

Decima parte - L'Energia Elettrica

# **TRATTATO DI FISICA**

**LIBRO QUARTO**

O. D. CHWOLSON - Professore ordinario all'Università imperiale di San Pietroburgo

traduttore: E. Davaux (Ingegnere della Marina)

Edizione rivista e notevolmente accresciuta dall'Autore

Parigi - 1910

## Introduzione

### 1. Stato attuale della scienza dei fenomeni elettrici e magnetici

Ci sembra necessario, avvicinandoci all'ultima parte del nostro Trattato di Fisica, cominciare col dare un breve abbozzo della situazione del tutto singolare ed eccezionale in cui attualmente si trova la scienza dei fenomeni elettrici e magnetici. Attualmente si possono distinguere non meno di tre punti di vista in questa scienza, che costituisce la parte più estesa e più interessante della fisica.

I. Si tratta in primo luogo della struttura esterna di un numero molto elevato di fenomeni diversi, i quali, percepiti dai nostri sensi, risvegliano in noi una rappresentazione più o meno chiara di ciò che sta accadendo, o più esattamente di quanto sembra avvenire in un dato luogo e in determinate condizioni. Da questo quadro esterno generale, nonché in parte dalle idee che produce in noi, segue la descrizione dei fenomeni, e le leggi e le regole, alle quali questi fenomeni sono sottoposti dal punto di vista qualitativo o quantitativo, si trovano per noi in un'indissolubile dipendenza con questi ultimi e la loro descrizione. Queste leggi e regole, essendo caratteristiche di un dato fenomeno, devono entrare nella sua descrizione come un elemento principale, perché altrimenti questa descrizione non sarebbe così completa come lo permette lo stato attuale delle nostre conoscenze scientifiche.

Va notato che da questo primo punto di vista la scienza, di cui ci accingiamo ad occuparci, ha raggiunto uno stadio di sviluppo molto elevato. Il numero di fenomeni elettrici e magnetici molto diversi a noi noti è così considerevole che una descrizione abbastanza completa di questi fenomeni potrebbe riempire diversi volumi. Attualmente conosciamo con la massima certezza, si può dire con assoluta certezza, le leggi secondo cui si producono un gran numero di questi fenomeni, cioè le leggi che collegano tra loro le grandezze caratteristiche dei fatti considerati.

In altre parole, sappiamo in quali condizioni sorge un fenomeno; possiamo, quindi, riprodurlo a nostro piacimento e prevedere, in un numero estremamente elevato di casi, le sue più piccole particolarità, il suo andamento e il risultato finale. È molto importante osservare che l'intero corpo scientifico, che caratterizza questo primo punto di vista nello studio dei fenomeni elettrici e magnetici, è assolutamente indipendente dalle opinioni che possono prevalere tra gli scienziati sulla natura di questi fenomeni. D'altra parte, queste opinioni hanno una notevole influenza, e purtroppo a volte dannosa per la scienza, sulla terminologia usata per descrivere un fenomeno e formulare le leggi che lo governano. Non c'è dubbio che una terminologia, una volta stabilita e strettamente legata a una ben determinata rappresentazione dei fenomeni, possa controllare l'evoluzione dei concetti scientifici sulla natura di questi fenomeni.

II. Possiamo adottare un secondo punto di vista, nell'attuale studio dei fenomeni elettrici e magnetici, e considerare le loro applicazioni pratiche, che sono molteplici e varie. La possibilità di tali applicazioni deriva dal fatto che siamo maestri, come abbiamo detto, nel produrre a volontà questi fenomeni e dal fatto che abbiamo una conoscenza approfondita e completa del loro carattere e delle leggi che li governano. In un numero molto elevato di casi, tale conoscenza è inoltre di natura puramente empirica. È assolutamente impossibile enumerare tutte le applicazioni pratiche dei fenomeni elettrici e magnetici; si tratta, infatti, del campo immenso, quasi senza

limiti, dell'elettrotecnica: telegrafia e telefonia, illuminazione elettrica, trasmissione elettrica della forza e la trazione elettrica, la placcatura elettrolitica, l'elettrometallurgia, la costruzione di macchine dinamo-elettriche e altri generatori di corrente elettrica, ad esempio batterie e accumulatori termoelettrici, telegrafia senza fili, piccoli apparecchi, in numero incalcolabile, che agiscono con l'ausilio dell'elettricità, ecc.; si possono anche menzionare le numerose applicazioni dell'elettricità alla medicina, che sono sorte in modo puramente sperimentale.

In sintesi, conosciamo così bene i fenomeni e sappiamo così tanto come usarli per raggiungere un determinato obiettivo che, d'ora in poi, il nuovo secolo è giustamente chiamato il secolo dell'elettricità.

III. Il terzo punto di vista, nella scienza dei fenomeni che andremo a considerare, è quello in cui si cerca di spiegare questi fenomeni, di stabilirne una teoria, di dimostrare che sono tutti la necessaria conseguenza dell'esistenza di un certo *substratum*, più o meno ipotetico. Questo substrato deve possedere determinate proprietà, con l'ausilio delle quali si spiegano i fenomeni osservati, essendo applicabili le leggi della meccanica e della termodinamica.

Crediamo che sia necessario esporre chiaramente, fin dall'inizio, la posizione attuale delle questioni che ci occuperanno, e intendiamo farlo in tutta sincerità, convinti che la verità sia il bene più importante e più prezioso, il cui possesso rappresenta il fine supremo delle tendenze dell'uomo, per quanto consolante o attraente possa essere la forma in cui questa verità ci viene rivelata.

A nostro avviso, per esprimere un giudizio veramente scientifico su qualsiasi parte della Fisica, bisogna avere una corretta comprensione del significato che questa o quella teoria, questa o quella ipotesi hanno in un dato momento.

Supponiamo che a un certo punto nasca una diatriba tra diverse ipotesi o teorie, in cui ognuna difende ostinatamente la posizione che occupa in una certa parte della scienza, e che, passando da una parte all'altra, si debbano sostituire, nei ragionamenti, le deduzioni e spiegazioni, una di queste ipotesi o teorie per l'altra. Chi, in un tale stato di sviluppo scientifico, pensa che la lotta possa concludersi, che una delle teorie possa ottenere la vittoria completa, e che sia quindi perfettamente possibile costruire tutte le parti della scienza considerata su un'unica ipotesi, che ovviamente non si può ritenere che si possieda una reale comprensione del campo di questa scienza.

Ora, la scienza dei fenomeni elettrici e magnetici si trova attualmente proprio in una tale situazione. Senza voler esagerare nulla, possiamo dire, dopo aver dato una rapida occhiata ai fatti, che non c'è in questo momento, nella parte di questa scienza che ha per oggetto la spiegazione dei fenomeni, una teoria solidamente stabilita, sulla quale si può fare affidamento in un certo modo e del tutto al di là di ogni dubbio, per rendere conto di tutti i fenomeni. Riteniamo che, sforzandoci di dare un quadro quanto più esatto possibile dell'attuale posizione della questione, forniremo al tempo stesso ai nostri lettori un certo punto di partenza, che consentirà loro di seguire le vicende future della lotta tra le varie teorie e per comprendere le fasi attraverso le quali potrà passare nel prossimo futuro lo sviluppo scientifico che sarà il frutto del lavoro degli scienziati. Inoltre, per spiegare chiaramente lo stato attuale delle cose, non è affatto necessario far conoscere in anticipo l'insieme completo fenomeni elettrici e magnetici che la teoria si propone di spiegare. Le conoscenze acquisite in un corso elementare di Fisica sono sufficienti, e ci limiteremo quindi a richiamare qui in poche parole i fenomeni fondamentali, che sono certamente noti a tutti.

Vi sono, in primo luogo, certi fenomeni che sono chiamati fenomeni elettrostatici. Per il mutuo contatto o attrito, così come in qualche altra operazione, i corpi acquistano tutta una serie di proprietà che prima non possedevano. Si dice allora che i corpi sono elettrizzati. Esistono due tipi di elettrizzazione, che sono chiamati elettrizzazione positiva e negativa. I corpi elettrizzati tutti positivamente o negativamente si respingono reciprocamente; due corpi elettrizzati uno positivamente, l'altro negativamente si attraggono. Anche i corpi, posti in prossimità di corpi

elettrizzati (in un campo elettrico), si elettrizzano; è il fenomeno dell'induzione, su cui si basa la costruzione del condensatore. Per quanto riguarda la trasmissione e la propagazione dello stato elettrico, i corpi si dividono in conduttori e non conduttori o dielettrici. La presenza di questi ultimi ha una notevole influenza sulla grandezza delle forze che si manifestano nello spazio circostante i corpi elettrizzati. La scomparsa dello stato elettrico è sempre accompagnata dalla comparsa di una certa quantità di energia termica, luminosa, sonora, ecc., da cui risulta che, davanti ad un corpo elettrizzato, ci troviamo in presenza di un apporto di energia di una forma particolare.

In terzo luogo, esiste un numero infinito di fenomeni diversi, collegati in un modo o nell'altro a ciò che si chiama corrente elettrica. Per quanto riguarda questi fenomeni, i conduttori si dividono in due classi. Alla prima classe appartengono i metalli e le altre sostanze che si comportano, nelle stesse circostanze, come i metalli; la seconda classe è formata dagli elettroliti. La presenza di questi è necessaria per produrre corrente elettrica in un certo modo (elementi idroelettrici); quando sono attraversati dalla corrente, sono sede di reazioni chimiche, che ne determinano sempre la decomposizione. Lo spazio che circonda i corpi, ad esempio i fili, in cui avviene il fenomeno della corrente elettrica, ha tutte le proprietà del campo magnetico (azione su un magnete mobile, magnetizzazione del ferro e dell'acciaio, ecc.), e i corpi stessi sono soggetti a forze che tendono a imprimere loro un movimento in una direzione o nell'altra. Il fenomeno della corrente elettrica è costantemente accompagnato dalla comparsa di un apporto di energia, il più delle volte energia termica, energia meccanica, energia chimica, ecc.; nel fenomeno della corrente elettrica, siamo quindi ancora in presenza di un apporto di una particolare forma di energia. Quando un conduttore si muove in un campo magnetico, oppure quando il campo, in cui si trova, subisce variazioni quantitative, cioè quando l'intensità di tale campo aumenta o diminuisce, il conduttore dà luogo al fenomeno della corrente elettrica, detta allora corrente indotta o corrente di induzione.

Incontriamo in quarto luogo il fenomeno delle radiazioni elettriche, di cui abbiamo già brevemente parlato nel Volume II.

Abbiamo, in quinto luogo, il gruppo molto esteso e infinitamente vario di fenomeni che si manifestano in ciò che si chiama la scarica elettrica; a questo gruppo si aggiungono: la scintilla elettrica, l'arco voltaico e i fenomeni di scarica nei gas rarefatti.

Dobbiamo menzionare in sesto luogo i fenomeni di radioattività, che ovviamente rientrano tra i fenomeni elettrici.

A tutti i fatti contenuti nell'elenco precedente, si deve aggiungere, come incrollabilmente acquisita dalla scienza, una serie di leggi assolutamente esatte che regolano i fenomeni elettrici e magnetici. Le più importanti di queste leggi sono:

1. La legge dell'azione reciproca tra corpi elettrizzati, cioè la legge che determina la direzione e l'entità della forza agente su un corpo elettrizzato situato in prossimità di altri corpi elettrizzati, nonché la distribuzione dello stato elettrico sui corpi.

2. La legge dell'azione reciproca dei magneti.

3. La legge che determina il campo magnetico di una corrente. Questa legge indica quali correnti e quali magneti possono essere sostituiti tra loro rispetto a tutti i fenomeni che si manifestano nello spazio circostante. Come conseguenza di questa legge abbiamo: la legge dell'azione reciproca di una corrente e di un magnete, nonché la legge dell'azione reciproca di due correnti.

4. La legge secondo la quale si manifestano le correnti indotte.

5. Le leggi sulla produzione di calore a scapito delle due precedenti forme di energia elettrica.

6. La legge fondamentale dell'elettrolisi, cioè delle reazioni chimiche che accompagnano il passaggio della corrente elettrica attraverso gli elettroliti.

7. La legge di rotazione del piano di polarizzazione in un campo magnetico.

A queste leggi se ne devono aggiungere ancora altre due, che sono state previste da una delle teorie attuali e che sono state così ben verificate dall'esperienza che, d'ora in poi, ogni nuova teoria deve tenerne conto, cioè mostrarne chiaramente la necessità. Queste due leggi sono:

8. La legge espressa dalla formula  $K = n^2$ ; questa legge si riferisce alle sostanze non magnetiche ed è già stata considerata nel volume II. Ricorderemo solo che  $K$  indica la costante dielettrica e  $n$  l'indice di rifrazione per radiazioni di lunghezza d'onda molto grande.

Per le sostanze magnetiche, la legge si traduce in una formula più complessa che non menzioneremo in questo momento.

9. La legge che esprimeremo più avanti con la formula  $E_m : E_e = v$  dove  $E_m$  e  $E_e$  designano due determinate quantità di elettricità,  $v$  la velocità di propagazione della luce. Ci accontenteremo di questa indicazione, perché sarebbe prematuro qui soffermarsi su questa legge.

Non abbiamo naturalmente esaurito, in quanto esposto, tutte le leggi che si riferiscono ai fenomeni elettrici e magnetici; ma, in ogni caso, abbiamo citato le più importanti.

Qualunque sia la teoria dei fenomeni elettrici e magnetici che si possa stabilire, questa teoria deve innanzitutto partire da una determinata rappresentazione delle cause fondamentali dei fenomeni, avere una base reale che ne serva da fonte. Deve mostrare, con l'aiuto delle leggi della meccanica e della termodinamica, che i fenomeni e le leggi sopra elencate derivano logicamente e necessariamente dall'ipotesi iniziale. Se la teoria è in grado di soddisfare questa condizione e se, allo stesso tempo, l'ipotesi fondamentale unisce le qualità indicate nel volume I, se, ad esempio, non è troppo complicata, allora questa teoria può avere un posto duraturo nella scienza e l'ipotesi stessa acquisterà un certo grado di probabilità.

Ma, bisogna ammetterlo, al momento attuale (1910) non esiste ancora una teoria che soddisfi le condizioni poste. Cercheremo di dare un quadro preciso dello stato attuale delle cose. Quando consideriamo l'insieme di tutte le spiegazioni dei fenomeni elettrici e magnetici che sono state finora proposte, riconosciamo che, in queste spiegazioni, appaiono distintamente tre punti di vista o anche tre concezioni, che differiscono in modo essenziale; le designeremo con le lettere A, B e C. Ciascuno di questi tre punti di vista o ciascuna di queste concezioni fa apparire davanti a noi una certa immagine, dandoci una rappresentazione più o meno esatta della causa intima dei fenomeni, di ciò che accade, per così dire, dietro il quadro che si dispiega davanti ai nostri occhi. Designeremo anche con le lettere A, B e C le tre immagini corrispondenti. Prima di considerare queste tre immagini in dettaglio, le caratterizzeremo brevemente.

L'*immagine A* (generalmente adottata fino al 1870 circa) è costruita con la nozione di due elettricità, di due sostanze particolari; una delle loro proprietà più importanti consiste nella loro capacità di agire istantaneamente a distanza. Questa immagine è stata conservata fino ad ora in Fisica Elementare. Ma la scienza seria ha abbandonato per sempre questa concezione. Avrà comunque un ruolo importante nella nostra esposizione; non tarderemo a spiegare questo fatto apparentemente così strano.

L'*immagine B* (dal 1870 al 1900) esclude totalmente l'ipotesi di una sostanza particolare, come substrato di fenomeni elettrici e magnetici. Porta a spiegare questi fenomeni con le proprietà dell'etere, in cui possono verificarsi diversi tipi di modificazioni, vale a dire deformazioni e movimenti. La possibilità di qualsiasi azione istantanea a distanza è assolutamente respinta. Questa immagine ha permesso di arrivare alla teoria elettromagnetica dell'energia radiante, di cui abbiamo parlato più volte nel Volume II; rappresenta una delle creazioni più profonde e geniali della mente scientifica. Ma, sebbene si avvicini molto di più alla verità dell'immagine A, nondimeno si è dimostrata impotente a spiegare un gran numero di vari fenomeni.

L'*immagine C* (dal 1900) si basa sulla teoria degli elettroni e forma, in un certo senso, una combinazione delle immagini A e B. Presuppone l'esistenza di un particolare substrato e conserva l'idea delle modifiche che si verificano all'interno dell'etere, ma il substrato è qui considerato come la causa che genera queste modificazioni dell'etere. La teoria degli elettroni è stata appena costruita.

Ora entriamo nei dettagli, per ognuna delle nostre tre immagini.

**Immagine A.** - L'imponderabilità e l'azione a distanza, tale è ciò che caratterizza particolarmente questa vecchia immagine. Presuppone l'esistenza di sostanze particolari, a volte denominate fluidi, agenti e persino liquidi. Queste sostanze devono essere imponderabili (più esattamente senza peso): il loro numero variava da quattro a uno. A queste quattro sostanze si era portati, quando si è ammesso che esistono due distinte elettricità e due distinti magnetismi, che in realtà si devono trovare in superficie o all'interno di corpi elettrizzati e magneti. Quando si scoprì che ogni magnete si comporta esattamente come un certo sistema di correnti elettriche, si rinunciò ai due magnetismi, per sostituirli con correnti molecolari, peraltro piuttosto difficili da concepire, circondanti le molecole dei magneti. Nascono così le teorie dualistiche, che ammettono solo l'esistenza di due sostanze particolari, di due elettricità, una positiva e l'altra negativa. Vanno inquadrare nella stessa categoria anche le teorie unitarie, che suppongono un solo agente unico, quando, ammettendo che vi sia identità tra questo unico agente e l'etere luminoso, attribuiscono tuttavia ad esso l'azione a distanza che, con l'ipotesi degli imponderabili, è il secondo tratto caratteristico, forse il più essenziale, dell'immagine A. Si suppone infatti che le ipotetiche sostanze di questa immagine, ad esempio le due elettricità, agiscano istantaneamente a distanza l'una dall'altra, e il mezzo intermediario non ha alcun ruolo o esercita solo un'influenza secondaria, in qualche modo accidentale, sui fenomeni; le azioni reciproche di queste sostanze possono essere attrazioni o repulsioni. Nei fenomeni elettrostatici si tratta di manifestazioni di agenti che sono in uno stato di quiete; il fenomeno designato con il nome di corrente elettrica è sostanzialmente un vero e proprio flusso di una o due sostanze all'interno o sulla superficie di un conduttore, solitamente di un filo.

Sono queste le due nozioni, del tutto caratteristiche dell'immagine A, che abbiamo appena citato, che giustificano l'importante applicazione che è stata fatta ai fenomeni elettrici e magnetici della teoria del potenziale, di cui abbiamo indicato gli elementi nel Volume I. Una tale applicazione divenne naturale, non appena si scoprirono le leggi secondo le quali agiscono le forze che si incontrano nello studio di questi fenomeni. Queste forze hanno una certa realtà e, un vasto dominio di fatti trovandosi esattamente coordinato come se i tratti fondamentali dell'immagine A fossero essi stessi reali, si vede che l'applicazione della teoria del potenziale porta non solo a risultati assolutamente certi, ma che può anche essere mantenuta nel caso in cui l'immagine A stessa viene abbandonata.

Il potenziale da un punto esprime un determinato lavoro di forze certamente esistenti; questo lavoro si compie a scapito di riserve reali di certe forme di energia di natura particolare e ha come risultato ben notato la comparsa di forme di energia che ci sono, il più delle volte, molto familiari da lungo tempo. La questione dell'origine del meccanismo mediante il quale queste forze sono prodotte, così come la questione della forma della riserva energetica iniziale, non hanno nulla a che fare qui; la risposta a queste domande dipende interamente dal tipo di immagine. Se si rinuncia all'immagine A, si deve semplicemente abbandonare l'idea che le nozioni primitive, su cui si basa l'applicazione della teoria del potenziale, abbiano una realtà; ma l'applicazione stessa può essere mantenuta come metodo matematico nello studio dei problemi posti dalle leggi sperimentali, o ancora come metodo di ragionamento, ecc. Vedremo che essa porta alla nozione del potenziale di un conduttore, che rappresenta il grado della sua elettrizzazione; questa importantissima nozione può essere mantenuta senza preoccuparsi dell'immagine scelta, e, di conseguenza, di cosa si debba intendere, in accordo con questa immagine, con il termine elettrizzazione di un conduttore.

Quanto appena detto spiega bene perché l'immagine A non verrà comunque tralasciata nei nostri sviluppi successivi, sebbene oggi sia abbandonata. La useremo per poter descrivere in modo comodo e semplice i fenomeni, entro i limiti in cui si verificano come se questa immagine corrispondesse alla realtà. Certamente questi limiti devono essere conosciuti con esattezza, altrimenti rischieremmo ovviamente di commettere gli errori più grossi. Riteniamo per altri

motivi che sia ancora difficile rinunciare completamente all'uso dell'immagine A. In primo luogo, faciliteremo così il lavoro di lettori che hanno studiato solo la fisica elementare, la quale non conosce altro approccio; in secondo luogo, potremo conservare, seppur parzialmente e in modo provvisorio, la terminologia di comodo, finora generalmente utilizzata, che è in stretta corrispondenza con l'immagine A e alla quale tutti sono abituati.

**Immagine B.** - Dobbiamo questa immagine a Faraday, Cl. Maxwell e Hertz. Il tratto più caratteristico di questa immagine è la negazione dell'esistenza di qualsiasi azione a distanza e di qualsiasi agente particolare al di fuori dell'etere luminoso, nonché il trasporto della sede dei fenomeni nel mezzo, che circonda i corpi elettrificati o magnetici e che gioca, nei fenomeni, non più un ruolo accidentale e secondario, ma al contrario il ruolo principale.

L'immagine B suppone che i fenomeni elettrici e magnetici consistono essenzialmente in cambiamenti, come deformazioni o perturbazioni, che avvengono nell'etere. Queste modificazioni generano le forze di cui osserviamo direttamente gli effetti, e determinano le forme di energia la cui presenza ci viene dimostrata dall'applicazione del principio di conservazione dell'energia, nelle circostanze sopra menzionate in cui vi è produzione di calore, energia chimica e altre forme di energia conosciute.

Faraday ha abbozzato l'immagine di serie B; Cl. Maxwell ha precisato i dettagli. Ha dato forma matematica alle idee fondamentali di Faraday e creato la teoria elettromagnetica della luce, che considera l'energia radiante come un caso particolare delle stesse perturbazioni dell'etere che percepiamo, in altre circostanze, come fenomeni elettrici o magnetici. È stata questa teoria che ha portato Maxwell alla scoperta di due leggi che abbiamo esposto sopra. La correttezza di queste leggi è stata confermata da molteplici esperimenti; non potevano essere previsti e non possono essere spiegati dalla teoria che poggia sull'immagine A. Infine, le radiazioni elettriche di Hertz, di cui ci siamo già parzialmente occupati nel volume II e sulle quali ritorneremo in seguito, rappresentano un fenomeno in accordo con la teoria di Maxwell e con le concezioni fondamentali che caratterizzano l'immagine B.

L'armonia che regna in tutta la teoria di Maxwell, la conferma delle leggi 8 e 9, la soppressione di speciali agenti imponderabili nella produzione di fenomeni elettrici e magnetici, il rifiuto dell'azione a distanza e, cosa particolarmente importante, la scoperta della radiazione elettrica sembrò portare al completo trionfo delle nozioni su cui poggia il quadro B. Sembrava che si dovesse solo completare questo quadro, perfezionarne tutti i dettagli, cioè utilizzarlo in tutte le parti della Fisica dedicate all'energia elettrica, per dimostrare che ovunque la nuova teoria era tutt'uno con la realtà e dava risultati così brillante come nei particolari fenomeni ai quali Maxwell e Hertz l'avevano applicata. Intorno all'anno 1890, era lecito pensare che non si sarebbe più trattato, nella scienza superiore, di trattare quantità di elettricità come sostanze reali; si poteva sperare che il lato puramente meccanico delle deformazioni e perturbazioni nell'etere, dove deve trovarsi la natura reale inaccessibile all'osservazione diretta, dei fenomeni elettrici e magnetici, venisse presto conosciuta in tutte le sue particolarità e che queste deformazioni e le perturbazioni prendessero il loro posto in tutti i Capitoli della Fisica dove si studiano le manifestazioni dell'energia elettrica.

Queste speranze non si sono concretizzate. Al contrario, lo sviluppo della scienza negli ultimi anni l'ha allontanata sempre più dall'unità, dalla chiarezza e dalla semplicità a cui sembrava già così vicina.

Vanno messe in luce tre diverse cause, che hanno allontanato la Fisica, nel suo naturale sviluppo, dal percorso che avrebbe potuto portare alla definitiva costituzione del quadro B, in tutte le parti dello studio dei fenomeni elettrici e magnetici.

Ci sono, in primo luogo, in questo studio, alcuni campi che, proprio dal punto di vista teorico, hanno raggiunto un alto grado di sviluppo, senza però, nei ragionamenti e nelle deduzioni che vi si incontrano, nessun tratto, nessuna idea viene a richiamare l'immagine B. Tale è in particolare la teoria dell'elettrolisi, cioè la teoria delle azioni chimiche prodotte dalla corrente

elettrica. Nello studio dei fenomeni elettrolitici, gli scienziati sembrano, per così dire, dimenticare momentaneamente il quadro B, le opinioni di Maxwell e Hertz relative alla non esistenza di elettricità sostanziale e persino, a volte, l'impossibilità di un'azione a distanza. Nella teoria degli ioni si assume che le sostanze disciolte siano sempre parzialmente dissociate (volumi I e III), cioè scomposte nelle loro parti costituenti (NaCl per esempio, in Na e Cl), che sono gli ioni. Ogni ione è legato ad una determinata quantità di elettricità, in virtù della quale si muove, nella soluzione, verso l'elettrodo la cui elettrizzazione è opposta. La teoria degli ioni rappresenta oggi una parte ben ordinata della fisica, studiata in dettaglio e di grande interesse. Nessuna traccia dell'immagine B può essere trovata lì; chi scrive di elettrolisi perde completamente di vista questa immagine, per così dire, e quasi nessun tentativo serio è stato fatto per introdurla nella teoria elettrolitica, per tradurre, se così si può dire, da una lingua all'altra le spiegazioni e i ragionamenti, per mostrare che le quantità di elettricità, qui in questione, possono essere intese nel senso dell'immagine B, cioè come deformazioni dell'etere che dipendono dagli ioni.

Bisogna riconoscere, in secondo luogo, che non siamo riusciti fino ad ora a dare una chiara rappresentazione meccanica, anche semplicemente, del carattere delle deformazioni (e forse anche delle perturbazioni), che corrispondono a fenomeni elettrostatici e magnetici. Sono stati fatti diversi tentativi per spiegare l'intima natura di ciò che accade nell'etere, tentativi basati sull'attribuzione all'etere di proprietà speciali, di una particolare struttura interna. Queste ipotesi sono generalmente piuttosto complesse e spesso hanno anche un carattere strano. Basti pensare che all'etere è stata data una sorta di doppia natura, che sarebbe costituito da due sostanze, una delle quali sarebbe impregnata dell'altra, come, ad esempio, una spugna imbevuta di liquido. Una tale concezione o una delle tante ipotesi analoghe complica oltremodo le ipotesi fondamentali, mentre la semplicità è uno dei segni della fecondità di un'idea. L'immagine B è così privata dei suoi principali vantaggi rispetto all'immagine A, dall'introduzione dell'elemento metafisico, la cui presenza costituiva per quest'ultimo una mancanza molto grave contro le esigenze alle quali deve soddisfare una teoria veramente moderna.

In terzo luogo, è stata scoperta una nuova serie di fenomeni che, come i risultati di uno studio più completo di alcuni fenomeni precedentemente noti, non potevano rientrare nella struttura del quadro B.

**Immagine C.** - Una nuova teoria nasce alle soglie del nuovo secolo; si chiama *teoria degli elettroni*, perché alla sua base sta la nozione di elettrone. L'immagine C, che le corrisponde, rappresenta, almeno in parte, una combinazione delle immagini A e B. Prende dall'immagine A l'ipotesi che esista, in natura, una sostanza di natura particolare, corrispondente all'elettricità negativa dell'immagine A. Questa sostanza ha una struttura atomica, vale a dire che è costituita da un insieme discreto di particelle molto piccole, dette elettroni. La nuova teoria conserva dall'immagine B la nozione di modificazioni particolari, che si producono nell'etere quando si osserva il fenomeno del campo di forza elettrico o magnetico. Non suppone quindi alcuna azione istantanea a distanza, ma ammette che occorre ricercare la causa immediata di una forza elettrica o magnetica, osservata in un dato luogo dello spazio, proprio in questo luogo e nelle modificazioni che vi subisce l'etere.

Sorgono qui una serie di domande: di che natura è, ad esempio, il legame esistente tra gli elettroni e le modificazioni che avvengono nell'etere? Da cosa è rappresentata nell'immagine C la nozione di elettricità positiva? Come sono collegati gli elettroni e la materia ordinaria?

*La nascente teoria non ha ancora dato risposte chiare e definitive a queste domande.* Si ammette di fatto che un elettrone immobile produca nell'etere circostante le modificazioni relative alla presenza di forze elettriche. Quando invece un elettrone si muove, nell'etere nascono nuove modificazioni e compaiono forze magnetiche. Gli elettroni sono prodotti dalla disintegrazione dell'atomo materiale ordinario; si tende a pensare che la materia sia composta solo da elettroni raggruppati e collegati tra loro in modi diversi.

Ora si presenta un'importante questione didattica: *quale ruolo può giocare la teoria degli*



*elettroni ora (1910) in un'esposizione generale della fisica? Si può rinunciare completamente alle immagini A e B, anche nelle descrizioni e spiegazioni dove sono sufficienti, e basare tutto dall'inizio solo sulla nuova teoria?*

Dobbiamo risolvere questo problema, tenendo conto dello stato delle cose in questo momento e con la ben chiara consapevolezza del rischio connesso alla decisione che prenderemo. Ogni giorno può sostanzialmente cambiare il volto della questione, può portare al chiarimento e al rafforzamento di ciò che al momento attuale appare ancora oscuro e vacillante, e allora la modalità di esposizione a cui ci siamo fermati potrebbe diventare superata.

Ma non c'è altra via d'uscita. Non sappiamo cosa riserva il futuro e possiamo fare affidamento solo su ciò che è. La situazione attuale ci costringe a seguire il seguente corso. L'immagine C è ancora troppo grezza per servire come base per tutte le descrizioni e spiegazioni. Useremo quindi la nuova teoria solo nelle prime sezioni della nostra ultima Parte, dove presenta vantaggi molto marcati rispetto alle altre teorie. Dobbiamo prima di tutto far conoscere in modo profondo il vasto dominio dei fatti, dei fenomeni e delle loro leggi, vale a dire un corpo scientifico indipendente da ogni teoria. La terminologia, che qui si è affermata, rende non solo estremamente conveniente, ma anche quasi necessario, l'uso delle immagini A e B.

Indichiamo ancora un altro motivo. L'immagine A - due elettricità che agiscono istantaneamente a distanza - è stata completamente scartata dall'attuale teoria scientifica e il suo uso può sembrare un anacronismo. Ma la useremo solo per comodità; se ci permettiamo di andare oltre, a rischio di essere disapprovati dai maestri della Fisica, saremo guidati soprattutto da visioni didattiche. Nei nostri primi Capitoli, dove considereremo i fenomeni elettrici più semplici, affiancheremo le immagini A e B, allo scopo di aiutare il lettore abituato esclusivamente all'immagine A. L'immagine B e i suoi vantaggi rispetto alla vecchia immagine A, da tempo abbandonata dalla scienza pura.

Vediamo, da quanto detto, che viviamo in un tempo di transizione, in un periodo di ricostruzione. Il vecchio edificio è crollato e stiamo ancora lavorando a quello nuovo. La parte teorica dello studio dei fenomeni elettrici e magnetici rappresenta qualcosa di incompiuto, instabile e mutevole. È del massimo interesse e importanza, in tali circostanze, sapere ciò che può essere considerato, in questo studio, stabilito in modo incrollabile, ciò che non può essere sottoposto in futuro a una trasformazione essenziale. Ecco cosa si può dire al riguardo.

Indipendentemente dalle concezioni teoriche e da quali possano essere le ipotesi su cui si fondano le varie dottrine, lo studio dei fenomeni elettrici e magnetici si basa sui seguenti risultati definitivamente acquisiti:

1. I fenomeni e i fatti, nella forma in cui sono percepiti dai nostri sensi
2. Una serie di leggi, che governano questi fenomeni; queste leggi legano tra loro certe grandezze, il cui vero significato fisico non è ancora del tutto conosciuto in molti casi.
3. Deduzioni ottenute teoriche basate su queste leggi; tali sono:
  - a) Le deduzioni ottenute applicando la teoria del potenziale, ad esempio il calcolo della distribuzione dell'elettricità sulla superficie dei conduttori. I metodi utilizzati per calcolare questa distribuzione e i risultati ottenuti rimangono esatti, indipendentemente da cosa si intende per distribuzione dell'elettricità sulla superficie di un conduttore.
  - b) La determinazione delle condizioni puramente meccaniche di equilibrio o movimento di magneti o correnti, che sono sotto l'influenza di altri magneti o correnti.
  - c) La determinazione delle diverse grandezze che caratterizzano le correnti elettriche prodotte in determinate condizioni. Le opinioni sul significato fisico di queste quantità possono cambiare, ma i metodi utilizzati per calcolarle rimangono gli stessi e sono ora acquisiti dalla scienza.
4. L'applicazione dei due principi della termodinamica ai fenomeni in cui appare o scompare qualsiasi apporto di energia. Sappiamo che un corpo elettrizzato può diventare una fonte di calore, che questo è sempre il caso soprattutto per la corrente elettrica, che con l'ausilio di magneti o correnti o una combinazione delle due si può compiere lavoro, che i fenomeni elettrici

sono spesso accompagnati dalla comparsa o scomparsa di una riserva di energia chimica, ecc. I risultati ottenuti da questo punto di vista sussisteranno sempre, anche se le idee sulla natura delle grandezze in gioco possono variare nel tempo.

5. È innegabilmente stabilito che il mezzo gioca un ruolo essenziale nei fenomeni elettrici e magnetici. L'azione a distanza di particolari agenti è morta per sempre. Qualunque sia la forma che assumerà la teoria in futuro, non si può parlare di un'elettricità, trovandosi in un determinato luogo, che agisce istantaneamente su un'altra elettricità situata in un altro luogo. In questo risultato negativo si nasconde una delle più importanti conquiste positive della scienza. Le proprietà del mezzo in cui si verificano i fenomeni elettrici e magnetici devono essere messe in primo piano, perché questi fenomeni mostrano nel modo più chiaro che qualcosa sta accadendo nel mezzo.

Un'esposizione della scienza dei fenomeni elettrici e magnetici deve avere in vista soprattutto i cinque punti che abbiamo appena enumerato. Ciò che può essere considerato al momento come saldamente stabilito deve servire come punto di partenza e deve determinare la distribuzione generale dell'intero corpo scientifico da studiare.

Diremo qui alcune parole su questa distribuzione generale.

A quanto definitivamente stabilito appartiene, come abbiamo detto, il ruolo del mezzo nei fenomeni che dobbiamo considerare. C'è davvero una modifica nel mezzo; questo è fuor di dubbio, lo abbiamo ripetuto più volte. Per questo mettiamo in primo piano il mezzo e ciò che vi accade, cercando peraltro di separare rigorosamente ciò che si osserva in modo efficace da tutto ciò che presenta un carattere ipotetico. Considereremo quindi prima le proprietà del mezzo, o come si dice di solito, del *campo*, e solo dopo considereremo le condizioni in cui si forma un campo. Studieremo inoltre separatamente l'influenza del campo sulla materia che contiene. Tale influenza deve ovviamente anche essere classificata tra le proprietà del campo; ma, per molte ragioni, sembra preferibile riunire i fenomeni corrispondenti in un capitolo particolare. Tratteremo poi dei metodi di misura impiegati nello studio del campo e, infine, considereremo il campo terrestre.

Bisogna distinguere due campi, il campo elettrico (o più esattamente il campo elettrostatico) e il campo magnetico che, entrambi, sono invariabili; ciò significa che le grandezze che incontreremo nel loro studio sono indipendenti dal tempo o dipendono da esso in modo tale che durante una serie indefinita di intervalli di tempo successivi ed uguali, aumentano proporzionalmente al tempo (la quantità di calore sviluppata da una corrente, le quantità di sostanza depositate da una corrente sugli elettrodi, ad esempio, sono proporzionali al tempo).

Oltre a questi due campi costanti, dovremo studiare anche un campo magnetico variabile, che converrebbe molto chiamare campo elettromagnetico; purtroppo le espressioni elettromagnete ed elettromagnetismo hanno già un ben determinato significato consacrato, di cui sarebbe difficile perdere l'abitudine.

Rimanderemo ad una quarta parte la considerazione dei fenomeni che si manifestano nella scarica attraverso i gas. Finora non è stato trovato alcun modo chiaro e logico che consenta la riunione di questa quarta parte con una delle tre precedenti. Infine, dovremo ancora considerare i nuovi raggi e i fenomeni di radioattività.

Si ottiene così la seguente distribuzione generale:

Libro I. Campo elettrico costante	Libro II. Campo magnetico costante
Proprietà del campo	Proprietà del campo
Sorgente del campo	Sorgente del campo
Influenza del campo sulla materia	Influenza del campo sulla materia
Misure	Misure
Elettricità terrestre	Magnetismo terrestre
Libro III. Campo magnetico variabile	
Libro IV. Passaggio della scarica attraverso i gas	
Libro V. Nuovi raggi e radioattività	

Non c'è dubbio che un tale piano rimane lontano dalla distribuzione perfetta, che corrisponderà in futuro a visioni consolidate sui fenomeni elettrici e magnetici, quando una teoria completamente definita, perseguita in tutti i suoi dettagli, potrà abbracciare uniformemente tutte le parti del nostro studio. Il lettore attento noterà certamente che in più punti l'idea fondamentale della nostra esposizione non è rigorosamente rispettata. Crediamo che non sia attualmente possibile dare allo studio dell'elettricità e del magnetismo una forma completamente omogenea; si può solo tentare di avvicinarsi a questa forma perfetta, cercando, senza deviare dal percorso seguito dallo sviluppo scientifico, di presentare con la massima accuratezza un quadro della fase della sua storia che sta attraversando al momento attuale.



## **Parte I.**

### **Campo elettrico costante**



# 1. Proprietà del campo elettrico costante

## 1. Fatti fondamentali

Si possono compiere sui corpi, principalmente sui corpi allo stato solido o liquido, certe operazioni, per effetto delle quali *lo spazio che li circonda* acquista nuove proprietà; è ovviamente necessario ricercare la causa di queste ultime in queste operazioni. Le operazioni più semplici in questione sono note in fisica elementare e verranno studiate in dettaglio nel capitolo successivo; ci limiteremo, per il momento, a menzionare il contatto dei corpi, l'attrito, ecc. Quando, ad esempio, un corpo viene sfregato contro un altro e poi separato allontanandoli tra loro, si manifestano in particolare nello spazio circostante i seguenti fenomeni: corpi leggeri e nello stesso tempo facilmente mobili si muovono verso la superficie di uno dei corpi strofinati; dopo aver raggiunto questa superficie, i corpi leggeri se ne allontanano con maggiore o minore rapidità; si osserva talvolta, tra il corpo strofinato e un altro corpo cui ci si è avvicinati a brevissima distanza, una piccola scintilla, la cui comparsa è accompagnata da un suono come di un debolissimo scoppiettio; altri corpi, anch'essi strofinati, tendono ad avvicinarsi al corpo sfregato considerato o ad allontanarsi da esso, a seconda delle circostanze (vedi oltre).

L'ipotesi, che la causa immediata dei fenomeni menzionati si nasconde nei corpi strofinati, ha portato alla terminologia nota: quando i corpi sono stati sottoposti allo sfregamento, o a una qualsiasi delle altre operazioni per effetto delle quali si manifestano nello spazio circostante i fenomeni precedenti, si dice che sono elettrizzati. Finora, questa espressione deve semplicemente significare per noi che certi fenomeni si verificano nello spazio che circonda i corpi. Il modo di considerare il mondo esterno, che ha regnato nella scienza per tutto il Settecento e durante i primi tre quarti dell'Ottocento, ha portato gli scienziati a concepire la precedente modalità di avvicinamento dei corpi come un'attrazione e la loro tendenza ad allontanarsi gli uni dagli altri come una reciproca repulsione; così sono nate le espressioni dei corpi che si attraggono e dei corpi che si respingono.

Il fatto noto che uno stesso corpo, dopo essere stato posto a contatto con un corpo strofinato, tende ad avvicinarsi a certi corpi e ad allontanarsi da altri, ha fatto pensare che vi siano due tipi di elettrizzazione; una si chiama elettrizzazione positiva, l'altra negativa. Di conseguenza è diventata consuetudine parlare di segno di un di elettrizzazione (+ e -).

Ognuna delle operazioni menzionate all'inizio di questo paragrafo comporta la comparsa di due elettrizzazioni, appartenenti rispettivamente a due corpi diversi o a posti diversi di uno stesso corpo, a seconda che si operi su due corpi (attrito, contatto, ecc.) oppure su uno solo (vedi Cap. II: piroelettricità, triboelettricità, ecc.).

Lo studio dei movimenti compiuti da corpi elettrizzati sufficientemente vicini tra loro porta alla seguente semplice regola: *i corpi elettrizzati sono soggetti a forze, sotto l'influenza delle quali si avvicinano a corpi la cui elettrizzazione è di nome opposto, e si allontanano da quelli la cui elettrizzazione è dello stesso nome, vale a dire che sono elettrizzati come loro*. Quando si usa la terminologia precedente, possiamo enunciare la stessa regola nel modo seguente: *i corpi che hanno elettrizzazioni di nomi opposti si attraggono; corpi le cui elettrizzazioni hanno lo stesso nome si respingono a vicenda*.

Per spiegare questi fatti fondamentali, è stato proposto un numero considerevole di diverse ipotesi e teorie basate su questi presupposti. Rappresenteremo i due gruppi, nei quali possiamo collocare le teorie e le ipotesi che esistevano prima del 1900, e che in fondo corrispondono ai due

diversi modi in cui possiamo considerare il mondo esterno, con due teorie che hanno grande importanza dal punto di vista storico e sono particolarmente caratteristiche. Ognuna di queste due teorie porta a una certa immagine dei fenomeni, che cerca di tradurre il lato di questi fenomeni che è nascosto e non accessibile all'osservazione diretta. Chiameremo le due immagini così ottenute, immagine A e immagine B. Ricordiamo che l'immagine A ha regnato nella scienza fino all'ultimo quarto del secolo scorso.

Faremo conoscere nei primi paragrafi di questo capitolo i fenomeni elettrici, o più esattamente i fenomeni elettrostatici, che sono fondamentali, e considereremo separatamente, in ciascuno di questi paragrafi, le parti corrispondenti delle immagini A e B. Iniziamo con i fatti fondamentali già menzionati nel presente paragrafo.

**Immagine A.** - In questa immagine, a parte la materia nei suoi diversi stati, solido, liquido o gassoso, e forse ancora in altri stati meno noti, e a parte l'etere luminoso, esistono in natura due sostanze, che si dicono elettricità positiva ed elettricità negativa; quando riterremo necessario, per certi motivi (vedasi l'introduzione), usare l'immagine A, chiameremo talvolta queste due sostanze elettricità libere, seguendo l'uso e non avendo alcuna intenzione di indicare con la parola libero una particolare proprietà dell'elettricità.

Come ogni sostanza, l'elettricità occupa in un dato istante una determinata posizione, che può cambiare; inoltre l'elettricità rappresenta una certa grandezza, per cui si può parlare di una *quantità di elettricità*. La quantità totale di elettricità presente in un dato corpo è detta la *carica* di quel corpo. L'elettricità ha la proprietà di essere alla superficie di certi corpi in uno strato così sottile, che si può, nello studio di varie questioni, introdurre la nozione teorica di *masse superficiali*, che non occupano spazio e possiedono solo due dimensioni geometriche.

Le due elettricità possiedono la proprietà azioni a distanza; agiscono istantaneamente l'una sull'altra; le elettricità dello stesso nome si respingono, quelle con nomi opposti si attraggono. Quando due elettricità di nomi opposti sono unite in quantità uguali, formano una miscela neutra, che si trova in tutti i corpi; questa miscela non esercita alcuna azione esterna, per cui la sua presenza non viene rivelata. Questo spiega perché a volte ci esprimiamo nel modo seguente: *quantità uguali di elettricità di nomi opposti si distruggono a vicenda e l'elettricità neutra si scompone in quantità uguali di elettricità positiva e negativa*.

Se consideriamo i fatti fondamentali indicati all'inizio di questo paragrafo, vediamo che con l'immagine A non occorre spiegare nulla, perché tutto ciò sarebbe da spiegare (a parte l'attrazione sui corpi leggeri di cui parleremo) è attribuita alle due ipotetiche elettricità come proprietà intrinseca. Tutte le operazioni sopra menzionate producono una scomposizione della miscela neutra; tale scomposizione avviene, per esempio, nell'attrito, l'elettricità positiva si raccoglie in un corpo, l'elettricità negativa nell'altro. Naturalmente tutte queste operazioni danno sempre tra loro *quantità di elettricità positiva ed elettricità negativa*.

L'azione reciproca dei corpi elettrizzati si spiega con l'azione reciproca delle cariche che questi corpi portano.

Lo spazio che circonda i corpi elettrizzati si chiama campo elettrico e rappresenta un campo di forza (Volume I): in ciascuno dei punti di tale campo compare una determinata forza, quando si porta nel punto considerato una certa quantità di elettricità, per esempio una piccola sfera di vetro precedentemente strofinata. L'entità e la direzione di questa forza dipendono dalla posizione del punto considerato e dall'effettiva distribuzione delle elettricità, o, come talvolta si dice, dalla distribuzione delle masse elettriche.

Si possono condurre in un campo elettrico un'infinità di curve, la cui direzione (direzione della tangente) in ogni punto coincide con quella della forza in questo punto; tali curve sono chiamate *linee di forza* (Volume I). Attraverso qualsiasi punto di un campo elettrico passa una linea di forza. Quando le linee di forza sono rette parallele, cioè quando la forza ha la stessa direzione in tutti i punti del campo, il campo si dice *uniforme*; vedremo più avanti che, in un campo uniforme, la forza ha la stessa intensità in tutti i punti del campo. Nell'immagine A, le



linee di forza hanno un significato esclusivamente geometrico. Esse acquistano un significato fisico solo nel caso in cui si porta in un punto del campo un piccolo corpo elettrizzato, e questo significato si limita a questo punto, dove la direzione della linea di forza determina la direzione della forza effettivamente osservata. In tutti gli altri suoi punti la linea di forza non ha, anche nel caso che abbiamo appena considerato, alcuna realtà fisica.

Si conviene attribuire ad una linea di forza un verso di percorrenza positiva, che è quella della forza che agisce sull'elettricità positiva; la forza agente sull'elettricità negativa ha verso opposto. Con tale convenzione si ottiene evidentemente il risultato che le linee di forza partono dai corpi elettrizzati positivamente e, al contrario, penetrano in corpi che portano elettricità negativa.

Si prende, per *unità di quantità di elettricità*, una certa quantità di elettricità, in genere del tutto arbitraria; vedremo più avanti nel § 4, come si possa ottenere un'unità assoluta di quantità di elettricità. Prendiamo la forza, che in un dato punto del campo agisce sull'unità di quantità di elettricità, come misura di una nuova quantità, detta in questo punto *intensità del campo* (volume I). Se  $f$  è la forza che agisce sulla quantità di elettricità  $\eta$ , l'intensità  $F$  del campo è rappresentata dalla relazione

$$F = \frac{f}{\eta} \quad (1.0.1)$$

Un campo uniforme ha ovunque la stessa intensità in grandezza e direzione.

Una quantità positiva di elettricità è espressa da un numero positivo e una quantità negativa di elettricità da un numero negativo. Contando positivamente la forza  $f$ , quando è diretta nel verso positivo della linea di forza, si ottiene il risultato che l'intensità del campo può essere solo una quantità positiva, perché per queste convenzioni le quantità  $\eta$  e  $f$  avranno sempre lo stesso segno.

