo molto ingegnoso con due orologi appartenenti, per così dire, ai due sistemi S e S'; questi due strumenti permettono di far vedere a colpo d'occhio le relazioni paradossali esistenti tra lunghezze e tempi nei sistemi S e S', e per evidenziare il fatto che la velocità della luce ha, in ogni circostanza, lo stesso valore.

L'autore di un Trattato è obbligato a presentare oggettivamente il contenuto della Scienza in un dato momento e a riprodurre scrupolosamente le idee dei vari autori. Le sue idee personali devono restare in secondo piano. Nei volumi precedenti e in questo abbiamo cercato di soddisfare questa regola; ma c'è un limite. Siamo, almeno per il momento, convinti che l'introduzione degli orologi nell'esposizione del principio di relatività non possa servire a nulla, non spieghi nulla e possa solo imbarazzare la mente o indurre a malintesi; la nozione di tempo è completamente estranea alla questione della relatività. Un orologio è uno strumento fisico; esistono orologi a molla o a pendolo, ma può fungere da orologio qualsiasi corpo che ripeta periodicamente un qualsiasi movimento, ad esempio una ruota dentata montata su un asse animato da un moto rotatorio uniforme, un elettrone le cui vibrazioni producono onde elettromagnetiche di determinata lunghezza d'onda. Mi sembra del tutto impossibile dire come si comporterà un simile strumento fisico nelle circostanze previste dalla teoria della relatività. Non si può determinare a priori quale azione eserciterà la velocità relativa su questo strumento. È necessario un esame critico preliminare della questione del tempo, ma non vediamo che sia stato fatto. Riunendo i ragionamenti fatti sotto questo punto di vista dai diversi autori, ci imbattiamo nelle contraddizioni più evidenti.

Si può così spiegare ciò che è essenziale nella teoria della relatività, senza ricorrere ad illustrazioni che richiedano una considerazione del tempo; questo è ciò che ho cercato di fare nelle pagine precedenti.

CONCLUSIONE - Il quadro dello stato attuale (1914) della teoria della relatività sarebbe incompleto se non parlassimo, infine, del disaccordo che esiste tra i fisici sul significato di questa teoria e sulla realtà fisica delle sue conseguenze. Molti la ritengono definitivamente stabilita, non suscettibile di dar luogo ad alcun dubbio e finalmente introdotta per sempre nel tesoro della Scienza. Ma ci sono anche alcuni scienziati, e non pochi, che trattano questa teoria con scetticismo e in modo assoluto, considerandola un semplice gioco della mente. In senso stretto,

quando non si rinuncia all'esistenza dell'etere, non si essere completamente d'accordo con la teoria della relatività.

Si deve attendere il futuro per la soluzione delle questioni controverse e la spiegazione del vero significato fisico del principio di relatività.