Consideriamo una qualsiasi superficie nel campo elettrico e scegliamo una parte di questa superficie dove non abbia alcuna tangente comune con le linee di forza, cioè tale che sia attraversata dalle linee di forza. Supponiamo inoltre tracciata su questa superficie una piccolissima curva chiusa, e tracciamo le linee di forza attraverso tutti i punti di questa curva. Il luogo geometrico di queste linee di forza formerà allora la superficie laterale di una sorta di tubo, detto tubo di forza. In generale, tale tubo sarà curvo e la superficie della sezione trasversale varierà lungo il tubo, che si allargherà o si restringerà. In un campo elettrico uniforme, i tubi di forza sono rettilinei e hanno ovunque la stessa sezione trasversale. È chiaro che in tutti i punti della superficie laterale di un tubo di forza, la componente, lungo la normale a tale superficie, dell'intensità  $F$  del campo è nulla. Segue inoltre da tutto ciò che precede che i tubi di forza vanno, nello spazio, da corpi elettrizzati positivamente a corpi elettrizzati negativamente.

Si dà spesso, seppur sbagliando, all'intensità del campo in un punto dato il nome di *forza elettrica* in questo punto.

È fuor di dubbio che l'immagine A, di cui abbiamo appena indicato i tratti fondamentali, non è esatta e non corrisponde rigorosamente alla realtà. Si può affermare con certezza che un'azione esercitata istantaneamente a distanza non è una proprietà posseduta dall'elettricità. Tuttavia, non ci libereremo ancora completamente dall'immagine A. Ce lo impedisce in primo luogo il ruolo che essa ha avuto nella storia della scienza, in secondo luogo la terminologia corrente, che si basa su questa immagine, e in terzo luogo la relativa semplicità e la grande comodità che essa offre quando vogliamo orientarci nei fenomeni di una certa complessità con cui dobbiamo prima confrontarci. *Un grandissimo numero di questi fenomeni si verifica, infatti, COME se l'immagine A fosse reale in tutte le sue caratteristiche*; tali sono quelli che abbiamo già considerato e altri ancora che studieremo in seguito. La utilizzeremo quindi in un vasto campo di vari fenomeni, senza rischiare di commettere la minima colpa. Sicuramente l'estensione di questo dominio ci deve essere ben nota e possiamo uscirne solo verificando sperimentalmente i risultati di ciascuna delle nostre deduzioni. Ma all'interno di questo dominio, è lecito mantenere l'immagine A come una finzione molto chiara, che fornisce un facile ragionamento, una descrizione luminosa dei

fenomeni, nonché una comoda base per il calcolo e la risoluzione di diversi tipi di problemi, ecc. Basandoci sull'immagine A, potremo, in un'infinità di casi, prevedere con assoluta certezza i minimi dettagli di un fenomeno che deve verificarsi in determinate circostanze; ma non va mai dimenticato che tutto ciò comporta l'essenziale restrizione contenuta nelle parole "come se", stampate sopra in maiuscolo.

Una teoria tratta dall'immagine A, così come ogni teoria che ammette, per la spiegazione dei fenomeni elettrici, l'esistenza di due sostanze particolari, è chiamata teoria dualistica. Oltre alle teorie dualistiche, sono state proposte anche teorie unitarie, che presuppongono una sola sostanza speciale, la quale possiede inoltre sempre la proprietà di agire istantaneamente a distanza. Si ammette che ogni corpo nel suo stato naturale deve contenere una determinata quantità, che gli è propria, per così dire, di questa sostanza. Qualsiasi variazione di questa quantità rappresenta un'elettrizzazione del corpo, un eccesso rispetto alla quantità naturale corrispondente a una delle elettrizzazioni, un difetto all'altra. Le operazioni, menzionate all'inizio di questo paragrafo, producono uno spostamento della singola sostanza ipotetica, dando origine in un luogo ad un eccesso, in un altro ad un difetto. Nello sfregamento, ad esempio, una certa quantità di questa sostanza passa da un corpo all'altro. La mutua distruzione delle due elettrizzazioni corrisponde al ritorno della singola sostanza al suo posto primitivo, l'eccesso in un corpo compensando la deficienza nell'altro.

La prima teoria unitaria fu proposta da Franklin. Edlund, in una serie di lavori che iniziò a pubblicare nel 1871, stabilì un'interessante teoria, secondo la quale l'unico agente produttore dei fenomeni elettrici sarebbe l'etere luminoso; nell'ulteriore sviluppo della sua teoria, Edlund attribuì all'etere la proprietà dell'azione a distanza. Non dovremo più tornare, nel nostro lavoro, alle teorie unitarie che presuppongono un'azione a distanza.

**Immagine B.** - Abbiamo già dovuto parlare più volte (volumi I e II) di questa immagine. Oltre alla materia ordinaria esiste ancora l'etere, che riempie gli spazi tra le stelle così come gli intervalli tra gli atomi materiali. Le proprietà dell'etere e in particolare la sua struttura ci sono quasi del tutto sconosciute. I principi della meccanica razionale e in particolare quelli della teoria dell'elasticità possono essere applicati ad essa solo in modo congetturale e senza certezza. Alcuni studiosi hanno attribuito all'etere complicate e strane proprietà, che rappresentano una combinazione delle proprietà dei corpi solidi e dei liquidi. Non possiamo entrare qui nell'esame delle numerose ipotesi che sono state fatte su questo argomento.

Le operazioni menzionate all'inizio di questo paragrafo producono certe deformazioni nell'etere, ricordando principalmente per il loro carattere le deformazioni elastiche che, nei corpi solidi, corrispondono agli sforzi. La direzione di quella che viene chiamata forza di tensione longitudinale coincide in ogni punto dello spazio con la direzione della forza elettrica osservata in quel punto; in altre parole, le linee di tensione coincidono con le linee di forza, e così come siamo arrivati prima alla nozione di tubi di forza, così possiamo introdurre qui la nozione di tubi di tensione. Le linee e i tubi di tensione dell'immagine B hanno un reale significato fisico, derivante dall'esistenza di deformazioni nell'etere in tutti i punti dello spazio che rappresentano il campo elettrico. Questa è la differenza essenziale tra le immagini A e B; nella prima immagine le linee di forza hanno, come abbiamo visto, un carattere prettamente geometrico. I tubi di tensione sono generalmente curvi e l'area della loro sezione trasversale varia continuamente lungo la lunghezza del tubo, tranne nei tubi di tensione di un campo elettrico uniforme dove è costante.

La tensione longitudinale, che regna nei tubi, ha una certa direzione, che, a dire il vero, non è facile da spiegare. Si è quindi portati a rappresentare la deformazione relativa a una tale tensione come analoga ad uno spostamento di sostanza lungo il tubo, in una data direzione; ma si deve ammettere che non siamo arrivati in questo modo ad avere un'idea alquanto chiara della deformazione in questione.

I tubi di tensione del campo elettrostatico devono necessariamente basarsi sulla materia. Finiscono solo sulla superficie di un corpo, dal quale non possono staccarsi. Un corpo è elettrizzato

quando i tubi di tensione premono contro di esso; una delle estremità di un tubo corrisponde all'elettrizzazione positiva, l'altra all'elettrizzazione negativa. Quella che abbiamo chiamato elettricità libera, nell'immagine A, ci appare qui come l'estremità di un tubo di tensione. Il movimento visibile della materia, attribuito ad una mutua attrazione di corpi di elettrizzazione contraria, è in realtà il risultato della tendenza ad accorciare i tubi che vanno da un corpo all'altro e sono in stato di tensione.

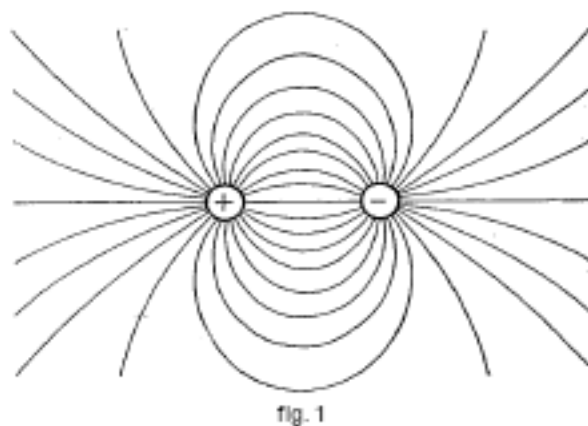
Sappiamo che l'elettrizzazione di un dato corpo può aumentare o diminuire: nell'immagine A, ciò rispondeva ad una variazione della carica, cioè della quantità libera di elettricità trasportata dal corpo. Nell'immagine B possiamo rappresentare in due modi ciò che determina l'intensità dell'elettrizzazione di un dato corpo. Si può ammettere che un aumento dell'elettrizzazione è solo un aumento della tensione longitudinale nei tubi di tensione; ma si può fare ancora un'altra ipotesi, supporre che il significato dei tubi consista non solo nel fatto che essi determinano la direzione delle tensioni longitudinali nell'etere, ma anche nel fatto che ciascuno di essi esista effettivamente, come qualcosa di veramente distinto e indipendente, richiamando in qualche modo un filamento. In questo caso, un aumento dell'elettricità può essere concepito come un aumento del numero di tubi che partono da una parte definita della superficie del corpo elettrizzato. Quando ci accingeremo a confrontare più esattamente le corrispondenti caratteristiche delle immagini A e B, vedremo che è più conveniente considerare una combinazione delle due ipotesi: ad un aumento di carica nell'immagine A corrisponderà quindi un aumento sia del numero di tubi, rispetto all'entità della tensione longitudinale esercitata nelle diverse sezioni dello stesso tubo.

Per completare le caratteristiche fondamentali dell'immagine B, dobbiamo ancora indicare le seguenti due circostanze: in primo luogo, la tensione longitudinale è una grandezza che varia continuamente lungo il tubo, tranne che nei tubi di campo uniforme dove è costante; in secondo luogo, dobbiamo supporre che esista nei tubi non solo una tensione longitudinale, ma anche una pressione trasversale, che ha l'effetto di comprimere i tubi l'uno sull'altro.

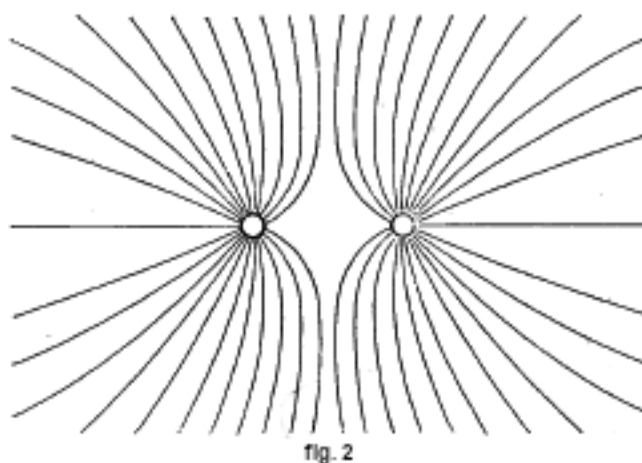
Torniamo ora ai fatti fondamentali discussi all'inizio di questo paragrafo. Le operazioni compiute su due corpi, ad esempio l'attrito reciproco, provocano la comparsa di tubi di tensione nell'etere circostante. Mostriamo qual è la distribuzione di questi tubi, in alcuni casi particolari.

Consideriamo un corpo elettrizzato positivamente: i tubi fuoriescono da esso in tutte le direzioni, per terminare sui corpi situati nel campo, per quanto lontani possano essere (pareti, pavimento, soffitto, terra, nuvole, ecc.). Per un corpo elettrizzato negativamente, abbiamo la stessa immagine, con la differenza però che la direzione dei tubi è inversa.

Riuniamo due corpi P e Q, tenendoli tuttavia sufficientemente distanti, e supponiamo P elettrizzato positivamente, Q negativamente. Siamo qui in presenza di due sistemi di tubi. Un tubo del sistema P incontrerà con la sua estremità, la superficie di uno dei corpi circostanti M del campo, l'inizio di uno dei tubi del sistema Q; questo secondo tubo diventerà il prolungamento del primo e si formerà così un unico tubo che, man mano che i due corpi P e Q si avvicineranno, si accorcerà rapidamente abbandonando il corpo M. Quando i corpi P e Q saranno sufficientemente vicini l'uno dall'altro, la maggior parte dei tubi (non tutti però) andranno da un corpo all'altro, e solo pochi continueranno ad andare da P ai corpi circostanti del campo, o questi ultimi al corpo Q. Sono questi i tubi che vanno direttamente da P a Q che producono l'apparente attrazione reciproca di questi corpi. La figura 1 rappresenta, in questo caso, la distribuzione dei tubi.



Se si avvicinano due corpi P e Q elettrizzati positivamente, le estremità dei due sistemi di tubi P e Q si dispongono l'una accanto all'altra sui corpi circostanti M, e naturalmente non si può più parlare di formazione di tubi che abbandonano M per andare direttamente da P a Q. La figura 2 indica il carattere generale della distribuzione dei tubi in questo caso. La stessa figura fornisce anche la distribuzione dei tubi di tensione, quando i due corpi sono elettrizzati negativamente. Poiché i tubi esercitano una pressione trasversale l'uno sull'altro, i due corpi P e Q devono tendere, lo si vede subito nella figura, ad allontanarsi, ed è in questo che consiste quella che abbiamo precedentemente chiamato la reciproca repulsione dei corpi caricati con elettricità con lo stesso nome.



**Confronto delle immagini A e B.** - Se si confrontano le immagini A e B, non si vede inizialmente quali vantaggi essenziali la seconda possa presentare: l'immagine B non è più semplice dell'immagine A, e si potrebbe piuttosto pensare che è molto più complicata. Sorge la seguente domanda: abbiamo qualche motivo per preferire forze di tensione longitudinali nell'etere, che hanno una direzione determinata e sono accompagnate da pressioni trasversali, ai due fluidi elettrici dell'immagine A? In un caso come nell'altro, si tratta di qualcosa di singolare, astratto e difficile da comprendere.

Un esame più attento, tuttavia, porta alla conclusione che l'immagine B presenta notevoli vantaggi rispetto all'immagine A; li indicheremo.

1. Nessuna azione a distanza è ammessa nell'immagine B, nessuna azione diretta di un corpo laddove non si trova esso stesso. L'immagine B cerca la causa della forza elettrica nel luogo in cui questa forza si manifesta.

2. L'immagine B non richiede l'introduzione di nuove sostanze oltre all'etere luminoso.

3. Le stesse deformazioni rappresentano qualcosa di analogo alle ben note deformazioni della materia nei suoi diversi stati.

4. Con l'immagine B è subito facile cogliere il ruolo importante che il mezzo svolge effettivamente e che considereremo nel § 4.

5. Il successivo sviluppo dei tratti più caratteristici dell'immagine B ha portato a una nuova teoria, che copre fenomeni elettrici, magnetici e luminosi allo stesso tempo.

6. Questa nuova teoria ha previsto due leggi molto importanti, che sono state completamente confermate nella realtà. L'immagine A non poteva prevedere nemmeno la possibilità di una qualsiasi relazione tra le grandezze a cui si applicano queste due leggi.

7. Questa stessa teoria ha portato alla scoperta delle radiazioni elettriche di Hertz, la cui produzione non può essere spiegata mediante l'immagine A. Nonostante tutti i difetti dell'immagine B, siamo giustificati nel dire che questa è incomparabilmente più vicina alla verità dell'immagine A.

## 2. Conduttori e non conduttori o dielettrici

Se si tocca la superficie di un qualsiasi corpo elettrizzato M con un altro corpo N, sempre quest'ultimo si elettrizza. Il carattere del fenomeno, che poi si manifesta sul corpo N, dipende dalla natura di questo corpo. In certi casi l'elettrizzazione si osserva solo nella parte della superficie di N che è stata messa a contatto con M; in altri si distribuisce istantaneamente su tutta la superficie di N. Si dice, in questo secondo caso, che la sostanza del corpo N, è conduttrice di elettricità; nel primo caso, al contrario, è non conduttrice o dielettrica. Quando N è un corpo conduttore e M non conduttore, l'elettrizzazione sul corpo M diminuisce solo nei punti che sono stati portati a contatto con N; se invece anche M è conduttore, l'elettrizzazione diminuisce su tutta la sua superficie. Tra le sostanze conduttrici vi sono i metalli e le loro leghe, il carbone, i sali fusi, le soluzioni di sali e acidi, il corpo dell'uomo e quello degli animali, ecc.; tra le sostanze non conduttrici, il vetro freddo e secco, la porcellana secca, l'ebanite, la paraffina, la guttaperca, lo zolfo, il fosforo, il selenio, la mica secca, ecc. Un filo metallico che unisce i corpi M e N è ciò che meglio trasporta lo stato elettrico; per abbreviare, diremo semplicemente, in questo caso, che i corpi M e N sono connessi o comunicano tra loro.

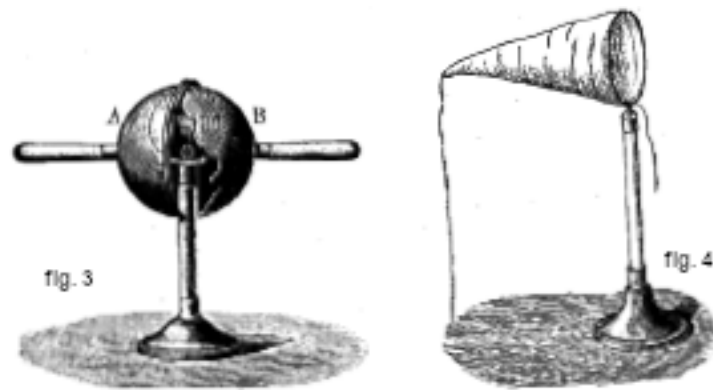
Quando si collega con la terra (o anche quando si mette a terra) un conduttore elettrizzato, sottratto ad ogni influenza esterna, cioè che non è in presenza di altri corpi elettrizzati, la sua elettrizzazione scompare. Per mantenere l'elettrizzazione di un conduttore, questo deve essere separato dal suolo mediante dei non conduttori, che poi svolgono il ruolo di isolanti; in questo caso si dice che il corpo stesso è isolato.

Esistono sostanze che, in base alle loro proprietà, occupano una posizione intermedia tra le sostanze conduttrici e i dielettrici sopra citati. Tali sono, ad esempio, legno, vetro riscaldato, marmo, carta, ecc. Non esistono, a quanto pare, tra i corpi allo stato solido o liquido, non conduttori assoluti.

I conduttori possiedono le seguenti due importantissime proprietà, che peraltro si trovano, come vedremo in seguito, in stretta relazione: *lo stato elettrico dei conduttori si manifesta solo alla loro superficie; l'intensità del campo elettrico è nulla all'interno dei conduttori*. Consideriamo due corpi cavi, di cui uno M è formato da una sostanza conduttrice, e l'altro N da un dielettrico. L'elettrizzazione della superficie interna, che delimita la cavità, è possibile solo per il corpo N; quando si introduce, nella cavità del corpo M, un altro conduttore elettrizzato  $m$ , e quando si mette  $m$  a contatto con la superficie interna della cavità, lo stato elettrico di  $m$  scompare e si sposta esclusivamente alla superficie esterna del corpo M. Per quanto fortemente sia elettrizzato il conduttore M, nessuna forza viene esercitata sui corpi leggeri posti nella cavità interna, e se il corpo elettrizzato  $m$  viene portato in questa cavità, l'elettrizzazione della superficie esterna del corpo M non ha alcun effetto su  $m$ . Si possono fare diversi esperimenti per verificare che i conduttori si elettrizzano solo sulla loro superficie esterna. Si conosce l'esperimento di fisica elementare in cui una sfera elettrizzata O (fig. 3) viene avvolta da due emisferi A e B, messi

a contatto con O; quando il contatto viene rimosso e gli emisferi vengono quindi separati, l'elettrizzazione di O è scomparsa. È anche noto l'esperimento della sfera cava elettrizzata, che presenta un'apertura; se si tocca la superficie esterna di questa sfera con una pallina metallica fissata all'estremità di una bacchetta di vetro (corpo di prova), si trova che questa pallina si è elettrizzata; non è così quando la sfera viene introdotta all'interno della sfera cava e quando viene portata a contatto con la superficie interna di quest'ultima. Faraday ha costruito un sacco conico di tessuto leggero e conduttore (fig. 4), che si può rivoltare con un filo di seta legato alla sua sommità. Con una piccola sfera di prova si può dimostrare che, in ognuna delle due posizioni del sacco, solo la superficie esterna è elettrizzata, anche se, nell'inversione, le due superfici si scambiano in qualche modo di ruolo, la superficie interna divenendo quella esterna e viceversa. Anche lo strumento seguente è molto istruttivo: su entrambi i lati di un pezzo di rete metallica sono attaccate strisce di carta; la rete è provvista di due manici di vetro, con l'aiuto dei quali può essere data una forma cilindrica, piegandola o in un senso o nell'altro, in modo che la stessa faccia della rete diventi a volte la superficie interna, a volte quella esterna del cilindro; si osserva che i pezzi di carta vengono respinti solo dalla superficie esterna.

Passiamo ora alla spiegazione dei fenomeni considerati in questo paragrafo,



**Immagine A.** - Le due elettricità possiedono una perfetta mobilità nei conduttori, mentre non possono muoversi nei dielettrici. Una particella di elettricità, all'interno della massa di un qualsiasi conduttore M, potrebbe quindi essere in quiete solo se non fosse soggetta ad alcuna forza elettrica. Inoltre, all'interno di un conduttore c'è una miscela di due elettricità, che si scompone nelle sue parti costituenti, sotto l'azione di qualsiasi forza elettrica, per quanto piccola. Ne consegue che, *in un conduttore, vi può essere equilibrio, cioè riposo, solo quando l'intensità  $F$  del campo elettrico è nulla in tutti i punti di tale conduttore.* Dimosteremo in seguito rigorosamente che la legge dell'azione reciproca tra corpi elettrizzati e l'uguaglianza  $F = 0$  portano alla conclusione che la presenza di elettricità libera all'interno di un conduttore M è, in generale, impossibile; questa elettricità deve raccogliersi alla superficie. La perfetta mobilità dell'elettricità mostra allora che la forza  $f$ , che agisce su qualsiasi particella di elettricità e che è dovuta a tutte le altre quantità di elettricità che si trovano sullo stesso conduttore M o su altri conduttori e isolanti vicini, *deve essere normale alla superficie del conduttore M*; altrimenti, infatti, la componente tangenziale  $f$  produrrebbe un movimento della particella considerata sulla superficie di M. La carica, che è sul conduttore, produce nello spazio esterno un certo campo elettrico; si vedrà, da quanto detto, che le *linee di forza di questo campo esterno incontrano normalmente la superficie del conduttore.*

La distribuzione dell'elettricità sulla superficie dei conduttori porta alla nozione di strato superficiale, la cui densità superficiale  $k$  è misurata, nel caso di distribuzione uniforme dell'elettricità, dalla quantità di elettricità che si trova sull'unità di superficie; quando la quantità di elettricità  $\eta$  è uniformemente distribuita su una superficie  $s$ , si ha

$$k = \frac{\eta}{s} \quad (1.0.2)$$

La stessa formula dà, per una distribuzione non uniforme, la densità media sull'area  $s$ . Se, su un elemento di area infinitamente piccola  $\Delta s$  è presente la quantità infinitamente piccola di elettricità  $\Delta\eta$ , il valore limite della densità media si chiama la densità nel punto considerato della superficie; si ha per tale densità

$$k = \lim \frac{\Delta\eta}{\Delta s} = \frac{d\eta}{ds} \quad (1.0.3)$$

da cui

$$d\eta = kds \quad (1.0.4)$$

La carica totale  $\eta$ , che si trova sulla superficie  $s$  di un conduttore è

$$\eta = \iint kds \quad (1.0.5)$$

essendo l'integrale doppio esteso all'intera area del conduttore.

La questione della distribuzione dell'elettricità sulla superficie di un conduttore verrà considerata in seguito. Osserveremo solo qui che la stessa distribuzione dipende esclusivamente dalla forma della superficie del conduttore.

La perfetta mobilità dell'elettricità su un conduttore permette di dividere la carica di questo conduttore in due parti, in altre parole di fargli subire una variazione quantitativa determinata. Se, infatti, si mette il conduttore M, su cui è la, carica  $\eta$ , a contatto con un altro conduttore N, identico a M per dimensione e forma per esempio, e se poi si allontanano M e N tra loro, su ognuno di essi ci sarà ovviamente una carica  $\eta/2$ .

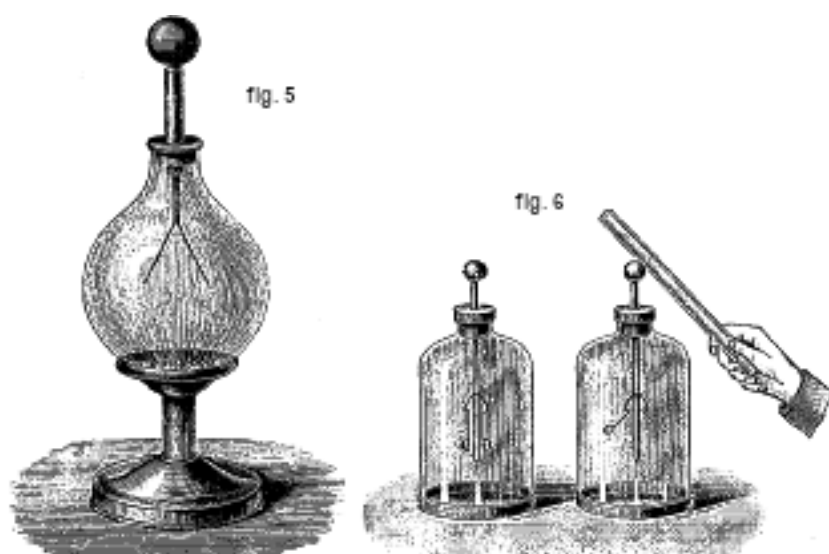
Quando una forza elettrica agisce all'interno di un dielettrico, in ogni particella della sostanza si produce una scomposizione della miscela neutra delle due elettriche, le quali tuttavia non si allontanano l'una dall'altra, ma rimangono all'interno della particella. Un dielettrico, in cui avviene tale scomposizione interna, è detto *polarizzato*. Clausius e Mossotti hanno sviluppato una teoria dei fenomeni elettrici nei dielettrici, supponendo che questi ultimi siano costituiti da particelle, perfettamente conduttrici di elettricità, annegate in una sostanza che forma una specie di cemento e che è assolutamente non conduttrice. Sotto l'azione delle forze elettriche si ha una scomposizione della miscela neutra in ciascuna delle particelle conduttrici, e le elettricità positiva e negativa si raccolgono rispettivamente attorno a due punti di queste particelle che possono essere chiamati poli. È consentito ammettere, all'interno dei dielettrici, la presenza di elettricità occupante un certo volume; questo porta alla nozione di una densità di volume dell'elettricità.

**Immagine B.** - All'interno della sostanza dei conduttori, nell'etere che essa contiene, non si possono produrre delle deformazioni che corrispondono all'esistenza del campo elettrostatico o campo elettrico costante considerato. A questo proposito, le immagini A e B contengono alcune caratteristiche, per così dire opposte. Secondo l'immagine A, i conduttori sono principalmente le sostanze nella quali si verificano i fenomeni elettrostatici: l'immagine B, invece, attribuisce questo ruolo ai dielettrici e considera in qualche modo i conduttori come non conduttori delle tensioni elettrostatiche. Linee e i tubi di tensione terminano alla superficie di un conduttore. I tubi non possono staccarsi da una tale superficie, ma sulle loro estremità possiedono una completa mobilità, cosicché un tubo, dove c'è una tensione longitudinale, può trovarsi a riposo solo se la tangente alla sua estremità è normale alla superficie del conduttore, e se tutte le pressioni trasversali che il tubo subisce dai tubi vicini sono reciprocamente bilanciate. Lo scorrimento dell'estremità dei tubi sulla superficie di un conduttore e, di conseguenza, lo spostamento dei tubi nello spazio, sono accompagnati da numerosi fenomeni particolari che in questo momento non considereremo. Questo scorrimento e questo movimento rappresenteranno per noi attualmente solo il passaggio da uno stato di equilibrio dei tubi, perturbato per qualsiasi motivo, ad un altro stato di equilibrio corrispondente a circostanze modificate.

I tubi di tensione attraversano liberamente i dielettrici e si muovono in essi senza alcuna resistenza in tutte le direzioni: i dielettrici, cioè i non conduttori, sono quindi in qualche modo conduttori per i tubi di tensione. Ma se una delle estremità di un tubo poggia su un dielettrico, avendo questa estremità poi una mobilità estremamente bassa, la tangente all'estremità del tubo può, in generale, formare un qualsiasi angolo con la superficie del dielettrico. L'estremità di un tubo si può trovare in qualsiasi punto ed in particolare all'interno di un dielettrico.

### 3. Elettroscopi; elettrometro a quadrante; isolanti

Si chiama elettroscopio uno strumento che serve a mostrare se un dato corpo è elettrizzato e talvolta anche per determinare il segno dell'elettrificazione di questo corpo. L'elettroscopio più semplice è costituito da un vaso di vetro a forma di bottiglia, il cui collo è attraversato da un'asta metallica, terminata superiormente da una sferetta; all'estremità inferiore di questa asta sono appesi due fogli di carta o d'oro, o anche due fili di paglia. Se si tocca la sferetta con un corpo elettrizzato, una parte dell'elettricità passa attraverso l'asta alle foglie, e queste essendo cariche dell'elettricità si respingono e divergono, come mostra la figura 5. Al posto di una piccola sfera, sullo stelo viene talvolta avvitato un disco metallico orizzontale, la cui destinazione indicheremo in seguito. Le figure 6 e 7 rappresentano gli elettroscopi costruiti da B. Kolbé (di San Pietroburgo). La loro particolarità consiste nel fatto che il fusto si estende, con forma appiattita, al di sotto del punto di attacco delle foglie. Nell'elettroscopio rappresentato in figura 6, pendono ai due ai lati dell'asta due fogli di carta, che vengono respinti dall'asta stessa. Nel secondo dispositivo (fig. 7), un'unica foglia di alluminio è fissata all'asta; una scala graduata e uno specchio permettono di misurare facilmente l'angolo di scostamento della foglia.

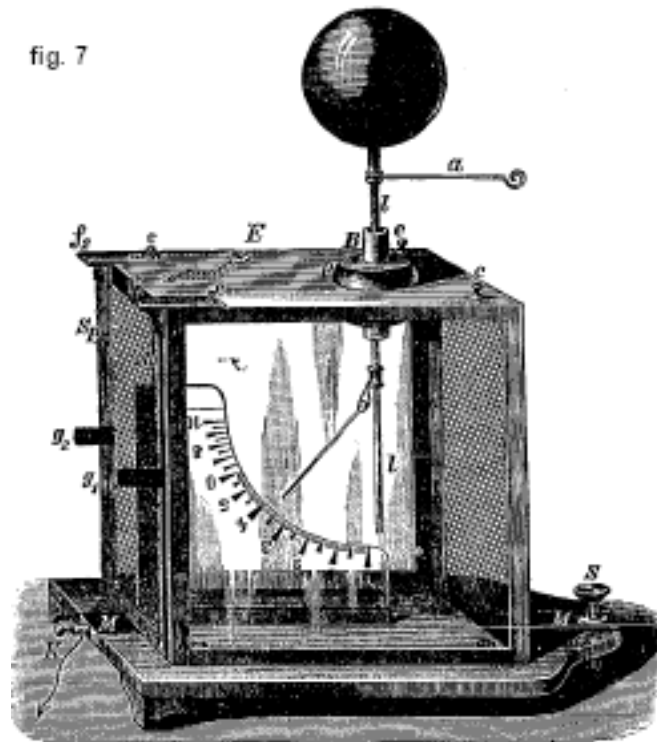


La figura 8 rappresenta l'elettroscopio di Fechner, con alcune parti complementari che illustreremo in seguito. Questo strumento si compone di una pila secca *cf*, le cui estremità sono collegate a due piccoli dischi metallici *a, g*. Vedremo in seguito che le estremità di questa pila, e quindi anche i dischi, sono costantemente elettrizzati e che le loro elettrizzazioni hanno nomi contrari. A un'asta, che penetra nella campana di vetro, è sospesa una foglia d'oro. Se si porta il corpo elettrizzato a contatto con la piccola sfera che sormonta l'asta, una deviazione della foglia d'oro da una parte o dall'altra, non solo evidenzia la presenza dell'elettricità, ma ne fa pure conoscere il segno. Diverse varianti degli elettroscopi precedenti sono stati costruiti da Cavallo, Saussure, Gaugain, Péclket. Bohnenberger ha costruito un elettroscopio con due pile secche verticali, tra le cui estremità superiori pende una foglia d'oro. La direzione del moto della foglia,

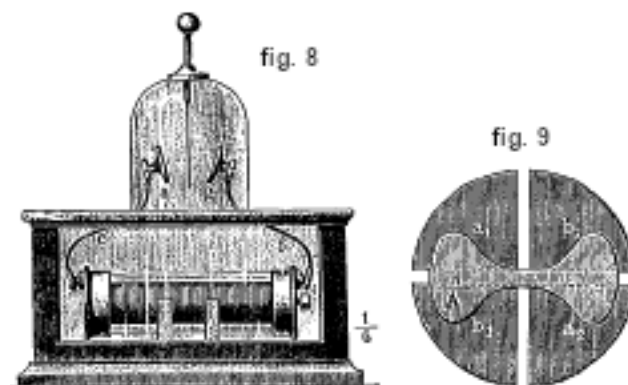


negli elettroscopi di Fechner e di Bohnenberger, indica il segno della elettrizzazione di questa foglia.

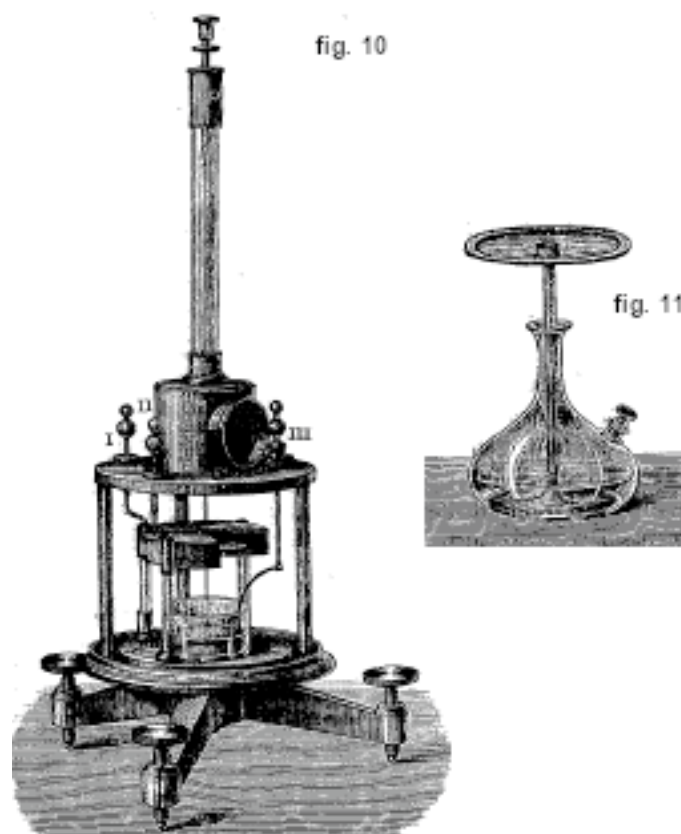
Considereremo, in un capitolo speciale, i metodi di misura delle differenti grandezze che si incontrano nello studio del campo elettrico, così come gli strumenti impiegati a tale scopo. Indicheremo qui brevemente la costruzione di uno di questi strumenti, l'elettrometro a quadranti di W. Thomson (Lord Kelvin). Questo strumento può servire non solo come elettroscopio molto sensibile, ma anche per il confronto del grado di elettrizzazione di corpi diversi. La teoria di questo dispositivo sarà data in dettaglio più avanti. Ci limiteremo qui a una breve descrizione.



Le parti principali del dispositivo sono quattro quadranti e un ago. I quadranti sono formati dai quattro quarti di un disco circolare  $a_1, a_2, b_1, b_2$  (fig-9), disposti orizzontalmente a breve distanza l'una dall'altra; il più delle volte sono sostituiti dalle quattro parti di una scatola cilindrica completamente chiusa. La figura 10 mostra un elettrometro a quadrante di recente formazione, dove, per chiarezza, uno dei quadranti è stato rimosso. Al di sopra dei quadranti o all'interno di essi è sospeso il cosiddetto ago; è una sottile foglia di alluminio tagliata a forma di biscotto. I quadranti opposti tra loro, cioè  $a_1, a_2$  e  $b_1, b_2$  (fig. 9), sono collegati tra loro. Nella normale posizione di riposo, l'asse dell'ago è disposto simmetricamente rispetto ai quadranti, come mostrato in figura 9. Non ci addentreremo qui in ulteriori spiegazioni, tanto più che la costruzione di questo dispositivo varia spesso molto nei suoi dettagli.



Indicheremo solo che è possibile, tramite tre viti di pressione (I, II, III di figura 10), collegare le due coppie di quadranti a diversi corpi elettrificati o a sorgenti di elettricità. Supponiamo, per esempio, che i quadranti  $a_1, a_2$ , siano mantenuti a una certa elettrizzazione positivo costante, e i quadranti  $b_1, b_2$  a una elettrizzazione costante negativa. Se poi si collega l'ago a un corpo la cui elettrizzazione deve essere determinato, l'ago devierà verso i quadranti la cui elettrizzazione è opposta a quella del corpo studiato. Se quest'ultima è positiva, ad esempio, l'ago sarà respinto dai quadranti  $a_1, a_2$  e attratto dai quadranti  $b_1, b_2$ ; l'ago visto dall'alto, ruoterà quindi in senso antiorario. L'ampiezza della rotazione è determinata con un cannocchiale e una scala, per mezzo di un piccolo specchio azionato dall'ago. Altre combinazioni sono possibili con questo dispositivo; si può, ad esempio, mantenere l'ago ad una elettrizzazione costante, ma unire il corpo studiato ai quadranti, oppure unire tra loro ed elettrizzare l'ago e una coppia di quadranti e collegare il corpo con l'altra coppia di quadranti.



Per isolare i conduttori elettrizzati, si usa soprattutto oggi il vetro, l'ebanite, la paraffina, la succina, lo zolfo e il quarzo, costruendo con queste sostanze i supporti dei conduttori. Tutte queste sostanze cessano di isolare quando la loro superficie è ricoperta da molta polvere e soprattutto quando non sono del tutto asciutti. La figura 11 rappresenta l'isolatore di Mascart, formato da una bottiglia di vetro, al cui fondo è saldata una bacchetta di vetro; questo sostiene una piastra su cui vengono appoggiati gli oggetti da isolare. L'acido solforico concentrato viene versato nella bottiglia, che mantiene la secchezza del fondo dell'asta e la superficie interna della bottiglia e fornisce un eccellente isolamento.

#### 4. Legge di Coulomb e sue conseguenze

Coulomb ha mostrato nel 1785 che l'azione reciproca tra due corpi elettrizzati è inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza. L'esattezza di questa legge è tanto maggiore quanto più piccole sono le dimensioni dei corpi relativamente alla distanza reciproca di questi

corpi. Per corpi infinitamente sottili di qualsiasi forma, la legge è piuttosto rigorosa. L'azione reciproca di due corpi elettrizzati, le cui dimensioni non sono piccole rispetto alla distanza di questi corpi, si ottiene esattamente, se scomponiamo i corpi in elementi infinitamente piccoli (per i conduttori, basta dividere la loro superficie in tali elementi) e se supponiamo che ciascun elemento elettrizzato di un corpo attragga o respinga, secondo i rispettivi segni di elettrizzazione, qualsiasi elemento elettrizzato dell'altro corpo; queste azioni reciproche degli elementi, variano rigorosamente in proporzione inversa al quadrato della distanza  $r$  tra gli elementi. *Quando si dimezza l'elettrizzazione di un conduttore, la sua azione su un altro corpo elettrizzato diventa doppia.*

Poiché diamo, per il momento, solo un'idea generale dei fenomeni fondamentali, rimandiamo la descrizione degli esperimenti, con l'ausilio dei quali si può dimostrare l'esattezza delle due parti della legge precedente, al Capitolo III relativo all'azione del campo elettrico sui corpi che contiene; a questo tipo di azione sono annessi anche i fenomeni che devono essere considerati nella verifica sperimentale della legge di Coulomb.

L'esperienza insegna che la forza  $f$  di azione reciproca tra due corpi elettrizzati dipende dal mezzo che circonda questi corpi. Scegliamo, come termine di paragone, la forza  $f_0$  che agisce quando i corpi sono circondati dall'aria. Sarebbe più razionale prendere non la forza relativa all'aria, ma quella corrispondente al vuoto; tuttavia la differenza tra quest'ultimo e  $f_0$  è piccolissima, e si procede qui come per le velocità di propagazione dell'energia radiante nei diversi mezzi, cioè per gli indici di rifrazione; si prende, in quest'ultimo caso, per unità, la velocità nell'aria, anche se sarebbe meglio considerare la velocità nel vuoto. L'esperienza mostra che la forza  $f$  è generalmente inferiore a  $f_0$ ; si indica il rapporto  $f_0/f$  con  $K$ , così che si ha

$$f = \frac{f_0}{K} \quad (1.0.6)$$

È molto importante notare che la formula (6) si riferisce solo al caso in cui i due corpi elettrizzati si trovano nello stesso mezzo. Quando il mezzo non è omogeneo, la formula (6) cessa di essere valida.

Il coefficiente  $K$  è caratteristico del mezzo dato, cioè della sostanza che riempie lo spazio attorno ai corpi elettrizzati. Si chiama la *costante dielettrica* o il *potere induttivo specifico*, o semplicemente il potere induttivo di questa sostanza. Abbiamo dato, nel volume II, un'altra definizione di questa grandezza, ma vedremo in seguito che è una conseguenza della definizione attuale. Va da sé che le sostanze in questione devono appartenere ai non conduttori di elettricità, cioè ai dielettrici. La grandezza  $K$  è quella rispetto alla quale la teoria di Maxwell porta alla conclusione che, per dielettrici non dotati di proprietà magnetiche, si deve avere la relazione

$$K = n^2 \quad (1.0.7)$$

dove  $n$  è il valore limite dell'indice di rifrazione per l'energia radiante di lunghezza d'onda molto grande.

**Immagine A.** - La legge di Coulomb, in questa immagine, è così enunciata: la forza  $f$  dell'azione reciproca tra le quantità di elettricità,  $\eta$  e  $\eta_1$  portate da due punti, è proporzionale a ciascuna delle due quantità  $\eta$  e  $\eta_1$  e inversamente proporzionale al quadrato della distanza  $r$  tra i due punti.

Quando si ammette che la quantità di elettricità trasportata da un dato corpo ha un'esistenza reale, si deve allo stesso tempo supporre che questa quantità di elettricità non varia, quando si introduce il corpo elettrizzato in un qualsiasi mezzo. La legge di Coulomb è espressa, per l'aria, dalla formula

$$f_0 = C \frac{\eta \eta_1}{r^2} \quad (1.0.8)$$

dove  $C$  è un fattore di proporzionalità, che dipende, come sempre, dalla scelta delle unità delle grandezze che entrano nella formula. Basandoci su quanto appena detto circa l'indipendenza

delle grandezze  $\eta$  e  $\eta_1$ , rispetto al mezzo, si ottiene, per ogni mezzo omogeneo, vedi (6),

$$f = \frac{C}{K} \cdot \frac{\eta\eta_1}{r^2} \quad (1.0.9)$$

Le formule (8) e (9) esprimono i tre possibili casi di azione reciproca, tra elettricità positiva e negativa, se si accetta di contare le forze repulsive positivamente, le forze attrattive negativamente, e se si assegna, ai valori numerici di  $\eta$  e  $\eta_1$  segni opportuni. Infatti, quando  $\eta$  e  $\eta_1$  sono entrambi positivi o entrambi negativi,  $f$  è positivo e c'è repulsione, mentre quando  $\eta$  e  $\eta_1$  hanno segno opposto,  $f$  è negativa e c'è attrazione.

Vedremo, in seguito, che bisogna distinguere, nello studio dei fenomeni elettrici e magnetici, tre tipi di leggi: le leggi puntuali, le leggi differenziali e le leggi integrali. La legge di Coulomb è un esempio di legge puntiforme. Ricordiamo anche la legge di W. Weber, per la sua importanza storica; è anch'essa una legge puntiforme. W. Weber supponeva che la legge di Coulomb si riferisse solo al caso in cui le elettricità  $\eta$  e  $\eta_1$  sono a riposo; quindi, la loro distanza  $r$  è una grandezza costante. Quando le elettricità sono in movimento, per cui  $r$  varia, la loro mutua azione dipende dal loro moto relativo, cioè dalla forma della funzione  $r = \varphi(t)$ , con  $t$  che indica il tempo. La legge di Weber è espressa dalla seguente formula:

$$f = C \frac{\eta\eta_1}{r^2} \left\{ 1 - a^2 \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + 2a^2 r \frac{d^2r}{dt^2} \right\} \quad (1.0.10)$$

Per  $r = \text{cost}$ , essa si cambia nella formula (8). È chiaro che la legge di Weber poggia essenzialmente anche sull'ipotesi di un'azione esercitata istantaneamente a distanza.

Se si pone  $C = 1$ , nelle formule (8) e (g), si introduce un'unità assoluta di quantità di elettricità. Come vedremo più avanti, si possono costruire due diversi sistemi di unità assolute per le grandezze elettriche e magnetiche; una è detta il sistema elettrostatico (el. st.), l'altra il sistema elettromagnetico (el. mg.). È alla prima delle due che si riferisce l'unità di quantità di elettricità, ottenuta con le formule (8) e (9) ponendo  $C=1G$ , cioè scrivendo

$$f_0 = \frac{\eta\eta_1}{r^2} \quad (1.0.11)$$

$$f = \frac{1}{K} \cdot \frac{\eta\eta_1}{r^2} \quad (1.0.12)$$

La prima formula dà  $f_0 = 1$ , per  $\eta = 1$ ,  $\eta_1 = 1$  e  $r = 1$ ; ne consegue che *l'unità elettrostatica (el. st.) di quantità di elettricità è la quantità di elettricità che agisce con una forza uguale all'unità, su una quantità uguale che si trova nell'unità di distanza in aria*. Vediamo in particolare che, nel sistema C.G.S.:

*L'unità C.G.S. di quantità di elettricità esercita nell'aria, su una quantità uguale posta all'unità di distanza, una forza pari ad una dina (circa 1,02 mg).* È, nel senso ordinario, una piccola quantità di elettricità. Si usa infatti un'altra unità, che si potrebbe chiamare l'unità pratica dell'elettricità e che è stata chiamata coulomb. Un coulomb è il decimo dell'unità elettromagnetica (el. mg.) C.G.S. che conosceremo in seguito. La milionesima parte di un coulomb si chiama microcoulomb. Ci limiteremo, per il momento, a dare le seguenti definizioni:

1 unità el. mag. C.G.S di quantità di el.	$= 3 \cdot 10^{10}$ unità el. st. C.G.S di quantità di el.
1 coulomb	$= 3 \cdot 10^9$ unità el. st. C.G.S di quantità di el.
1 microcoulomb	$= 3 \cdot 10^8$ unità el. st. C.G.S di quantità di el.

Un facile calcolo mostra che due coulomb di elettricità, distanti tra loro un chilometro, si respingono o si attraggono con una forza pari a 981 kg; due microcoulomb distanti un decimetro esercitano l'uno sull'altro una forza di 98,1 g.

Abbiamo dato nel Volume I le formule che indicano quali sono le dimensioni delle unità assolute, cioè come queste unità dipendono dalle unità fondamentali di lunghezza  $L$ , di massa  $M$  e di tempo  $T$ . Abbiamo utilizzato solo allora, nelle equazioni dimensionali, solo lettere maiuscole dell'alfabeto; useremo qui le lettere con cui designeremo i valori numerici delle grandezze stesse; ad esempio,  $[\eta]$  indicherà la dimensione dell'unità di quantità di elettricità.

Quando si prende  $K$  come un numero puro, si ottiene usando la formula (11),

$$\frac{ML}{T^2} = \frac{[\eta][\eta]}{L^2}$$

poiché  $[f] = ML : T^2$ ; se ne deduce

$$[\eta] = M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1} \quad (1.0.13)$$

Ma se si considera  $K$  come una grandezza fisica, le cui dimensioni sono incognite, si ottiene, invece della (13), la relazione

$$[\eta] = [K]^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1} \quad (1.0.14)$$

Abbiamo introdotto la nozione di densità superficiale dell'elettricità; l'unità el. st. C.G.S. di densità superficiale si ottiene quando, su  $1 \text{ cm}^2$ , si ha una unità el. st. C.G.S. di quantità di elettricità, ovvero oltre  $30 \text{ dm}^2$  un microcoulomb. La formula (2) fornisce le dimensioni della densità superficiale

$$[k] = \frac{[\eta]}{[s]} = \frac{M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1}}{L^2} = M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-1} \quad (1.0.15)$$

Come si vede facilmente,  $k^2$  ha le stesse dimensioni di una pressione o di una tensione, vale a dire che la grandezza  $f : s$ , essendo  $f$  la forza esercitata sulla superficie  $s$ .

L'unità el. st. assoluta dell'intensità del campo elettrico si ottiene in un punto in cui l'unità assoluta di forza agisce sull'unità el. st. di quantità elettrica.

L'unità el. st. C.G.S. di intensità del campo elettrico si ottiene in un punto in cui una forza è uguale a una dyna si esercita sull'unità C.G.S. di quantità di elettricità. La formula (1) fornisce le dimensioni dell'unità el. st. di intensità del campo elettrico:

$$[F] = \frac{[f]}{[\eta]} = \frac{MLT^{-2}}{M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1}} = M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-1} \quad (1.0.16)$$

Le formule (14) e (15) mostrano che l'unità di intensità del campo e unità di densità superficiale hanno le stesse dimensioni.

La legge di Coulomb ricorda molto nel suo enunciato la legge di attrazione universale; in particolare, la disposizione delle linee di forza, nel caso di masse elettriche di segno contrario, è la stessa della materia ponderabile. La figura 2 rappresenta le linee di forza nel caso di due masse elettrizzate uguali con lo stesso nome; la figura 12 rappresenta queste linee quando B trasporta quattro volte più elettricità di A.

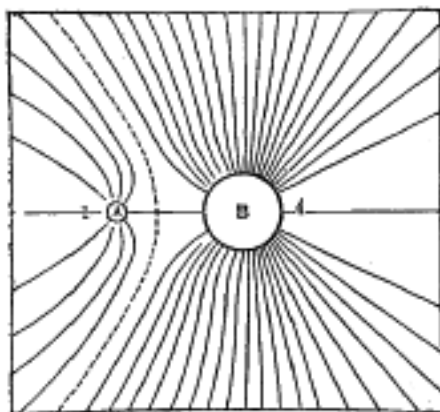


fig. 12

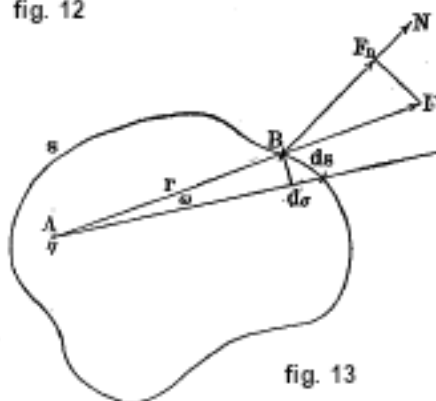


fig. 13

Dedurremo ora diverse conseguenze della legge di Coulomb, basandoci sull'immagine A, vale a dire guardando le elettricità come sostanze di una particolare natura.

Consideriamo, in un qualsiasi campo elettrico, una superficie geometrica  $s$  (fig. 13), che scomporremo in elementi  $ds$ . Sia  $F$  la forza elettrica (intensità del campo) in un punto B in  $ds$ ; in altre parole, BF è la tangente alla linea di forza passante per B. Siano BN la normale a  $ds$ ,  $F_n$  la componente normale della forza  $F$ . L'a grandezza  $F_n ds$  è detta il *flusso della forza* attraverso  $ds$ ; la grandezza  $K F_n ds$ , dove  $K$  indica la costante dielettrica nel punto B, è detta, con una scelta poco felice, il *flusso di induzione elettrica* che attraversa  $ds$ ; per semplificare diremo semplicemente *flusso di induzione*. Se sommiamo le grandezze  $F_n ds$  o  $K F_n ds$  per tutti gli elementi della superficie  $s$ , si ottiene, per il flusso di forza  $\Phi$  attraverso la superficie  $s$ ,

$$\Phi = \iint F_n ds \quad (1.0.17)$$

e per il flusso di induzione  $\Psi$  attraverso la superficie  $s$ ,

$$\Psi = \iint K F_n ds \quad (1.0.18)$$

In un mezzo omogeneo, si ha

$$\Psi = K \Phi \quad (1.0.19)$$

Nell'aria, dove  $K = 1$ , si ha  $\Phi = \Psi$ , cioè il flusso di induzione è uguale al flusso di forza.

Supponiamo che il campo elettrico sia prodotto da masse elettriche arbitrarie e che queste masse siano scomposte in parti elementari infinitamente piccole. Dimostreremo il seguente teorema: *Ciascuno dei flussi  $\Phi$  e  $\Psi$  è uguale alla somma algebrica dei flussi generati da ciascuna delle parti elementari dell'elettricità.* Siano  $\Phi_i$  e  $\Psi_i$  i flussi che si otterrebbero se ci fosse una sola parte elementare, la  $i^e$  per esempio, e sia allora  $F_i$  la forza nel punto B (fig. 13) e  $F_{n,i}$  la componente normale di questa forza. La forza  $F$  è, per la legge di Coulomb, la risultante di tutte le forze  $F_i$ ; si ha quindi  $F_n = \sum F_{n,i}$ , dove  $\sum$  è il S simbolo di una sommatoria algebrica, e pertanto,

$$\Psi = \iint K F_n ds = \iint (\sum K F_{n,i}) ds = \sum \iint K F_{n,i} ds = \sum \Psi_i \quad (1.0.20)$$

Si dimostra facilmente allo stesso modo che si ha

$$\Phi = \sum \Phi_i$$

Il teorema precedente riduce il problema generale del calcolo dei flussi al caso particolare in cui una certa quantità di elettricità  $\eta$ , è portata da un punto, che può essere interno, esterno o sulla superficie considerata. Partiamo dal caso in cui  $\eta$  è all'interno della superficie  $s$ , ad esempio nel punto A (fig. 13). Sia  $AB = r$  la distanza tra la carica puntiforme  $\eta$  e l'elemento di superficie  $ds$ ; sia inoltre  $d\omega$  l'angolo solido sotto il quale  $ds$  è visto da A, e  $d\sigma$  l'elemento tagliato da  $d\omega$  sulla sfera descritta dal punto A per centro e di raggio  $r$ . Si ha  $d\sigma = r^2 d\omega$ ; più gli angoli  $(F, F_n)$  e  $(ds, d\sigma)$  sono uguali, essendo la forza  $F$  normale all'elemento  $d\sigma$  e la componente  $F_n$  a  $ds$ . L'intensità del campo  $F$  è determinata dalla forza che  $\eta$ , che si trova in A, esercita sull'unità di quantità di elettricità in B; di conseguenza la formula (11) dà ( $\eta = 1$ )

$$F = \frac{\eta}{K r^2} \quad (1.0.21)$$

Mediante questa formula, si può calcolare il flusso di forza che attraversa la superficie  $s$ , nel caso del campo al quale la formula (17) è applicabile. Si ha

$$\Phi = \iint F_n ds = \iint F \cos(F, F_n) ds = \iint \frac{\eta}{K r^2} \cos(ds, d\sigma) ds = \frac{\eta}{K} \iint \frac{d\sigma}{r^2} = \frac{\eta}{K} \iint d\omega$$

Quando il punto A si trova all'interno della superficie  $s$ , l'ultimo integrale è uguale a  $4\pi$ , e si ottiene

$$\Phi = \frac{4\pi\eta}{K} \quad (1.0.22)$$

Il flusso di induzione  $\Psi_i$  in un mezzo omogeneo, è  $\Psi = K\Phi$ , si veda la (16,b), cioè

$$\Psi = 4\pi\eta \quad (1.0.23)$$

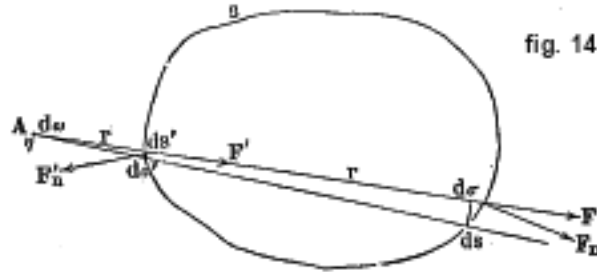
Supponiamo ora che  $\eta$  sia sulla superficie stessa; resta il calcolo precedente con la sola differenza che l'ultimo integrale, che esprime la somma degli angoli solidi sotto i quali si vedono dal punto A gli elementi della superficie  $s$ , è solo uguale alla somma degli angoli posti dalla stessa parte del piano tangente, cioè a  $2\pi$ . Si ha quindi, quando  $\eta$  è sulla superficie  $s$  e in un mezzo omogeneo,

$$\Phi = \frac{2\pi\eta}{K} \quad \Psi = 2\pi\eta \quad (1.0.24)$$

Supponiamo pure che esista nel punto A della superficie  $s$  un determinato piano tangente.

Consideriamo infine il caso in cui il punto A è situato all'esterno della superficie  $s$  (fig. 14). Per calcolare  $\Phi$ , si prendono i due elementi  $ds, ds'$  della superficie  $s$ , che sono divisi su questa superficie da uno stesso angolo solido  $d\omega$  proveniente dal punto A;  $d\sigma, r, f, F_n$  mantenendo il loro vecchio significato, denotiamo le grandezze corrispondenti per  $d\sigma'$  con  $ds', r', F', F'_n$ ; si ha  $\cos(F', F'_n) = -\cos(ds', d\sigma')$ , perché il primo di questi angoli è supplementare del secondo. I due elementi corrispondenti dell'integrale (16,a) sono

$$\begin{aligned} F_n ds + F'_n ds' &= F \cos(F, F_n) ds + F' \cos(F', F'_n) ds' = \\ &= F \cos(ds, d\sigma) ds - F' \cos(ds', d\sigma') ds' = \frac{\eta}{Kr^2} d\sigma - \frac{\eta}{Kr'^2} d\sigma' = \frac{\eta d\omega}{K} - \frac{\eta d\omega}{K} = 0 \end{aligned}$$



Tutti gli elementi dell'integrale (16,a) possono essere assemblati in tali coppie, la cui somma è nulla. Ne consegue che quando  $\eta$  è all'esterno della superficie  $s$  e quando il flusso avviene in un mezzo omogeneo, si ha

$$\Phi = 0 \quad \Psi = 0 \quad (1.0.25)$$

Il teorema espresso dalla formula (16,c) permette di determinare  $\Psi$  e  $\Phi$ , per una qualsiasi distribuzione di masse elettriche in un mezzo omogeneo. Innanzitutto è chiaro che le formule (18,a), (18,b) e (18,c) restano valide quando  $\eta$  rappresenta una qualunque massa non puntiforme, ma solo distribuita all'interno, o sulla superficie  $s$ , oppure all'esterno. Consideriamo il caso generale in cui  $\eta = \eta_1 + \bar{\eta} + \eta_{i,c}$ , dove  $\eta_i$  rappresenta la quantità totale di elettricità all'interno di  $s$ ,  $\bar{\eta}$  la quantità sulla superficie  $s$ , e  $\eta_{i,c}$  la quantità all'esterno di  $s$ . In virtù del teorema (16,c) si ottiene, utilizzando le formule (18,a), (18,b) e (18,c), per un mezzo omogeneo,

$$\begin{cases} \Phi &= \iint F_n ds = \frac{4\pi\eta_i}{K} + \frac{2\pi\bar{\eta}}{K} \\ \Psi &= \iint K F_n ds = 4\pi\eta_i + 2\pi\bar{\eta} \end{cases} \quad (1.0.26)$$

Nell'aria si ha,

$$\Phi = \Psi = 4\pi\eta_i + 2\pi\bar{\eta} \quad (1.0.27)$$

Questa formula è solitamente chiamata la formula di Gauss. Si vede facilmente che rimane applicabile quando l'angolo solido proveniente da un punto interno interseca la superficie più di una volta, nel qual caso il numero delle intersezioni è dispari; vale anche quando l'angolo risultante da un punto esterno interseca la superficie più di due volte, nel qual caso il numero di intersezioni è pari.

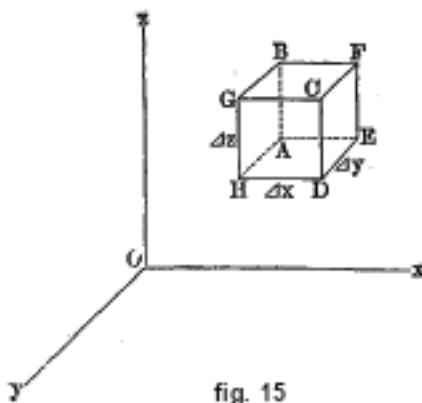
Le espressioni, che abbiamo appena calcolato per i flussi  $\Psi$  e  $\Phi$  si riferiscono solo ad un mezzo omogeneo, perché abbiamo usato la formula (17), la cui accuratezza è stata verificata sperimentalmente solo per un mezzo dove  $K$  ha ovunque lo stesso valore.

La formula (17) non è applicabile ad un mezzo disomogeneo, e vedremo in seguito che si può, in quest'ultimo caso, determinare la forza  $F$  solo in modo complicato. L'espressione (19) mostra però che il flusso di induzione  $\Psi$ , cioè la grandezza (16,a), è indipendente dalla natura del mezzo omogeneo circostante, cioè da  $K$ , e che è determinato esclusivamente dalle quantità di elettricità presenti nel mezzo. Partendo da lì, Maxwell ha ipotizzato che *il flusso di induzione, prodotto da determinate quantità di elettricità, è in generale indipendente dalle proprietà del mezzo circostante, che si ha anche, per un mezzo non omogeneo,*

$$\Psi = \iint K F_n ds = 4\pi\eta_i + 2\pi\bar{\eta} \quad (1.0.28)$$

Tutte le conseguenze tratte da questa ipotesi sono state verificate sperimentalmente; useremo anche nel seguito la formula (19,b). Ne dedurremo immediatamente equazioni molto importanti.

Supponiamo che la massa elettrica agente nel mezzo occupi un certo spazio. Sia A (fig. 15) un punto situato in questo spazio e  $\rho$  la densità di volume dell'elettricità in questo punto, cioè il valore limite della densità media  $\rho_m$  di un volume infinitamente piccolo che circonda questo punto. Sia  $F$  la forza elettrica (intensità del campo) nel punto A, dovuta a tutte le masse elettriche presenti nel campo, che assumeremo arbitrariamente disposte e al cui numero apparirà naturalmente la massa, all'interno della quale è posto, per ipotesi, il punto A.



Tracciamo gli assi delle coordinate rettangolari  $x, y, z$ , e siano le coordinate del punto A; indichiamo anche con  $X, Y, Z$  le componenti dell'intensità  $F$  nella direzione degli assi, cioè poniamo  $F_x = X, F_y = Y, F_z = Z$ . Costruiamo nel punto A il parallelepipedo rettangolare infinitamente piccolo ABCDEFGH, i cui spigoli sono in  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  e applichiamo ad esso la formula (19,b) sul flusso di induzione. Non essendoci massa elettrica sulla superficie di questo parallelepipedo di densità superficiale finita, e siccome la massa interna è uguale a  $\rho_m \Delta x \Delta y \Delta z$ , essendo  $\rho_m$  la densità media all'interno del volume considerato, si ha

$$\Psi = \iint K F_n ds = 4\pi\rho_m \Delta x \Delta y \Delta z \quad (1.0.29)$$



L'integrale di superficie contiene in tutto, nel nostro caso, solo sei elementi, corrispondenti alle sei facce del parallelepipedo. Per la faccia ABGH, si ha  $ds = \Delta y \Delta z$ ; se  $K$  e  $\Delta x$  si riferiscono al punto A, si può ammettere che, per la faccia ABGH, il prodotto  $KF_n - KX$ , essendo ABGH la normale esterna diretta verso la parte negativa delle  $x$ . Sulla faccia CDEF, la normale esterna è diretta dalla parte delle  $x$  positive; inoltre la coordinata  $x$  si cambia in  $x + \Delta x$ ; il prodotto  $KF_n$  corrispondente a questa faccia è quindi

$$KX + \frac{\partial(KX)}{\partial x} \Delta x$$

più grandezze infinitamente piccole di ordine superiore.

Le facce ABGH e DCFE danno quindi due elementi dell'integrale  $\Psi$ , la cui somma è

$$\frac{\partial(KX)}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z$$

più grandezze infinitamente piccole di ordine superiore.

Se si formano allo stesso modo le coppie di elementi corrispondenti alle facce ABFE e GCDH e alle facce AEDH e BFCG e se si portano nella (19,c), si ottiene, dividendo per  $\Delta x \Delta y \Delta z$

$$\frac{\partial(KX)}{\partial x} + \frac{\partial(KY)}{\partial y} + \frac{\partial(KZ)}{\partial z}$$

più grandezze infinitamente piccole di ordine superiore  $= 4\pi\rho_m$ .

Al limite,  $\rho_m$  diviene uguale alla densità  $\rho$  nel punto A, al quale si riferiscono i valori delle tre derivate, e si ha

$$\frac{\partial(KX)}{\partial x} + \frac{\partial(KY)}{\partial y} + \frac{\partial(KZ)}{\partial z} = 4\pi\rho \quad (1.0.30)$$

Questa equazione si può scrivere in un dielettrico omogeneo

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = \frac{4\pi}{K} \rho \quad (1.0.31)$$

e nell'aria

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 4\pi\rho \quad (1.0.32)$$

In tutti i punti dello spazio dove  $\rho = 0$ , cioè dove non vi è elettricità avente una densità di volume, si ha

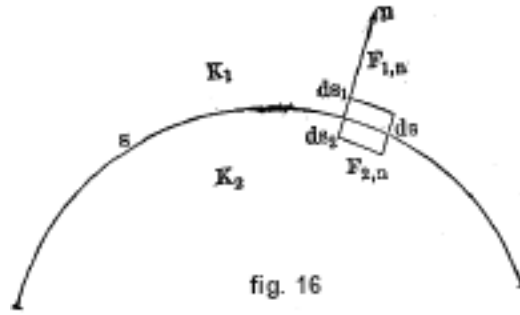
$$\frac{\partial(KX)}{\partial x} + \frac{\partial(KY)}{\partial y} + \frac{\partial(KZ)}{\partial z} = 0 \quad (1.0.33)$$

e, nel caso particolare di un dielettrico omogeneo,

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0 \quad (1.0.34)$$

L'equazione (20,d) è chiamata equazione di Laplace e (20,b) l'equazione di Poisson.

Consideriamo ora uno strato superficiale sostenuto da una superficie  $s$  (fig. 16); sia  $k$  la densità superficiale di questo strato, che generalmente varia in diversi punti della superficie. Ritagliamo l'elemento  $ds$  nella superficie e sia  $n$  la direzione della normale a  $ds$  del lato dove sono dirette le linee di forza che attraversano  $ds$ . Supponiamo inoltre, per maggiore generalità, che sui due lati della superficie  $s$  si trovano dielettrici diversi, i cui poteri induttori sono  $K_1$  dalla parte della normale  $n$  e  $K_2$  dall'altro lato di  $s$ . La quantità di elettricità su  $ds$  è  $\eta = kds$ . Costruiamo su  $ds$  un cilindro molto corto, le cui generatrici sono perpendicolari a  $ds$ ; tracciamo le due basi parallele a  $ds$ .



Siano  $F_{1,n}$  e  $F_{2,n}$  le componenti della forza elettrica, nella direzione della normale  $n$ , in due punti rispettivamente situati in ciascuna delle basi di questo cilindro. Applichiamo la formula (19,b) a questo volume cilindrico, per il quale si ha  $\eta_i = kds$ . Nella formula (19,b), la forza  $F_n$  è la componente lungo la normale esterna alla superficie per la quale calcoliamo il flusso di induzione, cioè nel caso considerato alla superficie del nostro piccolo cilindro. Siano  $F_n = F_{1,n}$  la forza su  $ds_1$  e  $F_n = -F_{2,n}$  la forza su  $ds_2$ ; se il flusso di induzione attraversante la superficie laterale del cilindro è  $\Psi$ , si ha, dalla (19,b),

$$K_1 F_{1,n} ds_1 - K_2 F_{2,n} ds_2 + \Psi = 4\pi k ds \quad (1.0.35)$$

Immaginiamo ora che le generatrici del cilindro si accorcino indefinitamente, cioè che  $ds_1, ds_2$  si avvicinino indefinitamente a  $ds$ ; al limite  $\Psi$  si annulla,  $ds_1, ds_2$  diventano uguali a  $ds$ ;  $F_{1,n}$  e  $F_{2,n}$  assumono i valori relativi a punti situati su entrambi i lati della superficie e infinitamente vicini ad essa. La formula (20,e) dà al limite

$$K_1 F_{1,n} - K_2 F_{2,n} = 4\pi k \quad (1.0.36)$$

Se nel posto occupato da  $ds$ , dove la densità superficiale è  $k$ , vi è su entrambi i lati della superficie lo stesso dielettrico di potere induttivo  $K$ , si ha

$$F_{1,n} - F_{2,n} = \frac{4\pi}{K} k \quad (1.0.37)$$

e nell'aria, in particolare,

$$F_{1,n} - F_{2,n} = 4\pi k \quad (1.0.38)$$

Queste importanti relazioni che chiameremo, in modo forse non del tutto giustificato, le equazioni di Green, mostrano che *l'intensità della componente normale della forza elettrica subisce una discontinuità al passaggio attraverso lo strato superficiale*; questa componente ha valori diversi in due punti situati ai lati della superficie  $s$ , infinitamente vicini ad essa. Questa discontinuità deriva dal fatto che la massa distribuita sull'elemento  $ds$  sviluppa in questi due punti forze normali a  $ds$ , di uguale intensità, ma ovviamente dirette in versi opposti, mentre tutto il resto dello strato ad eccezione di  $ds$  produce negli stessi punti infinitamente vicini forze che, al limite, avranno la stessa intensità e direzione. Denotando le prime due forze con  $f'$  e le componenti normali delle seconde con  $f''$ , si ha

$$\begin{cases} F_{1,n} = f'' + f' \\ F_{2,n} = f'' - f' \end{cases} \quad (1.0.39)$$

Chiamando invece  $F_n$  la componente normale della forza che agisce sulla superficie stessa, cioè della forza che tutta la parte dello strato superficiale esterna a  $ds$  esercita sulla parte di questo strato portata dall'elemento  $ds$  stesso, o più brevemente della forza che l'intero strato superficiale considerato esercita su se stesso, si ha

$$F_n = f'' \quad (1.0.40)$$

Le formule (22) e (23) danno

$$F_{1,n} - F_{2,n} = 2f' = \frac{4\pi}{K}k$$

da cui

$$f' = \frac{2\pi}{K}k \quad (1.0.41)$$

Ponendo  $f'' = F_n$  nella (23) si ottiene

$$F_{1,n} - F_n = F_n - F_{2,n} = \frac{2\pi}{K}k \quad (1.0.42)$$

e per l'aria

$$F_{1,n} - F_n = F_n - F_{2,n} = 2\pi k \quad (1.0.43)$$

da cui

$$F_n = \frac{1}{2}(F_{1,n} + F_{2,n}) \quad (1.0.44)$$

Queste ultime relazioni mostrano che *la componente normale della forza elettrica subisce, al passaggio attraverso una strato superficiale, due discontinuità uguali*; ognuna di esse vale  $2\pi k : K$ , essendo  $k$  la densità superficiale nel punto della superficie, per il quale passa da un lato all'altro di questa superficie. Notiamo ancora che l'uguaglianza delle dimensioni  $[F]$  e  $[k]$ , vedi (14) e (15), trova piena conferma nelle formule precedenti e in particolare nelle (23,b) e (23,d).

Applichiamo ora ai conduttori i risultati appena ottenuti. Convienne, per questo, formulare una nuova ipotesi, che, a dire il vero, è piuttosto singolare. Tutte le formule precedenti si basano essenzialmente sulla legge di Coulomb, cioè sulle formule (10) e (11), che hanno significato solo per i dielettrici; di conseguenza, non abbiamo il diritto di applicare ai conduttori i risultati dedotti. Ammetteremo tuttavia che le formule (10), (20,b), (22,a), (23,e) e altre analoghe siano applicabili anche ai conduttori. L'unica cosa che depone a favore di una tale ipotesi è che le conseguenze che ne derivano corrispondono perfettamente alla realtà.

Abbiamo visto che lo stato di equilibrio elettrico, cioè lo stato di riposo dell'elettricità su un conduttore, è possibile solo a condizione che la forza elettrica  $F$  sia nulla all'interno di questo conduttore e che sulla superficie la forza sia ovunque normale. Se ci si basa sulla prima condizione ( $X = Y = Z = 0$ ), l'equazione (20,b) fornisce, per tutti i punti interni del conduttore, la relazione

$$\rho = 0 \quad (1.0.45)$$

In tutti i punti di un conduttore, la densità di volume dell'elettricità è nulla; ci può essere solo elettricità alla superficie. La seconda condizione di equilibrio mostra che le componenti normali delle forze che abbiamo considerato in precedenza sono proprio le forze stesse che agiscono sui punti corrispondenti.

Occupiamoci ora delle formule sopra stabilite. La superficie di un conduttore è naturalmente chiusa e  $n$  è la direzione della normale esterna. Essendo la forza nulla all'interno del conduttore, dobbiamo porre  $F_{2,n} = 0$ . Sia  $F$  la forza sulla superficie stessa,  $F_s$  la forza sulla superficie, cosicché si ha  $F_{1,n} = F$  e  $F_n = F_s$ ; indichiamo con  $K$  la costante dielettrica del mezzo circostante, cioè sia  $K_1 = K$ . In questo caso la formula (21) ci dà il valore

$$F = \frac{4\pi}{K}k \quad (1.0.46)$$

e per l'aria

$$F = 4\pi k \quad (1.0.47)$$

Queste formule determinano, nello spazio esterno, l'intensità del campo alla superficie del conduttore. Deduciamo ancora dalla (23,e)

$$F_s = \frac{2\pi}{K}k \quad (1.0.48)$$

e per l'aria

$$F_s = 2\pi k \quad (1.0.49)$$

Queste formule determinano la forza sulla carica effettiva del conduttore, o, più precisamente, l'intensità del campo in qualsiasi punto della superficie. Se una parte dello strato superficiale del conduttore fosse mobile, esso si sposterebbe verso l'esterno, sotto l'azione delle forze agenti sull'elettricità distribuita su questa porzione di superficie. Chiameremo *tensione superficiale* e indicheremo con  $P$  la forza agente sullo strato superficiale e riferita all'unità di area; si ha, in altre parole, per l'elemento di superficie  $ds$  su cui si esercita la forza  $df$ ,

$$P = \frac{df}{ds} \quad (1.0.50)$$

Sull'unità di quantità di elettricità agisce la forza

$$F_s = \frac{2\pi}{K}k$$

e, di conseguenza, sulla quantità  $kds$  che si trova in realtà su  $ds$ , la forza  $df = F_s kds = \frac{2\pi k^2 ds}{K}$ ; la formula (24,e) dà pertanto

$$P = \frac{2\pi}{K}k^2 \quad (1.0.51)$$

e per l'aria

$$P = 2\pi k^2 \quad (1.0.52)$$

Queste importanti formule determinano la relazione che lega la tensione superficiale  $P$  in un dato punto della superficie del conduttore alla densità  $k$  di elettricità nello stesso punto; come si vede,  $P$  è proporzionale a  $k^2$ . Se confrontiamo le formule (25) e (25,a) con le (24,a) e (24,b), e se eliminiamo  $k$ , si ottiene

$$P = \frac{KF^2}{8\pi} \quad (1.0.53)$$

e per l'aria

$$P = \frac{F^2}{8\pi} \quad (1.0.54)$$

Queste formule determinano la relazione che lega la tensione superficiale  $P$  all'intensità  $F$  del campo alla superficie stessa del conduttore. Si ricava ancora dalla (24,a) e (25) la formula

$$P = \frac{1}{2}Fk \quad (1.0.55)$$

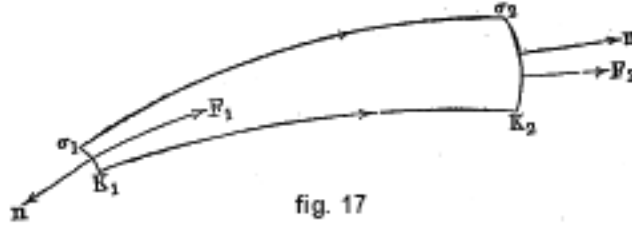
che vale per un dielettrico qualsiasi che circonda il conduttore.

Per stabilire le diverse proprietà dei tubi di forza, utilizzeremo la formula (19) che fornisce il flusso di induzione che attraversa una data superficie  $s$ . Poiché le generatrici della superficie laterale di un tubo di forza sono linee di forza, il flusso di forza, così come il flusso di induzione, attraverso questa superficie laterale sono nulli. Sia  $\sigma$  l'area della sezione trasversale del tubo di forza in qualsiasi posizione,  $F$  l'intensità del campo,  $K$  la costante dielettrica nel punto in cui si trova l'elemento. La grandezza

$$\psi = \iint KF d\sigma \quad (1.0.56)$$

è detta *il flusso di induzione nella sezione  $\sigma$  del tubo*; quando si considera questa grandezza, il tubo stesso è anche chiamato *tubo di induzione*. L'integrale si estende naturalmente solo all'area  $\sigma$ .

Consideriamo prima una parte del tubo, che non contiene elettricità libera; limitiamola con due superfici  $\sigma_1, \sigma_2$  (fig. 17) ortogonali in tutti i loro punti alle forze elettriche indicate con  $F_1, F_2$ . Applichiamo la formula (19) alla superficie chiusa di questa sezione di tubo.



Poiché  $F_n$  nella (19) è la componente lungo la normale esterna, abbiamo evidentemente  $F_n = F_2$  su  $\sigma_2$  e  $F_n = -F_1$  su  $\sigma_1$ . Il flusso attraverso la superficie laterale è dappertutto nullo; il flusso totale è pure nullo, poiché, per ipotesi, si ha  $\eta_i = 0$  e  $\bar{\eta} = 0$ ; rimane quindi

$$\iint K_2 F_2 d\sigma_2 - \iint K_1 F_1 d\sigma_1 = 0 \quad (1.0.57)$$

o

$$\iint K_1 F_1 d\sigma_1 = \iint K_2 F_2 d\sigma_2 \quad (1.0.58)$$

*Il flusso di induzione  $\psi$  è costante lungo ogni parte di un tubo che non contiene elettricità libera, in qualsiasi modo varia il mezzo dielettrico in quella parte.* Invece della (26,b), si può scrivere

$$\psi_1 = \psi_2 \quad (1.0.59)$$

Quando, all'interno del tubo, si trova la quantità di elettricità  $\pi$ , si ha, invece della (26,b),

$$\iint K_2 F_2 d\sigma_2 - \iint K_1 F_1 d\sigma_1 = 4\pi\eta$$

o

$$\psi_2 - \psi_1 = 4\pi\eta \quad (1.0.60)$$

*Il flusso di induzione varia della quantità  $4\pi\eta$ , quando il tubo attraversa la quantità di elettricità  $\eta$ .* È facile vedere, basandosi sulla (19), che in un mezzo omogeneo ( $K_1 = K_2 = K$ ), in assenza di elettricità libera in un tubo, il flusso di forza nella sezione del tubo, che indicheremo con  $\varphi$ , non varia lungo il tubo, in modo da poter porre  $\varphi_1 = \varphi_2$ ; ma se  $\eta$  non è nullo, la variazione del flusso di forza è determinata dalla formula

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \iint F_2 d\sigma_2 - \iint F_1 d\sigma_1 = \frac{4\pi}{K}\eta \quad (1.0.61)$$

Consideriamo ora un tubo che collega le superfici di due conduttori M e N (fig.18). Esso ritaglia, sulle superfici dei due conduttori M e N, due porzioni  $s_1, s_2$  di dimensioni e forme diverse; indichiamo con  $\eta_1, \eta_2$  le quantità di elettricità che si trovano rispettivamente su queste due porzioni delle superfici considerate. Prolunghiamo il tubo in entrambi i versi all'interno dei conduttori e tracciamo due superfici qualsiasi che chiuderanno questo tubo. Si ottiene così una superficie chiusa, in tutti i punti della quale la componente normale della forza  $F$  è nulla, poiché

si ha sempre all'interno dei conduttori  $F = 0$ . Ne consegue che, per questa superficie, il flusso di induzione è nullo. La formula (19,a) mostra che si ha, in questo caso,  $\eta_i = 0$ , cioè  $\eta_1 + \eta_2 = 0$ , o

$$\eta_2 = -\eta_1 \quad (1.0.62)$$

*Ad entrambe le estremità di un tubo che collega le superfici di due conduttori, ci sono uguali quantità di elettricità di segno opposto.* È molto importante notare che l'uguaglianza precedente rimane, quando M e N sono circondati da dielettrici diversi; questa uguaglianza mostra che i tubi di forza o di induzione possono collegare solo conduttori carichi di elettricità di segno opposto.

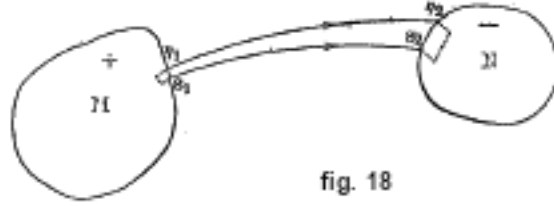


fig. 18

Consideriamo ora solo una parte del tubo di forza e supponiamo che le sezioni trasversali  $\sigma$  del tubo siano sufficientemente piccole, da poter considerare l'intensità  $F$  del campo uguale in tutti i punti di tale sezione; supponiamo inoltre che l'intero tubo o parte del tubo in esame si trovi in un mezzo omogeneo. La relazione (26,b) dà allora  $F_1\sigma_1 = F_2\sigma_2$ , o

$$F_1 : F_2 = \sigma_2 : \sigma_1 \quad (1.0.63)$$

poiché si ha  $K_1 = K_2$ ,  $F_1 = \text{cost}$  e  $F_2 = \text{cost}$ .

*In un mezzo omogeneo, l'intensità del campo, in diversi punti di un tubo di forza, è inversamente proporzionale all'area della sezione trasversale del tubo.* In altre parole, l'espansione trasversale di un tubo di forza, in un mezzo omogeneo ( $K = \text{cost}$ ) corrisponde ad una diminuzione dell'intensità del campo, la sua contrazione trasversale ad un accrescimento. Questo teorema ci permette di introdurre la nozione di *numero di linee di forza*. Consideriamo la figura 18. Possiamo tracciare per  $\sigma_1$  un'infinità di linee di forza, poiché una di esse passa per ogni punto. Consideriamo sulla superficie  $\sigma_1$  un numero  $\nu$  di punti del tutto arbitrario, distribuiti il più uniformemente possibile, e si supponga di avere  $N_1$  punti nell'area unitaria, per cui  $\nu = N_1\sigma_1$ . Conduciamo attraverso tutti questi punti le linee di forza, che incontrano pure la superficie  $\sigma_2$  in  $\nu$  punti. Se in quest'ultima sezione vi sono  $N_2$  punti per unità di area, si avrà  $\nu = N_2\sigma_2$ . Si ha  $N_1\sigma_1 = N_2\sigma_2$ , da cui

$$N_1 : N_2 = \sigma_2 : \sigma_1 \quad (1.0.64)$$

In sintesi, chiameremo rispettivamente ciascuno dei numeri  $N_1, N_2$  il numero di linee di forza in  $\sigma_1$  e in  $\sigma_2$ , sebbene, essendo uno di questi numeri arbitrario, sarebbe più esatto dire dell'altro che esso è il numero relativo di linee di forza per unità di area della sezione trasversale  $\sigma_2$ . Se si confronta la (28, a) con la (28), si ha

$$N_1 : N_2 = F_1 : F_2 \quad (1.0.65)$$

*In un mezzo omogeneo, il numero di linee di forza (riferite all'unità di area della sezione trasversale) in diversi punti di un tubo di forza è proporzionale all'intensità del campo.*

Tracciamo una superficie  $s_1$ , che interseca le linee di forza ovunque ortogonalmente, e, per ogni elemento  $\sigma_1$  di questa superficie, facciamo passare  $\nu_1 = c\sigma_1 F_1$  linee di forza, in modo che il numero di linee di forza per unità di area sarà  $N_1 = cF_1$ , con  $c$  che indica un fattore di proporzionalità arbitrario; in altre parole, portiamo ovunque sulla superficie  $s_1$ , questo numero

$N_1$  proporzionale all'intensità del campo. In questo caso, in tutto lo spazio in cui sono presenti linee di forza, il numero  $N$  di linee di forza che attraversano  $s_1$  è proporzionale all'intensità  $F$  del campo, e si ha

$$N = cF \quad (1.0.66)$$

Se si pone  $c = 1$ , cioè se, sulla superficie  $s_1$ , si prendono ovunque i valori  $N_1$  e  $F_1$  uguali tra loro, si ottiene l'uguaglianza

$$N = F \quad (1.0.67)$$

Invece di tracciare, per ogni elemento  $\sigma_1$  della superficie  $s_1$ , un numero  $\nu_1 = c\sigma_1 F_1$ , di linee di forza, si può anche tracciare lo stesso numero di tubi di forza, essendo la somma delle sezioni trasversali di questi tubi, in questo luogo, uguale a  $\sigma_1$ . Questi tubi generalmente si restringeranno o si allargheranno al di fuori di  $\sigma_1$ , ma non si espanderanno liberamente da nessuna parte, cioè riempiranno ovunque la parte dello spazio che attraversano. Le linee di forza, di cui abbiamo parlato sopra, rappresentano in un certo senso gli assi dei tubi che consideriamo. È chiaro, quindi, che le formule (28,c) e (28,d) si applicano anche a queste ultime. Quanto sopra porta al seguente risultato:

*Il numero di linee di forza, così come il numero di tubi di forza, in un mezzo omogeneo, sono proporzionali o addirittura uguali all'intensità del campo, secondo quella delle formule (28,c) o (28,d) su cui si basa la costruzione di linee e tubi.*

Adotteremo, nel seguito, l'uguaglianza  $N = F$ , cioè sceglieremo la costruzione che conduce a tale uguaglianza.

Occupiamoci ora del flusso di induzione e dei tubi di induzione, che sono identici ai tubi di forza in un dielettrico omogeneo. Si noti che, in un mezzo omogeneo, il flusso di induzione, che permette di passare facilmente all'intensità del campo, ha generalmente un interesse essenziale. Abbiamo chiamato il flusso di induzione, che attraversa l'elemento di superficie  $ds$ , la grandezza  $KF_n ds$ . Chiameremo grandezza

$$B = KF \quad (1.0.68)$$

induzione in un punto del dielettrico; è uguale al flusso di induzione che attraversa l'elemento  $ds$  ortogonale alle linee di forza, diviso per  $ds$ ; in altre parole, è pari al flusso di induzione riferito all'unità di area. Per un tubo di induzione con sezione trasversale sufficientemente piccola, si deduce dalla (26,b)

$$K_1 F_1 \sigma_1 = K_2 F_2 \sigma_2 \quad (1.0.69)$$

cioè

$$B_1 \sigma_1 = B_2 \sigma_2$$

o

$$B_1 : B_2 = \sigma_2 : \sigma_1 \quad (1.0.70)$$

Questa relazione ricorda l'uguaglianza (28), ma qui è valida anche per un mezzo non omogeneo; essa esprime che *l'induzione in diversi punti di un tubo di induzione è inversamente proporzionale all'area della sezione trasversale di questo tubo.*

Disegniamo ancora una superficie  $s_1$  ovunque ortogonale alle linee di forza. Per ognuno dei suoi elementi  $\sigma_1$ , tracciamo  $\nu_1 = c\sigma_1 K_1 F_1$  tubi di induzione, essendo la somma delle aree delle sezioni trasversali di questi tubi uguale a  $\sigma_1$ :  $K_1$ ,  $F_1$  e  $B_1$  si riferiscono a un qualsiasi punto scelto in  $\sigma_1$ . Chiamiamo  $N_1 = \nu_1 : \sigma_1$  il numero di tubi di induzione nel luogo considerato, sottintendendo, come prima, le parole per unità di area della superficie ovunque ortogonale ai tubi; si ha  $N_1 = cB_1$ . Lungo ogni tubo si ha  $N_1 : N_2 = \sigma_2 : \sigma_1$ , vedi la (28,a), e di conseguenza la (29,a) dà

$$N_1 : N_2 = B_1 : B_2 \quad (1.0.71)$$

Essendo  $N_1 = cB_1$ , su ha ovunque  $N = cB$ . Se si pone  $c = 1$ , cioè se, sulla superficie  $s_1$  si prendono le grandezze  $N_1, B_1$ , ovunque numericamente uguali, si ottiene ovunque

$$N = B \quad (1.0.72)$$

Quando si suppongono i tubi di induzione costruiti come appena detto, *l'induzione  $B$  è in ogni punto uguale al numero  $N$  di tubi di induzione*. Ciò significa che, per una superficie  $\sigma$  ortogonale ai tubi, passano  $N\sigma = B\sigma$  tubi. Nell'aria, si ha

$$N = F = B \quad (1.0.73)$$

Assumeremo d'ora innanzi che i tubi di induzione siano costruiti secondo l'uguaglianza (29,c). Come abbiamo visto, vedi (26, 6), il flusso di induzione  $\psi$  non varia lungo un tubo che non contiene elettricità libera. Costruiamo un unico tubo sull'elemento  $\sigma$ , secondo la (29,c); si può scrivere, per una sezione sufficientemente piccola

$$\psi = KF\sigma = B\sigma = N\sigma$$

ma  $N\sigma$  è il numero di tubi che attraversano  $\sigma$ , e poiché  $\sigma$  è la sezione trasversale del tubo che abbiamo costruito, si ha  $N\sigma = 1$ , cioè  $\psi = 1$ . *Il flusso di induzione in ciascuno dei tubi di induzione così costruiti è uguale all'unità*. Questo è il motivo per cui un tale tubo viene talvolta chiamato un tubo unitario.

Cerchiamo ora la relazione che esiste tra la quantità  $\eta$  e il numero  $\nu$  di tubi unità di induzione, risultanti in qualche modo da questa elettricità. La formula (19) mostra che il flusso di induzione è uguale a  $4\pi\eta$  per ogni superficie chiusa, che circonda la quantità di elettricità  $\eta$ . È chiaro che si ottiene ancora lo stesso flusso di induzione attraverso una superficie ortogonale a tutti i tubi, quando ciascuno dei tubi contiene il flusso di induzione  $\psi = 1$ . Ma il flusso totale è uguale a  $4\pi\eta$ ; si deve quindi avere

$$\nu = 4\pi\eta \quad (1.0.74)$$

Se ne deduce, per il numero  $\nu_1$  di tubi di induzione risultanti dall'unità di quantità di elettricità

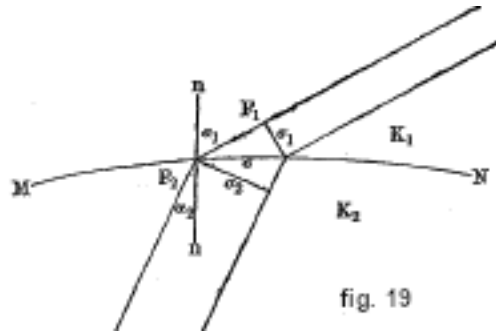
$$\nu_1 = 4\pi \quad (1.0.75)$$

Applichiamo quanto sopra a un conduttore circondato da un dielettrico. Sull'elemento di superficie  $ds$  si trova la quantità di elettricità  $\eta = kds$ ; di conseguenza, da  $4\pi kds$  tubi di induzione partono da  $ds$ , tutti diretti dalla stessa parte. Contenendo ogni tubo un flusso di induzione pari all'unità, il flusso di induzione totale  $KFds$  è pari al numero  $4\pi kds$  di tubi; se ne deduce, dalla (24,a),  $F = 4\pi k : K$ . Quando si introduce l'induzione  $B = KF$  nell'espressione (25,b) della tensione superficiale  $P$ , si ottiene la formula

$$P = \frac{BF}{8\pi} \quad (1.0.76)$$

Dimostreremo, per finire, che i tubi di induzione, nel passaggio da un dielettrico all'altro, subiscono una specie di rifrazione. Naturalmente deve essere lo stesso per le linee di forza. Supponiamo che MN sia la superficie di separazione di due mezzi, i cui poteri inducenti sono  $K_1, K_2$ . Consideriamo un tubo d'induzione, che attraversa l'elemento  $\sigma$  della superficie MN (fig. 19).





Supponiamo che formi con la normale  $nn$  gli angoli  $\alpha_1, \alpha_2$ , e che le sue sezioni trasversali da ambo i lati di  $MN$  siano  $\sigma_1, \sigma_2$ . Quando non c'è elettricità libera su  $MN$ , si ha, dalla (21),

$$K_1 F_{1,n} = K_2 F_{2,n} \quad (1.0.77)$$

$$K_1 F_1 \cos \alpha_1 = K_2 F_2 \cos \alpha_2 \quad (1.0.78)$$

Se si moltiplicano i due membri di quest'ultima uguaglianza per  $\sigma$ , si ottiene  $K_1 F_1 \sigma_1 = K_2 F_2 \sigma_2$ , uguaglianza che esprime che il flusso di induzione è costante nel tubo, conformemente alla relazione (29). Si vede facilmente che le componenti tangenziali della forza devono essere identiche su entrambi i lati della superficie  $MN$ , quando si passa al limite; si ha pertanto

$$F_1 \sin \alpha_1 = F_2 \sin \alpha_2 \quad (1.0.79)$$

Questa uguaglianza unita alla (31,a) dà l'equazione

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{K_1}{K_2} = \text{cost} \quad (1.0.80)$$

Questa relazione determina la rifrazione delle linee di forza e dei tubi di induzione, nel passaggio da un mezzo all'altro.

Tutti i risultati che abbiamo appena ottenuto sono stati presentati come conseguenze delle idee fondamentali relative all'immagine A. Ciò ci era imposto, poiché tutte le conclusioni si basano sul teorema di Gauss, che è stato dimostrato mediante la (17), o usando la formula (11); ora queste formule, che contengono la grandezza  $\eta$ , sono completamente correlate all'immagine A.

J. Bertrand ha dimostrato molto semplicemente che la legge dell'attrazione in ragione inversa del quadrato della distanza, quando la forza è diretta verso il punto attratto, è l'unica che permette l'uso di tubi di forza. Supponiamo che il corpo che attrae si riduca a un punto. Essendo l'attrazione proporzionale ad una funzione  $\varphi(r)$  della distanza, le linee di forza sono necessariamente rette che partono dal punto di che attrae. Se si prende come superficie iniziale, sulla quale le si distribuisce, una sfera avente per centro questo punto, il numero di linee di forza che partono da un elemento  $d\omega$  di questa sfera sarà proporzionale a  $d\omega$ , poiché sulla superficie sferica l'intensità è costante. A una distanza  $r$  dal centro d'azione, la superficie  $r^2 d\omega$  sarà attraversata dalle linee di forza che attraversano  $d\omega$ . Se  $N$  designa il numero di queste linee, l'intensità sarà rappresentata da  $N/r^2 d\omega$  e, quindi, inversamente proporzionale al quadrato della distanza. Qualsiasi altra ipotesi è incompatibile con il principio di Faraday.

**Immagine B.** - Abbiamo detto che, entro certi limiti molto ampi, tutti i fenomeni elettrostatici si verificano assolutamente come se i tratti fondamentali dell'immagine A fossero esatti. Possiamo essere certi che tutti i risultati a cui siamo arrivati finora possiedono una reale accuratezza; ma resta da trovare il loro significato fisico in una teoria costruita a partire dall'immagine B.

La legge di Coulomb che, nell'immagine A, appare come una proprietà a priori dell'elettricità, cioè relativa a una sostanza la cui esistenza è reale e indipendente, si ottiene, nell'immagine B,

come risultato teorico, come espressione finale delle forze che si esercitano sui corpi elettrizzati. L'elettrizzazione di questi ultimi è una conseguenza delle tensioni esistenti nell'etere, della presenza di tubi di tensione, la cui disposizione è determinata dalla forza di tensione longitudinale, dalla pressione trasversale che si esercita tra i tubi e dal grado di mobilità delle estremità di questi tubi. Maxwell, Hertz, Boltzmann e altri ancora hanno mostrato come la legge di Coulomb sia deducibile dalle formule che traducono l'idea fondamentale di Faraday sul ruolo preponderante del mezzo dielettrico. Vedremo più avanti come stabilire che la legge di Coulomb è in perfetto accordo con l'immagine B.

I tubi di induzione dell'immagine A, che in questa immagine hanno solo un significato geometrico, sono, nell'immagine B, i tubi di tensione, considerati lungo tutto il loro percorso come dotati di una reale esistenza nell'etere. Questi tubi possono essere paragonati a fili, il cui numero per unità di superficie attraversata è finito; ma, poiché non sappiamo nulla di questo numero, introduciamo un po' arbitrariamente la nozione di tubo unità di tensione: tale tubo è ciò che abbiamo chiamato, nell'immagine A, un tubo unità di induzione, cioè un tubo in tutte le sezioni trasversali  $\sigma$  di cui il flusso di induzione soddisfa la relazione

$$\psi = KF\sigma = 1 \quad (1.0.81)$$

La formula (29,e), cioè

$$\nu = 4\pi\eta \quad (1.0.82)$$

esprime nella forma più semplice il legame che si può stabilire tra le immagini A e B;  $\eta$  indica qui la quantità di elettricità libera in un determinato luogo,  $\nu$  il numero di tubi unità di tensione che terminano nello stesso luogo. Abbiamo introdotto l'ipotesi che  $\eta$  non dipende dalla natura dell'ambiente circostante. Dobbiamo ora formulare questa ipotesi nel modo seguente: *il numero di tubi di tensione, partenti da un dato corpo, non varia, quando questo corpo è introdotto in mezzi differenti*. L'uguaglianza  $\psi = 1$  rimane vera per ogni tubo, ma al variare di  $K$ , varia anche  $F$ .

Nell'immagine A, abbiamo ottenuto, per la tensione  $P$  sulla superficie di un conduttore (forza per unità di area), le espressioni (25), (25,b), (25,d),

$$P = \frac{2\pi k^2}{K} = \frac{KF^2}{8\pi} = \frac{1}{2}Fk \quad (1.0.83)$$

È nel modo di concepire la grandezza  $P$ , cioè la forza esercitata su una parte mobile dello strato superficiale del conduttore nella direzione della normale esterna, che appare con particolare nitidezza la differenza caratteristica tra le immagini A e B: nell'immagine A,  $P$  è una forza di repulsione; nell'immagine B, invece, è una forza di trazione, conseguenza della tensione nei tubi che terminano sulla parte considerata della superficie del conduttore.

Considereremo più da vicino i tubi di tensione e dapprima di le loro estremità. Sia  $p$  la tensione all'estremità di un tubo unitario,  $\sigma$  la sezione di questo tubo,  $F$  l'intensità del campo. L'unità di area uniformemente elettrizzata contiene  $k$  unità di elettricità e su di essa, di conseguenza, terminano

$$N = 4\pi k = KF \quad (1.0.84)$$

tubi, che producono la tensione totale  $P$ . Deriva che l'area della sezione trasversale all'estremità del tubo è

$$\sigma = \frac{1}{4\pi k} = \frac{1}{KF} \quad (1.0.85)$$

si vedano la (24,a) e la (32), e che la tensione  $p$  a una tale estremità è

$$\sigma = \frac{P}{4\pi k} = P\sigma = \frac{k}{2K} = \frac{F}{8\pi} = \frac{1}{8\pi K\sigma} \quad (1.0.86)$$

Le formule (32,c) e (32,e) mostrano che raddoppiando l'elettrizzazione di un conduttore, raddoppia non solo il numero  $N$  di tubi, ma anche la tensione  $p$  in ciascun tubo. Qualsiasi sezione trasversale  $\sigma$  di un tubo può fungere da estremità di questo tubo e, di conseguenza, ammetteremo che lungo tutto un tubo la tensione è

$$p = \frac{F}{8\pi} = \frac{1}{8\pi K\sigma} \quad (1.0.87)$$

*La tensione di un tubo unitario è, lungo tutto questo tubo, direttamente proporzionale all'intensità del campo o inversamente proporzionale all'area della sezione trasversale del tubo.*

La grandezza  $k$ , cioè la densità dell'elettricità, non sembra aver alcun significato nell'immagine B. Tuttavia Maxwell ha introdotto una certa grandezza  $\mathcal{D}$ , che ha chiamato spostamento elettrico e che, appartenendo interamente all'immagine B e relativo alle diverse sezioni  $\sigma$  del tubo unità di tensione, è numericamente identica alla quantità  $k$  dell'immagine A, cioè alla densità dell'elettricità libera, che giacerebbe sulla superficie del conduttore se l'estremità del tubo fosse nella sezione  $\sigma$ . Lo spostamento  $\mathcal{D}$  esprime il fatto che si tratta, nei tubi, di una qualche deformazione unilaterale, che non corrisponde al significato ordinario della parola deformazione. È questo spostamento alle estremità del tubo che produce tutti i fenomeni che manifesta una superficie elettrizzata. Ma esiste in tutte le sezioni del tubo, e si ottiene la sua espressione, ponendo  $\mathcal{D} = k$  nelle formule (32,d), (32,e) e (28,e). Si ha così

$$\mathcal{D} = \frac{1}{4\pi} KF = \frac{1}{4\pi} B = 2Kp = \frac{1}{4\pi\sigma} \quad (1.0.88)$$

Lo spostamento lungo un tubo unità di tensione è proporzionale all'induzione  $B$  o inversamente proporzionale all'area della sezione trasversale del tubo. Il prodotto  $\mathcal{D}\sigma$  corrisponde alla quantità di sostanza spostata nella sezione considerata. Si ha, per un tubo unità,

$$\mathcal{D}\sigma = \frac{1}{4\pi} \quad (1.0.89)$$

cioè il prodotto  $\mathcal{D}\sigma$  è costante per tutte le sezioni di un tubo ed è analogo allo spostamento di un liquido incompressibile. Il rapporto tra l'intensità del campo  $F$  e lo spostamento  $\mathcal{D}$ , cioè la grandezza

$$\frac{F}{\mathcal{D}} = \frac{4\pi}{K} \quad (1.0.90)$$

è stata chiamata da Maxwell *il coefficiente di elasticità elettrica del dielettrico*, per analogia con i coefficienti della teoria dell'elasticità ordinaria. Come si vede, tale coefficiente di elasticità elettrica è inversamente proporzionale alla costante dielettrica  $K$ .

Abbiamo preso, per tubo unitario, un tubo in cui si ha

$$\psi = \sigma KF = 1$$

all'unità di quantità di energia elettrica corrispondono  $4\pi$  tubi. Molti autori, in particolare Heaviside e H. Lorentz, prendono, inoltre, come tubo unitario, un tubo proveniente solo dall'unità di quantità di elettricità. Invece della (29,e) o (32,a), essi ottengono la relazione numerica  $\nu = \eta$ .

Indicheremo qui brevemente, salvo tornarci in seguito, le condizioni di equilibrio dei tubi di tensione. Abbiamo visto che, in ogni sezione  $\sigma$  di un tubo unitario, agisce la tensione  $p$  espressa dalle formule (32,f), a cui si può aggiungere anche  $p = \mathcal{D}/2K$ , vedi (32,g). Quando questa tensione è rapportata all'unità di area della sezione trasversale del tubo, si ottiene la tensione  $P$ , che è data dalle formule (32,b). Introducendo, invece di  $k$ , lo spostamento  $\mathcal{D}$ , nonché l'area variabile  $\sigma$  della sezione trasversale del tubo unità, si ha infine

$$P = \frac{KF^2}{8\pi} = \frac{BF}{8\pi} = \frac{F\mathcal{D}}{2} = \frac{2\pi\mathcal{D}^2}{K} = \frac{1}{8\pi K\sigma^2} \quad (1.0.91)$$

Maxwell ha mostrato, come vedremo in seguito, che un tubo di tensione è in equilibrio se la sua superficie laterale è soggetta a una pressione trasversale che, riferita all'unità di area, è anch'essa uguale a  $P$ . *Esiste quindi, in tutti i punti di un campo elettrico, una tensione longitudinale nei tubi e una pressione normale alla loro superficie laterale. Questa tensione e quella pressione, riferite rispettivamente all'unità di area della sezione trasversale e all'unità di area della superficie laterale, sono uguali tra loro e sono determinate dalle formule (32,k), in funzione dell'intensità  $F$  del campo, dell'induzione  $B$ , dello spostamento  $\mathcal{D}$ , dell'area  $\sigma$  della sezione trasversale del tubo unità e della costante dielettrica  $K$ .*

**Immagine C.** - Abbiamo già parlato, nell'introduzione, dell'immagine C relativa alla moderna teoria dei fenomeni elettrici che si chiama teoria degli elettroni. Abbiamo visto che si basa sull'idea che l'elettricità sia una sostanza particolare, la cui esistenza è reale. Questa sostanza produce, nell'etere circostante, le modificazioni determinate dall'immagine B; ha invece una struttura atomica, cioè costituita da particelle molto piccole, distribuite in modo non continuo, ciascuna rappresentante la *quantità elementare di elettricità*; questi atomi di elettricità sono chiamati *elettroni*. La nostra intenzione è quella di far conoscere prima il lato esterno dei fenomeni elettrici; per le ragioni che abbiamo spiegato dettagliatamente in precedenza, dobbiamo limitarci qui alla descrizione di questi fenomeni che si ottengono con le immagini A e B; l'immagine C potrebbe attualmente non esserci di particolare utilità e indicheremo semplicemente, per il momento, la grandezza assoluta di un elettrone. Tutta una serie di ricerche di diversa natura ha portato al risultato che il valore approssimato di un elettrone è il seguente:

$$1 \text{ elettrone} = 3 \cdot 10^{-10} \text{ unità el. st. CGS di elettricità} \quad (1.0.92)$$

da cui risulta che

$$1 \text{ elettrone} = 10^{-19} \text{ coulomb} = 10^{-12} \text{ microcoulomb} \quad (1.0.93)$$

Vedremo che, nelle soluzioni, l'elettrone si unisce alla materia e forma con essa quello che si chiama uno ione. Sia  $m$  la quantità di materia espressa in grammi che è unita ad un elettrone. Numerose ricerche, che renderemo note anche in seguito, hanno dato, per lo ione idrogeno, la relazione

$$\frac{e}{m} = 10^4 \quad (1.0.94)$$

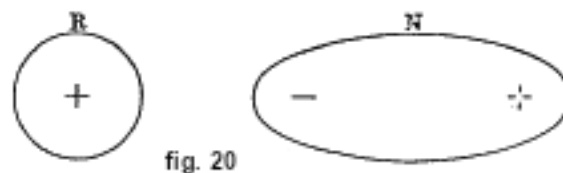
dove  $e$  è la carica dell'elettrone in unità el. magn. CGS, mentre  $m$  è espressa in grammi. Quando  $e$  è espresso in unità el. st. CGS, si ha approssimativamente per lo ione idrogeno

$$\frac{e}{m} = 3 \cdot 10^{14} \quad (1.0.95)$$

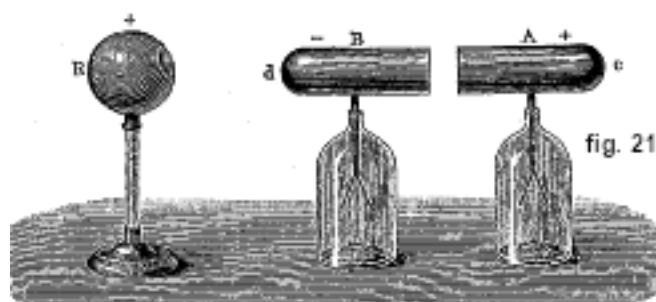
## 5. Induzione elettrostatica

Nello studio dei fenomeni elettrostatici che seguirà, utilizzeremo la terminologia relativa all'immagine A, non solo nella descrizione, ma anche nella spiegazione dei fenomeni, perché non sarebbe facile in molti casi adottare una terminologia completamente terminologia neutra per così dire e non dipendente da alcuna immagine. Parleremo, ad esempio, di quantità di elettricità; non bisognerà però perdere di vista il fatto che, nella descrizione di un fenomeno, questa espressione indicherà il substrato, forse del tutto inconoscibile nella realtà, di cui la quantità di sostanza chiamata elettricità ha la parte nell'immagine A, mentre nella B questo ruolo è attribuito all'entità della tensione longitudinale nei tubi di tensione e al numero di questi tubi.

Il fenomeno dell'induzione elettrostatica, che qui chiameremo semplicemente induzione (ma che non va confuso con la grandezza  $B$  già considerata nella (29,e), consiste in quanto segue.



Quando ci si avvicina a un corpo elettrificato  $R$  (fig. 20) un altro corpo  $N$ , non precedentemente elettrizzato, anche questo corpo  $N$  manifesta l'elettrizzazione, prodotta dalla vicinanza del corpo  $R$ . La carica del corpo  $N$  si chiama carica indotta, quella del corpo  $R$  carica induttrice. Su  $N$  compaiono due elettrificazioni: sul lato rivolto verso il corpo  $R$ , un'elettrizzazione di nome opposto a quella di  $R$ , sull'altro lato un'elettrizzazione con lo stesso nome. Se  $N$  è un conduttore, le due elettricità possono separarsi l'una dall'altra. A tale scopo può essere utilizzato lo strumento mostrato in figura 21. Il corpo  $R$  è una sfera, ad esempio elettrizzata positivamente,  $cd$  un cilindro metallico le cui due metà sono inizialmente a contatto: ciascuna metà è collegata a un elettroscopio. Avvicinandosi alla sfera  $R$ , si separano le metà del cilindro e poi si allontana  $R$ , gli elettroscopi mostrano che le due metà del cilindro sono elettrizzate nel modo sopra indicato. Se poi le due metà del cilindro vengono nuovamente messe a contatto, le foglie ricadono in ciascun elettroscopio. Ciò mostra che *nell'induzione si ottengono quantità uguali di elettricità indotta di nomi opposti*.



Quando le metà del cilindro sono a contatto e quando, presente  $R$ , un nuovo corpo metallico si aggiunge all'estremità  $c$ , l'elettricità dello stesso nome di quella di  $R$  si diffonde sulla superficie di quest'ultimo corpo e si raccoglie in particolare alla sua estremità più lontana da  $R$ . Se si collega  $c$  con la terra, l'elettricità con lo stesso nome scompare, scorre nella terra. Se interrompiamo il contatto con la terra e togliamo  $R$ , il cilindro rimane elettrizzato e la sua elettrizzazione è di nome opposto a quella di  $R$ . Questo costituisce un metodo conveniente per elettrizzare un conduttore.

I corpi  $R$  e  $N$  (fig. 20) si attraggono reciprocamente, perché le loro parti opposte sono cariche di elettricità di nomi opposti. L'attrazione aumenta quando il corpo  $N$  è a terra. L'attrazione dei corpi leggeri si spiega da ciò che è stato appena detto; questa attrazione deve avvenire con maggior forza, quando i corpi leggeri non sono isolati.

Supponiamo che anche  $R$  sia un conduttore. Si constata in questo caso che si produce su questo corpo uno spostamento dell'elettricità dalla parte di  $N$ .

Ciascuna delle due quantità uguali di elettricità indotta su  $N$  è tanto maggiore quanto più  $R$  ed  $N$  sono vicini tra loro. Quando si avvicinano sempre più  $R$  e  $N$ , le due cariche su  $N$  aumentano progressivamente, e contemporaneamente la carica del conduttore  $R$  si concentra in modo più completamente sulla parte della superficie di questo corpo che è più vicina a  $N$ . Con un sufficiente riavvicinamento avviene la contemporanea scomparsa delle elettrizzazioni dei nomi opposti su  $R$  e  $N$ , scomparsa che si manifesta esternamente con una scintilla nell'intervallo che separa  $R$  e  $N$ . Infine, rimane solo una carica positiva su  $R$  e su  $N$ , come se una parte della carica del corpo  $R$  fosse semplicemente passata sul corpo  $N$ . Ogni passaggio dell'elettrizzazione

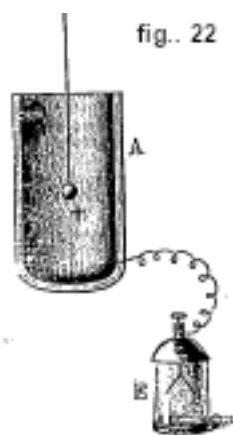
da un conduttore a un altro, portato a contatto con il primo, avviene nel modo complicato appena descritto.

È sull'induzione che si basa il fatto che basta, per rilevare lo stato elettrico di un corpo, avvicinarlo con un elettroscopio dall'alto: le foglie allora divergono sotto l'azione dell'elettricità dello stesso nome che vi è indotta.

Se si collega il corpo N con la terra, la carica del corpo R si sposta ancora di più verso il lato del corpo N, e contemporaneamente, la carica negativa, che rimane su N, aumenta. Rimane comunque sempre inferiore alla carica del corpo R, tranne nel caso in cui valga il famoso teorema di Faraday:

Quando si introduce un corpo elettrizzato qualsiasi R all'interno di un conduttore cavo N:

1. le quantità uguali di elettricità di nomi opposti, che appaiono come risultato dell'induzione sulla superficie interna e sulla superficie esterna del conduttore N, sono uguali alla quantità totale di elettricità induttrice, che si trova sul corpo R, qualunque sia la posizione di questo corpo; 2. la posizione del corpo R non ha alcuna influenza sulla distribuzione dell'elettricità indotta sulla superficie esterna del corpo N; 3. se si collega il corpo N con la terra, l'intensità del campo in tutti i punti del corpo N è nulla.

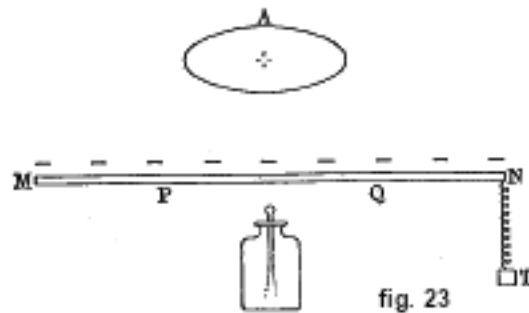


Per dimostrare questo teorema, Faraday ha fatto il seguente esperimento. Un recipiente metallico isolato A (fig. 22) è posto in comunicazione con un elettroscopio E. Se un corpo elettrizzato C viene introdotto in A, chiudendo A, cosa utile, con un coperchio metallico, l'elettroscopio E rileva la presenza di una carica sulla superficie esterna del vaso A. Quando si collega A con la terra, questa carica fluisce e le foglie dell'elettroscopio ricadono. Interrompendo la comunicazione con la terra e poi toccando, con il corpo C, la superficie interna del vaso A, le foglie rimangono a riposo e su A non appare traccia di elettrizzazione. Ciò dimostra che, sulla superficie interna di A, era stata indotta una quantità di elettricità pari a quella che si trovava sul corpo C. L'esattezza delle altre parti del teorema di Faraday è dimostrata dall'osservazione diretta.

Esiste una stretta relazione tra il teorema di Faraday e il fenomeno detto *ombra elettrica*. L'effetto di uno schermo elettrico consiste nel fatto che una piastra metallica MN (fig. 23), non troppo piccola, collegata a terra T (si usa, nelle figure schematiche, indicare la messa a terra come abbiamo fatto qui) e posta in prossimità di un corpo elettrizzato A, annulla quasi totalmente il campo elettrico, nella parte dello spazio PQ prossima al centro della piastra e situato dietro ad essa rispetto ad A. Le foglie di un elettroscopio posto in questa regione restano ferme; si dice che l'elettroscopio si trovi nell'ombra elettrica della piastra MN, che funge da schermo. Quanto più grande è la piastra e il corpo elettrizzato vicino ad essa, tanto più completa è l'ombra, vale a dire l'intensità del campo prossima allo zero.

Torniamo al caso più semplice di induzione e supponiamo che il corpo N (fig. 20) sia un dielettrico. Come vedremo in seguito, i fenomeni elettrici che poi si verificano dipendono dal

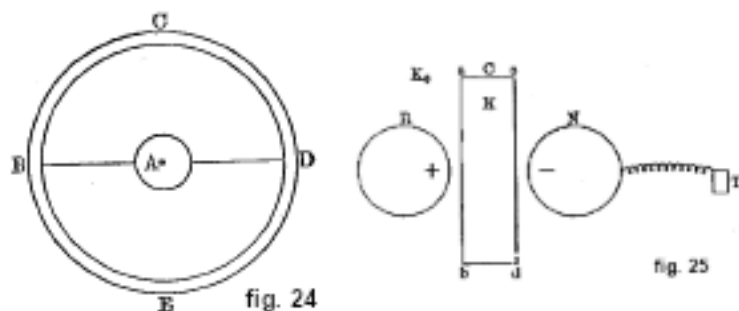
tempo, cioè il loro carattere varia con la durata dell'azione del corpo R sul dielettrico N. Ci limiteremo a considerare attualmente l'azione la cui durata è molto breve. In questo caso, tutto accade come se, sulla superficie del dielettrico N, apparissero due elettrizzazioni, del tutto analoghe a quelle che si ottengono quando N è un conduttore. Queste elettrizzazioni scompaiono non appena ci si allontana da R, ma non possono essere separate l'una dall'altra, e se il cilindro AB (fig. 21) è costituito da un dielettrico, le sue due metà non appaiono elettrizzate quando le si scosta allontanandole da R. Le elettrizzazioni indotte sui dielettrici non sono paragonabili a quelle ottenute per strofinamento o per contatto con altri corpi elettrizzati, i quali si conservano per molto tempo; vedremo che elettrizzazioni di questa natura compaiono solo sulla superficie di un dielettrico quando un corpo elettrizzato ha agito a lungo su questo dielettrico.



Considereremo ora il ruolo molto importante che svolgono i dielettrici, come mezzi intermediari, nei fenomeni di induzione elettrostatica. Supponiamo che il corpo B, preliminarmente elettrizzato, e il corpo N, sul quale si produce l'induzione, siano conduttori e che R porta la carica  $\eta$ . I fenomeni descritti si producono sia quando N è isolato sia quando non lo è, ma si manifestano in una forma più evidente nel secondo caso; prendiamo pertanto N messo a terra. Per maggiore generalità, supponiamo che lo spazio, nel quale si trovano i corpi R e N, sia riempito da un dielettrico il cui potere induttivo è  $K_0$ . Il corpo R induce elettricità su tutti i corpi circostanti.

Notiamo innanzitutto che rimane vero il teorema di Faraday, per quanto diversi possano essere i dielettrici che si trovano all'interno di un conduttore indotto, nel recipiente A della figura 22: la quantità totale di elettricità indotta non dipende né dalla natura, né dalla distribuzione dei dielettrici intermedi; ma, d'altra parte, questa distribuzione dei dielettrici ha una grande influenza sulla distribuzione dell'elettricità indotta sulla superficie interna di un conduttore cavo. Questa influenza può essere formulata molto semplicemente come segue: *l'induzione avviene preferibilmente attraverso i dielettrici con la maggiore potenza induttiva K*.

Per evidenziare chiaramente questo fatto, consideriamo una sfera elettrizzata A (fig. 24), all'interno di una sfera cava concentrica BCDEB; la carica  $\eta$  della sfera A è distribuita uniformemente sulla sua superficie e una carica uguale a  $\eta$  ricopre in modo uniforme anche la superficie interna della sfera cava, purché l'intervallo attorno alla sfera A sia riempito da un dielettrico omogeneo, la cui potenza induttiva indicheremo con  $K_0$ . Se ora riempiamo la parte inferiore DEB della sfera, ad esempio, con un dielettrico per il quale si ha  $K > K_0$ , la carica aumenta sulla superficie BED; contemporaneamente, la carica diminuisce sulla superficie BCD e si produce anche sulla sfera A una concentrazione della carica sulla sua metà inferiore. La quantità totale di elettricità rimane comunque uguale a  $\eta$ , sia sulla sfera A che sulla superficie interna della sfera cava BCDEB.



Torniamo ora ai conduttori R e N, uno dei quali N è messo a terra (fig. 25). Se si interpone tra R e N un piatto C di sostanza dielettrica per il quale si ha  $K > K_0$ :

1. la quantità di elettricità aumenta su N; è come se l'induzione aumentasse o agisse più fortemente attraverso il dielettrico C; 2. la carica su R si concentra ancora di più sul lato rivolto verso C e N, cioè una parte della carica va da sinistra verso destra; 3. le cariche indotti dal corpo R sugli altri corpi circostanti (pareti, soffitto, pavimento, nuvole, ecc.) diminuiscono, e in totale questa diminuzione è esattamente uguale all'aumento della carica su N.



È molto importante notare che l'interposizione tra R e N di un dielettrico, per il quale si ha  $K > K_0$ , produce pressoché gli stessi fenomeni che si verificherebbero se avvicinassimo R e N. Faraday ha compiuto un famoso esperimento che ha evidenziato questa analogia. Le piastre metalliche A e C sono rilegati con le foglie d'oro *a* e *b* (fig. 26); si interpone una piastra metallica B, ad esempio elettrizzata positivamente, e contemporaneamente si collegano A e C con la terra per un istante. Le cariche negative saranno allora su A e C, e quasi interamente sulle facce rivolte verso B; le foglie *a, b* rimangono ferme. Quando si porta tra B e A una piastra dielettrica (vetro, zolfo, stearina, ecc.), la carica aumenta su A e ne consegue che l'elettricità positiva passa su *a*; la carica su C diminuisce, così che in *b* appare elettricità negativa: le foglie *a, b* si attraggono. Contemporaneamente, una parte della carica di B, che era sulla parte rivolta verso C, passa sull'altro lato. Gli stessi fenomeni si verificano, se ci si avvicina ad A e B. Si può dire che, nei fenomeni di induzione, uno strato dielettrico maggiore di R svolge lo stesso ruolo di uno strato dielettrico più sottile di K, per esempio, dell'aria.

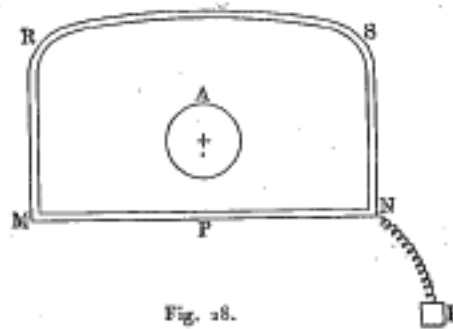
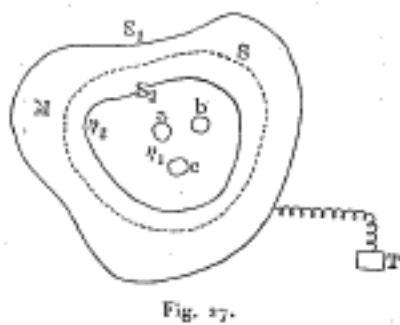
Passiamo ora alla spiegazione dei fenomeni considerati in questo paragrafo.

**Immagine A.** - L'elettricità positiva su R (fig. 20) scompone la miscela neutra nel conduttore N, attrae (-) e respinge (+) (ci esprimiamo così per semplicità); inoltre (+) su R è più fortemente attratto da (-) su N che respinto da (+) su N e, per questo motivo, il corpo R stesso si muove nella direzione di N. L'equilibrio elettrico si stabilisce, quando l'intensità del campo è nulla in tutti i punti del corpo N, cioè quando la carica del corpo N produce in tutti i punti di questo corpo un campo uguale in intensità, ma di segno opposto, al campo prodotto negli stessi punti dalla carica del corpo R. Non occorre alcuna spiegazione particolare per dimostrare che si ottengono, per induzione su N, quantità uguali delle due elettricità, e che è possibile separare le



due cariche l'una dall'altra, vedere figura 21. Se si collega N con la terra, (+), che viene respinto dalla carica del corpo R, scorre verso la terra; allo stesso tempo, (-) su N deve evidentemente aumentare, poiché solo ora deve, all'interno di N, annullare il campo prodotto dalla carica del corpo R. Quando si avvicina gradualmente R a N, le elettricità dei nomi contrari finalmente si riuniscono, facendosi strada, per così dire, attraverso il dielettrico; questa unione delle due elettricità è accompagnata da un'incandescenza delle particelle del dielettrico, nonché dei metalli di cui sono formati i corpi R e N; è in questo che consiste il fenomeno della scintilla. Osserviamo di sfuggita che le ipotesi unitarie portano a una concezione più semplice della scintilla, che esse considerano come un trasporto unilaterale della sostanza da uno dei corpi all'altro.

Il teorema di Faraday può essere stabilito usando la formula (19,b), se si ammette, come abbiamo fatto finora, che questa formula può applicarsi ad una superficie situata all'interno di un conduttore. Supponiamo che all'interno di un conduttore cavo M (fig. 27), delimitato dalle superfici  $S_1, S_2$ , vi siano corpi elettrizzati dove la somma algebrica delle loro cariche è  $\eta_1$ , e che in aggiunta sia indotta una carica  $\eta_2$  su  $S_2$ .



Tracciamo all'interno del corpo M una qualsiasi superficie chiusa  $S$  e applichiamo ad essa la formula (19,b). Poiché all'interno di un conduttore l'intensità del campo deve essere nulla ovunque, si ha  $F_n = 0$  su tutti gli elementi della superficie  $S$ , di modo che  $\Psi = 0$ ; ne consegue che  $\eta_i = 0$ , cioè  $\eta_1 + \eta_2 = 0$  o,  $\eta_2 = -\eta_1$ , ciò che si doveva dimostrare. Se si collega M con la terra, l'intensità del campo deve essere nulla in tutto lo spazio tranne M, perché qualsiasi punto di questo spazio può essere considerato come appartenente a M; è sufficiente per questo modificare la forma di quest'ultimo mediante un'opportuna aggiunta di materiale conduttore, che non influisce sulle cariche  $\eta_1$  e  $\eta_2 = -\eta_1$ , né di conseguenza sulle forze che si esercitano esternamente alla superficie  $S_2$ .

Per comprendere il fenomeno dell'ombra elettrica sostituiamo la lastra MN (fig. 28) con un corpo cavo chiuso MNSRM, di cui la lastra MN fa parte. In questo caso, l'intensità di campo in P è nulla, come abbiamo visto. Ma se la piastra MN è grande, la carica sulla superficie interna della parte aggiunta MRSN, trovandosi lontana dallo spazio P, ha una debole azione sui punti di questo spazio, sicché togliendo la parte MRSN si modifica poco l'intensità del campo in P, che rimane quasi nullo.

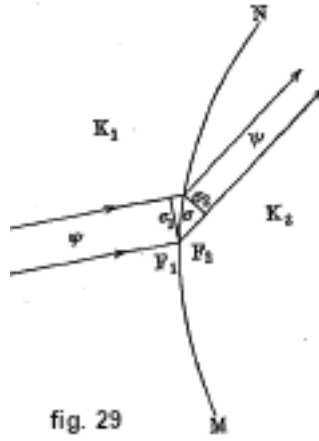


fig. 29

Occupiamoci ora di cosa accade quando si avvicina ad un corpo elettrizzato un dielettrico la cui costante  $K_2$  differisce dalla costante  $K_1$  del mezzo ambiente. Come sappiamo, il flusso di induzione  $\psi$  non varia, quando un tubo di induzione penetra da un mezzo in un altro; in prossimità della superficie MN (fig. 29) che separa i due mezzi, si ha quindi l'uguaglianza, vedi (29),

$$\psi = K_1 F_1 \sigma_1 = K_2 F_2 \sigma_2 \quad (1.0.96)$$

Ciò significa che la presenza di un dielettrico  $K$  produce, nelle intensità  $F_1$  e  $F_2$  e nelle direzioni delle linee di forza relative ai due mezzi, una modifica tale che in tutti i punti della superficie di separazione MN la condizione (33) è soddisfatta, o, che lo sono le condizioni (31) e (32,a). Ma la stessa modifica può essere prodotta anche dalla presenza di una certa carica sulla superficie MN, essendo la costante dielettrica allora uguale a  $K_1$  su entrambi i lati di questa superficie; in altri termini, questa carica equivale alla presenza di un dielettrico  $K_2$ . Poiché  $F_1, F_2, \sigma_1, \sigma_2$  non devono variare quando il dielettrico  $K_2$  è sostituito da una carica, è chiaro che dopo questa sostituzione il flusso di induzione sarà  $\psi = K_1 F_1 \sigma_1$  da un lato di MN,  $\psi' = K_2 F_2 \sigma_2$  dall'altro. Il flusso di induzione aumenta di

$$\psi' - \psi = K_1 F_2 \sigma_2 - K_1 F_1 \sigma_1$$

o, dalla (33), di

$$\psi' - \psi = K_1 F_2 \sigma_2 - K_1 F_1 \sigma_1 = (K_1 - K_2) F_2 \sigma_2 = \frac{K_1 - K_2}{K_2} \psi = -\frac{K_2 - k_1}{K_2} \psi \quad (1.0.97)$$

L'aumento del flusso, dalla (26,d) è  $4\pi\eta = 4\pi k\sigma$ , essendo  $\sigma$  un elemento della superficie MN e  $k$  la densità della carica cercata. Ne risulta che

$$k\sigma = -\frac{K_2 - k_1}{4\pi K_2} \psi = -\frac{K_2 - k_1}{4\pi K_2} K_1 F_1 \sigma_1 = -\frac{K_2 - k_1}{4\pi} F_2 \sigma_2 \quad (1.0.98)$$

L'effettiva determinazione della densità  $k$  mediante questa formula presenta in certi casi grosse difficoltà, perché  $k$  dipende da  $F_1$  o da  $F_2$ , cioè dall'intensità del campo parzialmente prodotto dalla carica la cui densità è  $k$ . È tuttavia importante sapere che la disomogeneità del mezzo su entrambi i lati della superficie MN equivale alla presenza di questa carica.

È possibile passare dai dielettrici ai conduttori, rendendo infinita la costante dielettrica. Per  $K_2 = \infty$  e  $\sigma = \sigma_1$ , (la componente tangenziale è nulla in un conduttore, e di conseguenza anche, secondo la (31,a), nello strato dielettrico contiguo a questo conduttore), la formula (33,b) dà

$$k = -\frac{K_1 F_1}{4\pi} \quad (1.0.99)$$

che è in accordo con la (24,a), perché si ha  $F_1 = -F$ . Alcuni autori pensano che quando si usa l'immagine A, bisogna considerare la grandezza  $k$  nella (33,c) come la densità della carica effettivamente esistente sulla superficie del conduttore, mentre la carica  $k\sigma$  alla separazione di due dielettrici, espressa dalla formula (33,b), denota una carica fittizia, la cui introduzione permette di non tener conto della variazione della costante dielettrica in diversi punti dello spazio.

Non sembra, inoltre, che una tale concezione sia molto utile. La teoria della *polarizzazione dei dielettrici* porta a risultati che consentono di considerare come reali sia le cariche sui conduttori che quelle sui dielettrici. Quando un dielettrico viene introdotto in un campo elettrico, si verifica, secondo questa teoria, una scomposizione della miscela neutra nelle molecole della sostanza dielettrica, disponendo le due elettricità in regioni opposte di queste molecole. Questa scomposizione avviene nella direzione delle linee di forza. Supponiamo che, per una certa parte ABCD (fig. 30) del dielettrico il campo sia uniforme; in ogni molecola  $m$  avviene allora una scomposizione dell'elettricità, le cariche positive essendo trasportate, in tutte le molecole, da un certo lato, le cariche negative dall'altro. Se si suppone che le linee di forza vadano nella direzione AB, si trova che sul lato BD deve esserci una carica di elettricità positiva, e su AC una carica di elettricità negativa. Quando il campo elettrico scompare, le cariche si ricombinano in tutte le molecole, e di conseguenza scompaiono anche le cariche sui lati AC e BD; non hanno, come si vede, l'invariabilità e l'immobilità, che caratterizzano le cariche ottenute, per sfregamento o trasporto diretto, sui dielettrici.

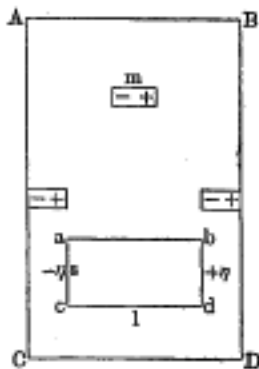


fig. 30

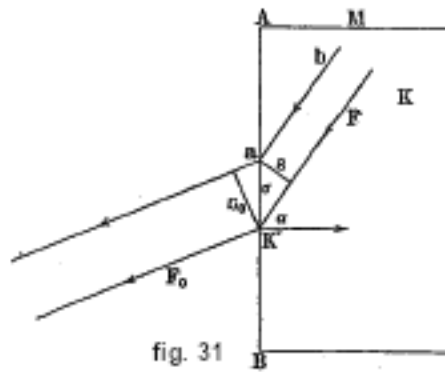


fig. 31

Ritagliamo un parallelepipedo rettangolare  $abcd$  avente per base  $s$ , per altezza  $l$  e per volume  $v = sl$ ; se lo si separasse realmente dal resto del dielettrico, su  $bd$  comparirebbe la carica  $\eta = k's$ , su  $ac$  la carica  $-\eta = -k's$ , dove  $k'$  è la densità superficiale. Il prodotto  $m = \eta l$  è detto il momento elettrico della parte ritagliata, e il momento  $\Pi$  dell'unità di volume la polarizzazione del dielettrico. Si ha

$$\Pi = \frac{m}{v} = \frac{\eta l}{v} = \frac{\eta l}{sl} = \frac{\eta}{s} = k' \quad (1.0.100)$$

*La polarizzazione di un dielettrico è misurata dalla densità della carica su una superficie ortogonale alle linee di forza.*

Quando la superficie AB del dielettrico (fig. 31) non è ortogonale alle linee di forza  $ab$  interne al dielettrico, ma forma con esse l'angolo  $90^\circ - \alpha$ , la densità  $k'$  su AB è  $k' \cos \alpha = \Pi \cos \alpha$ . Infatti, il teorema sull'invariabilità del flusso di induzione porta, se il dielettrico M è circondato dall'aria, all'uguaglianza  $KF_s = F_0 s_0$  (vedi fig. 31). Sostituendo anche il dielettrico M con l'aria, introducendo la carica di densità  $k'_1$ , si ottiene, a condizione che  $F$  e  $F_0$  non siano variati,

$$F_0 s_0 - F_s = 4\pi k'_1 \sigma$$

o

$$(K - 1) F s = 4\pi k'_1 \sigma$$

e quindi

$$k'_1 = \frac{(K-1)Fs}{4\pi} \cdot \frac{s}{\sigma} = \frac{K-1}{4\pi} F \cos \alpha \quad (1.0.101)$$

Se la superficie AB fosse ortogonale alle linee di forza, si avrebbe

$$k' = \Pi = \frac{K-1}{4\pi} F \quad (1.0.102)$$

si ha pertanto

$$k'_1 = k' \cos \alpha = \Pi \cos \alpha \quad (1.0.103)$$

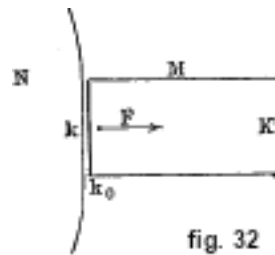
È facile dedurre la (33,e) dalla (33,b), tenendo presente che nelle figure 29 e 31 le linee di forza sono dirette in versi differenti. La polarizzazione  $\Pi$  del dielettrico è prodotta dalla forza elettrica  $F$ ; se si pone

$$\pi = \gamma F \quad (1.0.104)$$

il coefficiente  $\gamma$  si chiama la suscettività elettrica. Confrontando la (33,h) e la (33,f), si ottiene l'importante formula

$$K = 1 + 4\pi\gamma \quad (1.0.105)$$

che lega la suscettività elettrica e il potere induttivo  $K$  di un dielettrico.



Per l'aria, o più esattamente per il vuoto, si ha  $\gamma = 0$ . È molto istruttivo stabilire anche la formula (34), assumendo che il dielettrico M sia a contatto con il conduttore N (fig. 32); sia  $F$  l'intensità del campo immediatamente contro la superficie di contatto,  $k$  la densità della carica che si trova sulla superficie del conduttore,  $k_0$  la densità dell'elettrizzazione sulla superficie del dielettrico corrispondente alla polarizzazione prodotta dalla forza  $F$ .

Si ha

$$F = \frac{4\pi k}{K} \quad (1.0.106)$$

si veda la (24,a); introducendo la polarizzazione, si ottiene la densità apparente  $k - k_0$  e  $F = 4\pi(k - k_0)$ ; ma  $k_0 = \gamma F$ , di modo che

$$F = 4\pi(k - \gamma F)$$

da cui

$$F = \frac{4\pi k}{1 + 4\pi\gamma}$$

Se confrontiamo questa espressione alla (34,a), si trova la formula (34).

Essa ci permette ancora di stabilire un'altra importantissima relazione, che getta nuova luce sul significato fisico della grandezza  $K$ , oltre che su quello dell'induzione  $B$ . Consideriamo all'interno di un dielettrico polarizzato una cavità infinitamente piccola e indichiamo con  $F'$  l'intensità del campo all'interno di questa cavità. Per semplificare diremo che  $F'$  è l'intensità del campo all'interno del dielettrico. L'intensità  $F'$  dipende dalla forma della cavità; supponiamo inoltre che questa cavità abbia una forma determinata, che sia limitata da due piani paralleli

infinitamente vicini, perpendicolari alle linee di forza del campo  $F$ . Su questi piani si troveranno cariche, le cui densità sono  $k'$  e  $-k'$ , producendo in punto qualunque dello spazio vuoto una forza parallela a  $F$  e uguale a

$$2\pi k' - 2\pi (-k') = 4\pi k'$$

come si vede nella formula (22,a), nella quale, per un piano, si ha per simmetria  $F_{2,n} = -F_{1,n}$ . La forza cercata è quindi

$$F' = F + 4\pi k'$$

o, si vedano le (33,d,h) e (34)

$$F' = F + 4\pi\gamma F = F(1 + 4\pi\gamma) = KF$$

e di conseguenza

$$\frac{F'}{F} = K \quad (1.0.107)$$

La costante dielettrica (potere induttivo) che si potrebbe, per analogia con il termine usato nella teoria del magnetismo, chiamare permeabilità elettrica, è uguale al rapporto tra l'intensità del campo nel dielettrico e l'intensità del campo polarizzante esterno. Se si confronta la (34,a) con la (28,e) cioè con la formula  $B = KF$ , si vede che si ha

$$B = F' \quad (1.0.108)$$

*L'induzione  $B$  non è altro che l'intensità del campo, in una fenditura infinitamente stretta all'interno del dielettrico.*

Abbiamo già parlato della teoria di Clausius e Mossotti; si suppone, in essa, che vi siano nei dielettrici un gran numero di piccole particelle conduttrici immerse in una sostanza perfettamente isolante. Ci limiteremo ad indicare un unico risultato particolarmente interessante di questa teoria. Sia  $g$  il rapporto tra il volume  $v$  occupato dalle particelle conduttrici e il volume totale  $V$  del dielettrico; si ha

$$g = \frac{v}{V} \quad (1.0.109)$$

Si ottiene, in questo caso,

$$\gamma = \frac{3g}{4\pi(1-g)} \quad (1.0.110)$$

Portando questo valore nella (34), si ha

$$K = \frac{1+2g}{1-g} \quad (1.0.111)$$

da cui

$$g = \frac{K-1}{K+2} \quad (1.0.112)$$

Supponiamo che le particelle conduttrici siano le stesse molecole che costituiscono il dielettrico, e che il ruolo di sostanza non conduttrice sia svolto dal vuoto intermolecolare; sia  $d$  la densità della sostanza,  $D$  la densità delle molecole, cioè la massima densità limite che si otterrebbe se si comprimesse il dielettrico fino a occuparne solo il volume  $v$ . Si ha  $g := v : V = d : D$ ; di conseguenza la (35,c) dà

$$\frac{K-1}{(K+2)d} = \frac{1}{D} = \text{cost} \quad (1.0.113)$$

Sagnac (1907) ha stabilito in modo molto semplice la formula (35,b). Daremo, nel seguito (§ 10), una dimostrazione dovuta a H. Poincaré (1890).

Abbiamo indicato più volte che si ha  $K = n^2$ , dove  $n$  indica l'indice di rifrazione dei raggi di lunghezza d'onda molto grande; di conseguenza, secondo la (35,d),

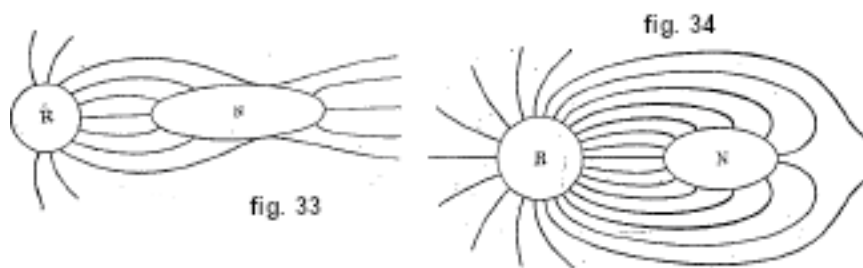
$$\frac{n^2 - 1}{(n^2 + 2)d} = \text{cost} \quad (1.0.114)$$

Abbiamo già considerato questa formula in dettaglio nello studio dell'energia radiante (Volume II).

L'influenza della polarizzazione dei dielettrici sui fenomeni di induzione è spiegabile nell'immagine A. Basti osservare che un dielettrico C (fig. 25), portato nel campo elettrico del corpo R, agisce come se la carica positiva  $+\eta$  fosse sulla faccia  $cd$ , la carica negativa  $-\eta$  sulla faccia  $ab$ . Naturalmente  $+\eta$  su  $cd$  aumenta la carica su N e  $-\eta$  su  $ab$  produce una nuova concentrazione della carica di R sul lato rivolto verso C e N. Si può facilmente spiegare in modo analogo l'esperimento di Faraday (fig. 26).

**Immagine B.** - I fenomeni di induzione che abbiamo considerato all'inizio di questo paragrafo si spiegano, nell'immagine B, in modo alquanto più semplice ed elegante che nell'immagine A. Quando un numero  $N$  di tubi unitari di tensione lasciano un corpo R (nell'immagine A, si dice che la carica  $\eta = N : 4\pi$  è portata da R), questo numero non varia, qualunque siano le variazioni che avvengono nel mezzo ambiente; solo la distribuzione di questi tubi attorno al corpo R, la loro direzione, ecc. può cambiare. Come abbiamo visto, le due estremità di un tubo corrispondono rispettivamente a cariche uguali, ma di segno opposto, intendendo con la parola carica la causa quantitativamente misurabile dei determinati fenomeni che si osservano; come abbiamo anche detto, esiste tra i tubi una forza laterale di pressione  $P$ , espressa dalle formule (32, k), e le estremità dei tubi hanno sulla superficie dei conduttori una perfetta mobilità.

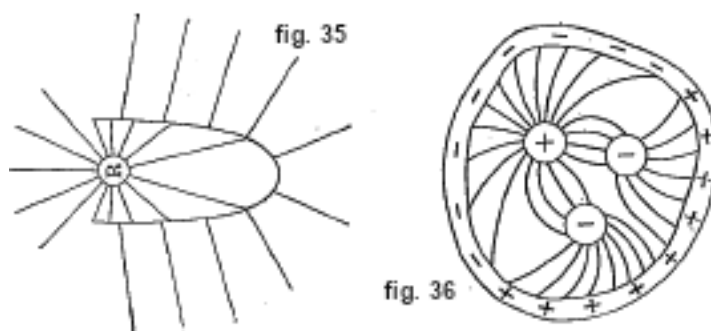
Se comprendiamo veramente queste idee, possiamo facilmente vedere cosa succede quando si introduce un conduttore N (fig. 33) nel campo elettrico del corpo R. Un tubo di tensione, che giace sulla superficie del corpo N, subisce una rottura quando si continua ad avvicinare N ad R, e le due estremità che si formano allora scorrono sulla superficie del corpo N fino a raggiungere una nuova posizione di equilibrio. Infine i tubi, e di conseguenza anche le linee di forza, sono distribuiti come mostrato in figura 33. Di ciò ci si può facilmente convincere, notando che le pressioni trasversali, alle quali i tubi erano sottoposti in assenza del conduttore N, scompaiono, per così dire, dallo spazio occupato dal corpo N. Si vede che, sul conduttore R, le estremità dei tubi passano in gran parte sul lato destro e si capisce subito perché si ottengono sul conduttore N cariche di nomi opposti, quantitativamente uguali. Quando si collega N con la terra, tutte le parti dei tubi che si erano separate per far posto al corpo N, si allontanano sotto l'influsso delle pressioni trasversali e si perderanno sull'enorme superficie della sfera terrestre. La figura 33 mostra che di conseguenza molti dei tubi, che prima erano interi, si avvicinano nuovamente a N per effetto delle pressioni trasversali e si rompono, fluendo a terra la parte che si allontana. Si ha definitivamente la distribuzione dei tubi rappresentata in figura 34; contemporaneamente, la carica del corpo R passa ancora più sul lato rivolto verso N.



Più R e N si avvicinano, più i tubi di tensione sono concentrati nell'intervallo tra questi corpi. Ma abbiamo visto che, secondo la formula (32,e), all'aumentare del numero di tubi che fuoriescono

da una data superficie, la tensione longitudinale in ciascun tubo, così come la pressione reciproca  $P$  tra i tubi, aumentano nello stesso rapporto. Si ha quindi alla fine una rottura dei tubi nel dielettrico, cioè una scomparsa della corrispondente tensione longitudinale nell'etere. È questo fenomeno che percepiamo nella scintilla elettrica; consiste in una trasformazione dell'energia potenziale di deformazione dell'etere in energia cinetica, che si manifesta, nella scintilla, sotto forma di energia termica, energia radiante, energia sonora ed energia di movimento dell'aria.

La spiegazione del teorema di Faraday è, in particolare, di grande semplicità. Se si introducono gradualmente, all'interno di un conduttore cavo, corpi la cui carica totale indicheremo con  $\eta$ , e si chiude infine l'apertura con un coperchio conduttore, tutti i tubi di tensione si rompono, disponendosi le estremità delle parti staccate sulla superficie esterna del corpo cavo, come mostrato in figura 35 per il corpo R. Quando il corpo R è interamente introdotto nel vaso e quest'ultimo chiuso da un coperchio, tutti i tubi di tensione si dividono in due parti: una parte va dal corpo R alla superficie interna del conduttore cavo, l'altra prende la sua origine sulla superficie esterna di quest'ultimo. Le cariche indotte sono naturalmente pari a  $\pm\eta$ . Se, all'interno del conduttore cavo, sono presenti più corpi elettrizzati in modo diverso (fig. 36), i tubi che collegano questi corpi tra loro e con il conduttore corrispondono a una carica totale nulla. È chiaro quindi che le estremità dei tubi, che si trovano sulla superficie interna del corpo cavo, corrispondono nell'insieme a una carica uguale alla carica totale dei corpi introdotti.

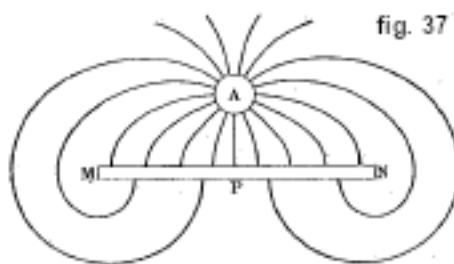


I tubi esterni hanno le loro estremità disposte sulla superficie esterna del conduttore cavo, esattamente come lo sarebbero in assenza dei corpi elettrizzati all'interno del conduttore, non raggiungendo l'esterno i tubi di tensione che da questi si diramano. Quando si collega il corpo cavo con la terra, tutti i tubi, che partono dalla superficie esterna di questo corpo, vanno a terra; l'intensità del campo esterno diventa ovviamente nulla. Quando si produce, all'interno di un conduttore cavo, per attrito ad esempio, l'elettrizzazione di due corpi, la somma delle cariche su di essi e sulla superficie interna del corpo cavo è nulla. Non un singolo tubo penetra nello spazio, e questo significa che l'intensità del campo in questo spazio è nulla.

Il fenomeno dell'ombra elettrica non richiede alcuna spiegazione speciale; quando la piastra MN (fig. 37) è messa a terra, i tubi di tensione vanno da A alla faccia più vicina della piastra MN e agli altri corpi circostanti e pochissimi raggiungono lo spazio P.

Quando si avvicina un dielettrico N ad un corpo elettrizzato R, i tubi di tensione che partono da R attraversano liberamente N. La polarizzazione di un dielettrico qui significa che i tubi di tensione si dividono in un numero considerevole di piccoli segmenti, ciascuno dei quali collega le superfici di due molecole conduttrici vicine.

L'immagine B porta subito alla conclusione che il dielettrico deve agire sui fenomeni di induzione, nei quali svolge solo il ruolo di mezzo intermediario, e non è sorprendente che le proprietà dei tubi di tensione nell'etere del dielettrico debbano dipendere dalla sostanza entro le molecole si trovano questi tubi. Quanto più deboli sono le tensioni longitudinali e le pressioni trasversali nei tubi, tanto più profondi questi tubi sono distribuiti nel dielettrico considerato.



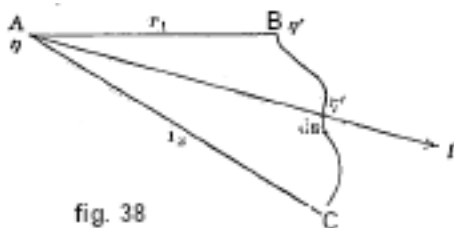
Il fenomeno al quale si riferisce la figura 24, è spiegato dal fatto che i tubi di tensione sono concentrati nella parte inferiore della sfera A; lo stesso è per la figura 25 e per l'esperimento di Faraday (fig. 26). Vediamo ora più chiaramente che diversi dielettrici devono possedere una diversa suscettibilità elettrica, che è correlata al potere induttivo  $R$  dalla formula (34).

La formula (34,a) evidenzia in particolare l'effetto della concentrazione dei dielettrici sui tubi di induzione che, nel vuoto, sono identici ai tubi di forza, e vedremo che a questo proposito  $K$  serve come misura del potere di concentrazione del dielettrico. Questo potere è tanto maggiore quanto più il dielettrico è permeabile per i tubi di induzione. Ora si comprende perché  $K$  è stata chiamata la permeabilità elettrica

Fermeremo qui la spiegazione dei fenomeni elettrostatici fondamentali desumibili dalle immagini A e B. Quanto detto sull'immagine A, ci permetterà di continuare la nostra esposizione ed in particolare di effettuare alcuni calcoli, partendo dalle concezioni fondamentali di questa immagine; come abbiamo osservato, la terminologia adottata da tempo e non ancora modificata oggi ci costringerà anche ad aderire in parte a questa immagine. Non sarà difficile passare attraverso il pensiero da questo all'immagine B; quando ciò avrà una particolare importanza, tradurremo anche i nostri risultati nel linguaggio di questa immagine B.

## 6. Il Potenziale elettrico

Abbiamo fatto conoscere gli elementi della teoria del potenziale e la sua applicazione alla gravitazione universale; lo abbiamo utilizzato, ad esempio, per calcolare il lavoro di formazione e progressiva condensazione di una sfera e questo ci ha permesso di risolvere l'importante problema della produzione dell'energia termica del Sole, questa sorgente primaria di quasi tutte le manifestazioni di energia sulla superficie della Terra. La profonda analogia che esiste tra la legge di attrazione universale e la legge di Coulomb ci porta ad applicare la teoria del potenziale anche ai fenomeni elettrostatici. Ci sembra necessario ripetere qui tutto ciò di cui avremo bisogno in seguito; lo faremo, non solo per comodità del lettore, ma anche perché esiste, tra il potenziale e il potenziale elettrico, una differenza importante derivante dall'esistenza tra le masse elettriche di forze attrattive e repulsive, queste ultime essendo considerate come forze positive.



Supponiamo innanzitutto di avere un mezzo omogeneo, la cui costante dielettrica è  $K$ , e che nel punto A si trova la quantità di elettricità  $q$ ; calcoliamo il lavoro  $R$  delle forze elettriche, quando la quantità di elettricità  $q'$  è trasportata da B a C lungo un qualsiasi percorso. Sia



$AB = r_1$ ,  $AC = r_2$ . Scomponiamo il cammino BC in elementi  $ds$ , a ciascuno dei quali corrisponde il lavoro elementare

$$dR = f ds \cos(f, ds)$$

si ha  $f = \frac{\eta\eta'}{Kr^2}$  e  $ds \cos(f, ds) = dr$ . Sostituendo e integrando, si trova per il lavoro cercato

$$R = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\eta\eta'}{Kr^2} dr = \frac{\eta\eta'}{K} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \eta' \left( \frac{\eta}{Kr_1} - \frac{\eta}{Kr_2} \right) \quad (1.0.1)$$

Si può facilmente verificare che la formula precedente è valida, qualunque siano i segni delle grandezze  $\eta, \eta'$ : se  $r_2 > r_1$ , e se  $\eta$  e  $\eta'$  hanno segni diversi, si ha  $R < 0$ ; in questo caso, infatti, il lavoro della forza elettrica attrattiva deve essere negativo. Il lavoro  $R$  è indipendente dalla forma del cammino percorso, come nel caso delle forze centrali, tra le quali vanno ovviamente comprese le forze elettriche considerate dal punto di vista in cui ci collochiamo nell'immagine A. Se si pone  $r_2 = \infty$  e  $r_1 = r$ , si trova, per l'energia potenziale  $W = R_\infty$  di due quantità di elettricità  $\eta, \eta'$ , che distano  $r$ , l'espressione

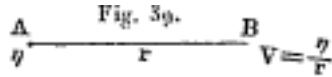
$$R_\infty = W = \frac{\eta\eta'}{Kr} \quad (1.0.2)$$

Per  $\eta' = 1$ , si ottiene il lavoro del trasporto dell'unità di quantità di elettricità

$$R_1 = \frac{\eta}{Kr_1} - \frac{\eta}{Kr_2} \quad (1.0.3)$$

Se  $r_2 = \infty$  e  $r_1 = r$ , si trova

$$R_{1,\infty} = \frac{\eta}{Kr} \quad (1.0.4)$$



Supponiamo che in A (fig. 39), alla distanza  $r$  dal punto geometrico B, si trova la quantità di elettricità  $\eta$ . Converremo di chiamare la grandezza

$$V = \frac{\eta}{Kr} \quad (1.0.5)$$

il potenziale del punto B o il potenziale della quantità di elettricità  $\eta$  nel punto B (entrambe le espressioni sono ugualmente in uso); l'elettricità  $\eta$  in A è, per così dire, la causa dell'esistenza di un potenziale nel punto B. Si possono ora scrivere le ultime formule nel modo seguente

$$\begin{cases} R &= \eta' (V_1 - V_2) \\ W &= R_\infty = \eta' V \\ R_1 &= V_1 - V_2 \\ R_{1,\infty} &= V \end{cases} \quad (1.0.6)$$

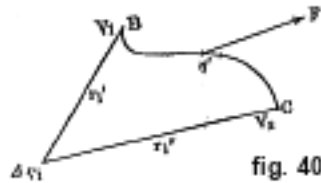
Non tradurremo in linguaggio corrente ciò che queste equazioni esprimono, perché le ritroveremo in una forma ancora più generale.

Consideriamo masse elettriche qualsiasi, cioè un sistema di corpi elettrizzati in modi diversi. Per maggiore generalità, supponiamo che queste masse siano in parte strati superficiali di densità  $k$ , in parte masse la cui densità di volume è  $\rho$ . Scomponiamole in elementi  $d\eta$  e sia  $r$  la distanza di uno di questi elementi da un certo punto B. *Chiameremo la somma dei potenziali prodotti*

in  $B$  dalle diverse masse elementari, il potenziale del punto  $B$  o il potenziale di tutte le masse elettriche nel punto  $B$ . Se si indica questa grandezza con  $V$ , si ha

$$V = \frac{1}{K} \int \frac{d\eta}{r} = \frac{1}{K} \iint \frac{kds}{r} + \frac{1}{K} \iiint \frac{\rho dv}{r} \quad (1.0.7)$$

essendo  $ds$  e  $dv$  rispettivamente elementi della superficie e del volume,  $K$  la costante dielettrica nel punto  $B$ .



Calcoliamo il lavoro  $R$  che viene fatto dalle forze elettriche, quando la quantità di elettricità  $\eta'$  passa da un certo punto  $B$  (fig. 40) ad un altro punto  $C$ , essendo i due punti situati nel campo elettrico delle masse il cui potenziale è determinato dalla formula (37,b); siano  $V_1$  e  $V_2$  i potenziali nei punti  $B$  e  $C$ . Scomponiamo nuovamente tutte le masse elettriche in elementi, che ora designeremo, per semplificare la nostra esposizione, con  $\Delta\eta_1, \Delta\eta_2, \Delta\eta_3, \dots, \Delta\eta_i$ , ecc. Sia  $r_i'$  la distanza dell'elemento  $\Delta\eta_i$  dal punto  $B$ ,  $r_i''$  la distanza dello stesso elemento dal punto  $C$ ; in questo caso si ha

$$V_1 = \sum \frac{\Delta\eta_i}{Kr_i'} \quad V_2 = \sum \frac{\Delta\eta_i}{Kr_i''}$$

I segni di sommatoria si estendono a tutti gli elementi in cui abbiamo scomposto la carica totale. La forza  $f$  che, in qualsiasi punto del percorso  $BC$ , agisce su  $\eta'$ , è la risultante di tutte le forze  $f_i$  esercitate dagli elementi  $\Delta\eta_i$  su  $\eta'$ . Se  $\eta'$  si sposta di una piccolissima parte del cammino, la forza  $f$  compie un lavoro  $\Delta R$  che, da un noto teorema è uguale alla somma dei lavori  $\Delta R_i$  compiuti dalle forze  $f_i$  dovute agli elementi  $\Delta\eta_i$ . Ciò si applica a tutti gli elementi del cammino  $BC$ ; il lavoro totale  $R$  è quindi uguale alla somma dei lavori  $R_i$  effettuati dalle forze  $f_i$  lungo l'intera lunghezza del cammino  $BC$

$$R = \sum R_i \quad (1.0.8)$$

Ma il lavoro  $R_i$  della forza  $f_i$  dovuto a una quantità elementare di elettricità  $\Delta\eta_i$  è, dalla (36)

$$R_i = \eta_i' \left( \frac{\Delta\eta_i}{Kr_i'} - \frac{\Delta\eta_i}{Kr_i''} \right)$$

Se si sostituisce nella (37,c), si trova

$$R = \eta_i' \left( \sum \frac{\Delta\eta_i}{Kr_i'} - \sum \frac{\Delta\eta_i}{Kr_i''} \right)$$

cioè

$$R = \eta_i' (V_1 - V_2) \quad (1.0.9)$$

*Il lavoro fatto dalle forze elettriche, per il trasporto di una certa quantità di elettricità nel campo elettrico, è uguale al prodotto di questa quantità per la differenza dei potenziali  $V_1$  all'origine e  $V_2$  alla fine del cammino.* Ci sono casi in cui forze esterne spostano un corpo elettrizzato, un conduttore o un dielettrico (una piccola sfera, per esempio) da un punto a un altro. È evidente che qui *il lavoro delle forze esterne è misurato dal prodotto della quantità di elettricità trasportata e della differenza dei potenziali  $V_2$  all'estremità e  $V_1$  all'origine del cammino*, cioè che è uguale a  $\eta' (V_2 - V_1)$ . La formula (38) mostra che il lavoro  $R$  è indipendente dalla forma

del percorso lungo il quale  $\eta'$  passa da B a C. Ci si può rendere conto che la formula (38) rimane valida, qualunque siano i rispettivi segni della carica trasportata e di quella agente.

*Quando  $\eta'$  ritorna all'origine del cammino, il lavoro totale delle forze elettriche è zero.*

Se si misurano le distanze  $r$  in centimetri e tutte le quantità di elettricità in unità el. st. C.G.S., il lavoro  $R$  è espresso in erg ( $10^6 \text{ erg} = 1 \text{ megaerg} = 0,0102 \text{ kgm}$ ). Supponiamo che il punto C si allontani a una distanza infinita dalle masse elettriche considerate. In questo caso si ha  $V_2 = 0$ ; ponendo  $V_1 = V$ , si ottiene, per il lavoro delle forze elettriche, quando  $\eta'$ , partendo da un punto il cui potenziale è  $V$ , va all'infinito seguendo un percorso qualunque, o, il che equivale, per il lavoro delle forze esterne nel trasporto di  $\eta'_1$ , lungo un cammino qualsiasi, dall'infinito in un punto il cui potenziale è  $V$ , l'espressione

$$R_\infty = V\eta' \quad (1.0.10)$$

Ponendo  $\eta' = 1$ , viene

$$R_1 = V_1 - V_2 \quad (1.0.11)$$

$$R_{1,\infty} = V \quad (1.0.12)$$

*La differenza  $V_1 - V_2$  di potenziale in due punti è uguale al lavoro delle forze elettriche, nel passaggio dell'unità di quantità di elettricità ( $\eta = 1$ ), per un qualsiasi percorso, dal primo punto ( $V_1$ ) al secondo ( $V_2$ ), o uguale al lavoro delle forze esterne, nel trasporto di  $\eta = 1$  dal secondo punto ( $V_2$ ) al primo ( $V_1$ ).*

L'ultima formula (38,c) ci svela il significato meccanico della grandezza  $V$ , vedi (37,b): *Il potenziale di un punto all'interno di un campo elettrico è uguale al lavoro delle forze elettriche, nel passaggio, lungo qualsiasi percorso, dell'unità di quantità di elettricità ( $\eta = 1$ ) da questo punto all'infinito, o uguale al lavoro delle forze esterne, nel trasporto di  $\eta = 1$  dall'infinito a questo punto.*

Il potenziale in un punto varia con la posizione del punto; è una funzione punto, cioè una funzione delle coordinate del punto a cui si riferisce. Se queste coordinate sono  $x, y, z$ , si può scrivere

$$V = \varphi(x, y, z) \quad (1.0.13)$$

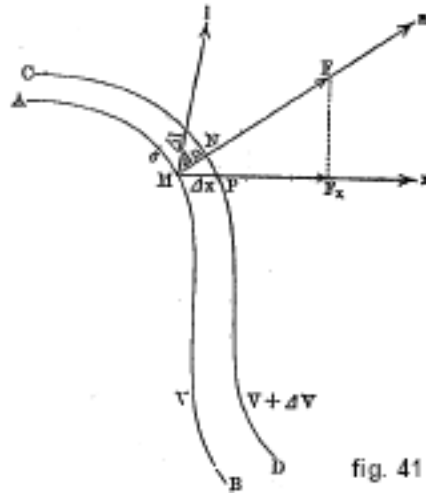
La formula (37,b) mostra che in presenza di corpi carichi di elettricità di nomi opposti, devono esserci punti a una distanza finita nei quali  $V = 0$ , così come punti con potenziale negativo; non è così nella teoria del potenziale dell'attrazione universale. Per distinguerla dal potenziale di un conduttore che considereremo più avanti, la quantità  $V$  è spesso chiamata funzione potenziale nel punto B.

Il luogo geometrico dei punti, dove la funzione potenziale (37,b) ha uno stesso valore, è una certa superficie detta *superficie di livello della funzione potenziale*. Per ogni punto dello spazio passa una di queste superfici, la cui equazione è

$$V = \varphi(x, y, z) = \text{cost} \quad (1.0.14)$$

Si può dimostrare che  $V$  è una funzione uniforme, continua e finita in tutti i punti dello spazio.

Sia AB (fig. 41) la superficie di livello passante per un punto M, e  $F$  la forza, cioè l'intensità del campo nel punto M. Se la quantità di elettricità  $\eta'$  è concentrata in M e se si sposta questa quantità di elettricità in qualsiasi direzione sulla superficie AB della piccola quantità  $\sigma$ , il lavoro  $R$  della forza  $F$  è nullo secondo la (38), poiché  $V_1 = V_2 = V$ . Ne consegue che la forza  $F$  è perpendicolare a tutte le direzioni  $\sigma$  sulla superficie; in altre parole, la forza  $F$  è diretta come la normale  $n$  a questa superficie.



La forza elettrica (intensità di campo) è diretta, in ogni punto dello spazio, lungo la normale alla superficie di livello della funzione potenziale che passa per questo punto.

Sia CD una superficie di livello vicina ad AB,  $V + \Delta V$  il valore del potenziale su tale superficie,  $F_m$  il valore medio della forza nei punti del segmento  $MN = \Delta n$  della normale  $n$  ad AB. Quando la l'unità di quantità di elettricità si sposta da M a N, il lavoro  $R$  della forza elettrica è  $R = F_m \Delta n$ ; ma, per la (38,b), si ha ( $V_1 = V$ ), ( $V_2 = V + \Delta V$ )

$$R = F_m \Delta n = V - (V + \Delta V) = -\Delta V$$

se ne deduce

$$F_m = -\frac{\Delta V}{\Delta n}$$

Se  $\Delta n$  è infinitamente piccolo, si ottiene

$$F = -\lim \frac{\Delta V}{\Delta n} = -\frac{\partial V}{\partial n} \quad (1.0.15)$$

La grandezza  $\frac{\partial V}{\partial n}$  è la derivata della funzione  $V$  rispetto alla direzione  $n$ , o più semplicemente nel caso attuale, la derivata lungo la normale. Come abbiamo detto,  $V$  è una funzione del punto, ad esempio una funzione di  $x, y, z$ , vedi (39). Si consideri un nuovo sistema di coordinate  $\xi, \eta, \zeta$ , tale che l'asse  $\xi$  abbia la direzione della normale  $n$ ;  $V$  assume allora la forma di una certa funzione e la derivata  $\frac{\partial V}{\partial n}$  è identica alla derivata  $\frac{\partial V}{\partial \xi}$ . Si può anche spiegare questa nozione di derivata lungo una direzione nel modo seguente: tracciamo  $Mx$  parallela all'asse  $x$ ; allora  $MP = \Delta x$  essendo un incremento della variabile  $x$  che produce l'incremento  $\Delta V$  della funzione  $V$ , si ha:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \lim \frac{\Delta V}{\Delta x} = \lim \left( \frac{\Delta V}{\Delta n} \cdot \frac{\Delta n}{\Delta x} \right) = \lim \frac{\Delta V}{\Delta n} \cdot \lim \frac{\Delta n}{\Delta x} = \frac{\partial V}{\partial n} \cdot \lim \frac{\Delta n}{\Delta x}$$

Ma al limite l'angolo MNP diventa uguale a una retta, e pertanto  $\lim \frac{\Delta n}{\Delta x} = \cos NMP = \cos(n, x)$ ; si ha quindi

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial n} \cos(n, x) \quad (1.0.16)$$

Si ottiene pure

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial n} \cos(n, y) \quad \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial n} \cos(n, z) \quad (1.0.17)$$

Queste ultime formule danno

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial n} &= \frac{\partial V}{\partial x} \cos(n, x) + \frac{\partial V}{\partial y} \cos(n, y) + \frac{\partial V}{\partial z} \cos(n, z) \\ \left( \frac{\partial V}{\partial n} \right)^2 &= \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \end{cases} \quad (1.0.18)$$

L'asse  $x$  può essere posto lungo una qualsiasi direzione  $l$  (fig. 41), allora si ha in una forma generale della (39,e)

$$\frac{\partial V}{\partial l} = \frac{\partial V}{\partial n} \cos(n, l) \quad (1.0.19)$$

o  $\cos(n, l) = \cos(n, x) \cos(l, x) + \cos(n, y) \cos(l, y) + \cos(n, z) \cos(l, z)$ ; si ha quindi, mediante le (39,c,d)

$$\frac{\partial V}{\partial l} = \frac{\partial V}{\partial x} \cos(l, x) + \frac{\partial V}{\partial y} \cos(l, y) + \frac{\partial V}{\partial z} \cos(l, z) \quad (1.0.20)$$

Le formule (39,c), (39,d), (39,e) mostrano che il vettore  $\frac{\partial V}{\partial n}$  è la somma geometrica dei vettori  $\frac{\partial V}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial V}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial V}{\partial z}$ . Spiegato il significato della derivata che entra nell'equazione (39,b), possiamo dire:

*L'intensità del campo in un dato punto è uguale alla derivata cambiata di segno della funzione potenziale, lungo la normale alla superficie di livello passante per questo punto.* La forza  $f$  che agisce sulla quantità  $\eta'$  nel punto considerato è

$$f = -\eta' \frac{\partial V}{\partial n} \quad (1.0.21)$$

Il segno  $-$  nei secondi membri delle (39,b) e (40) indica che le forze  $F$  e  $f$ , che agiscono sull'elettricità positiva, sono dirette dalla parte dove la funzione potenziale  $V$  decresce; quando  $V$  è negativo, anche  $F$  e  $f$  sono dirette dalla parte di  $V$  decrescente (ma crescente in valore assoluto). La componente  $f_l$  della forza  $f$  lungo la direzione arbitraria  $l$  è

$$f \cos(f, l) = f \cos(n, l) = -\eta' \frac{\partial V}{\partial n} \cos(n, l)$$

o, si veda la (39,f)

$$f_l = -\eta' \frac{\partial V}{\partial l} \quad (1.0.22)$$

Si ha, in particolare

$$f_x = -\eta' \frac{\partial V}{\partial x} \quad f_y = -\eta' \frac{\partial V}{\partial y} \quad f_z = -\eta' \frac{\partial V}{\partial z} \quad (1.0.23)$$

La proiezione dell'intensità  $F$  del campo sulla direzione  $l$  è

$$F_l = -\frac{\partial V}{\partial l} \quad (1.0.24)$$

Se si introducono le vecchie notazioni  $F_x = X$ ,  $F_y = Y$ ,  $F_z = Z$ , si ottiene

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad Y = \frac{\partial V}{\partial y} \quad Z = \frac{\partial V}{\partial z} \quad (1.0.25)$$

si deducono le equazioni estremamente importanti

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y} \\ \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial z} \\ \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} \end{array} \right. \quad (1.0.26)$$

Si consideri la famiglia di superfici la cui equazione è  $\psi(x, y, z) = C$ , dove  $C$ , che è una costante per una data superficie, varia continuamente da una superficie all'altra. Si può, in generale, tracciare per ogni punto dello spazio una curva che incontri queste superfici ad angolo retto, cioè tale che in ogni punto la tangente alla curva sia normale alla superficie passante per questo punto. Tali curve sono chiamate traiettorie ortogonali di superfici  $\psi(x, y, z) = C$ .

Come abbiamo visto, la forza che agisce in un punto del campo elettrico è normale alla superficie di livello  $V = \text{cost}$  che passa per questo punto. Se si ricorda che la stessa forza è

tangente alle linee di forza, si ottiene la seguente importante proposizione: *le linee di forza sono le traiettorie ortogonali delle superfici di livello della funzione potenziale.*

Siamo partiti, nello stabilire tutte le formule di questo paragrafo, dalla formula (11), che si riferisce ad un mezzo omogeneo; questa formula ci ha portato all'espressione (37,b) per il potenziale  $V$  in un punto e alle formule (38,a), (38,b), (38,c) che mettono in relazione il lavoro con la funzione  $V$ .

Passiamo al caso di mezzo non omogeneo. Sappiamo allora che le forze, che agiscono nei diversi punti dello spazio, possono essere ottenute aggiungendo alle cariche date certe cariche complementari, distribuite sulle superfici separatrici delle parti del mezzo che sono omogenee. La densità  $k$  di una carica complementare è determinata dalla formula (33,b). Se dunque si forma la funzione potenziale  $V$  di tutte le cariche date e delle cariche complementari, tale funzione  $V$  deve avere tutte le proprietà che la funzione potenziale possiede in un mezzo omogeneo e che sono espresse dalle formule stabilite nel presente paragrafo. L'espressione generale di  $V$ , nel caso di due mezzi le cui costanti dielettriche sono  $K_1, K_2$  e nelle quali sono distribuite le cariche  $\eta$ , ha la seguente forma:

$$V = \int \frac{d\eta}{Kr} + \int \frac{k d\sigma}{r} \quad (1.0.27)$$

essendo  $d\sigma$  l'elemento della superficie di separazione dei due mezzi e  $K$  quello delle quantità  $K_1, K_2$  che si scelto, nel calcolo della densità  $k$ , come relativo a tutti i punti dello spazio.

Possiamo ora introdurre la funzione potenziale  $V$  in alcune delle formule stabilite nel § 4. Occupiamoci dapprima della formula (19). La grandezza  $F_n$  è la componente della forza elettrica (intensità di campo) lungo la direzione della normale  $n$  all'elemento  $ds$  della superficie arbitraria considerata. Dalla formula (40,d), dobbiamo porre  $F_n = -\frac{\partial V}{\partial n}$  in modo che si ha

$$\int K \frac{\partial V}{\partial n} ds = -4\pi\eta_i - 2\pi\bar{\eta} \quad (1.0.28)$$

Non bisogna perdere di vista che la grandezza  $\frac{\partial V}{\partial n}$ , presente in questa relazione, non è identica alla grandezza  $\frac{\partial V}{\partial n}$  che si incontra nelle formule (39,b,c,d,e,f) e (40); in quest'ultimo caso,  $n$  è la normale alla superficie di livello della funzione potenziale, mentre  $\frac{\partial V}{\partial n}$  rappresenta la maggiore di tutte le derivate della funzione  $V$  lungo tutte le direzioni possibili; nella (41),  $n$  è la normale a una superficie in generale arbitraria. In un dielettrico omogeneo, abbiamo

$$\int \frac{\partial V}{\partial n} ds = -\frac{4\pi\eta_i}{K} - \frac{2\pi\bar{\eta}}{K} \quad (1.0.29)$$

L'equazione (20) diviene

$$\frac{\partial \left( K \frac{\partial V}{\partial x} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left( K \frac{\partial V}{\partial y} \right)}{\partial y} + \frac{\partial \left( K \frac{\partial V}{\partial z} \right)}{\partial z} = -4\pi\rho \quad (1.0.30)$$

dove  $\rho$  indica la densità di volume; se il dielettrico è omogeneo, si ha:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{4\pi}{K}\rho \quad (1.0.31)$$

A parte le massa che hanno una densità di volume, la (41,b) si riduce a

$$\frac{\partial \left( K \frac{\partial V}{\partial x} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left( K \frac{\partial V}{\partial y} \right)}{\partial y} + \frac{\partial \left( K \frac{\partial V}{\partial z} \right)}{\partial z} = 0 \quad (1.0.32)$$

e, in un dielettrico omogeneo a

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (1.0.33)$$

Questa equazione è identica a quella che la temperatura deve soddisfare in un equilibrio termico; da altri punti di vista ancora, c'è un'analogia tra la temperatura e la funzione potenziale, come vedremo più avanti.

Consideriamo la relazione (21), nella quale  $k$  indica la densità superficiale sulla superficie  $S$  che separa due dielettrici di costanti  $K_1, K_2$ ,  $n$  la normale a  $S$  dalla parte del dielettrico  $K_1$ . Siano  $V_1, V_2$  i valori della funzione potenziale sui due lati della superficie  $S$ ; si ha  $V_1 = V_2$  sulla superficie stessa, perché  $V$  è una funzione continua. La relazione (21) ci dà

$$K_1 \frac{\partial V_1}{\partial n} - K_2 \frac{\partial V_2}{\partial n} = -4\pi k \quad (1.0.34)$$

Se la superficie  $S$  si trova in un mezzo omogeneo, si ha

$$\frac{\partial V_1}{\partial n} - \frac{\partial V_2}{\partial n} = -\frac{4\pi}{K} k \quad (1.0.35)$$

Abbiamo stabilito le equazioni generali più importanti alle quali soddisfa la funzione potenziale  $V$ ; prima di passare alle applicazioni particolari, consideriamo la questione dell'unità, per il potenziale o più esattamente per la funzione potenziale. Le formule (37), (38,c) e (38) portano alle seguenti definizioni dell'unità assoluta di potenziale (ciò che si riferisce all'unità el. st. C.G.S. è stato messo tra parentesi).

*Il potenziale in un punto è uguale all'unità el. st. assoluta (el. unit st. C.G.S.) di potenziale:*

1. Se questo punto è nell'aria a all'unità di distanza (1 cm) da un altro punto in cui è posizionata l'unità el. st. (unità el. st. C.G.S.) di quantità di elettricità.

2. Se nel passaggio dell'unità elettrica. st. (unità el. st. C.G.S.) di quantità di elettricità dal punto considerato all'infinito, le forze elettriche compiono l'unità di lavoro assoluta (1 erg di lavoro) oppure se le forze esterne compiono lo stesso lavoro nel trasporto inverso.

Inoltre la differenza dei potenziali in due punti è pari all'unità el. st. se, nel trasporto dell'unità elettrica. st. (el. st. C.G.S.) di quantità di elettricità dal primo punto (al potenziale più alto) al secondo, l'unità assoluta di lavoro (1 erg di lavoro) è svolta dalle forze elettriche, o se, nel trasporto inverso, lo stesso lavoro è svolto da forze esterne.

L'equazione dimensionale dell'unità di potenziale è, vedi (37), e (13,a)

$$[V] = \frac{[\eta]}{[K] L} = \frac{[K]^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1}}{[K] L} = [K]^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1} \quad (1.0.36)$$

Il prodotto  $V\eta$  ha equazione dimensionale

$$[V\eta] = [V] [\eta] = [K]^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1} \cdot [K]^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1} = M L^2 T^{-2}$$

cioè l'equazione dimensionale del lavoro, così come deve essere dalla (38).

In pratica, si usa un'unità di potenziale, o analogamente, un'unità di differenza di potenziale, che ha ricevuto il nome di *volt* e che è definita dalla seguente uguaglianza:

$$1 \text{ volt} = \frac{1}{300} \text{ un. el. st. CGS di potenziale} \quad (1.0.37)$$

Quando la differenza di potenziale in due punti A e B è uguale a 1 volt e quando un'unità el. st. C.G.S. di quantità di elettricità passa da A a B, si trova compiuta un lavoro di  $1/300$  di erg. Se 1 coulomb passa da A a B, si compie un lavoro  $R$  che si potrebbe chiamare *volt - coulomb*; si ha

$$R = \frac{1}{300} \cdot 3 \cdot 10^9 \text{ erg} = 10^7 \text{ erg} = 10 \text{ megaerg} = 1 \text{ joule} \quad (1.0.38)$$

1 volt - coulomb equivale a 1 joule = 0,102 kgm = 0,2 piccole calorie. Vediamo apparire qui, per la prima volta, il motivo per cui è stata introdotta nella scienza l'unità di lavoro o energia,

che abbiamo già spesso utilizzato nei Volumi I e III e che è stata denominata il joule. Affinché 1 *coulomb* fluisca in ogni secondo da A a B, serve una sorgente di energia (motore) la cui potenza sia 1 *watt* =  $\frac{1}{736}$  cavalli.

Applichiamo ora le formule generali che abbiamo ottenuto ai *conduttori*, nei quali l'elettricità possiede una mobilità perfetta, e cerchiamo dapprima qual è la direzione del movimento dell'elettricità. Abbiamo visto che una forza che agisce sull'elettricità positiva è diretta verso il lato dove il potenziale diminuisce. *Ne concludiamo che l'elettricità positiva fluisce sempre da luoghi in cui il potenziale è maggiore a quelli in cui è minore*; l'elettricità negativa scorre nella direzione opposta. Anche la formula (38) conduce alla stessa conclusione, poiché il lavoro  $R$  delle forze elettriche, in un movimento compiuto sotto la loro azione, non può ovviamente essere che una quantità positiva. È molto importante notare che il flusso di elettricità nella direzione indicata non solo è possibile, ma deve necessariamente avvenire nella sostanza conduttrice, quando la forza elettrica non è nulla. Come abbiamo visto, il l'equilibrio dell'elettricità sui conduttori è possibile solo a condizione che l'intensità del campo sia nulla in tutti i punti della sostanza conduttrice e che la forza abbia in tutti i punti della superficie la direzione della normale. Abbiamo mostrato come queste condizioni e la legge di Coulomb portino a stabilire che l'elettricità può essere trovata solo sulla superficie dei conduttori.

La condizione  $F = 0$ , e di conseguenza  $F_l = 0$ , porta, secondo la (40,c) all'equazione fondamentale

$$V = \text{cost} \quad (1.0.39)$$

La funzione potenziale ha lo stesso valore in tutti i punti di un conduttore: occorre tener conto, nella determinazione di tale valore mediante la formula (37,b), di tutte le quantità di elettricità presenti, e non solo di quelle che sono sulla superficie del conduttore considerato. Il valore costante di  $V$  è chiamato *potenziale del conduttore*; si dice che un conduttore è portato o elettrizzato (caricato) a un certo potenziale.

*La superficie stessa di un conduttore è una superficie di livello della funzione potenziale*; in tutti i punti della superficie esterna di questo conduttore, la forza è quindi diretta lungo la normale. Vediamo così che delle due precedenti condizioni per l'equilibrio dell'elettricità sui conduttori, la seconda è una diretta conseguenza della prima. La condizione analitica dell'equilibrio dell'elettricità su un conduttore è quindi esaurita nella (44).

Il potenziale esterno e la densità  $k$  dell'elettricità sono correlati dalla seguente relazione, vedi (24,a):

$$\frac{\partial V}{\partial n} = -\frac{4\pi}{K}k \quad (1.0.40)$$

e nell'aria

$$\frac{\partial V}{\partial n} = -4\pi k \quad (1.0.41)$$

dove  $n$  è qui la normale alla superficie di livello della funzione  $V$ , di modo che  $\frac{\partial V}{\partial n}$  ha lo stesso significato come nelle (39,b) e (39,e).

Quando sono collegati due conduttori (un altro conduttore è inteso come un filo metallico, ad esempio), che sono a potenziali diversi, l'elettricità positiva fluisce dal conduttore il cui potenziale è più alto verso il conduttore il cui potenziale è più basso. È necessario, per l'equilibrio elettrico, che tutti i conduttori collegati tra loro siano allo stesso potenziale. Queste proprietà del potenziale dei conduttori sono analoghe alle proprietà della temperatura nei corpi collegati da conduttori di calore.

Per calcolare il vero potenziale di un corpo, bisognerebbe considerare tutte le cariche, qualunque sia la loro situazione, la cui azione non è nulla sui punti di questo corpo, ad esempio le cariche elettriche diffuse sulla superficie della Terra, le cariche cosmiche (sul Sole, sulla Luna, ecc.). La distribuzione di queste cariche ci è sconosciuta, e di conseguenza non possiamo determinare i reali potenziali dei conduttori, ma solo le differenze di potenziale dei vari conduttori, il potenziale



di qualsiasi determinato corpo essendo assunto convenzionalmente come uguale a zero, e si conviene, in effetti, di prendere uguale a zero il potenziale della sfera terrestre. Il potenziale di un conduttore è una quantità positiva o negativa, a seconda che l'elettricità positiva fluisca dal conduttore verso terra, o viceversa, quando sono collegati tra loro. *Qualsiasi conduttore messo a terra è a potenziale zero.* Da quanto detto della direzione del flusso di elettricità positiva e delle condizioni di equilibrio elettrico in più conduttori collegati tra loro, si vede che il potenziale  $V$  di un conduttore può misurare il grado di elettrizzazione di tale conduttore. Il potenziale di un conduttore non deve essere confuso con la sua carica; due conduttori collegati tra loro, uno grande e l'altro piccolo, hanno cariche molto diverse, ma tuttavia potenziale uguale. Un elettroscopio, posto in comunicazione con un conduttore elettrizzato, si elettrizza ad un potenziale pari a quello di questo conduttore. Ecco perché le indicazioni di un elettroscopio non dipendono dal punto del conduttore al quale è collegato. Si riconosce facilmente che esiste una profonda analogia tra il potenziale, che misura il grado di elettrizzazione, e la temperatura, che misura il grado di riscaldamento di un corpo.

Consideriamo un conduttore  $M$  che, per qualsiasi processo, è mantenuto ad un potenziale  $V$  invariabile, in modo che anche qualsiasi altro conduttore posto in comunicazione con esso si trova allo stesso potenziale  $V$ . Chiameremo tale conduttore  $M$  una sorgente di elettricità; tali sono, come insegna la fisica elementare, il conduttore di una macchina elettrica in permanente stato di funzionamento, uno degli elettrodi di una batteria di celle, essendo l'altro elettrodo messo a terra, ecc. Indichiamo anche che se, in un elemento Daniell (studiato in Fisica Elementare), si collega lo zinco con la terra, il potenziale del rame sarà poco più di un volt.

Si consideri una sfera conduttrice ricoperta da uno strato superficiale di elettricità, la cui densità  $k$  è uniforme; la carica totale di questa sfera è  $\eta = 4\pi R^2 k$ , essendo  $R$  il raggio della sfera. Secondo le formule stabilite nel Volume I, si trova, per il potenziale interno  $V$ , che è anche il potenziale  $V$  della sfera, l'espressione

$$V = V_i = \frac{\eta}{KR} = \frac{4\pi Rk}{K} \quad (1.0.42)$$

Il potenziale esterno  $V_c$  nell'aria, alla distanza  $x$  dal centro della sfera è:

$$V_c = \frac{\eta}{x} = \frac{4\pi R^2 k}{x} \quad (1.0.43)$$

in un altro dielettrico diverso dall'aria si ha:

$$V_c = \frac{\eta}{Kx} = \frac{4\pi R^2 k}{Kx} \quad (1.0.44)$$

Queste formule si stabiliscono facilmente in un altro modo. Sappiamo che uno strato sferico non agisce sui punti interni, ma agisce sui punti esterni come se tutta la sua massa fosse concentrata nel centro della sfera. Ne consegue che  $V_i = \text{cost} = V_c$ , dove  $V_c$  è il potenziale al centro; si ha al centro:

$$V_c = \int \frac{kds}{r} = \int \frac{kds}{R} = \frac{1}{R} \int kds = \frac{\eta}{R}$$

Nello spazio esterno, il potenziale deve soddisfare all'equazione

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{dV}{dx} = -\frac{\eta}{Kx^2}$$

dove  $V = \frac{\eta}{Kx}$ , poiché per  $x = \infty$  si deve avere  $V = 0$ . Verifichiamo la formula (44,b) per la derivata normale alla superficie stessa; la formula (45,a) dà

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \left( \frac{dV_c}{dx} \right)_{x=R} = \left\{ -\frac{4\pi R^2 k}{x^2} \right\}_{x=R} = -4\pi k$$

Tutto il nostro ragionamento si basa, in questo paragrafo, sulla legge di Couomb espressa nella forma che corrisponde all'immagine A. I risultati che abbiamo ottenuto, per l'entità del lavoro delle forze elettriche o esterne nei diversi casi, sono esatti senza restrizioni e non dipendono da alcuna immagine. Stabiliremo ancora un'altra formula notevole, che ha una particolare importanza nell'immagine B. Consideriamo un tubo di forza (non unitario), che unisce la superficie di due conduttori A e B (fig. 42), i cui potenziali sono  $V_1$  e  $V_2$ .

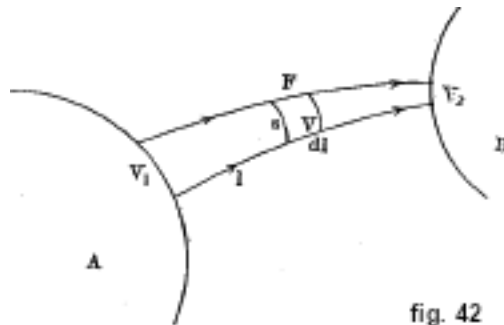


fig. 42

Chiameremo la quantità  $V_1 - V_2$ , la *forza elettromotrice che agisce su questo tubo di forza*. Il flusso di induzione  $\psi = K\sigma F$  è una grandezza costante lungo tutto il tubo, vedi (29).

Abbiamo detto che si può chiamare  $K$  la permeabilità elettrica; chiameremo la grandezza inversa  $1/K$  la resistenza dielettrica del mezzo. Tagliamo il tubo in segmenti, e sia  $dl$  la lunghezza di uno di questi segmenti,  $s$  la sua sezione trasversale; possiamo chiamare la grandezza  $dl/Ks$  la resistenza dielettrica del segmento, e la grandezza:

$$r = \int \frac{dl}{Ks} \quad (1.0.45)$$

dove l'integrale si estende all'intera lunghezza del tubo, la resistenza elettrica dell'intero tubo. Si ha  $F = -\frac{\partial V}{\partial l}$ , essendo  $l$  la direzione delle linee di forza, cioè la direzione della normale alla superficie di livello della funzione  $V$ . L'uguaglianza  $\psi = KsF = -Ks\frac{\partial V}{\partial l} = \text{cost}$  dà

$$\frac{\partial V}{\partial l} dl = -\frac{\psi dl}{Ks}$$

si ha pertanto

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial V}{\partial l} dl &= -\psi \int \frac{dl}{Ks} \\ V_2 - V_1 &= -\psi r \\ \psi &= \frac{V_1 - V_2}{r} \end{aligned} \quad (1.0.46)$$

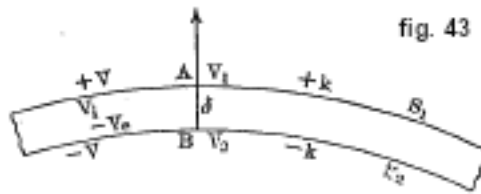
*Il flusso di induzione in un tubo è uguale alla forza elettromotrice che agisce su questo tubo divisa per la resistenza dielettrica del tubo.* La formula (47) richiama la formula Ohm, ben nota in Fisica elementare; mostra che la resistenza dielettrica  $r_1$  di un tubo unità di induzione ( $\psi = 1$ ) è uguale alla differenza di potenziale  $V_1 - V_2$  alle sue estremità:

$$r_1 = V_1 - V_2 \quad (1.0.47)$$

Prima di concludere questo paragrafo sul potenziale, introdurremo nuovamente la nozione di doppio strato elettrico. Finora abbiamo considerato solo strati semplici, ma consideriamo due superfici parallele  $S_1, S_2$ , la prima delle quali è ricoperta in modo uniforme di elettricità positiva, la seconda di elettricità negativa; indichiamo con  $+k$  e  $-k$  le densità uguali in valore assoluto di questi due strati superficiali semplici, e con  $\delta$  la distanza reciproca delle superfici

$S_1, S_2$ . Sia inoltre  $\omega$  il prodotto della quantità di elettricità  $k$  distribuita sull'unità di area per la distanza  $\delta$ , di modo che

$$\omega = k\delta \quad (1.0.48)$$



Supponiamo che  $\delta$  diminuisca indefinitamente, ma che  $k$  cresca in modo che il prodotto  $\omega = k\delta$  rimanga invariato. Quando  $\delta$  è infinitamente piccolo, si ottiene quello che viene chiamato un doppio strato elettrico; il prodotto  $\omega = k\delta$  è il momento di questo doppio strato. Siano  $V_1$  e  $V_2$  i potenziali in due punti A e B situati rispettivamente sulle superfici  $S_1$  e  $S_2$  e su una normale comune AB;  $+V$  e  $-V$  i potenziali in un punto dovuti rispettivamente alle superfici  $S_1$  e  $S_2$ , nel caso in cui ognuna di queste superfici esista da sola. Indicheremo con  $V_c$  e  $-V_c$  il valore dei potenziali di singolo strato dalla parte dove è diretta la normale  $n$ , e con  $V_i$  e  $V_i$  dalla parte opposta. Il potenziale di doppio strato  $V_1$ , nel punto A è costituito dal potenziale  $+V$  dovuto al singolo strato  $S_1$  e dal valore nel punto A del potenziale dovuto al singolo strato  $S_2$ . Si ha:

$$V_1 = V + \left[ -V + \frac{\partial(-V_c)}{\partial n} \delta \right] = -\frac{\partial V_c}{\partial n} \delta$$

Il potenziale di doppio strato  $V_2$  nel punto B si compone del potenziale  $(-V)$  dovuto allo strato semplice  $S_2$  e dal valore nel punto B del potenziale dovuto allo strato semplice  $S_1$ , di modo che

$$V_2 = -V + \left[ +V + \frac{\partial V_i}{\partial(-n)} \delta \right] = -\frac{\partial V_i}{\partial n} \delta$$

Se ne deduce

$$V_1 - V_2 = -\left( \frac{\partial V_c}{\partial n} - \frac{\partial V_i}{\partial n} \right) \delta$$

o, si vedano le (42,a) e (47,b),

$$V_1 - V_2 = \frac{4\pi k\delta}{K} = \frac{4\pi\omega}{K} \quad (1.0.49)$$

Si trova per l'aria

$$V_1 - V_2 = 4\pi\omega \quad (1.0.50)$$

Quando si attraversa un doppio strato elettrico, il potenziale fa un salto, per così dire, la cui grandezza è uguale a  $4\pi\omega$ , essendo  $\omega$  il momento del doppio strato; vediamo che il valore di questa brusca variazione è lo stesso in tutti i punti del doppio strato.

C'è un notevole contrasto tra le proprietà dei potenziali a strato singolo e a doppio strato. Chiamiamo funzione armonica, qualsiasi funzione finita e continua così come le sue derivate, che soddisfano l'equazione di Laplace e si annullano all'infinito. Consideriamo una superficie chiusa  $S$ . Supponiamo dapprima una certa quantità di sostanza attrattiva distribuita su questa superficie; il suo potenziale nel punto  $x, y, z$  avrà l'espressione

$$V = \iint \frac{k'}{r} ds'$$

dove  $ds'$  è un elemento della superficie  $S$  avente per centro di gravità  $x', y', z'$  e dove  $k'$  è la densità della sostanza attrattiva, tale che la quantità di sostanza attrattiva contenuta nell'elemento  $ds'$

è uguale a  $k'ds'$ ; infine  $r$  è la distanza dei punti  $x, y, z$  e  $x', y', z'$ . Questo è chiamato potenziale di uno strato semplice.

Questo potenziale è armonico in tutto lo spazio, tranne che sulla superficie  $S$ ; quando si percorre  $S$ ,  $V$  è continuo, ma le sue derivate no. Consideriamo la derivata  $\frac{\partial V}{\partial n}$  lungo la normale esterna alla superficie  $S$ . Indichiamo con  $V_i$  il valore del potenziale  $V$  in un punto interno a  $S$  e infinitamente vicino al punto  $(x, y, z)$  di  $S$ , e con  $V_c$  il suo valore in un punto esterno a  $S$  e infinitamente vicino allo stesso punto  $(x, y, z)$  di  $S$ . Essendo la funzione  $V$  continua, si avrà

$$V_i = V_c$$

Allo stesso modo, distinguiamo da una parte il valore di  $\frac{\partial V}{\partial n}$  in un punto interno a  $S$  e infinitamente vicino al punto  $(x, y, z)$  di  $S$ ; lo chiameremo  $\frac{\partial V_i}{\partial n}$ . Distingueremo il valore di  $\frac{\partial V}{\partial n}$  in un punto esterno a  $S$  e infinitamente vicino allo stesso punto  $(x, y, z)$  di  $S$ ; lo chiameremo  $\frac{\partial V_c}{\partial n}$ . Come abbiamo già visto, si veda la (42), si ha allora tra  $\frac{\partial V_i}{\partial n}$  e  $\frac{\partial V_c}{\partial n}$  una relazione che scriveremo qui

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_i}{\partial n} - \frac{\partial V_c}{\partial n} \right) = 2\pi k \quad (1.0.51)$$

A questa relazione se ne può aggiungere una seconda, introdotta da J. Plemelj (1904) e in seguito in forma più semplice da E. Picard (1905). Si ha

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_i}{\partial n} + \frac{\partial V_c}{\partial n} \right) = - \iint k' \frac{\cos \psi}{r^2} ds' \quad (1.0.52)$$

In quest'ultimo integrale si assume il punto  $(x, y, z)$  è supposto sulla superficie, e  $\psi$  è l'angolo che la normale esterna alla superficie in  $(x, y, z)$  forma con la retta che congiunge quest'ultimo punto al punto  $(x', y', z')$  di  $ds'$ . Queste sono le proprietà del potenziale di un singolo strato. Ne faremo in seguito (§ 10) applicazioni molto importanti.

Il potenziale di un doppio strato, la cui introduzione è dovuta principalmente a Helmholtz, ha per espressione

$$V = - \iint \omega' \frac{\cos \varphi}{r^2} ds'$$

essendo  $ds'$  l'elemento di superficie, e  $\varphi$  l'angolo formato dalla direzione, che va dall'elemento  $ds'$  al punto  $(x, y, z)$  di cui prendiamo il potenziale, con la normale esterna alla superficie in  $ds'$ ; si può ancora dire che  $\frac{\cos \varphi}{r^2} ds'$  è l'angolo solido sotto il quale l'elemento  $ds'$  è visto dal punto  $(x, y, z)$ , essendo questo angolo solido considerato positivo, quando l'elemento  $ds'$  è visto dall'esterno. Quanto a  $\omega'$ , è una certa funzione di  $x', y', z'$  che si chiama, come abbiamo detto sopra, il momento o anche la densità del doppio strato.

Si dice che  $V$  è il potenziale di un doppio strato, e questa espressione è giustificata, perché si ha

$$\frac{\partial \left( \frac{1}{r} \right)}{\partial n} = - \frac{\cos(r, n)}{r^2} = - \frac{\cos \varphi}{r^2}$$

e che si può così considerare  $V$  come il potenziale dovuto a due strati attrattivi infinitamente vicini tra loro e tali che in due punti corrispondenti a questi due strati, le densità siano uguali e di segno opposto e per di più molto grandi. Manterremo alle notazioni  $V_i, V_c, \frac{\partial V_i}{\partial n}, \frac{\partial V_c}{\partial n}$  lo stesso significato di cui sopra. Il potenziale  $V$  ha le seguenti proprietà: è armonico in tutto lo spazio, tranne che sulla superficie  $S$ ; si ha sulla superficie  $S$

$$\frac{\partial V_i}{\partial n} = \frac{\partial V_c}{\partial n}$$

ma  $V$  è discontinuo per il passaggio attraverso la superficie; designando con  $V_s$  il potenziale in un punto della superficie, e con  $V_i$  e  $V_c$  i limiti del potenziale interno ed esterno, si hanno le due relazioni

$$\begin{cases} V_i = V_s + 2\pi\omega_s \\ V_c = V_s - 2\pi\omega_s \end{cases} \quad (1.0.53)$$

Queste relazioni sono stabilite in modo analogo alle formule (23), e faremo riferimento per una regolare dimostrazione al *Traité d'Analyse* di E. Picard.

Il contrasto tra i potenziali di singolo e doppio strato è quindi il seguente; in un caso è  $\frac{\partial V}{\partial n}$  che è discontinuo, e nell'altro è lo stesso  $V$ .

Dimostreremo subito l'importanza di queste nozioni. Come vedremo più avanti (§ 10), in Elettrostatica è fondamentale la seguente domanda: trovare una funzione armonica in un certo dominio, assumendo dati valori alla frontiera di tale dominio; è il cosiddetto problema di Dirichlet.

Sia  $\Phi$  una funzione data in tutti i punti di una superficie  $S$ , e  $\lambda$  un parametro il cui valore può variare. H. Poincaré ha proposto, per risolvere il problema Dirichlet, di trovare un doppio strato il cui potenziale  $V$  soddisfi la seguente condizione:

$$V_i - V_c = \lambda (V_i + V_c) + 2\Phi \quad (1.0.54)$$

ha dato a questo problema il nome di Neumann. Se, nella (47,g) si pone  $\lambda = -1$ , essa si riduce a

$$V_i = \Phi$$

all'interno della superficie  $S$ , il potenziale  $V$  è una funzione armonica, e il limite di questa funzione, quando ci si avvicina alla superficie  $S$ , è la funzione data  $\Phi$ . Sia ora  $\lambda = 1$ , l'equazione (47, g) diventerà

$$V_c = -\Phi$$

all'esterno di  $S$ , la funzione  $V$  è armonica e il suo limite, quando si avvicina alla superficie  $S$ , è la funzione data  $-\Phi$ . Il problema di Dirichlet, sia per un dominio interno a  $S$ , sia per uno esterni, è solo un caso particolare del problema di Neumann.

Ciò posto, si può risolvere il problema di Neumann mediante una serie che procede secondo le potenze intere positive crescenti di  $\lambda$ . Sia

$$V = V^{(0)} + \lambda V^{(1)} + \lambda^2 V^{(2)} + \dots \quad (1.0.55)$$

e anche

$$\begin{aligned} V_i &= V_i^{(0)} + \lambda V_i^{(1)} + \lambda^2 V_i^{(2)} + \dots \\ V_c &= V_c^{(0)} + \lambda V_c^{(1)} + \lambda^2 V_c^{(2)} + \dots \end{aligned}$$

sia infine

$$V_i^{(n)} + V_c^{(n)} = 2U^{(n)}$$

Uguagliando, nella (47,g), i coefficienti di potenze simili di  $\lambda$ , verrà

$$\begin{aligned} V_i^{(0)} - V_c^{(0)} &= 2\Phi \\ V_i^{(1)} - V_c^{(1)} &= V_i^{(0)} + V_c^{(0)} = 2U^{(0)} \\ V_i^{(2)} - V_c^{(2)} &= V_i^{(1)} + V_c^{(1)} = 2U^{(1)} \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

ciò mostra che  $V^{(0)}$  è il potenziale di un doppio strato la cui densità è  $\Phi/2\pi$ , che  $V^{(1)}$  è il potenziale di un doppio strato la cui densità è  $U^{(0)}/2\pi$ , che  $V^{(2)}$  è il potenziale di un doppio strato la cui densità è  $U^{(1)}/2\pi$ , ecc.

Si possono così calcolare successivamente i diversi termini della serie (47,h). Resta da vedere se questa serie è convergente. Nel caso in cui la superficie  $S$  è convessa, Neumann ha dimostrato questa convergenza, o meglio, ha mostrato che si può sempre trovare una costante  $C$  tale che la serie

$$(V^{(0)} - C) + \lambda (V^{(1)} - C) + \lambda^2 (V^{(2)} - C) + \dots \quad (1.0.56)$$

converge per tutti i valori di  $\lambda$  tali che  $|\lambda| \leq 1$ . Sia  $G_n$  il più grande e  $H_n$  il più piccolo valore di  $U^{(n)}$ ; è chiaro che

$$G_n > G_{n+1} > H_{n+1} > H_n \quad (1.0.57)$$

Neumann ha mostrato che

$$G_{n+1} - H_{n+1} < \alpha (G_n - H_n) \quad (1.0.58)$$

essendo  $\alpha$  una costante minore di 1, che dipende solo dalla configurazione di  $S$ . È facile concludere che si può determinare la costante  $C$  in modo che la serie (47,h') converga.

Il metodo di Neumann è ancora applicabile, quando la superficie  $S$  non è convessa?: Si potrebbe dapprima essere tentati di rispondere negativamente. Le disuguaglianze (47,i), che sembrano svolgere un ruolo essenziale, non sono più vere quando la superficie cessa di essere convessa. Contrariamente a questa previsione, Poincaré (1896) ha stabilito che il metodo di Neumann è ancora applicabile, anche quando la superficie  $S$  non è convessa. La dimostrazione di II. Poincaré suppone che la superficie  $S$  sia semplicemente connessa, che la superficie abbia ovunque un piano tangente e due raggi principali di curvatura determinati, che la funzione data  $\Phi$  abbia derivate di tutti gli ordini. Tutte queste restrizioni probabilmente sono inutili e tutto porta a pensare che il teorema sia vero in casi più generali.

La funzione (47,h) di  $\lambda$  è una funzione uniforme; può avere solo punti singolari sull'asse delle quantità reali; in certe condizioni, ha solo poli e un unico punto singolare essenziale all'infinito; in altre parole, è una funzione meromorfa. Torneremo su questo punto più avanti, nelle indicazioni che daremo sull'equazione Fredholm e le sue applicazioni alla Fisica. Se si considera uno dei poli della funzione (47,h) di  $\lambda$ , il corrispondente residuo, considerato in funzione di  $x, y, z$ , è ciò che H. Poincaré ha chiamato una funzione fondamentale. Sia  $F$  una qualunque funzione delle coordinate di un punto su  $S$ ;  $F$  può essere sviluppato in serie procedendo secondo le funzioni fondamentali.

Connessi al problema di Neumann, senza essere ad esso identici, sono i metodi dovuti a G. Kirchhoff, G. Robin e W. Stekloff.

## 7. Capacità di un singolo conduttore

Consideriamo dapprima un singolo conduttore  $M$  (fig. 44) (con questo intendiamo un conduttore da cui è stato tolto ogni altro conduttore) caricato con la quantità di elettricità  $\eta$ , e sia  $V$  il suo potenziale; questo potenziale è lo stesso in ogni punto interno  $A$  ed è espresso dalla formula

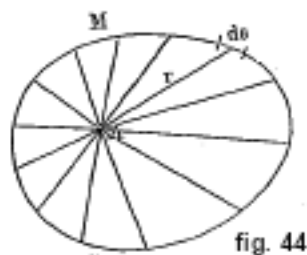
$$V = \iint \frac{k ds}{Kr} \quad (1.0.59)$$

dove  $k$  è la densità superficiale sull'elemento di superficie  $ds$  che si trova alla distanza  $r$  dal punto  $A$ . Il potenziale  $V$  è proporzionale alla carica  $\eta$ , per cui si può porre

$$\eta = qV \quad (1.0.60)$$

da cui

$$q = \frac{\eta}{V} \quad (1.0.61)$$



La grandezza  $q$ , che dipende dalla forma e dalle dimensioni del conduttore, nonché dal mezzo ambiente, si chiama la *capacità del conduttore*  $M$ . Per  $V = 1$ , si ha  $\eta = q$ . Ne consegue che *la capacità di un conduttore è misurata dalla carica che porta questo conduttore ad un potenziale uguale all'unità, o che ne aumenta il potenziale di una unità*. Quando un conduttore è circondato da un dielettrico omogeneo, (48) dà  $V = V_0 : K$ , dove  $V_0$  è il potenziale dello stesso conduttore in aria, per la stessa carica  $\eta$ . In questo caso, si deduce dalla (49,a)

$$q = \frac{\eta}{V_0} K \quad (1.0.62)$$

*La capacità di un conduttore è proporzionale alla costante dielettrica del mezzo circostante.*

La formula (49,a) dà  $q = 1$  per  $V = 1$  e  $\eta = 1$ ; quindi *l'unità el. st. assoluta di capacità è uguale alla capacità di un conduttore tale che una carica di una unità el. st. C.G.S. di quantità di elettricità porta questo conduttore all'unità el. st. CGS di potenziale*.

*L'unità el. st. C.G.S. di capacità è la capacità di un conduttore, che è portato da una carica di un'unità el. st. C.G.S. di quantità di elettricità all'unità el. st. CGS di potenziale.*

Abbiamo indicato come unità di quantità di elettricità, il coulomb  $= 3 \cdot 10^9$  unità el. st. CGS e, come unità di potenziale il volt  $= 1/300$  unità di el. st. CGS. *La capacità di un conduttore, che è portato da un coulomb di elettricità a un potenziale di un volt, si chiama farad*. Cerchiamo la relazione tra un farad e l'unità e. st. CGS di capacità, che è portata a 300 volt per  $1/300$  di coulomb. Poiché un farad è trasportato solo da un coulomb a un volt, si ha

$$1 \text{ farad} = 300 \cdot 3 \cdot 10^9 \text{ unità el. st. CGS di capacità} \quad (1.0.63)$$

Un milionesimo di farad si chiama un microfarad:

$$1 \text{ microfarad} = 10^{-6} \text{ farad} = 900000 \text{ unità el. st. CGS di capacità} \quad (1.0.64)$$

Un microfarad è portato da un microcoulomb a un volt. La formula (49,a) ci fornisce l'equazione dimensionale dell'unità elettrostatica di capacità.

$$[q] = \frac{[\eta]}{[V]} = \frac{[K]^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1}}{[K]^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1}} = L [K] \quad (1.0.65)$$

Se si considera  $K$  come una quantità di dimensione zero, l'unità el. st. di capacità dipende solo dall'unità fondamentale di lunghezza e gli è proporzionale.

La capacità di una sfera si ottiene con le formule (45) e (49,a); ci può servire in primo luogo, la carica di un'unica sfera che copre la superficie di questa sfera in maniera uniforme. Se si sostituisce  $V = \eta : RK$  nella (49,a), si trova la capacità di una sfera in unità el. st.

$$q = RK \quad (1.0.66)$$

In aria, si ha

$$q = R \quad (1.0.67)$$

*La capacità di una sfera in el. st. è, in aria, numericamente uguale al suo raggio.*

*Una sfera di 1 centimetro di raggio ha l'unità el. st. CGS di capacità; una unità el. st. C.G.S. di quantità di elettricità porta questa sfera all'unità el. st. CGS di potenziale.* L'uguaglianza (49,g) conferma la formula (49,e). La formula (49,e) mostra che un farad è la capacità di una sfera di raggio  $= 9,11^{11} \text{ cm} = 9 \cdot 10^9 \text{ m} = 9 \cdot 10^6 \text{ km}$ . Una sfera ha una capacità di un microfarad, quando il suo raggio è uguale a  $9 \text{ km}$ . La capacità della sfera terrestre è di 708 microfarad.

Consideriamo un sistema di conduttori, a distanze l'uno dall'altro tali che le loro reciproche azioni elettriche siano trascurabili, e comunicanti tra loro mediante fili lunghi e sottili. È facile trovare come una carica elettrica  $\eta$  si distribuisce su questi conduttori. Siano  $q_1, q_2, q_3, \dots$  le capacità dei conduttori,  $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots$  le cariche cercate. Trascurando le cariche dei fili di collegamento, si ha  $\eta = \sum \eta_i$ . Sappiamo che i conduttori collegati tra loro devono essere allo stesso potenziale  $V$ . La formula (49) quindi dà

$$V = \frac{\eta_1}{q_1} = \frac{\eta_2}{q_2} = \frac{\eta_3}{q_3} = \dots \quad (1.0.68)$$

*Una carica si distribuisce, su un sistema di conduttori a grande distanza tra loro, ma collegati da fili sottili, in proporzione alla capacità di questi conduttori.* Nel caso di un sistema di sfere poste in un mezzo omogeneo, le cariche sono proporzionali ai raggi.

La formula (49,h) dà

$$V = \frac{\sum \eta_i}{\sum q_i} = \frac{\eta}{\sum q_i} = \frac{\eta}{q} \quad (1.0.69)$$

Vediamo quindi che *la capacità  $q$  di un sistema di conduttori, comunicanti tra loro e sufficientemente distanti, è uguale alla somma delle capacità di tali conduttori.*

Il problema che consiste nel determinare la capacità di un conduttore, in determinate circostanze, si fonde con il problema generale dell'equilibrio elettrico che studieremo in seguito. Ci limiteremo quindi qui ad indicare, senza dimostrazione, le formule che danno la capacità di alcuni corpi:

*Per un ellissoide di rivoluzione allungato, il cui semiasse di rivoluzione è  $a$ , si ha*

$$q = \frac{2aeK}{\log \frac{1+e}{1-e}} \quad (1.0.70)$$

dove  $e$  indica l'eccentricità della sezione meridiana.

*Per un ellissoide di rivoluzione appiattito, la cui sezione equatoriale ha un raggio  $b$ , si ha*

$$q = \frac{beK}{\arcsin e} \quad (1.0.71)$$

Queste due formula danno per una *sfera* ( $a = b = R, e = 0$ )

$$q = RK$$

Per un cilindro circolare, la cui lunghezza  $l$  è molto grande rispetto al raggio  $r$  della sezione trasversale, si trova l'espressione approssimata

$$q = \frac{lK}{2 \log \frac{l}{r}} \quad (1.0.72)$$

*Per un piatto circolare sottile* di raggio  $r$ , si ha approssimativamente

$$q = K \frac{2r}{\pi} = \frac{Kr}{1,5708} \quad (1.0.73)$$



Per due sfere uguali di raggio  $R$  che si toccano, si ha:

$$q = 2RK \log 2 = 1,38630RK \quad (1.0.74)$$

La parola capacità è stata ripresa, per analogia, dalla teoria del calore; ma è importante notare che, mentre la capacità termica di un corpo dipende solo dalla natura e dal peso di questo corpo, la capacità elettrica di un conduttore non dipende né dalla sua natura né dal suo peso, ma solo dalla sua forma esterna.

La nozione di capacità sembra essere introdursi più semplicemente, partendo dall'immagine A. Tuttavia, adottando il punto di vista dell'immagine B, ricordando il significato della parola carica in questa immagine e considerando il potenziale come un lavoro, è pure facile costruire la nozione di capacità di un conduttore.

## 8. L'energia della carica di un singolo conduttore

Un conduttore, sulla cui superficie è distribuita una carica  $\eta$ , possiede una certa riserva di energia, che si chiama energia elettrostatica o semplicemente energia elettrica. La risposta che si può dare alla domanda di sapere dove cercare questa energia e quale sia la sua forma dipende dalle idee fondamentali che si adottano sulla natura stessa dei fenomeni elettrici, in altre parole dall'immagine che si sceglie. Se si parte dall'immagine A, si deve ammettere l'esistenza di un'energia potenziale della carica stessa, uguale al lavoro che può essere svolto dalle forze repulsive tra le parti elementari di elettricità nelle quali si può immaginare scomposta la carica. Sia  $\eta$  la carica,  $V$  il potenziale,  $q$  la capacità,  $W$  l'energia cercata, che di solito è chiamata energia del conduttore. Quando si aumenta la carica della quantità  $d\eta$ , trasportando la quantità di elettricità  $d\eta$  dall'infinito sulla superficie del conduttore di potenziale  $V$ , si deve compiere lavoro contro le forze repulsive dovute alla carica  $\eta$ , che è uguale a  $Vd\eta$ , vedi (38,a): come risultato di questo lavoro deve apparire un uguale aumento  $dW$  della quantità di energia elettrica del conduttore. Si ha quindi  $dW = Vd\eta$ , o, dalla (49)

$$dW = \frac{\eta d\eta}{q}$$

Se ne deduce, per l'aumento di energia  $W_2 - W_1$ , un incremento della carica da  $\eta_1$  a  $\eta_2$

$$W_2 - W_1 = \frac{\eta_2^2 - \eta_1^2}{2q} \quad (1.0.75)$$

Quando non c'è carica, l'energia è nulla e quindi  $W_1 = 0$  per  $\eta_1 = 0$ ; se si introducono questi valori, ponendo  $W_2 = W$  e  $\eta_2 = \eta$  e tenendo conto dell'uguaglianza (49), si ottengono le seguenti espressioni per l'energia elettrica di un conduttore, la cui carica è  $\eta$ , potenziale  $V$  e la capacità  $q$ :

$$W = \frac{\eta^2}{2q} = \frac{1}{2}qV^2 = \frac{1}{2}\eta V \quad (1.0.76)$$

Vediamo da ciò che, per un dato conduttore (dato  $q$ ), *l'energia aumenta proporzionalmente al quadrato della carica o al quadrato del potenziale*. Stabiliremo ancora la formula (51,a) in un altro modo, che ci darà l'energia di un sistema, cioè di un numero arbitrario di conduttori disposti in qualsiasi modo, le cui cariche sono  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, \dots$ , i potenziali  $V_1, V_2, \dots, V_n, \dots$ , e le capacità  $q_1, q_2, \dots, q_n, \dots$ . L'intero sistema è in un mezzo omogeneo. Scomponiamo tutte le cariche in elementi e siano  $\Delta\eta_n$  e  $\Delta\eta_k$  due elementi, il primo dei quali appartiene al conduttore  $n^e$  e il secondo al  $k^e$ , dove  $k$  può essere uguale a  $n$ ; sia  $r$  la distanza tra questi due elementi. La formula (36,a) mostra che l'energia potenziale di questi due parti elementari di elettricità è uguale a

$$\frac{\Delta\eta_n \Delta\eta_k}{Kr} \quad (1.0.77)$$

Se si formano a due a due tutte le possibili combinazioni di elementi di carica, e se si aggiungono espressioni come la (51,b) corrispondenti a ciascuna di queste combinazioni, si ottiene l'energia desiderata  $W$ . Combinando ogni elemento di carica con tutti gli altri, è chiaro che qualsiasi coppia di elementi appare due volte; designando la somma di tutte queste combinazioni con  $\Omega$ , si ha pertanto  $W = \frac{1}{2}\Omega$ . Per trovare l'espressione di  $\Omega$ , bisogna prima prendere tutti gli elementi di carica  $\Delta\eta_1$  del primo conduttore e combinare ciascuno di essi con tutti gli elementi  $\Delta\eta_k$  di tutti i conduttori, tranne il primo; si procede allo stesso modo con gli elementi  $\Delta\eta_2$  del secondo conduttore, poi il terzo  $\Delta\eta_3$ , ecc.

Si ha così

$$\Omega = \sum \Delta\eta_1 \sum \frac{\Delta\eta_k}{Kr} + \sum \Delta\eta_2 \sum \frac{\Delta\eta_k}{Kr} + \sum \Delta\eta_3 \sum \frac{\Delta\eta_k}{Kr} + \dots$$

Dal significato di  $r$ , si vede che  $\sum \frac{\Delta\eta_k}{Kr}$  rappresenta il valore del potenziale elettrico del sistema nel punto in cui si trova un elemento  $\Delta\eta_1, \Delta\eta_2, \dots$ . Si trova in questo modo, tenendo conto di  $W = \frac{1}{2}\Omega$

$$W = \frac{1}{2} \sum \Delta\eta_1 \cdot V_1 + \frac{1}{2} \sum \Delta\eta_2 \cdot V_2 + \frac{1}{2} \sum \Delta\eta_3 \cdot V_3 + \dots$$

ma si ha

$$\sum \Delta\eta_1 = \eta_1 \quad \sum \Delta\eta_2 = \eta_2, \dots$$

da cui

$$W = \frac{1}{2} V_1 \eta_1 + \frac{1}{2} V_2 \eta_2 + \frac{1}{2} V_3 \eta_3 + \dots$$

e di conseguenza l'energia cercata è:

$$W = \frac{1}{2} \sum V \eta \tag{1.0.78}$$

dove il simbolo di sommatoria si estende a tutti i conduttori. Nel caso di un solo conduttore si ritrova la formula (51,a).

Calcoliamo da quanto precede l'energia di una sfera elettrizzata. Sia  $k$  la densità superficiale dell'elettricità; la carica è  $4\pi R^2 k$  e la capacità  $q = RK$  vedi (49,f). La formula (51,a) dà:

$$W = \frac{\eta^2}{2RK} = \frac{8\pi^2 R^2 k^2}{K} \tag{1.0.79}$$

Per una data carica, l'energia di una sfera è inversamente proporzionale al raggio di questa sfera.

Quando, nelle formule (51,a) e (51,d), si misurano le grandezze  $\eta, V, q$  in unità el. st. C.G.S., l'energia potenziale  $W$  è espressa in erg. Ma se  $\eta$  è espressa in coulomb,  $V$  in volt e  $q$  in farad, si ottiene in joule il lavoro che può fornire questa energia potenziale; ricordiamo che il joule =  $0,102 \text{ kgm} = 0,24 \text{ gr. cal.}$ .

Le formule che abbiamo introdotto consentono di risolvere diversi problemi ed in particolare di determinare la nuova distribuzione delle cariche che si stabilisce tra conduttori distanti tra loro, quando vengono posti in comunicazione. Lasciamo al lettore di occuparsi della seguente questione;  $n$  conduttori distanti tra loro hanno rispettivamente le capacità  $q_1, q_2, \dots, q_n$  e le cariche  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ ; tutta l'energia persa nella nuova distribuzione delle cariche che si produce quando questi conduttori sono messi in comunicazione, appare sotto forma di calore nei conduttori di collegamento; si tratta di determinare questa quantità di calore, quando tutti i conduttori sono collegati da fili lunghi e sottili; si potrà considerare il caso particolare di due sfere e quello ancora più speciale in cui la carica primitiva di una delle sfere è nulla. Quando ci sono solo due conduttori ( $\eta_1, \eta_2, q_1, q_2$ ), l'energia persa è:

$$\Delta W = \frac{1}{2} \frac{(\eta_1 q_2 - \eta_2 q_1)^2}{q_1 q_2 (q_1 + q_2)}$$

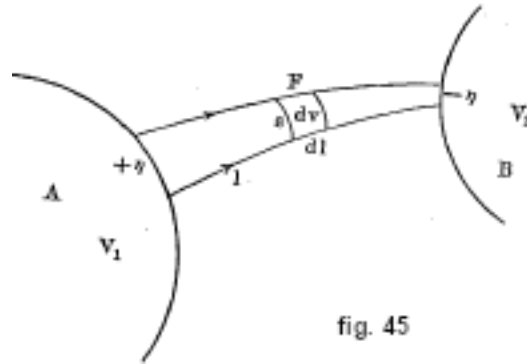
La formula (51,d) mostra che i conduttori messi a terra ( $V = 0$ ) e i conduttori isolati, elettrizzati solo per induzione ( $\eta = 0$ ), non possono partecipare direttamente alla quantità di energia indicata con  $W$ ; scompaiono i termini della somma (51,d) che ad essi corrispondono. Tuttavia la presenza di questi corpi influenza la quantità  $W$ , perché le cariche che portano modificano i potenziali degli altri corpi.

Ci siamo limitati nei nostri calcoli all'immagine A, secondo la quale l'energia elettrostatica è l'energia potenziale delle particelle elettriche che si respingono o si attraggono.

**Immagine B.** Le nozioni che sono alla base dell'immagine B portano a concludere che l'energia elettrostatica, cioè l'energia di un campo elettrico, è l'energia di un mezzo deformabile, l'etere; è l'energia di tubi estesi longitudinalmente e compressi trasversalmente, che abbiamo chiamato tubi di tensione. Se è così, questa energia deve essere distribuita in tutto il campo elettrico, e qualsiasi volume elementare del dielettrico, compresi gli spazi vuoti, deve contenere una certa quantità di energia.

Il vero valore dell'energia è sicuramente determinato in modo esatto dal punto di vista quantitativo dalle formule che abbiamo stabilito in questo paragrafo. Per ottenere un'espressione dell'energia che corrisponde all'immagine B, dobbiamo cercare di trasformare le espressioni trovate in precedenza, in modo che rappresentino una quantità di energia distribuita in tutto il volume dei dielettrici che il campo elettrico contiene. Consideriamo un tubo d'induzione (non unitario), che collega i due conduttori A e B, i cui potenziali sono rispettivamente  $V_1, V_2$ . Alle estremità di questo tubo vi sono quantità uguali  $+\eta$  e  $-\eta$  di elettricità di nomi opposti, che sono legate al flusso di induzione  $\psi$  e al numero  $n$  dei tubi unitari, dalle seguenti uguaglianze:

$$n = \psi = KFs = 4\pi\eta \quad (1.0.80)$$



La costante dielettrica  $K$ , l'intensità  $F$  e l'area  $s$  della sezione trasversale si riferiscono in queste uguaglianze a un luogo qualunque del tubo considerato. Dalla (51,e), questo tubo, che contiene le elettricità  $+\eta$  e  $-\eta$ , possiede l'energia

$$W = W = \frac{1}{2}V_1\eta + \frac{1}{2}V_2(-\eta) = \frac{1}{2}\eta(V_1 - V_2) \quad (1.0.81)$$

Ma  $\eta(V_1 - V_2)$  è il lavoro compiuto nel trasporto dell'elettricità  $\eta$ , dall'inizio del tubo alla sua estremità, cioè

$$W = \frac{1}{2}\eta(V_1 - V_2) = \frac{1}{2} \int \eta F dl \quad (1.0.82)$$

Se si sostituisce il valore (52) di  $\eta$  viene

$$W = \int \frac{KF^2}{8\pi} s dl$$

ed essendo  $sdl$  il volume  $dv$  di un segmento del tubo, possiamo scrivere:

$$W = \iiint \frac{KF^2}{8\pi} dv \quad (1.0.83)$$

Si trova quindi che l'energia relativa al tubo considerato è ripartita sull'intero volume di questo tubo, contenendo il volume  $dv$  la quantità di energia

$$dW = \frac{KF^2}{8\pi} dv \quad (1.0.84)$$

Il risultato ottenuto è valido per tutti i tubi, e di conseguenza per l'intero volume del campo elettrico riempito da dielettrici; vale inoltre per qualsiasi elemento di volume del conduttore, perché si ha in questo  $F = 0$  e  $dW = 0$ .

Chiameremo, per brevità, la grandezza  $dW : dv$ , cioè l'energia in un punto riferito all'unità di volume, l'energia dell'unità di volume e la designeremo con  $W_1$ ; la formula (52,d) dà:

$$W_1 = \frac{KF^2}{8\pi} \quad (1.0.85)$$

Confrontando questa espressione con la (32,k), si vede che l'energia dell'unità di volume del dielettrico è uguale alla tensione longitudinale  $P$  (riferita all'unità di area) o alla pressione trasversale anch'essa uguale a  $P$ . Si ottengono così le seguenti nuove espressioni per l'energia  $W_1$ , dell'unità di volume

$$W_1 = P = \frac{KF^2}{8\pi} = \frac{BF}{8\pi} = \frac{F\mathcal{D}}{2} = \frac{2\pi\mathcal{D}^2}{K} \quad (1.0.86)$$

Si trova l'energia totale  $W$  del campo elettrico considerato, sommando, per tutti gli elementi  $dv$  dello spazio infinito, espressioni come la (52,d) che si possono ora scrivere

$$dW = Pdv \quad (1.0.87)$$

L'energia del campo è quindi

$$W = \iiint Pdv \quad (1.0.88)$$

essendo dato  $P$  dalla (53,a), ed estendendosi l'integrale a tutto lo spazio infinito o, equivalentemente, alla parte di questo spazio in cui l'intensità  $F$  del campo dato è sensibile.

Per un tubo unitario si ha  $n = \psi = 1$ , cioè  $\eta = 1 : 4\pi$ , vedi (52). Portando questo valore nella (52,b), si ottiene l'energia  $w_1$  di un tubo unitario

$$w_1 = \int \frac{F}{8\pi} dl \quad (1.0.89)$$

In un tubo unitario di induzione, l'energia riferita all'unità di lunghezza è uguale a  $F : 8\pi$ .

Sostituendo  $\eta$  con  $n/4\pi$  nella (52,a) e (52), si ha ancora, dalla (47), per l'energia totale  $w$  contenuta in un tubo di induzione qualsiasi, le seguenti espressioni

$$w = \frac{(V_1 - V_2)n}{8\pi} = \frac{(V_1 - V_2)^2}{8\pi r} = \frac{n^2 r}{8\pi} \quad (1.0.90)$$

dove  $r$  rappresenta la resistenza dielettrica del tubo. Si trova, per l'energia totale  $w_1$  contenuta in un tubo unitario di induzione, si veda (47,a)

$$w_1 = \frac{V_1 - V_2}{8\pi} = \frac{r_1}{8\pi} \quad (1.0.91)$$

L'ipotesi più semplice che si possa fare per spiegare le azioni dell'etere dielettrico è quella di attribuire queste azioni all'elasticità di un fluido distribuito tra i conduttori e cercare di applicare a questo fluido i principi ordinari della teoria dell'elasticità. Sfortunatamente le conseguenze di questa ipotesi non sono conformi ai fatti sperimentali. Infatti, in un mezzo elastico nel senso comune del termine, le forze risultanti da piccolissimi spostamenti sono funzioni lineari delle componenti della deformazione, che qui sono gli spostamenti elettrici di Maxwell; si sarebbe quindi indotti ad ammettere che la forza che si esercita tra due conduttori elettrizzati sia una funzione lineare delle cariche dei conduttori. Ne seguirebbe che raddoppiando le cariche di ciascun conduttore si avrebbe una forza doppia; ora, se si raddoppiano le cariche di due conduttori, si quadruplica la forza che si esercita fra di essi. Molte altre ipotesi sono state proposte, come abbiamo detto, ma hanno lo svantaggio di essere complicate, e ci limiteremo ad esporre la teoria che Maxwell ha proposto.

Prendiamo un elemento di volume  $dx dy dz$  e sia  $\rho$  la densità dell'elettricità nel centro di gravità di questo elemento, la cui massa elettrica è  $\rho dx dy dz$ . Se  $V$  è il valore del potenziale nel centro di gravità, la forza che si esercita su questa massa elettrica ha come componenti  $-\rho \frac{\partial V}{\partial x} dx dy dz$ ,  $-\rho \frac{\partial V}{\partial y} dx dy dz$ ,  $-\rho \frac{\partial V}{\partial z} dx dy dz$ . L'esperienza ci insegna che la forza che agisce sull'elemento materiale stesso è uguale a quella che agisce sull'elettricità in esso contenuta, e di conseguenza che questo elemento si manterrà in equilibrio solo se gli si applica una forza destinata a controbilanciare l'attrazione elettrostatica. Se si chiamano  $X dx dy dz$ ,  $Y dx dy dz$ ,  $Z dx dy dz$  le componenti di questa forza, si dovrà avere:

$$X = \rho \frac{\partial V}{\partial x} \quad Y = \rho \frac{\partial V}{\partial y} \quad Z = \rho \frac{\partial V}{\partial z} \quad (1.0.92)$$

Maxwell ammette con Faraday che le repulsioni e le attrazioni dei conduttori sono dovute a forze sulla materia ponderabile trasmessi attraverso la sostanza dielettrica. La forza esercitata su un elemento di superficie non è necessariamente normale a questo elemento. Indichiamo con  $p_{xx} dy dz$ ,  $p_{xy} dy dz$ ,  $p_{xz} dy dz$  le componenti lungo i tre assi della forza che si esercita su un elemento perpendicolare all'asse  $x$ ; con  $p_{yx} dz dx$ ,  $p_{yy} dz dx$ ,  $p_{yz} dz dx$  le componenti della forza su un elemento perpendicolare a  $Oy$ ; infine da  $p_{zx} dx dy$ ,  $p_{zy} dx dy$ ,  $p_{zz} dx dy$ , le componenti su un elemento perpendicolare a  $Oz$ . Questi nove elementi bastano a determinare la forza su un elemento di superficie orientato in qualsiasi modo. Inoltre, queste nove quantità si riducono a sei, con le relazioni  $p_{xy} = p_{yx}$ ,  $p_{yz} = p_{zy}$ ,  $p_{xz} = p_{zx}$  che fornisce la teoria dell'elasticità, e abbiamo anche le relazioni;

$$\begin{cases} \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial z} = -\rho \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial z} = -\rho \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial p_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} = -\rho \frac{\partial V}{\partial z} \end{cases} \quad (1.0.93)$$

Questo sistema di tre equazioni contiene sei incognite; ammette quindi una infinità di soluzioni. Maxwell prende la seguente:

$$\begin{cases} p_{xx} = \frac{K}{8\pi} \left[ \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 - \left( \frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 - \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right] \\ p_{yy} = \frac{K}{8\pi} \left[ \left( \frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 - \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 - \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right] \\ p_{zz} = \frac{K}{8\pi} \left[ \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 - \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 - \left( \frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 \right] \\ p_{yz} = p_{xy} = \frac{K}{4\pi} \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial z} \\ p_{zx} = p_{xz} = \frac{K}{4\pi} \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial x} \\ p_{xy} = p_{yx} = \frac{K}{4\pi} \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial y} \end{cases} \quad (1.0.94)$$

Mostriamo che questo sistema di soluzioni soddisfa bene le equazioni (53,j). Si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} &= \frac{K}{4\pi} \left( \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} \right) \\ \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} &= \frac{K}{4\pi} \left( \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \right) \\ \frac{\partial p_{zx}}{\partial z} &= \frac{K}{4\pi} \left( \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} \right) \end{aligned}$$

e il primo membro della prima equazione diviene, dopo riduzione,

$$\frac{K}{4\pi} \frac{\partial V}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right) = \frac{K}{4\pi} \frac{\partial V}{\partial x} \Delta V$$

Si è visto dalla (41,c) che in un mezzo dielettrico omogeneo, si ha

$$K \Delta V = -4\pi \rho$$

di conseguenza il primo membro dell'equazione considerata si può scrivere  $-\rho \frac{\partial V}{\partial x}$ , ciò che mostra che questa equazione è soddisfatta. Ci si assicurerà che le ultime due equazioni (53,j) siano verificate dalla soluzione adottata da Maxwell.

Prendiamo per asse  $x$  la direzione della forza elettrica in un punto e per assi  $y$  e  $z$  due rette rettangolari perpendicolari a questa direzione. Designando con  $F$  il valore assoluto della forza elettrica, abbiamo in questo nuovo sistema di assi  $\frac{\partial V}{\partial x} = -F$ ,  $\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial z} = 0$ . Portando questi valori nelle relazioni (53,m), noi ottemiamo

$$p_{xx} = \frac{KF^2}{8\pi} \quad p_{yy} = p_{zz} = -\frac{KF^2}{8\pi} \quad p_{yz} = p_{zy} = p_{zx} = p_{xz} = p_{xy} = p_{yx} = 0$$

Da queste uguaglianze segue che la forza su un elemento di superficie perpendicolare alla direzione della forza elettrica o parallela a questa direzione è normale a questo elemento. Su un elemento obliquo rispetto a questa direzione, la forza è obliqua; la componente lungo la direzione della forza elettrica essendo positiva, c'è tensione lungo questa direzione; per una direzione normale la forza è negativa, c'è quindi secondo la notazione adottata da Maxwell, pressione lungo questa direzione. Inoltre la tensione che si esercita su un elemento perpendicolare alla forza elettrica e la pressione che si esercita su un elemento parallelo a questa forza sono uguali in valore assoluto.

## 9. Condensatori

Abbiamo trattato nel § 7 la capacità  $q$  di un singolo conduttore; quando un tale conduttore è portato dalla carica  $\eta$  al potenziale  $V$ , la sua capacità  $q$  è espressa numericamente dalla formula, vedi (49, a).

$$q = \frac{\eta}{V} \tag{1.0.95}$$

Dimostreremo che la capacità  $q$  cambia, quando, in prossimità del conduttore A considerato (fig. 46), ci sono altri conduttori B, C, ecc. Supponiamo prima che questi ultimi conduttori siano isolati e che non esista all'origine alcuna carica su di essi. Su A c'è una carica positiva per esempio; il potenziale di A è  $V$ , quando i corpi B, C, ecc., non sono ancora nelle sue vicinanze e questo potenziale è calcolato, come sempre, dalla formula

$$V = \frac{1}{K} \int \frac{k ds}{r} \tag{1.0.96}$$

essendo  $r$  la distanza dall'elemento di superficie  $ds$  a qualsiasi punto interno M di A. Quando il conduttore B viene portato ad una distanza finita da A, su B compaiono due cariche, le cui densità indicheremo con  $-k'$  e  $+k'$ . Il potenziale in M è ora espresso dalla formula

$$V' = \frac{1}{K} \int \frac{k ds}{r} - \frac{1}{K} \int \frac{k' ds'}{r'} + \frac{1}{K} \int \frac{k'' ds''}{r''}$$

essendo  $ds'$  e  $ds''$  elementi della superficie di B elettricamente carica di nomi contrari, che si trovano rispettivamente alle distanze  $r'$  e  $r''$  dal punto M.

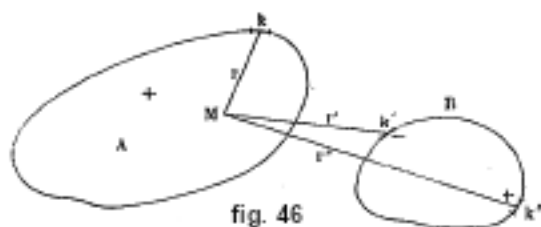


fig. 46

Siccome  $r'' > r'$ , e le quantità di elettricità di nomi opposti su B uguali, è chiaro che  $V' < V$ ; in altre parole, il potenziale del corpo A è diminuito dalla presenza del corpo B. Ma, se, a parità di carica  $\eta$  su A, il potenziale  $V$  è diminuito, ciò significa che la capacità del conduttore A è aumentata. Questa capacità aumenta ancora di più, quando il corpo B viene messo in comunicazione con la terra; il terzo integrale poi scompare e inoltre, come sappiamo,  $k'$  aumenta, cosicché il corpo A prende un certo potenziale  $V''$  ancora più piccolo di  $V'$ . La capacità di un conduttore dipende quindi non solo dal numero, dalla forma e dalla posizione dei conduttori circostanti, ma anche dal fatto che alcuni di questi conduttori siano isolati o messi a terra, nonché dalla natura del mezzo ambiente. In base a ciò, la nozione di capacità contiene una certa indeterminazione, che può essere eliminata adottando la seguente definizione: *la capacità di un conduttore è misurata dalla carica, che porta il potenziale di questo conduttore all'unità, quando tutti gli altri conduttori vicini sono messi a terra*. Secondo questa definizione, la capacità di un conduttore dipende dalla sua forma e dimensione specifica, dal numero, dalla forma e dalla posizione dei conduttori vicini, nonché dal mezzo intermedio.

Limitiamoci al caso in cui i calcoli sono particolarmente semplici e di interesse pratico, in cui oltre al conduttore A in esame vi è un solo conduttore attiguo B messo a terra. Supponiamo che il corpo A comunichi con una sorgente di elettricità, che lo mantenga, in ogni circostanza, allo stesso potenziale  $V$  specifico di tale sorgente; sia  $V > 0$ . Indichiamo con  $\eta_0$  la carica del corpo A preso separatamente; la capacità di questo corpo

$$q = \frac{\eta_0}{V} \quad (1.0.97)$$

dipende solo dalle sue dimensioni, dalla sua forma e dall'ambiente circostante. Se ora separiamo il corpo A dalla sorgente del potenziale  $V$  e ci avviciniamo al corpo B (fig. 47) messo a terra T, su quest'ultimo compare una carica negativa, per cui il potenziale di A diminuisce. Quando poi si collega di nuovo A con la sorgente, una nuova quantità di elettricità passa dalla sorgente ad A, la cui carica aumenta.

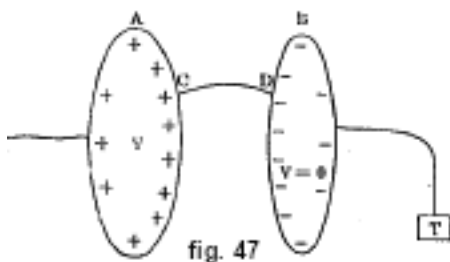


fig. 47

L'equilibrio è stabilito quando il potenziale di A ridiventa uguale a  $V$ , nonostante la presenza di B; inoltre la carica  $\eta$  di A è  $> \eta_0$ . La carica negativa di B deve essere tale che, nonostante la presenza di A e l'aumento della sua carica positiva, il potenziale di B rimanga nullo. Invece di  $q$ , ora abbiamo la capacità

$$Q = \frac{\eta}{V} \quad (1.0.98)$$

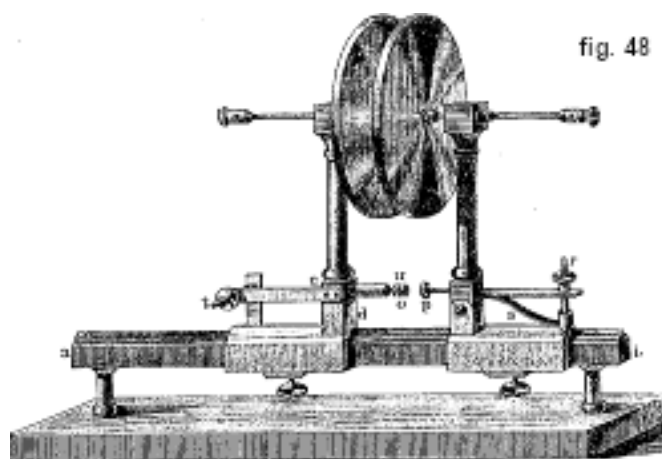
Il sistema formato dai due corpi A e B, il primo dei quali A può essere messo in comunicazione con una sorgente di elettricità, e il secondo B con la terra, si chiama *condensatore*; si può

infatti dire che l'elettricità si condensa sul corpo A, perché la carica di questo corpo aumenta della quantità  $\eta - \eta_0$  per la presenza di B. La capacità  $Q$ , calcolata secondo la formula (53,k), che dipende quindi dalla posizione dei corpi A e B in un dato mezzo o, in altre parole, dalla costruzione del condensatore, si chiama capacità del condensatore. Il rapporto

$$\alpha = \frac{Q}{q} \quad (1.0.99)$$

tra la capacità del condensatore e la capacità del conduttore preso isolatamente, che è posto in comunicazione con una sorgente di elettricità, si chiama la forza condensante del condensatore; questo numero indicato di quante volte la capacità del conduttore A è aumentata dalla presenza del conduttore B messo a terra.

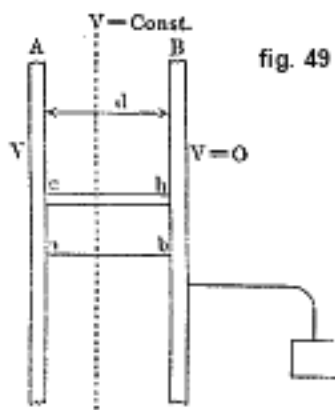
Conosceremo in seguito alcune forme di condensatori. Di solito prendiamo per i corpi A e B sottili piastre metalliche, la cui forma può variare. In pratica le cariche si trovano sulle superfici affacciate dei corpi A e B; è per questo che spesso si parla non dei due corpi che costituiscono il condensatore, ma delle sue due superfici comunicanti, l'una con una sorgente di elettricità, l'altra con la terra. Il più semplice di tutti i condensatori è quello piano; la figura 48 indica la forma datagli da Kohlrausch. Esso è costituito da due piastre metalliche verticali, avvitate alle estremità di due aste orizzontali, che portano all'altra estremità viti di pressione. Il montaggio dell'intero strumento è il seguente. Lungo il regolo prismatico orizzontale  $ab$ , che poggia su due piedi, si spostano due prismi cavi in rame, fissabili mediante viti poste nella loro parte inferiore. Su queste guide si ergono colonnette verticali di legno o vetro, le cui parti superiori sono attraversate dalle aste orizzontali delle piastre; queste ultime vengono accuratamente isolate con gomma o altre sostanze isolanti. Per stabilire il parallelismo delle piastre, vengono utilizzate viti  $r$  e  $t$ ; la vite e il dado  $r$  e la lamella  $s$  che formano una molla permettono alla zona di ruotare l'armatura destra del condensatore, attorno ad un asse orizzontale parallelo alle facce delle armature; la vite e il dado  $t$ , così come la lamella posta dietro l'asta  $cl$ , consentono di far ruotare la colonnetta di sinistra e contemporaneamente la piastra sinistra che le è solidale, attorno ad un asse verticale. Le teste delle viti  $o$  e  $p$  servono per portare più rapidamente le piastre ad una determinata distanza l'una dall'altra; una delle piastre del condensatore comunica con una sorgente di elettricità, l'altra è a terra.



In particolare, il condensatore planare viene utilizzato per rafforzare le indicazioni degli elettroscopi. L'elettroscopio condensatore è solitamente costituito da una piastra metallica orizzontale verniciata, che sostituisce la sfera dell'elettroscopio comune; su questa piastra ne poggia una seconda identica, provvista di una bacchetta di vetro che funge da manico. Le due piastre sono isolate l'una dall'altra dallo strato di vernice e di conseguenza formano un condensatore piano. Per caricare questo condensatore, una delle piastre è messa a terra toccandola



con il dito, mentre si collega l'altra al corpo troppo poco elettrizzato o alla sorgente di elettricità troppo debole per produrre un'azione sufficientemente sensibile sull'elettroscopio ordinario. Nel condensatore, due quantità relativamente grandi di elettricità si accumulano sulle facce affacciate delle due armature. Quando la comunicazione tra le piastre con la terra e con l'oggetto allo studio è interrotta e quando la piastra superiore viene poi rimossa, l'elettricità condensata sulla superficie superiore della piastra inferiore passa in parte sull'asta metallica e sulle foglie dell'elettroscopio, provocandone la divergenza, che si trova relativamente grande.



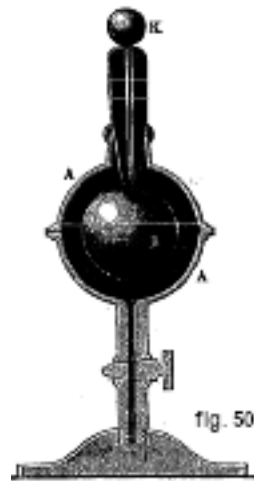
L'elettricità non si distribuisce uniformemente sulle due superfici di un condensatore piano, per cui lo studio di un tale condensatore presenta grandi difficoltà. Ecco perché, quando si studia il problema dal punto di vista teorico, si considera un condensatore piano con piastre infinitamente grandi A e B (fig. 49). La densità  $k$  dell'elettricità è costante in tutti i punti della superficie di una tale piastra; le superfici di livello del potenziale sono piani paralleli alle piastre; le linee di forza  $ab$  e i tubi di forza  $ch$  sono rettilinei e perpendicolari a queste piastre. Siccome alle due estremità di un tubo devono esserci uguali quantità di elettricità, le densità delle elettricità di nomi opposti sulle due lastre sono uguali in valore assoluto. Lo spazio tra le piastre rappresenta un campo elettrico uniforme. Quando si passa al caso di un condensatore piano a piastre finite, si può dire che, se i raggi delle piastre sono molto grandi rispetto alla loro distanza, la parte centrale dello spazio compreso tra le piastre ha le stesse proprietà.

Consideriamo ora la dipendenza che esiste tra la capacità di un condensatore e il mezzo in cui si trova. Abbiamo già visto che la capacità di un singolo conduttore è proporzionale alla costante dielettrica  $K$  del mezzo che lo circonda. Ci si può facilmente convincere che sia lo stesso per la capacità di un condensatore. Sia  $Q_0 = \eta/v$  la capacità di un condensatore in aria. Se l'aria viene sostituita da un altro dielettrico, senza cambiare la carica, il potenziale diventa  $K$  volte più piccolo; per tornare al precedente potenziale, bisogna aumentare la carica  $K$  volte, quindi la nuova capacità è  $Q = KQ_0$ . Ripetiamo lo stesso ragionamento, in termini leggermente diversi, per il condensatore piano (fig. 49). Il potenziale  $V$  della piastra A è uguale al lavoro  $r$  svolto nel trasporto della quantità unitaria di elettricità da A a B, seguendo un percorso qualunque. Quando l'aria tra le piastre viene sostituita da un altro dielettrico, l'intensità del campo in tutti i punti del percorso diventa, secondo la legge di Coulomb,  $K$  volte minore; il lavoro  $r$  diminuisce di conseguenza e quindi anche il potenziale  $V$  della piastra A, assumendo che la sua carica rimanga invariata. Se A comunica con una sorgente di elettricità, la carica deve essere resa  $K$  volte maggiore per mantenere il potenziale  $V$ . Queste considerazioni si estendono facilmente al caso generale, a cui si riferisce la figura 46, e l'uguaglianza:

$$Q = KQ_0 \quad (1.0.100)$$

è così dimostrata.

Un condensatore tra le cui superfici c'è aria, è chiamato condensatore ad aria. La formula (54) mostra che la capacità di un condensatore con un dielettrico diverso dall'aria è maggiore della capacità dell'identico condensatore ad aria. Abbiamo introdotto la costante dielettrica quando abbiamo formulato la legge di Coulomb e quindi siamo arrivati alla formula (54). Si procede talvolta in modo inverso e si parte dalla seguente definizione: *la costante dielettrica o il potere induttivo di un dielettrico è il rapporto tra la capacità di un condensatore con tale dielettrico e la capacità dello stesso condensatore in aria*. Abbiamo usato questa definizione nel Volume II, e se la si prende come punto di partenza, si può arrivare alla legge di Coulomb espressa dalla formula (11).



L'influenza del dielettrico, intermedio tra le superfici conduttrici, sulla capacità di un condensatore fu scoperta da Cavendish nel 1770; ma le notevoli ricerche di questo studioso rimasero ignorate per quasi un secolo, fino alla pubblicazione nel 1879 da parte di Cl. Maxwell dei manoscritti inediti di Cavendish; in questi manoscritti erano contenute anche misure del valore di  $K$  per diversi dielettrici. J. J. Borgman ha costruito uno strumento che dimostra l'influenza del dielettrico di cui abbiamo appena parlato, con un metodo che ricorda quello di Cavendish.

L'influenza sulla capacità dei condensatori del dielettrico intermedio fu trovata nel 1838 da Faraday; questa è una delle scoperte più importanti di questo geniale fisico, sia dal punto di vista della profondità delle idee che da quello della loro realizzazione. Faraday ha utilizzato due condensatori sferici, uno dei quali è rappresentato dalla figura 50. Consiste in una sfera cava  $A$ , formata da due emisferi sovrapposti l'uno sull'altro; uno di questi emisferi presenta un tubo provvisto di un rubinetto, che serve a togliere l'aria per mezzo di una pompa e a sostituirla con un altro gas. All'interno della sfera  $A$  c'è la sfera  $B$ , sulla quale termina l'estremità inferiore di un filo, provvisto all'altra sua estremità di una sferetta  $R$  e isolata molto accuratamente da uno spesso strato di gommalacca; la sfera  $B$  è messa in comunicazione con una sorgente di elettricità, la sfera  $A$  con la terra. Le superfici del condensatore sono la superficie della sfera  $B$  e la superficie interna della sfera  $A$ ; il diametro di  $B$  era di  $5,92\text{ cm}$ , il diametro interno di  $A$   $9,07\text{ cm}$ . Faraday mise l'uno vicino all'altro due di questi condensatori, il più possibile identici, e collegò prima la sferetta  $K$  di uno con il conduttore di una macchina elettrica, mentre  $A$  era a terra; il condensatore si è così caricato e la sfera  $B$  ha acquistato una certa carica  $\eta = VQ_1$ , essendo  $V$  il potenziale della sfera  $B$  e  $Q_1$  la capacità del condensatore riempito d'aria. Il grado di elettrizzazione della sfera  $B$  è ovviamente determinato sia dalla grandezza  $V$  che da  $\eta$ . Per ottenere una misura di questo grado di elettrizzazione, Faraday ha portato una piccola sfera, fissata ad una bacchetta di vetro (la sfera immobile una bilancia di torsione, vedi dopo), a contatto con  $K$ , in modo che questa piccola sfera ricevesse una certa carica  $\eta'$ , la cui intensità è stata valutata, mediante la bilancia di torsione, in unità arbitrarie.

Si può prendere la carica  $\eta'$  proporzionale alla carica  $\eta$ , e di conseguenza anche al potenziale  $V$ , cioè si può supporre che Faraday misurò i potenziali delle sfere interne dei suoi condensatori e che la misura precedente dava il potenziale  $V$ . Faraday ha quindi collegato un istante le sfere  $K$  dei due condensatori e misurato, con lo stesso metodo, i potenziali  $V_1$  e  $V_2$  delle sfere B dei due condensatori, tra i quali è stata distribuita la carica  $\eta$ ; introdusse inoltre una certa correzione relativa a quella che viene chiamata la carica residua, di cui parleremo più avanti, e che era prodotta dallo strato di gommalacca tra A e B. Siccome dei conduttori collegati devono avere lo stesso potenziale, si troverà  $V_1 = V_2$ . Ma, in realtà, non ottenne del tutto gli stessi valori per  $V_1$  e  $V_2$ , e prese come valore comune dei potenziali la grandezza  $V' = \frac{1}{2}(V_1 + V_2)$ . Sia  $Q_2$  la capacità del secondo condensatore. Nel momento della loro riunione, i condensatori rappresentano in qualche modo un condensatore unico, la cui capacità è  $Q_1 + Q_2$ , la carica  $\eta$  e il potenziale  $V'$ , di modo che  $\eta = V'(Q_1 + Q_2)$ . Tenendo conto dell'eguaglianza  $\eta = VQ$ , si ha

$$VQ_1 = V'(Q_1 + Q_2)$$

da cui

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{V - V'}{V'} \quad (1.0.101)$$

Avendo Faraday fatto una misura per le grandezze  $V$  e  $V'$ , poteva così trovare il rapporto tra le capacità dei due condensatori.

Quando i due condensatori erano riempiti d'aria, ottenne approssimativamente  $V' = V/2$ , cioè  $Q_2 = Q_1$ . Ma quando la metà inferiore dell'intervallo tra A e B era riempita, nel secondo condensatore, di gommalacca per esempio, si aveva in media  $Q_2 = 1,5Q_1$ , cioè che la capacità del condensatore riempito per metà di gommalacca era una volta e mezza più grande di quella del condensatore contenente solo aria. Il valore di  $K$  per la gommalacca è così determinata, anche se non rigorosamente. Sia  $q$  la capacità della metà del condensatore riempito d'aria; si ha

$$Q_1 = q + q = 2q \quad Q_2 = q + Kq = (1 + K)q$$

e di conseguenza

$$\frac{K + 1}{2} = \frac{Q_2}{Q_1} \quad (1.0.102)$$

Per la gommalacca  $Q_2 : Q_1 = 1,5$ : se ne deduce  $K = 2$ . Faraday ha trovato, con lo stesso metodo, che per lo spermaceti  $K$  oscilla tra 1,3 e 1,6, che per lo zolfo  $K = 2,24$  e per il vetro  $K = 1,76$ .

Passiamo ora alla descrizione di diversi altri condensatori.

I. CONDENSATORE PIANO. - Considereremo dapprima il condensatore piano ad armature indefinite o la parte centrale di un condensatore piano finito, essendo la distanza tra le armature piccola rispetto al raggio di queste armature. Cerchiamo la capacità della parte di tale condensatore corrispondente alla stessa area  $S$  su ciascuna delle due armature piane; sia  $d$  la distanza tra i piatti. Per maggiore generalità, supponiamo che i potenziali delle piastre A e B siano rispettivamente  $V_1$  e  $V_2$  (fig. 51).

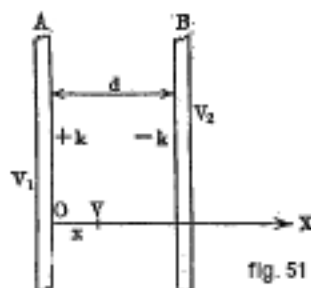


fig. 51

Sia  $\pm k$  la densità dell'elettricità sulle due piastre; la carica è  $\eta = kS$ . L'intensità  $F$  del campo è ovunque la stessa, perché le linee di forza sono parallele, e quindi questa intensità ha il valore relativo ai punti infinitamente vicini alla superficie delle piastre, cioè

$$F = \frac{4\pi k}{K}$$

La differenza di potenziale  $V_1 - V_2$  tra le due piastre è uguale al lavoro  $Fd$  compiuto nel trasporto dell'unità di quantità di elettricità di una piastra sull'altra. Si ha quindi

$$V_1 - V_2 = Fd = \frac{4\pi kd}{K}$$

se ne deduce

$$\frac{\eta}{V_1 - V_2} = \frac{KS}{4\pi d} \quad (1.0.103)$$

Ponendo  $V_2 = 0$ , si ottiene la capacità cercata

$$Q = \frac{\eta}{V_1} = \frac{KS}{4\pi d} \quad (1.0.104)$$

La formula (55,b) mostra che si può prendere, come misura della capacità di un condensatore piano, la carica di una delle armature, quando la differenza di potenziale delle due armature è uguale all'unità.

La capacità di un condensatore piano in aria è

$$Q = \frac{S}{4\pi d} \quad (1.0.105)$$

Se  $d$  è espresso in centimetri,  $S$  in centimetri quadrati, si trova, con la formula precedente,  $Q$  in unità el. st. di capacità; come abbiamo visto,  $9 \cdot 10^5$  di tali unità uguagliano un microfarad. Si ha che

$$Q = \frac{KS}{36 \cdot 10^5 \pi d} \text{ microfarad} \quad (1.0.106)$$

dovendo  $d$  essere espresso in centimetri,  $S$  in centimetri quadrati. Determiniamo il raggio  $R$  delle piastre circolari di un condensatore piano in aria (o più esattamente il raggio della parte centrale di piastre molto grandi), avendo si ha  $d = 1 \text{ mm}$  e  $Q = 1 \text{ } \mu\text{farad}$ . Abbiamo  $K = 1$ ,  $d = 0,1$ ,  $S = \pi R^2$ ; la formula (56,b) dà

$$\pi R^2 = 36 \cdot 10^5 \cdot 0,1 \pi$$

da cui

$$R = 600 \text{ cm} = 6 \text{ m} \quad (1.0.107)$$

La formula (56) mostra che *la capacità di un condensatore piano è inversamente proporzionale alla distanza tra le armature*.

Data la sua importanza, introdurremo ancora la formula (56) in un altro modo. Prendiamo l'origine delle coordinate sulla superficie della piastra A (fig. 51) e l'asse  $x$  perpendicolare a questa superficie. Il potenziale  $V$  dipende solo dalla variabile  $x$  e l'equazione (41,e), si riduce a  $\frac{d^2 V}{dx^2} = 0$ ; si ha quindi  $V = Ax + B$ , essendo  $A$  e  $B$  costanti determinate dalle condizioni  $V = V_1$  per  $x = 0$ ,  $V = V_2$  per  $x = d$ ; pertanto

$$V_1 = B \quad V_2 = Ad + B$$

Avendo determinato  $A$  e  $B$ , si trova

$$V = V_1 - \frac{V_1 - V_2}{d} x$$

La formula (44,a) dà

$$k = -\frac{K}{4\pi} \frac{\partial V}{\partial n} = -\frac{K}{4\pi} \left( \frac{\partial V}{\partial n} \right)_{x=0} = \frac{K(V_1 - V_2)}{4\pi d} \quad (1.0.108)$$

Se ne deduce la capacità

$$Q = \frac{\eta}{V_1 - V_2} = \frac{KS}{V_1 - V_2} = \frac{KS}{4\pi d}$$

cioè la formula (56). Si otterrebbe lo stesso risultato ponendo  $V_2 = 0$ . La densità  $k_1$  sulla superficie B è

$$k_1 = -\frac{K}{4\pi} \left\{ \frac{dV}{d(-x)} \right\}_{x=d} = -\frac{KV_1}{4\pi d} = -k$$

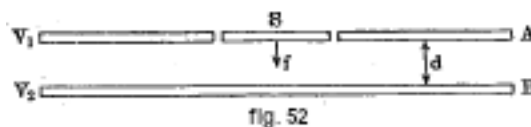
Abbiamo ottenuto, per la tensione superficiale  $P$ , vale a dire per la forza sull'unità di area, l'espressione (25); quest'ultima ci dà la forza  $f$  che agisce sulla superficie  $S$ , cioè la forza con la quale le parti delle armature di un condensatore piano si attraggono reciprocamente, essendo  $S$  l'area di ciascuna di queste parti e la loro distanza  $d$ . Si ha

$$f = PS = \frac{2\pi k^2 S}{K}$$

Sostituendo il valore (56,d) di  $k$ , viene

$$f = \frac{(V_1 - V_2)^2 KS}{8\pi d^2} \quad (1.0.109)$$

Tutto i nostri ragionamenti si basano sull'ipotesi che la densità  $k$  è la stessa in tutti i punti delle armature; ma ciò può essere considerato vero solo per le parti centrali di un grande condensatore, di cui almeno una deve essere resa mobile. Lord Kelvin ha costruito un condensatore di questo genere: nella piastra circolare A (fig. 52) è ritagliata un'apertura ancora circolare, che è quasi esattamente riempita dalla piastra S; quest'ultima è tenuta in posizione da una molla o da qualsiasi altro processo simile. La parte della piastra A che circonda la piastra S è chiamata piastra o anello di guardia, perché in qualche modo preserva la piastra S da una distribuzione non uniforme dell'elettricità. La formula (57) dà l'espressione della forza che agisce sulla piastra mobile S nella direzione della piastra B. Comunemente si chiama forza  $f$  la forza di mutua attrazione tra le piastre del condensatore piano.



La formula (57) mostra che la forza  $f$  è proporzionale al quadrato della differenza di potenziale delle armature del condensatore, inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza e direttamente proporzionale alla costante dielettrica del mezzo intermedio. Kirchhoff e Maxwell hanno dato una formula più esatta per la capacità  $Q$ , nella quale si tiene conto della fenditura circolare che separa la piastra mobile dall'anello di guardia. Se si esprime  $V_1 - V_2$  in unità el. st. C.G.S.,  $d$  in centimetri, e  $S$  in centimetri quadrati,  $f$  è espressa in dyne ( $1 \text{ dyne} = 1,02 \text{ mg}$ ). Si ha, ad esempio, dalla formula (57), nel caso in cui  $S = 10 \text{ cm}^2$ ,  $d = 1 \text{ mm} = 0,1 \text{ cm}$ ,  $K = 1$  (aria),  $V_1 - V_2 = 100 \text{ volt} = \frac{1}{3}$  unità el. st. CGS, dalla (43,a),  $f = 4,42 \text{ dyne} = 4,51 \text{ mg}$ .

La formula (56) si riferisce al caso in cui il dielettrico riempie completamente lo spazio tra le piastre, cioè forma uno strato di spessore  $d$ . Cerchiamo la capacità  $Q$ , nel caso in cui lo spessore dello strato dielettrico è  $d' < d$ . La somma degli spessori degli strati d'aria è  $d - d'$ . Il lavoro  $r$ ,

nel trasporto dell'unità di quantità di elettricità da una piastra all'altra, lungo la direzione delle linee di forza, è

$$r = V_1 - V_2 = F(d - d') + \frac{F}{K}d' = 4\pi k \left( d - d' + \frac{d'}{K} \right)$$

poiché  $F$ , l'intensità del campo in aria, è uguale a  $4\pi k$ . La capacità cercata è

$$Q = \frac{\eta}{V_1 - V_2} = \frac{kS}{4\pi k \left( d - d' + \frac{d'}{K} \right)} = \frac{S}{4\pi \left( d - d' + \frac{d'}{K} \right)} \quad (1.0.110)$$

Si vede che l'introduzione di uno strato dielettrico diverso dall'aria equivale ad una diminuzione  $d' \frac{K-1}{K}$  della distanza  $d$ . L'introduzione di uno strato conduttore isolato ( $K = \infty$ ) di spessore  $d'$  corrisponde ad una diminuzione  $d - d'$  della distanza  $d$ . Vi è, tuttavia, una differenza importante tra gli effetti sulla capacità  $Q$  di strati dielettrici o conduttori; l'azione di uno strato conduttore è la stessa sia che sia pieno che cavo, mentre uno strato dielettrico dà, in questi due casi, risultati ben diversi.

La capacità di un condensatore piano finito, le cui due piastre circolari hanno uno spessore  $b$ , un raggio  $r$ , e distano tra loro  $d$ , è stata determinata da Kirchhoff e Clausius. Questa capacità è

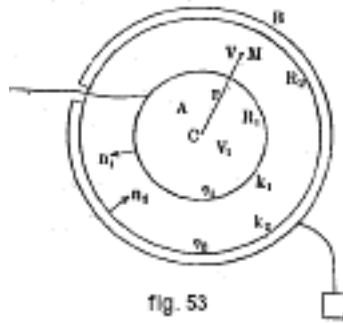
$$Q = \frac{Kr^2}{4d} + \frac{rK}{4\pi} \left\{ 1 + \log \frac{16\pi(d+b)r}{d^2} + \frac{b}{d} \log \frac{b+d}{b} \right\} \quad (1.0.111)$$

Quando  $d$  è molto piccolo rispetto a  $r$ , ci si può limitare al primo termine, che è identico alla (56). La formula (53,d) dà, per la forza di condensante di un condensatore piano, se si adotta il valore (50,d) di  $q$

$$\alpha = \frac{Q}{q} = \frac{Kr^2}{4d} : \frac{2rK}{\pi} = \frac{\pi r}{8d} \quad (1.0.112)$$

Quando  $r$  è grande e  $d$  piccolo, si ottiene una grande forza di condensante  $\alpha$ .

Altre ricerche sui condensatori piani sono dovute a Maxwell e Magini e Kaufmann (1907).



**CONDENSATORE SFERICO.** - Consiste in una sfera cava B (fig. 53), nella quale vi è una seconda sfera concentrica A; la sfera A è posta in comunicazione con una sorgente di elettricità, attraverso una piccola apertura praticata nella sfera esterna, che è messa a terra. Siano  $R_1$  il raggio della sfera A,  $R_2$  il raggio della superficie interna della sfera B,  $V_1$  il potenziale,  $\eta_1$  la carica e  $k_1 = \eta_1 : 4\pi R_1^2$  la densità superficiale sulla sfera A,  $V_2 = 0$ ,  $\eta_2$  e  $k_2 = \eta_2 : 4\pi R_2^2$  le grandezze corrispondenti sulla sfera B. Dalle (45) e (45,b) per il potenziale interno e quello esterno di una sfera, si ha

$$V_1 = \frac{\eta_1}{KR_1} + \frac{\eta_2}{KR_2}$$

$$V_2 = 0 = \frac{\eta_1}{KR_2} + \frac{\eta_2}{KR_2}$$

La seconda equazione dà  $\eta_2 = -\eta_1$ , così come previsto dal teorema di Faraday. La prima equazione dà allora

$$V_1 = \frac{\eta_1}{K} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{\eta_1}{K} \cdot \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}$$

Si ricava, per la capacità di un condensatore sferico

$$Q = \frac{\eta_1}{V_1} = \frac{K R_1 R_2}{R_2 - R_1} \quad (1.0.113)$$

Nell'aria

$$Q = \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \quad (1.0.114)$$

La capacità  $q$  della sola sfera interna è  $K R_1$ ; se ne deduce, per la forza condensante di un condensatore sferico, l'espressione

$$\alpha = \frac{q}{Q} = \frac{R_2}{R_2 - R_1} \quad (1.0.115)$$

Per  $R_2 = 10 \text{ cm}$  e  $R_2 - R_1 = 2 \text{ mm} = 0,2 \text{ cm}$ , si ha  $\alpha = 50$ . Supponiamo  $R_2 - R_1 = d$  molto piccolo rispetto a  $R$  e a  $R_2$ ; si può allora sostituire  $R_1 R_2$  con  $R^2$ , essendo  $R$  il raggio medio, e si ottiene

$$Q = \frac{K R^2}{d} = \frac{4\pi R^2 K}{4\pi d} = \frac{K S}{4\pi d} \quad (1.0.116)$$

essendo  $S$  la superficie del condensatore; la formula (58,c) è la forma identica alla (56).

Indicheremo ancora un altro modo di introdurre la formula (58,a).

Per maggiore generalità, supponiamo che il potenziale  $V_2$  della sfera B non sia nullo. Se si introducono coordinate polari aventi come origine il centro C, il potenziale  $V$  in un punto qualunque M tra A e B è una funzione solo di  $r$  ( $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ) e si può scrivere  $V = f(r)$ . La grandezza  $V$  deve soddisfare nel punto M all'equazione di Laplace

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

questa equazione di trasforma come si sa, introducendo la variabile indipendente  $r$  nel modo seguente

$$\frac{d^2 V}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dV}{dr} = 0$$

che è facilmente integrabile, ponendo dapprima  $\frac{dV}{dr} = Z$ ; si ottiene infine  $V$  nella forma

$$V = A + \frac{B}{r} \quad (1.0.117)$$

Dalle equazioni di condizione

$$V_1 = A + \frac{B}{R_1} \quad V_2 = A + \frac{B}{R_2}$$

si ricavano i valori delle costanti  $A$  e  $B$ , e si ha

$$V = \frac{R_2 V_2 - R_1 V_1}{R_2 - R_1} + \frac{R_1 R_2 (V_1 - V_2)}{R_2 - R_1} \cdot \frac{1}{r} \quad (1.0.118)$$

Si trova per le densità

$$k_1 = \frac{K}{4\pi} \frac{\partial V}{\partial n_1} = -\frac{K}{4\pi} \left( \frac{dV}{dr} \right)_{r=R_1} = \frac{K R_2 (V_1 - V_2)}{4\pi R_1 (R_2 - R_1)}$$

$$k_2 = -\frac{K}{4\pi} \frac{\partial V}{\partial n_2} = -\frac{K}{4\pi} \left( \frac{dV}{d(-r)} \right)_{r=R_2} = -\frac{K R_1 (V_1 - V_2)}{4\pi R_2 (R_2 - R_1)}$$

Le quantità di elettricità sono

$$\begin{cases} \eta_1 = 4\pi R_1^2 k_1 = \frac{K R_1 R_2}{R_2 - R_1} (V_1 - V_2) \\ \eta_2 = 4\pi R_2^2 k_2 = -\frac{K R_1 R_2}{R_2 - R_1} (V_1 - V_2) \end{cases} \quad (1.0.119)$$

da cui  $\eta_2 = -\eta_1$ . Si ottiene per la capacità

$$Q = \frac{\eta_2}{V_1 - V_2} = \frac{K R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

in accordo con la (58). Vediamo che  $Q$  è misurato dalla carica corrispondente a  $V_1 - V_2 = 1$ , senza che si abbia forzatamente  $V_2 = 0$ . La capacità di un condensatore sferico espressa in microfarad è, si veda la (49,d) e la (56,b)

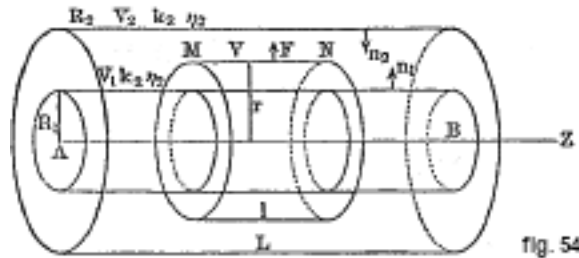
$$Q = \frac{K R_1 R_2}{9 \cdot 10^5 (R_2 - R_1)} \text{ microfarad}$$

o, quando  $R_2 - R_1 = d$  è piccolo, si veda la (58,c),

$$Q = \frac{K R^2}{9 \cdot 10^5 d} \text{ microfarad}$$

Se si pone  $K = 1$ ,  $d = 1 \text{ mm} = 0,1 \text{ cm}$  e  $Q = 1 \text{ microfarad}$ , si trova  $R = 300 \text{ cm} = 3 \text{ m}$ .

III. CONDENSATORE CILINDRICO. - Siano due cilindri circolari conduttori di lunghezza indefinita aventi AB per asse comune (fig. 54),  $R_1$  il raggio della sezione trasversale del cilindro interno,  $R_2$  il raggio della superficie interna del cilindro esterno,  $V_1$  e  $V_2$  i potenziali dei cilindri,  $k_1$  e  $k_2$  le densità delle cariche. Supponiamo di staccare dal condensatore così costituito un tratto di lunghezza  $L$  e cerchiamo la capacità  $Q$  di tale tratto; siano  $\eta_1, \eta_2$  le cariche sulle parti staccate nei due cilindri. Per ragioni di simmetria, le superfici di livello del potenziale devono essere superfici cilindriche aventi asse AB; in altre parole, il potenziale  $V$  in un punto tra i cilindri è una funzione della distanza  $r$  da questo punto all'asse AB. Si consideri una parte MN di lunghezza  $l$  di una tale superficie cilindrica di livello; le linee di forza, che sono ortogonali a questa superficie, sono rettilinee e dirette lungo  $r$ .



Applichiamo alla superficie del cilindro MN il teorema sul flusso di induzione; la superficie laterale è uguale a  $2\pi r l$ , e se  $F$  è l'intensità del campo, essendo il flusso  $\psi$  attraverso la superficie totale del cilindro MN è  $\psi = 2\pi r l F K$ , essendo ovviamente nullo il flusso attraverso le basi; d'altra parte la quantità di elettricità contenuta all'interno di questo cilindro è  $\eta_0 = 2\pi R_1 l k_1$ ; ma si deve avere  $\psi = 4\pi \eta_0$ , e sostituendo i precedenti valori di  $\psi$  e di  $\eta_0$ , si trova

$$F = \frac{C}{r}$$



dove  $C$  è una costante, cioè una quantità indipendente da  $r$ . L'uguaglianza  $F = -\frac{\partial V}{\partial n}$ , nella quale  $n$  indica la normale alla superficie di livello considerata, dà

$$F = -\frac{\partial V}{\partial n} = -\frac{dV}{dr} = \frac{C}{r}$$

Ne risulta che il potenziale  $V$  è una funzione di  $r$  della forma

$$V = A + B \ln r \quad (1.0.120)$$

essendo  $A$  e  $B$  costanti. Si può ancora stabilire questa formula in altro modo. Si ha  $V = f(r)$ , dove  $r^2 = x^2 + y^2$ , quando si prende come asse del condensatore l'asse  $z$ . L'equazione di Laplace, trasformata dall'introduzione della variabile indipendente  $r$ , dà

$$\frac{d^2 V}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} = 0$$

quest'ultima equazione si integra facilmente e dà per  $V$  un'espressione della forma (60). Determiniamo le costanti  $A$  e  $B$  dalle equazioni di condizione  $V = V_1$ , per  $r = R_1$  e  $V = V_2$  per  $R = R_2$ ; abbiamo

$$V_1 = A + B \ln R_1 \quad V_2 = A + B \ln R_2$$

Si ricava

$$V = \frac{V_1 \ln R_2 - V_2 \ln R_1}{\ln R_2 - \ln R_1} - \frac{V_1 - V_2}{\ln R_2 - \ln R_1} \ln r$$

Si ha per le densità  $k_1, k_2$  le espressioni

$$\begin{cases} k_1 = -\frac{K}{4\pi} \frac{\partial V}{\partial n_1} = -\frac{K}{4\pi} \left( \frac{dV}{dr} \right)_{r=R_1} = -\frac{K(V_1 - V_2)}{4\pi(\ln R_2 - \ln R_1)} \cdot \frac{1}{R_1} \\ k_2 = -\frac{K}{4\pi} \frac{\partial V}{\partial n_2} = -\frac{K}{4\pi} \left( \frac{dV}{d(-r)} \right)_{r=R_2} = -\frac{K(V_1 - V_2)}{4\pi(\ln R_2 - \ln R_1)} \cdot \frac{1}{R_2} \end{cases} \quad (1.0.121)$$

e per le cariche

$$\begin{cases} \eta_1 = 2\pi R_1 L k_1 = \frac{K(V_1 - V_2)L}{2 \ln \frac{R_2}{R_1}} \\ \eta_2 = 2\pi R_2 L k_2 = -\frac{K(V_1 - V_2)L}{2 \ln \frac{R_2}{R_1}} \end{cases} \quad (1.0.122)$$

Si trova  $\eta_2 = -\eta_1$ , come deve essere secondo il teorema di Faraday. Si vede che anche qui la carica, che serve come misura della capacità  $Q$ , si ottiene ponendo sia  $V_1 - V_2 = 1$ , sia  $V_2 = 0$  (cilindro esterno messo a terra) e  $V_1 = 0$ . Si comprende che ad un risultato analogo si deve sempre pervenire, quando uno dei corpi che formano il condensatore circonda completamente l'altro, e quando il potenziale  $V_1$  dell'altro corpo dipende esclusivamente dalla carica che si trova sulla superficie esterna. Si ottiene, per la capacità di una sezione  $L$  di condensatore cilindrico,

$$Q = \frac{\eta_1}{V_1 - V_2} = \frac{KL}{2 \log \frac{R_2}{R_1}} = \frac{0,21KL}{2 \log \frac{R_2}{R_1}} \quad (1.0.123)$$

essendo  $\log$  il logaritmo comune di Briggs; esprimendo questa capacità in microfarad, si ha

$$Q = \frac{KL}{18 \cdot 10^5 \ln \frac{R_2}{R_1}}$$

Se  $R_2 - R_1 = d$  è piccolo rispetto a  $R_1$ , si può porre

$$\log \frac{R_2}{R_1} = \log \left( 1 + \frac{R_2 - R_1}{R_1} \right) = \log \left( 1 + \frac{d}{R_1} \right) = \frac{d}{R_1}$$

e si ha pertanto

$$Q = \frac{KL R_1}{2d} = \frac{2\pi L R_1 K}{4\pi d} = \frac{KS}{4\pi d} \quad (1.0.124)$$

Questa espressione è identica alla (56) e (58,c). I cavi telegrafici sottomarini possono essere considerati come condensatori cilindrici, nei quali il nucleo metallico svolge il ruolo di cilindro interno, l'armatura o semplicemente l'acqua di mare il ruolo di cilindro esterno e infine lo strato isolante il ruolo di dielettrico intermedio a cui si riferisce la costante  $K$ .

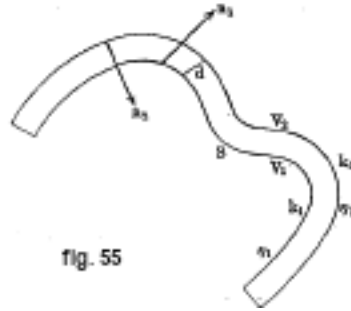
Quando gli assi dei due cilindri non coincidono perfettamente, ma sono a piccola distanza  $d$  l'uno dall'altro, si ha, come ha mostrato J. J. Thomson, la seguente espressione più complicata

$$Q = \frac{KL}{2 \ln \frac{R_2}{R_1}} \left\{ 1 + \frac{d^2}{(R_2^2 - R_1^2) \log \frac{R_2}{R_1}} \right\} \quad (1.0.125)$$

Nel caso di due cilindri paralleli uguali, se  $d$  è la distanza tra gli assi,  $R$  il raggio della sezione trasversale dei cilindri,  $L$  la lunghezza della porzione dei due cilindri considerati, la capacità è data dalla formula

$$Q = \frac{KL}{4 \ln \frac{d}{R}} \quad (1.0.126)$$

IV. CONDENSATORE DI FORMA QUALSIASI. - Supporremo che la distanza  $d$  tra le due superfici del condensatore sia piccola, potendo tale distanza inoltre variare nei diversi punti del condensatore.



Conserviamo a  $V_1, V_2, k_1, k_2, \eta_1, \eta_2$  il significato precedente (fig. 55); sia  $S$  l'area del condensatore, che è sostanzialmente la stessa per entrambe le superfici, per la piccolezza di  $d$ . Si ottiene un valore approssimato della capacità  $Q$ , sostituendo  $\frac{\partial V}{\partial n}$ , nelle formule che esprimono  $k_1$  e  $k_2$ , dapprima con  $\Delta V / \Delta n$  e poi prendendo  $\Delta n = d$  e quindi  $\Delta V = V_1 - V_2$ . Si ha allora

$$k_1 = \frac{K}{4\pi} \frac{\partial V}{\partial n_1} = \frac{K (V_1 - V_2)}{4\pi d}$$

$$k_2 = -\frac{K}{4\pi} \frac{\partial V}{\partial n_2} = -\frac{K (V_1 - V_2)}{4\pi d}$$

e per le cariche

$$\eta_1 = \int k_1 ds = \frac{K (V_1 - V_2)}{4\pi} \int \frac{dS}{d}$$

$$\eta_2 = \int k_2 ds = -\frac{K (V_1 - V_2)}{4\pi} \int \frac{dS}{d}$$

dove  $\eta_2 = -\eta_1$ , come deve essere per il teorema di Faraday. Si trova per la capacità

$$Q = \frac{\eta_1}{V_1 - V_2} = \frac{K}{4\pi} \int \frac{dS}{d}$$

Se lo spessore  $d$  dello strato dielettrico è ovunque lo stesso, si ha

$$Q = \frac{KS}{4\pi d} \quad (1.0.127)$$

Questa formula generalizza le espressioni (56), (58,c) e (60,c). Partendo da questo risultato approssimato, si vede che la capacità di un condensatore è generalmente proporzionale alla sua superficie totale nonché al potere induttivo del dielettrico intermedio e inversamente proporzionale alla distanza delle superfici conduttrici.

Clausius (1802) ha mostrato come si potesse ottenere una seconda approssimazione. Sia  $S_1$  una delle superfici e  $V_1$  il suo potenziale; allo stesso modo sia  $S_2$  l'altra superficie e  $V_2$  il suo potenziale. Tra queste due superfici, il potenziale è variabile e lo rappresenteremo semplicemente con  $V$ . Prendiamo un punto sulla superficie  $S_1$  per origine di un sistema di coordinate rettangolari, il cui asse  $z$  è la normale in questo punto (contato come positivo verso l'esterno), e i cui assi  $x$  e  $y$  sono due rette rettangolari arbitrarie situate nel piano tangente. Poiché questa origine appartiene alla superficie  $S_1$ , il potenziale  $V$  vale  $V_1$ . Ma se partiamo da questo punto nella direzione dell'asse  $z$ , il potenziale varierà, e nel punto in cui l'asse  $z$  interseca la superficie  $S_2$ , avrà il valore  $V_2$ . Potremo quindi, indicando con  $d$  la distanza tra le due superfici, scrivere secondo la formula di Taylor

$$V_2 = V_1 + \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right)_1 d + \left( \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right)_1 \frac{d^2}{2} + \dots$$

Ora, poiché per ipotesi la distanza  $d$  è una quantità molto piccola, rapportandola ad un'unità paragonabile alle dimensioni dello spazio delimitato dalla superficie  $S_1$ , possiamo limitarci ai primi termini di questa serie ordinata secondo la potenze crescenti di  $d$ ; trascureremo i termini superiori al secondo ordine, e quindi prenderemo solo i primi tre termini del secondo membro. Passando  $V_1$  nel primo membro, possiamo pertanto scrivere

$$V_2 - V_1 = \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right)_1 d + \left( \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right)_1 \frac{d^2}{2} \quad (1.0.128)$$

Servendoci dell'equazione

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (1.0.129)$$

che vale per tutto lo spazio posto tra le due superfici, andiamo a ridurre a una sola le due derivate del secondo membro. Immaginiamo di avanzare dall'origine delle coordinate, che è posta sulla superficie  $S_1$ , nel piano  $xz$ , verso un altro punto infinitamente vicino situato all'esterno della superficie o su di essa, e le cui coordinate sono  $\delta x$  e  $\delta z$ . La variazione infinitamente piccola, che risulterà per il potenziale  $V$ , sarà rappresentata da

$$\delta V = \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)_1 \delta x + \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right)_1 \delta z + \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right)_1 \frac{\delta x^2}{2} + \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} \right)_1 \delta x \delta z + \left( \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right)_1 \frac{\delta z^2}{2} + \dots$$

Per precisare ulteriormente, ammettiamo che quest'altro punto sia, come l'origine delle coordinate, sulla superficie  $S_1$ ; il potenziale avrà allora il valore  $V_1$  e la variazione  $\delta V$  nel primo membro sarà nulla. Allo stesso tempo si può, in questo caso, dedurre dalla forma della curva lungo la quale il piano  $xz$  interseca la superficie del corpo, una relazione tra  $\delta x$  e  $\delta z$ . Poiché l'asse  $x$  è la tangente alla curva nel punto considerato, otterremo, indicando con  $R$  il raggio di curvatura in questo punto, la seguente equazione

$$\delta z = \mp \frac{1}{2R} \delta x^2 + \dots$$

nella quale si dovrà prendere il segno superiore o inferiore, a seconda che la curva sia convessa o concava dalla parte della  $z$  positiva, cioè dalla parte esterna della superficie. Sostituendo questo valore di  $\delta z$  nell'equazione precedente, e ponendo contemporaneamente il primo membro uguale a zero, avremo:

$$0 = \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)_1 \delta x + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right)_1 \mp \frac{1}{R} \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right)_1 \right] \delta x^2 + \dots$$

Poiché questa equazione deve essere vera per tutti i valori di  $\delta x$ , ne deriva che i coefficienti delle diverse potenze di  $\delta x$  devono essere separatamente nulli, e ciò dà

$$\left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)_1 = 0 \quad \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right)_1 \mp \frac{1}{R} \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right)_1 = 0 \quad \text{o} \quad \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right)_1 = \pm \frac{1}{R} \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right)_1$$

Si otterrà pure per il piano  $yz$ , chiamando  $R'$  il raggio di curvatura della curva lungo la quale interseca la superficie,  $\left( \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right)_1 = \pm \frac{1}{R'} \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right)_1$ . Sostituendo nella (61,b) questi valori di  $\left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right)_1$  e  $\left( \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right)_1$ , si avrà

$$\left( \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right)_1 = \left( \mp \frac{1}{R} \mp \frac{1}{R'} \right) \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right)_1$$

Questo valore di  $\left( \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right)_1$  sostituito nella (61,a) darà

$$V_2 - V_1 = d \left[ 1 \mp \frac{d}{2} \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) \right]$$

Si può ancora dare in questa equazione, un'altra espressione alla derivata  $\left( \frac{\partial V}{\partial z} \right)_1$ . Infatti, indicando con  $k_1$  la densità dell'elettricità nel punto considerato della superficie  $S_1$ , si può porre  $\left( \frac{\partial V}{\partial z} \right)_1 = 4\pi k_1$ , che trasformerà l'equazione precedente in

$$V_2 - V_1 = 4\pi k_1 d \left[ 1 \mp \frac{d}{2} \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) \right]$$

ne segue per la capacità ( $K = 1$ )

$$Q = \frac{S_1}{4\pi d} \pm \frac{1}{8\pi} \iint \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) ds_1$$

La nozione di capacità si espande quando non si considerano più solo due conduttori presenti, come nel condensatore ordinario, ma un numero qualsiasi di conduttori. Se ci si limita al semplice caso di tre conduttori in presenza  $S_1, S_2, S_3$  e se si suppone, generalizzando quanto avviene per il condensatore ordinario, che la carica totale (algebrica) del sistema sia nulla, si può allora considerare sei diverse capacità, tutte definite come il rapporto di una carica a una differenza di potenziale. Tali capacità sono le seguenti: 1° Capacità  $Q_i$  del conduttore  $S_i$  rispetto a tutti i conduttori  $S_j$  e  $S_k$  supposte riunite da un collegamento conduttore ( $i \neq j \neq k = 1, 2, 3$ ); 2° Capacità  $Q'_i$  di  $S_j$  rispetto a  $S_k$ , essendo  $S_i$  supposta isolata ( $i \neq j \neq k = 1, 2, 3$ ). A. Potier ha enunciato il seguente teorema: *se si costruisce un triangolo i cui tre lati sono  $\sqrt{Q_1}, \sqrt{Q_2}, \sqrt{Q_3}$ , le altezze del triangolo abbassate rispettivamente su questi tre lati sono  $\sqrt{Q'_1}, \sqrt{Q'_2}, \sqrt{Q'_3}$* . Un analogo modo di rappresentazione geometrica (con un tetraedro) può essere esteso al caso di quattro conduttori. Il teorema di A. Potier trova la sua applicazione nei cavi armati delle condotte elettriche sotterranee.

Ci occuperemo ora dei sistemi di condensatori. Diversi condensatori possono essere uniti insieme per formare quella che viene chiamata una batteria. Questo raggruppamento può essere fatto in diversi modi; considereremo i due raggruppamenti che sono i più semplici.

**A. RAGGRUPPAMENTO PARALLELO O DI SUPERFICIE.** - Rappresenteremo schematicamente nelle nostre figure le due superfici di un condensatore, con due piccole linee parallele. Il raggruppamento parallelo è mostrato nella Figura 56.

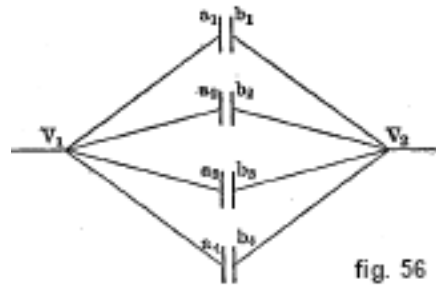


fig. 56

Si collegano tra loro da un lato tutte le superfici esterne  $a_1, a_2, a_3, \dots$ , e dall'altro tutte le superfici interne  $b_1, b_2, b_3, \dots$ . Siano  $Q_1, Q_2, Q_3, \dots$  le capacità dei condensatori,  $\pm\eta_1, \pm\eta_2, \pm\eta_3, \dots$  le loro cariche. Tutte le superfici  $a_i$  sono allo stesso potenziale  $V_1$ , tutte le superfici  $b_i$  a un altro stesso potenziale  $V_2$ . Si ha  $\eta_i = Q_i (V_1 - V_2)$ ; la carica totale è  $\eta = \sum r_{ij}$ ; d'altra parte  $\eta = Q (V_1 - V_2)$ , dove  $Q$  indica la capacità della batteria. Sostituendo si ottiene:

$$\eta = Q (V_1 - V_2) = \sum r_{ij} = \sum Q_i (V_1 - V_2) = (V_1 - V_2) \sum Q_i$$

da cui

$$Q = \sum Q_i \quad (1.0.130)$$

*Nella disposizione in parallelo, la capacità di una batteria è uguale alla somma delle capacità dei vari condensatori.* È chiaro che tutti i condensatori ne formano in qualche modo uno solo, la cui superficie è uguale alla somma delle superfici dei condensatori raggruppate in parallelo.

Quando  $n$  condensatori identici della stessa capacità  $Q'$  sono associati in superficie, si ha

$$Q = nQ'$$

**B. RAGGRUPPAMENTI IN SERIE O CASCATA.** - Questa modalità di raggruppamento è rappresentata schematicamente dalla figura 57. Una delle superfici  $a_1$  del primo condensatore comunica con una sorgente di elettricità e assume, ad esempio, il potenziale  $V_1$ ; l'altra superficie  $b_1$ , è a sua volta collegata con una delle superfici  $a_2$ , del secondo condensatore, di cui l'altra superficie  $b_2$  è a sua volta collegata con una delle superfici  $a_3$  del terzo condensatore, ecc. Sia  $V'$  il potenziale delle superfici  $b_1$  e  $a_2$ ,  $V''$  quello delle superfici  $b_2$ , e  $a_3$ , ecc; infine sia  $V_2$  il potenziale della seconda superficie dell'ultimo condensatore, che è comunemente a terra, in modo che Sia  $Y'$  il potenziale delle superfici  $b_1$  e  $a_2$ ,  $Y''$  quello delle superfici  $b_2$ , e  $a_3$ , ecc; infine sia  $Y_2$  il potenziale della seconda superficie dell'ultimo condensatore, che è ordinariamente a massa, in modo che  $V_2 = 0$ .

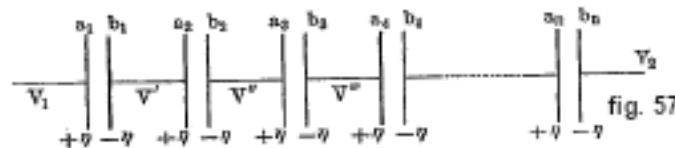


fig. 57

Quando  $a_1$  riceve la carica  $\eta$ , su  $b_1$  rimane la carica  $(-\eta)$  e la carica  $(+\eta)$  passa su  $a_2$ ; di conseguenza la carica  $(-\eta)$  appare su  $b_2$  e  $(+\eta)$  passa su  $a_3$ , ecc. Tutti i condensatori ricevono in questo modo cariche uguali. Si ha ora

$$\begin{aligned} V_1 - V' &= \frac{\eta}{Q_1} \\ V' - V'' &= \frac{\eta}{Q_2} \\ V'' - V''' &= \frac{\eta}{Q_3} \\ &\dots\dots\dots \\ V^{(n-1)} - V_2 &= \frac{\eta}{Q_n} \end{aligned}$$

Sommando queste uguaglianze membro a membro, si ha

$$V_1 - V_2 = \eta \sum \frac{1}{Q_1}$$

Si ha d'altra parte, per l'intera batteria

$$V_1 - V_2 = \frac{\eta}{Q}$$

e se ne deduce

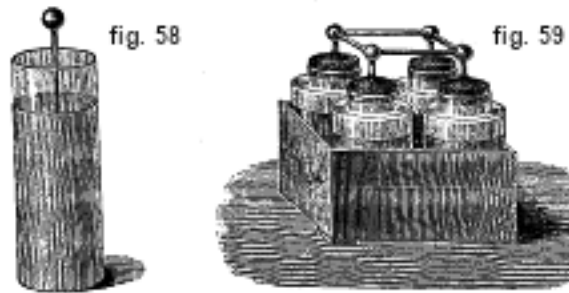
$$\frac{1}{Q} = \sum \frac{1}{Q_i} \quad (1.0.131)$$

Nei condensatori in serie, il reciproco della capacità della batteria è uguale alla somma dei reciproci delle capacità dei vari condensatori. Quando  $n$  condensatori della stessa capacità  $Q'$  sono raggruppati in serie, si ha, dalla (63)

$$Q = \frac{Q'}{n} \quad (1.0.132)$$

Uno dei vantaggi del raggruppamento in serie risiede nella grande differenza di potenziale  $V_1 - V_2$  che si può così ottenere; i vari condensatori acquisiscono differenze di potenziale molto minori (se sono in numero sufficientemente grande), mentre uno solo di questi condensatori non potrebbe sopportare la differenza  $V_1 - V_2$ .

Una forma di condensatore ampiamente utilizzata nella pratica è la *bottiglia di Leida*. Consiste in una bottiglia o cilindro di vetro (fig. 58), le cui due facce interna ed esterna sono ricoperte fino a una certa altezza da fogli di stagno. Lo strato interno di stagno è in comunicazione metallica con una piccola sfera che ne emerge. Le lamine di stagno interne ed esterne sono comunemente chiamate le *armature* della bottiglia; corrispondono ai due corpi di cui, come abbiamo visto, è composto qualsiasi condensatore. Le due superfici che abbiamo considerato nei condensatori sono qui la superficie esterna dell'armatura interna e la superficie interna dell'armatura esterna, cioè le superfici sottili rivolte verso il vetro, che svolge il ruolo di dielettrico intermedio.



La sfera, e quindi anche l'armatura interna, è solitamente in comunicazione con una sorgente di elettricità, l'armatura esterna con la terra. Se si vuole collegare l'armatura esterna alla sorgente di elettricità, bisogna isolare la bottiglia. Sebbene l'armatura interna non sia completamente circondata da quella esterna, si può comunque determinare la capacità della bottiglia di Leida con la formula (61)

$$Q = \frac{KS}{4\pi d} \quad (1.0.133)$$

dove  $d$  è lo spessore medio della parete di vetro,  $K$  il potere induttivo del vetro e  $S$  l'area di una delle facce ricoperta di stagno. La Figura 59 mostra una delle modalità di raggruppamento delle superfici; tutte le bottiglie sono poste in una cassa rivestita di stagno all'interno, mentre le

sferette sono unite tra loro da aste metalliche. Quando le bottiglie sono identiche, la capacità della batteria è  $Q_n = nQ$ .

La figura 60 rappresenta la disposizione delle bottiglie in serie; la capacità della batteria è allora  $Q_n = Q/n$ .

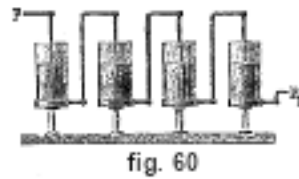


fig. 60

Quando le armature di una bottiglia di Leida sono collegate da un conduttore metallico, le cariche di nomi opposti si distruggono a vicenda; in altre parole, le tensioni esistenti nel vetro scompaiono. Questo fenomeno è chiamato *scarica* della bottiglia e si verifica, più in generale, in ogni condensatore. Per produrre una tale scarica si utilizzano apparecchi di diverso tipo, detti *eccitatori*. L'eccitatore molto semplice, rappresentato dalla figura 61, è costituito da un manico di vetro  $m$ , fissato ad un cardine  $c$ , attorno al quale possono ruotare due aste metalliche leggermente ricurve, terminate da sferette  $a$  e  $b$ . Si applica una di queste sferette contro l'armatura esterna e poi si avvicina l'altra alla sferetta della bottiglia.



fig. 61

Il fenomeno della scarica è accompagnato da una scintilla che si produce tra la sferetta e la vicina sfera dell'eccitatore. La scarica è un fenomeno dinamico e come tale verrà considerato più in dettaglio nel seguito.

Ci rimane ancora da considerare l'energia di un condensatore; cioè la grandezza  $W$  dell'energia potenziale elettrica (più precisamente elettrostatica) immagazzinata nel condensatore carico. Abbiamo trovato, per l'energia  $W$  di un sistema di conduttori elettrizzati, la formula (51,d),

$$W = \frac{1}{2} \sum V \eta \quad (1.0.134)$$

dove le  $V$  indicano i potenziali, le  $\eta$  le cariche dei conduttori. Nel condensatore, si hanno solo solo due corpi, per cui

$$W = \frac{1}{2} V_1 \eta_1 + \frac{1}{2} V_2 \eta_2$$

In tutti i casi di interesse pratico, si ha  $\eta_2 = -\eta_1$ ; se si sopprimono gli indici delle cariche, viene

$$W = \frac{1}{2} \eta (V_1 - V_2) \quad (1.0.135)$$

d'altro canto la capacità ha per espressione  $Q = \eta : (V_1 - V_2)$ ; si ha quindi

$$W = \frac{1}{2} \eta (V_1 - V_2) = \frac{\eta^2}{2Q} = \frac{1}{2} Q (V_1 - V_2)^2 \quad (1.0.136)$$

Supporremo inoltre che il condensatore è a terra; ponendo  $V_2 = 0$  e  $V_1 = V$ , si trova

$$W = \frac{1}{2}\eta V = \frac{\eta^2}{2Q} = \frac{1}{2}QV^2 \quad (1.0.137)$$

Queste espressioni sono identiche alla (51,a). Dalla formula (61)

$$Q = \frac{SK}{4\pi d} \quad (1.0.138)$$

e si ha

$$W = \frac{1}{2}\eta V = \frac{2\pi\eta^2 d}{KS} = \frac{KSV^2}{8\pi d} = \frac{2\pi d\eta k}{K} \quad (1.0.139)$$

dove  $k =: S$  indica la densità di carica. Queste formule mostrano che *l'energia di un condensatore è proporzionale al prodotto della carica per la densità di carica, o ancora proporzionale al quadrato della carica, o infine proporzionale al quadrato del potenziale; per una data carica, l'energia è inversamente proporzionale all'area del condensatore*. Per comprendere il significato di quest'ultima legge, è necessario osservare che ad un aumento della superficie su cui è distribuita la carica corrisponde una perdita di carica; allo stesso tempo le forze repulsive interne compiono un lavoro e ne risulta una corrispondente diminuzione della riserva di energia. Le formule (65,e) mostrano inoltre che, dati  $\eta, S, d$ , l'energia è inversamente proporzionale alla costante dielettrica del mezzo intermedio.

Calcoliamo ora l'energia di una batteria formata da condensatori uguali; sia  $Q_j$  la capacità di un singolo condensatore,  $n$  il numero di condensatori.

Consideriamo dapprima  $n$  condensatori associati in superficie, cioè formanti un unico condensatore la cui capacità è  $Q_n = nQ_1$ ; sia  $V$  il potenziale,  $W_n$  l'energia,  $\eta_n$  la carica della batteria. La formula (65,e) ci dà allora

$$W_n = \frac{1}{2}\eta_n V = \frac{\eta_n^2}{2Q_n} = \frac{1}{2}Q_n V^2 \quad (1.0.140)$$

Carichiamo ogni condensatore associato fino al potenziale  $V$  e sia  $W_1$  la sua energia,  $\eta_1$  la sua carica; si ha

$$W_1 = \frac{1}{2}\eta_1 V \quad (1.0.141)$$

Ma nel raggruppamento in superficie,  $n_n = n\eta_1$  e  $Q_n = nQ_1$ ; pertanto la (66) dà

$$W_n = \frac{1}{2}\eta_1 V = \frac{\eta_n^2}{2nQ_1} = \frac{1}{2}nQ_1 V^2 \quad (1.0.142)$$

Si deduce dalle (66,a) e (66,b)

$$W_n = nW_1 \quad (1.0.143)$$

*L'energia di una batteria formata da  $n$  condensatori (di bottiglie di Leida, ad esempio) associati in superficie è  $n$  volte maggiore dell'energia di ciascuno dei condensatori; per una data carica, è inversamente proporzionale al numero  $n$ ; per un dato potenziale, è direttamente proporzionale a questo numero  $n$ .*

Supponiamo ora di avere  $n$  condensatori associati in serie. Faremo riferimento alla figura 67, supponendo che l'ultimo condensatore sia collegato a terra, ovvero  $V_2 = 0$ : supponiamo inoltre che  $V_1 = V$ . Il sistema considerato di corpi conduttori è il seguente:  $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, \dots$ , l'ultimo corpo  $b_n$  è a terra; ma si può considerare il sistema come formato dai corpi  $a_1, b_1a_2, b_2a_3, \dots$ ; i corpi  $b_1a_2, b_2a_3, \dots$  sono isolati e quindi i termini che corrispondono loro nella somma (65) sono nulli; infatti  $b_1$  ad esempio, dà il termine  $\frac{1}{2}(-\eta)V'$  e  $a_2$  il termine  $\frac{1}{2}(+\eta)V'$ , la cui somma è



nulla; quanto al corpo  $b_n$  è a potenziale zero. Rimane pertanto un solo termine, che si riferisce al primo corpo  $a_1$ , di modo che se si scrive  $\eta_n$  al posto di  $\eta$ , l'energia totale è

$$W_n = \frac{1}{2}\eta_n V = \frac{\eta_n^2}{2Q_n} = \frac{1}{2}Q_n V^2 \quad (1.0.144)$$

Per un solo condensatore, di cui una delle superfici è posta al potenziale  $V$ , mentre l'altra ha potenziale zero, si avrà

$$W_1 = \frac{1}{2}\eta_1 V = \frac{1}{2}Q_1 V^2 \quad (1.0.145)$$

Nel raggruppamento in serie, si ha  $Q_n = Q_1 : n$  e quindi  $\eta_n = \eta_1 : n$ . Le formule (67) danno quindi

$$W_n = \frac{n\eta_n^2}{2Q_1} = \frac{Q_1 V^2}{2n} \quad (1.0.146)$$

*L'energia di una batteria di  $n$  condensatori (delle bottiglie di Leida, ad esempio) associati in serie è  $n$  volte minore dell'energia di un singolo condensatore caricato allo stesso potenziale; per una carica data, l'energia è proporzionale al numero  $n$ ; per un potenziale dato, è inversamente proporzionale a questo numero  $n$ .*

È facile determinare l'energia di una batteria formata da gruppi di condensatori in serie, associati in superficie.

Senza affrontare qui in modo esaustivo lo studio del complesso fenomeno della scarica, possiamo tuttavia indicare il risultato finale a cui essa conduce, basandoci sul principio della conservazione dell'energia.

L'energia elettrica  $W$  del condensatore scompare nella scarica e al suo posto appare una quantità equivalente di altre forme di energia. Normalmente quasi tutta l'energia  $W$  si trasforma in energia termica, e quest'ultima può essere facilmente valutata in joule o in calorie-grammi. Quando, nella (65,c) e (65,e), si esprime  $\eta, V, Q, S, d$  in unità C.G.S.,  $W$  si esprime in erg; se si esprime  $\eta, V, Q$ , rispettivamente in coulomb, volt e farad, si ottiene  $W$  in joule ( $1 \text{ joule} = 10^7 \text{ erg} = 0,102 \text{ kgrm} = 0,24 \text{ gr.cal}$ ). Si hanno quindi le seguenti uguaglianze:

1.  $\eta, V, Q, S \text{ cm}^2$  e  $d \text{ cm}$  sono dati in unità CGS:

$$W = \frac{1}{2}\eta V = \frac{\eta^2}{2Q} = \frac{1}{2}QV^2 = \frac{2\eta^2\pi d}{KS} = \frac{KSV^2}{8\pi d} \text{ erg} \quad (1.0.147)$$

$$W = 0,12 \cdot 10^{-7}\eta V = \frac{0,12\eta^2}{10^7 Q} = 0,12 \cdot 10^{-7}QV^2 = \frac{0,48\pi\eta^2 d}{10^7 KS} = \frac{0,03KSV^2}{10^7\pi d} \text{ gr.cal.} \quad (1.0.148)$$

2.  $V$  è dato in volt,  $Q$  in microfarad e  $\eta$  in microcoulomb

$$W = \frac{1}{2}10^{-6}\eta V = \frac{1}{2}\frac{\eta^2}{10^6 Q} = 10^{-6}QV^2 \text{ joule} \quad (1.0.149)$$

$$W = 0,12 \cdot 10^{-6}\eta V = \frac{0,12\eta^2}{10^6 Q} = 0,12 \cdot 10^{-6}QV^2 \text{ gr.cal.} \quad (1.0.150)$$

Nella scarica di un condensatore, di una batteria di bottiglie di Leida ad esempio, si può interporre tra l'eccitatore e la batteria una serie di collegamenti conduttivi, fili ad esempio. Tutti questi collegamenti formano il circuito di scarica attraverso il quale passa la scarica, come si è soliti dire. La quantità di calore  $W$  è distribuita su queste connessioni e la quantità totale  $W$  di calore liberata non dipende dalla struttura del circuito, a condizione che non avvenga nella scarica alcuna trasformazione dell'energia elettrica in altre forme come energia termica. Ogni conduttore ha una determinata resistenza  $r$ ; tale grandezza è l'inverso della conducibilità elettrica, che è nota nella fisica elementare e che ritroveremo nello studio della corrente elettrica;

la scarica di un condensatore deve inoltre essere considerata fondamentalmente come una tale corrente.

La resistenza di un filo è proporzionale alla lunghezza di questo filo, inversamente proporzionale alla sua sezione trasversale e direttamente proporzionale alla resistenza specifica (resistività) della sostanza del filo, che a sua volta dipende dalla costituzione chimica e dallo stato fisico di questa sostanza.

La teoria, che verrà sviluppata in seguito, dimostra, come peraltro conferma l'esperienza, che il calore  $W$  si distribuisce nei vari elementi del circuito di scarica in proporzione alla resistenza di questi elementi, per cui il calore  $W$  liberato nel  $i^{\circ}$  elemento del circuito è

$$W_i = \frac{r_i}{\sum r_i} W \quad (1.0.151)$$

Riess ha determinato in modo particolarmente accurato come il calore  $W_i$  dipende dalle diverse circostanze in cui può avvenire la scarica; ha usato a questo scopo uno strumento detto termometro elettrico, che è rappresentato dalla figura 62. Questo strumento è costituito da una sfera di vetro che presenta quattro aperture. In  $a$  e  $b$  sono fissate, in supporti metallici, le estremità di un filo di platino; l'apertura  $c$  porta, in un telaio metallico, un tappo che viene rimosso per un istante prima di ogni esperimento, per pareggiare la pressione all'interno della sfera con la pressione atmosferica. La quarta apertura termina con un tubo di vetro quasi capillare, curvato ad angolo retto all'altra estremità dove si allarga a forma di imbuto; sotto il tubo c'è una scala graduata.

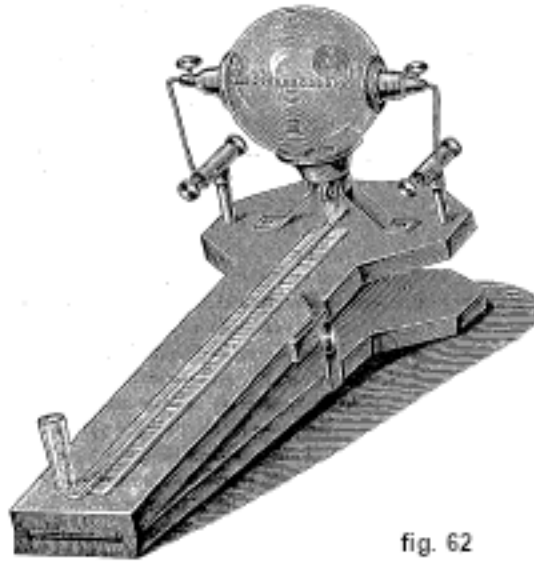


fig. 62

Il tubo e parte dell'imbuto contengono un liquido colorato, che deve, prima dell'esperimento, raggiungere quasi l'estremità superiore della scala. L'intero dispositivo è installato, come si vede in figura, in modo che il tubo sia leggermente inclinato rispetto all'orizzonte. Gli esperimenti vengono eseguiti in modo tale da far passare la scarica attraverso il filo di platino. Nel filo si sprigiona una certa quantità di calore  $w$ , che si trasmette all'aria; questa si espande e il livello del liquido scende nel tubo. È facile, utilizzando le leggi di Mariotte e Gay-Lussac, stabilire una formula che permette di calcolare  $w$ . Questa formula è la seguente:

$$w = Gs \frac{n}{\alpha} \left( \frac{v}{V} + \frac{\delta}{p_0} \cos \varphi \right) \left\{ 1 + \frac{V}{v(1 + \alpha t_0)} \frac{p_0}{760} \frac{\gamma \sigma}{Gs} \right\} \quad (1.0.152)$$

$G$  indica il peso del filo,  $s$  la sua capacità termica,  $n$  il numero di divisioni della scala di cui è sceso il livello del liquido dopo il passaggio della scarica,  $\alpha$  il coefficiente di dilatazione dell'aria,

$V$  il volume della sfera,  $v$  il volume di una divisione del tubo,  $p_c$  la pressione in millimetri di mercurio,  $t_0$  la temperatura dell'aria nella sfera prima del passaggio della scarica,  $\delta$  il rapporto tra la densità del liquido contenuto nel tubo e la densità del mercurio,  $\varphi$  l'angolo di inclinazione del tubo sull'orizzonte,  $\gamma$  il peso dell'aria nel volume  $v$  a  $0^\circ$  e alla pressione di  $760\text{ mm}$ ,  $\sigma$  la capacità termica dell'aria.

Riess ha dedotto, in primo luogo, dai suoi esperimenti, come la quantità di calore  $w$  dipende dalla batteria scaricata; ha trovato che  $w$  è proporzionale al quadrato della carica e inversamente proporzionale alla dimensione della superficie su cui questa carica era distribuita; questo risultato concorda perfettamente con la (65,e). Riess ha anche cercato come la quantità di calore  $w_i$ , ceduta dalla scarica in un dato filo, dipende dagli altri elementi (fili) del circuito di scarica, che sono esterni al termometro; ha riconosciuto che questa dipendenza era espressa dalla formula (69). Il grande merito di Riess è stato di scoprire le leggi che governano l'emissione di calore nella scarica di un condensatore, in un'epoca (1837-1838) in cui la dottrina dell'energia non esisteva ancora e quando non era presente la questione di stabilire teoricamente le leggi che abbiamo fatto conoscere sopra. Dopo Riess, gli effetti termici della scarica sono stati studiati da Knockenhauer, Villari, Dove, Blavier, Schwédoff e altri. Schwédoff ha dimostrato che dati  $\eta, S, K$ , l'effetto termico della scarica è proporzionale allo spessore  $d$  dello strato intermedio, e che, dati  $\eta, S, d$ , il riscaldamento prodotto è inversamente proporzionale al potere induttivo  $K$ . Il primo punto è stato dimostrato impiegando lastre di diverso spessore di vetro o ebanite in condensatori piani, il secondo confrontando condensatori di vetro ed ebanite.

Naturalmente tutte le leggi relative all'energia dei condensatori sono valide, per quanto riguarda la quantità di calore ceduto dalla scarica nelle varie parti del circuito di comunicazione, solo quando l'energia elettrica è completamente trasformata in energia termica, ma non in altre forme di energia. Supponiamo che nella scarica si spenda un lavoro meccanico per perforare ad esempio un dielettrico, o per compiere altri fenomeni analoghi che verranno considerati nel capitolo sulla scarica; in questo caso diminuisce la quantità di calore ceduta nei vari elementi del circuito di scarica. Ci limiteremo qui ad indicare questa ovvia conseguenza del principio di conservazione dell'energia.

## 10. Distribuzione di energia elettrica. Elettrostatica<sup>1</sup>.

Il problema della distribuzione dell'elettricità è stato posto dalle stesse idee che si ha dell'elettricità nell'immagine A. Come già sappiamo, i risultati ottenuti nello studio di questo problema sono certamente esatti e corrispondono rigorosamente alla realtà, qualunque sia il significato delle grandezze introdotte nel ragionamento e negli sviluppi matematici. Il significato del problema non ha bisogno di chiarimenti, purché ci si limiti all'immagine A; nel linguaggio dell'immagine B, il suo scopo è trovare la distribuzione delle estremità dei tubi di tensione nell'etere, nelle condizioni date. Ci limiteremo esclusivamente al problema così come è formulato nell'immagine A, non essendo ancora sufficientemente avanzato lo studio delle equazioni basate sull'immagine B.

Quella parte dello studio dei fenomeni elettrici che si occupa della distribuzione dell'elettricità, o, come talvolta si dice, dell'equilibrio dell'elettricità, si chiama *elettrostatica*. Essa comprende le seguenti questioni principali:

1. Distribuzione di una data quantità di elettricità su un conduttore isolato o su più conduttori isolati che si toccano.
2. Distribuzione dell'elettricità su un conduttore, posto in un campo elettrico di cui sono date le proprietà. Questo conduttore può o non può essere isolato; il campo elettrico può essere dato senza indicazione della sua origine (ci limitiamo a dire, ad esempio, che il conduttore è in un

<sup>1</sup>Abbiamo aggiunto a questo paragrafo alcune indicazioni sui notevoli progressi recentemente compiuti nello studio del problema della distribuzione dell'energia elettrica (Nota del traduttore).

campo uniforme), oppure è prodotto da cariche fisse date in grandezza e in posizione. Si tratta, in quest'ultimo caso, del problema dell'induzione di elettricità su un conduttore, quando sono date masse induttrici fisse di elettricità.

3. Distribuzione dell'elettricità su più conduttori, alcuni dei quali possono essere isolati, altri collegati a terra; tra i primi, almeno uno deve avere una carica propria, la cui grandezza è data, ma questo può valere anche per più conduttori.

4. Stato elettrico dei dielettrici, in diverse determinate condizioni.

5. Equipollenza di masse elettriche.

6. Determinazione delle condizioni meccaniche cui sono sottoposti i corpi elettrizzati nei diversi problemi che precedono. Si tratta di determinare le forze e le coppie che agiscono sui corpi considerati, nonché i movimenti che questi corpi prendono o tendono a prendere. Le forze che hanno la loro origine in fenomeni elettrici o magnetici, ma che agiscono sulla materia e, in generale, tendono a produrre il moto dei corpi allo stato solido, liquido o gassoso, sono dette forze *ponderomotrici*. Il problema attuale consiste quindi nel trovare le forze ponderomotrici che si esercitano nel campo elettrico in condizioni diverse.

Una particolarità caratteristica dell'elettrostatica è che i metodi generali vi sono ben definiti, ma che le soluzioni possono concretizzarsi solo in un numero molto ristretto di casi abbastanza semplici, a causa di difficoltà puramente matematiche. Una seconda particolarità dei problemi elettrostatici consiste nel fatto che le equazioni fondamentali sono del tutto indipendenti dalle idee che si possono adottare sull'intima natura dei fenomeni. In questo senso, l'elettrostatica è vicina alla teoria della conduzione del calore (volume III), e costituisce un elemento definitivo della fisica teorica (volume I).

Inoltre, quando si vogliono approfondire le parti più diverse della Fisica, è impossibile non rimanere colpiti dalle analogie che presentano tra loro i vari problemi di analisi matematica che così si pongono. Che si tratti di elettricità statica o dinamica, di propagazione del calore, di ottica, di elasticità, di idrodinamica, si giunge sempre a equazioni alle derivate parziali della stessa famiglia, e le condizioni al contorno, sebbene diverse, non sono prive di qualche somiglianza. Questo è quanto H. Poincaré ha messo in luce con i seguenti esempi.

Immaginiamo dapprima che ci si proponga di trovare la temperatura finale di un corpo solido omogeneo e isotropo, quando i vari punti della superficie di questo corpo vengono mantenuti artificialmente a determinate temperature. Questo problema, tradotto in linguaggio analitico, si enuncia così: trovare una funzione  $V$  che, in una porzione di spazio, soddisfi l'equazione di Laplace

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

e che assume determinati valori nei vari punti della superficie che delimita questo spazio; questo è detto il problema di Dirichlet. Supponiamo ora di cercare qual è la distribuzione dell'elettricità statica sulla superficie di un dato conduttore; troveremo, come vedremo più avanti, lo stesso problema analitico. Si tratta di trovare una funzione  $V$  che soddisfi l'equazione di Laplace, in tutto lo spazio esterno al conduttore, e che si riduca a 0 o all'infinito e a 1 alla superficie del conduttore. È un caso particolare del problema di Dirichlet, ma si sa (dalle funzioni di Green) ricondurre il caso generale a questo caso particolare. I due problemi, assolutamente diversi dal punto di vista fisico, sono identici dal punto di vista analitico.

Altre analogie, anche se meno complete, sono comunque evidenti. Citeremo anzitutto il seguente problema: un liquido riempie completamente un recipiente; vari corpi solidi mobili sono immersi in questo liquido; si conoscono i movimenti di questi corpi e si suppone che ci sia una funzione delle velocità; si chiede qual è il movimento del liquido. Questo è il problema delle sfere pulsanti di Bjerknes, imitazione idrodinamica di fenomeni elettrici (Volume I). Dal punto di vista analitico si tratta di trovare una funzione  $V$ , che soddisfi l'equazione di Laplace all'interno di un certo spazio, e tale che sulla superficie che delimita tale spazio la derivata normale  $\frac{\partial V}{\partial n}$

abbia valori dati. Così, nel problema idrodinamico, ritroviamo la stessa equazione alle derivate parziali dei problemi termico ed elettrico; differiscono solo le condizioni al contorno. Sarà ancora così, come mostreremo più avanti, nel problema dell'induzione magnetica.

Supponiamo uno o più magneti permanenti posti in presenza di un corpo magnetico perfettamente molle  $M$ . Si tratterà di trovare una funzione  $V$  (il potenziale magnetico), che soddisfi l'equazione di Laplace, in tutta la porzione di spazio che non è occupata dai magneti permanenti, e che è inoltre soggetta alle seguenti condizioni. Nei vari punti in cui c'è magnetismo permanente,  $\Delta V$  non è nullo, ma può essere considerato come assegnato. La funzione  $V$  è continua in tutto lo spazio; le sue derivate sono continue all'interno del corpo  $M$  e all'esterno di questo corpo, ma sono discontinue sulla superficie del corpo  $M$ . In prossimità di questa superficie,  $\frac{\partial V}{\partial n}$  avrà quindi due valori diversi a seconda che ci si ponga all'interno o all'esterno del corpo  $M$ ; ma il rapporto tra questi due valori sarà una costante data. Anche in questo caso ritroviamo la stessa equazione alle derivate parziali, con condizioni al contorno simili ma differenti.

Ora ecco i casi in cui l'equazione alle derivate parziali è leggermente modificata.

Supponiamo di cercare la legge del raffreddamento di un corpo solido nello spazio. Si tratta di trovare una funzione  $V$  che soddisfi l'equazione

$$k\Delta V = \frac{\partial V}{\partial t}$$

e che inoltre sia data per  $t = 0$ . Infine alla superficie del corpo è dato il rapporto tra  $V$  e  $\frac{\partial V}{\partial n}$ .

Nei problemi di ottica, si hanno tre funzioni incognite  $u, v, w$  e quattro equazioni

$$k\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad k\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad k\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

Le condizioni al contorno variano a seconda dei problemi; ma, nelle questioni di diffrazione principalmente (Volume II), non sono prive di analogia con quelle che abbiamo incontrato finora.

Sono ancora le stesse equazioni, con analoghe, sebbene diverse, equazioni al contorno che si incontrano nel problema della viscosità dei liquidi, trattato secondo le idee di Navier. Il lavoro di Couette ha richiamato l'attenzione su questa questione, già considerata da Kirchhoff. La teoria dell'elasticità ci offre equazioni più complicate, ma che non si discostano molto dalle precedenti, come hanno dimostrato le ricerche più recenti. Infine, una questione importante in idrodinamica e che riapparirà in seguito consiste nel trovare le componenti della velocità in tutti i punti di un liquido, quando si conoscono le componenti del vortice in tutti i punti di questo stesso liquido. Questo problema dal punto di vista analitico è enunciato come segue. Conoscendo tre funzioni  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$ , trovare tre funzioni incognite  $u, v, w$  che soddisfano determinate condizioni al contorno e anche le equazioni

$$\tau_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad \tau_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad \tau_3 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad \theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

L'analogia con i problemi precedenti non appare a prima vista ovvia, ma lo diventa se osserviamo che le prime tre equazioni precedenti (in virtù della quarta) ne comportano altre tre, di cui la prima è

$$\Delta u = 2 \left( \frac{\partial \tau_2}{\partial z} - \frac{\partial \tau_3}{\partial y} \right)$$

e le altre si possono scrivere per simmetria.



Questa rapida rassegna delle varie parti della Fisica matematica ci mostra che tutti questi problemi, nonostante l'estrema varietà delle condizioni al contorno e persino delle equazioni alle derivate parziali, hanno, per così dire, una certa aria di famiglia che è impossibile disconoscere. Ci si deve quindi aspettare di trovare in essi un gran numero di proprietà comuni, e questo è ciò che giustifica i dettagli in cui entreremo a proposito del problema speciale dell'equilibrio elettrico.

A parte il punto di vista teorico, che, come abbiamo detto, conduce immediatamente ad un obiettivo pratico solo in un ristretto numero di casi, esiste un metodo sperimentale per la ricerca della distribuzione dell'elettricità. Questo metodo è il seguente. Per prima cosa si costruisce un piano o una sfera di prova; il piano di prova è un dischetto circolare e (fig. 63), non necessariamente in metallo, ma poi dorato, fissato all'estremità di un'asta isolante ricurva *edcb*; la sfera di prova è solitamente fissata a un'asta isolante diritta, solitamente di vetro. Si tocca con il piano o la sfera di prova la superficie del conduttore elettrizzato e si misura poi in unità qualsiasi la quantità di elettricità  $\eta$  che passa sul corpo di prova. Si suppone, in questo modo di operare, che il contatto del piano o della sfera di prova con la superficie del conduttore studiato non produca alcuna variazione sensibile nella distribuzione dell'elettricità e che la quantità di elettricità  $\eta$  possa essere utilizzata per misurare la densità  $k$  nel luogo interessato. I metodi utilizzati per ottenere una misura della grandezza  $\eta$ , saranno considerati nel Capitolo IV.

La distribuzione dell'elettricità sulla superficie di conduttori di diversa forma è stata studiata, secondo il metodo che abbiamo appena indicato, da Coulomb (1787) e da Riess. Quest'ultimo impiegava talvolta due sfere di prova, con le quali toccava contemporaneamente due punti sulla superficie del conduttore, dopodiché determinava il rapporto delle quantità di elettricità sulle due sfere. Il metodo del piano o della sfera di prova non può dare risultati precisi, soprattutto quando viene utilizzato in punti posti su spigoli, angoli, sporgenze e punte, perché l'applicazione del piano o della sfera in questi punti comporta una notevole modifica della densità  $k$  dell'elettricità. Coulomb ha studiato in particolare la distribuzione dell'elettricità su un cilindro chiuso da semisfere alle sue estremità, su un piatto circolare, su un piatto rettangolare e su una serie di sfere diverse o uguali a contatto. Per tre sfere identiche a contatto, la carica  $\eta_2$  della sfera mediana era uguale a 0,75 delle cariche  $\eta_1 = \eta_2$  delle due sfere estreme. Con 24 sfere identiche, le cui cariche  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{24}$  soddisfano alle uguaglianze  $\eta_1 = \eta_{24}, \eta_2 = \eta_{23}$ , ecc. si aveva  $\eta_2 = 0,61\eta_1$  e  $\eta_{12} = 0,57\eta_1$ . Riess ha studiato, tra le altre, la distribuzione dell'elettricità su un cubo, oltre che su diversi sistemi di corpi in contatto; per le ragioni sopra indicate, le sue ricerche non possono avere un grande grado di esattezza, e non ci soffermeremo sui risultati che ha ottenuto.

Ci occuperemo ora esclusivamente dell'elettrostatica teorica, che cerca con il calcolo la soluzione dei problemi enumerati all'inizio di questo paragrafo.

1. Distribuzione di una data carica  $\eta$  sulla superficie di un conduttore isolato, di cui sono date le dimensioni e la forma. **Metodo di Green** - Abbiamo mostrato che la condizione di equilibrio elettrico su un conduttore è che all'interno la forza elettrica sia nulla, ma, sulla superficie, sia

diretta ovunque lungo la normale. Abbiamo visto che questa condizione può essere sostituita dalla seguente:

$$V = \text{cost} \quad (1.0.153)$$

Il potenziale deve avere lo stesso valore in tutti i punti del conduttore, la cui superficie forma una superficie di livello del potenziale. Il primo problema dell'elettrostatica si riduce quindi alla ricerca di una distribuzione di densità  $k$  sulla superficie di un corpo, tale che in un qualsiasi punto interno M del conduttore, la grandezza

$$V = \iint \frac{k ds}{r} \quad (1.0.154)$$

abbia lo stesso valore;  $r$  denota la distanza dal punto M all'elemento di superficie  $ds$ . Consideriamo prima alcuni semplici casi.

1. SFERA. - Per ragioni di simmetria, ci dobbiamo attendere che la carica  $\eta$  sia uniformemente distribuita, cioè che si abbia  $k = \text{cost}$ . Abbiamo visto che uno strato sferico uniforme di sostanza attrattiva dà infatti, in ogni punto all'interno della sfera, lo stesso valore per il potenziale  $V$ ; questo è numericamente uguale alla massa totale dello strato divisa per il raggio della sfera. Si ottiene così l'uguaglianza

$$\eta = 4\pi R^2 k$$

Si ha inoltre, nell'aria,  $V = \eta/R$ ; ma, se la sfera si trova in un dielettrico qualsiasi, si ha

$$V = \frac{\eta}{RK} = \frac{4\pi Rk}{K}$$

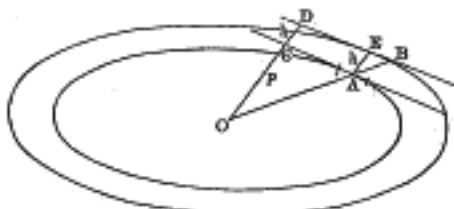
Negli altri casi che prenderemo in considerazione, assumeremo che il conduttore sia nell'aria, cioè che si abbia  $K = 1$ .

2. CILINDRO CIRCOLARE DI LUNGHEZZA INDEFINITA. - Sia  $R$  il raggio della sezione trasversale del cilindro,  $L$  la lunghezza della parte considerata, che deve trovarsi a grandissima distanza dalle due basi,  $\eta$  la carica su questa parte. Per ragioni di simmetria, dobbiamo anche qui aspettarci di avere  $k = \text{cost}$ . Si dimostra facilmente che, in questo caso, la forza  $F$  all'interno del cilindro è nulla. Consideriamo, infatti, all'interno del cilindro dato, la superficie di un altro cilindro circolare avente lo stesso asse, di lunghezza  $l$  e di raggio  $r < R$ . Se esiste una forza  $F$ , essa deve essere normale alla superficie di questo cilindro e avere lo stesso valore in tutti i punti di questa superficie. Ne consegue che il flusso di forza, che attraversa la superficie considerata, è uguale a  $2\pi r l F$ . Ma questo flusso deve essere uguale anche a  $4\pi \eta_i$ , essendo  $\eta_i$  la quantità di elettricità contenuta all'interno della superficie; siccome  $\eta_i = 0$ , si ha anche  $F = 0$ . La carica  $\eta$  e la densità  $k$  sono legate dall'uguaglianza  $\eta = 2\pi R L k$ .

3. ELLISSOIDE. - Abbiamo visto che uno strato ellissoidale omogeneo, delimitato dalle superfici di due ellissoidi concentrici simili, aventi assi nella stessa direzione, non esercita alcuna azione su un punto interno. Siano  $a, b, c$  i semiassi di una delle superfici,  $a_1, b_1, c_1$  i semiassi dell'altra e siano

$$\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c} = 1 + \alpha$$

Sia  $\alpha$  una quantità molto piccola e indichiamo con  $\delta$  la densità di volume della sostanza attrattiva. Sostituiamo lo strato considerato con uno strato superficiale avente densità superficiale  $k$ . Prendiamo nel punto A (fig. 64) l'elemento di superficie  $ds$ , tracciamo il raggio vettore OAB e abbassiamo la perpendicolare OCD sui piani CA e DB rispettivamente tangenti alle due superfici nei punti A e B.



Indichiamo con  $h$  lo spessore  $AE = CD$  dello strato in A, con  $p$  la lunghezza di OC. Si ha  $OB : OA = 1 + \alpha$ ; pertanto  $h = OD - OC = p(1 + \alpha) - p = \alpha p$ . Uguagliando la quantità di sostanza nell'elemento di volume dello strato ellissoidale che ha come base l'elemento  $ds$ , e la quantità di sostanza sullo stesso elemento  $ds$  dello strato superficiale, si ha  $h\delta ds = kds$ , cioè  $k = h\delta = \alpha\delta p$ . Ma la quantità totale di sostanza è

$$\frac{4}{3}\pi a_1 b_1 c_1 \delta - \frac{4}{3}\pi abc \delta = \frac{4}{3}\pi abc \delta \left\{ (1 + \alpha)^2 - 1 \right\} = 4\pi abc \alpha \delta$$

essa deve essere uguale alla carica totale  $\eta$ . Dall'eguaglianza  $\eta = 4\pi abc\alpha\delta$ , deduciamo il valore di  $\alpha\delta$  e, portando tale valore nell'espressione  $k = \alpha\delta p$ , abbiamo

$$k = \frac{\eta}{4\pi abc}p \quad (1.0.155)$$

La densità in un punto dello strato superficiale è quindi direttamente proporzionale alla perpendicolare abbassata dal centro dell'ellissoide sul piano tangente in questo punto. Se si esprime  $p$  in funzione delle coordinate  $x, y, z$  del punto di contatto del piano tangente, si ha

$$k = \frac{\eta}{4\pi abc} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{a^4} + \frac{z^2}{a^4}}} \quad (1.0.156)$$

Le densità ai tre vertici dell'ellissoide, cioè alle estremità dei tre assi, sono rispettivamente proporzionali a questi assi. Si possono anche stabilire le seguenti espressioni:

$$k = \frac{\eta}{2\pi\sqrt{abc}\sqrt[4]{\rho_1\rho_2}}$$

$$k = \frac{\eta}{4\sigma}$$

dove  $\rho_1, \rho_2$  indicano i raggi di curvatura principali della superficie,  $\sigma$  l'area della sezione dell'ellissoide con un piano passante per il centro e parallelo al piano tangente al punto al quale  $k$  si riferisce.

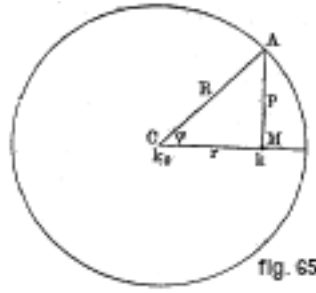
4. DISCO ELLITTICO E DISCO CIRCOLARE INFINITAMENTE SOTTILE. - Se si tiene conto nella (71,a) della evidente uguaglianza

$$\frac{z^2}{c^4} = \frac{1}{c^2} \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)$$

e se si pone poi  $c = 0$ , si ottiene la densità  $k$  nei diversi punti di un disco ellittico

$$k = \frac{\eta}{4\pi ab} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} \quad (1.0.157)$$





Al bordo del disco si ha  $k = \infty$ ; ma questo valore è relativo alla linea geometrica (ellisse) che rappresenta il bordo. Se si pone  $a = b = R$ , si ottiene la distribuzione dell'elettricità su un disco circolare; si ha, per la densità  $k$  nel punto M (fig. 65)

$$k = \frac{\eta}{4\pi R} \cdot \frac{1}{\sqrt{R^2 - r^2}} = \frac{\eta}{4\pi R} \cdot \frac{1}{p} = \frac{k_0}{\sin \varphi} \quad (1.0.158)$$

essendo  $r$  la distanza dal punto M al centro del disco,  $p = MA$ ,  $\varphi = ACM$ ,  $k_0$  la densità al centro, uguale alla metà  $\eta : 2\pi R^2$  della densità media. Nella parte centrale la densità aumenta progressivamente allontanandosi dal centro. Un cerchio centrale di raggio  $r$  su due facce prese insieme, la carica

$$\eta_r = \eta \left\{ 1 - \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}} \right\} \quad (1.0.159)$$

Schwédoff (1895) ha fornito un modo semplice per stabilire le formule relative all'ellissoide.

5. DUE SFERE CHE SI TOCCANO. - Due sfere che si toccano rappresentano ovviamente un unico conduttore, le cui parti sono tutte allo stesso potenziale. Il problema considerato è un caso particolare del problema della distribuzione dell'elettricità su due sfere che non si toccano; quest'ultima fu risolta per la prima volta da Poisson e ne parleremo più avanti, ma l'illustre matematico diede anche il seguente particolare metodo per risolvere direttamente il problema delle sfere a contatto. Prendiamo per unità il raggio di una delle sfere, quello dell'altra essendo indicato con  $b$ ; la distanza dei centri è  $1 + b$ . Se chiamiamo  $\varphi(x)$  il potenziale dello strato che ricopre la prima sfera in un punto dell'asse posto alla distanza  $x$  dal centro, e  $F(y)$  il potenziale della seconda in un punto posto alla distanza  $y$  dal suo centro, scrivendo che per qualsiasi punto interno all'una o all'altra sfera il potenziale ha un valore costante  $h$ , si ha

$$\begin{cases} \varphi(x) + F(1 + b - x) = h \\ F(y) + \varphi(1 + b - y) = h \end{cases} \quad (1.0.160)$$

potendo  $x$  variare tra  $-1$  e  $+1$  e  $y$  tra  $-b$  e  $+b$ .

Stabiliamo un'importante relazione relativa al potenziale di una superficie sferica. Tale superficie è il luogo dei punti tali che il rapporto delle loro distanze rispetto a due punti fissi è costante.

Siano P e Q due punti dati tali che il rapporto  $MP/MQ$  delle distanze a questi punti da qualsiasi elemento  $ds$  della superficie sferica sia costante. Gli elementi corrispondenti dei potenziali nei punti P e Q,  $k_{ds}/MP$  e  $k_{ds}/MQ$ , avranno tra loro il rapporto costante  $MP/MQ$ ; tale sarà anche il rapporto dei due potenziali di cui essi sono elementi, e il potenziale relativo nel punto esterno Q è ricondotto con ciò al potenziale relativo al punto P. Indicando con  $r$  e  $r'$  le distanze dal centro dei punti coniugati P e Q, si ha  $rr' = R^2$ , essendo  $R$  il raggio della superficie sferica considerata; il rapporto tra le distanze dei punti P e Q da un punto M della superficie è  $\frac{MP}{MQ} = \frac{r'}{R} = \frac{R}{r}$ , e, di conseguenza, il rapporto dei due potenziali è

$$\frac{V_P}{V_Q} = \frac{MQ}{MP} = \frac{r'}{R}$$

Rappresentando con  $\psi(r)$  il potenziale relativo ad un punto posto all'interno della sfera alla distanza  $r$  dal centro, e con  $\psi'(r')$  il potenziale nel punto posto sullo stesso raggio alla distanza  $r'$ , si ha

$$\psi'(r) = \frac{R}{r'}\psi(r) = \frac{R}{r'}\psi\left(\frac{R^2}{r'}\right) \quad (1.0.161)$$

la funzione  $\psi$ , quando è nota per i valori della variabile minori di  $R$ , fa conoscere la funzione  $\psi'$  per i valori maggiori di  $R$ . Il potenziale noto per i punti interni fa conoscere quindi il potenziale per i punti esterni. Questo teorema contiene il principio delle immagini elettriche di Lord Kelvin che discuteremo più avanti.

La relazione che abbiamo appena ottenuto tra il potenziale delle azioni esercitate da uno strato sferico su un punto esterno e il potenziale relativo al punto interno coniugato ci dà, nel problema delle sfere a contatto, qualunque sia la legge delle densità:

$$\begin{cases} \varphi(x) = \frac{1}{x}\varphi\left(\frac{1}{x}\right) \\ F(y) = \frac{b}{y}F\left(\frac{b^2}{y}\right) \end{cases} \quad (1.0.162)$$

Le equazioni (71,e) diventano, tenendo conto della (71,g)

$$\begin{cases} \varphi(x) + \frac{b}{1+b-x}F\left(\frac{b^2}{1+b-x}\right) = h \\ F(y) + \frac{b}{1+b-y}\varphi\left(\frac{b^2}{1+b-y}\right) = h \end{cases} \quad (1.0.163)$$

potendo  $x$  e  $y$  essere scelti arbitrariamente tra i limiti indicato; poniamo

$$y = \frac{b^2}{1+b-x} \quad (1.0.164)$$

Si potrà eliminare la funzione  $F$  e ottenere, per definire  $\varphi$ :

$$\varphi(x) \frac{b}{b + (1+b)(1-x)} \varphi\left[\frac{1+b-x}{b + (1+b)(1-x)}\right] = h - \frac{hb}{1+b-x} \quad (1.0.165)$$

Non indicheremo come trovare l'espressione della funzione che soddisfa questa equazione; ci limiteremo a dare il risultato nella forma seguente. Invece di prendere come unità il raggio di una delle sfere, supponiamo che i raggi delle sfere  $R_1$  e  $R_2$  e  $V$  il loro potenziale comune. La carica  $\eta_1$  della prima sfera è determinata dalla formula:

$$\eta_1 = \frac{VR_1^2R_2}{R_1 + R_2} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{(n+1)\{R_2 + n(R_1 + R_2)\}}$$

Se sostituiamo  $R_2$  con  $R_1$ , e viceversa, otteniamo la carica  $\eta_1$  della seconda sfera. Le densità  $k_1$  e  $k_2$  hanno espressioni complicate che non menzioneremo. Plana, partendo dalle formule generali di Poisson, ha calcolato una tabella per queste diverse grandezze, assumendo dato il rapporto  $R_2 : R_1 = b$ . Riportiamo un estratto di questa tabella:

$b = \frac{R_1}{R_2}$	$q_1 : R_1$	$q_2 : R_2$	$(q_1 + q_2) : R_2$	$\beta = \bar{k}_2 : \bar{k}_1$
1	0,69315	0,69315	1,38629	1
0,8	0,75116	0,50496	1,25612	1,05037
0,6	0,81629	0,32831	1,14460	1,11721
0,4	0,88809	0,17228	1,06037	1,21241
0,2	0,95903	0,05214	1,01117	1,35906
0,05	0,99640	0,00387	1,00027	1,55038
0	1	0	1	1,64494

Qui  $q_1$  e  $q_2$  indicano le capacità delle due sfere a contatto,  $q_1 + q_2$  la capacità dell'insieme di due sfere:  $\beta$  è il rapporto delle densità medie  $\bar{k}_2$  e  $\bar{k}_1$  sulle due sfere. quando  $R_2$  tende a zero,  $\beta$  tende verso il limite  $\pi^2 : 6 = 1,644936$ . Quando  $R_1 = R_2$ , cioè  $b = 1$ , si ha

$$q_1 : R_1 = q_2 : R_2 = \log 2 = 0,69315$$

Il rapporto delle capacità  $q_1$  e  $q_2$  è allo stesso tempo il rapporto delle cariche  $\eta_1$  e  $\eta_2$ , cosicché i numeri della seconda, terza e quarta colonna danno i valori relativi delle cariche  $\eta_1, \eta_2$  e  $\eta_1 + \eta_2$ .

6. CONDUTTORE CON UNA PUNTA O UNA PARTE AFFILATA. - L'esperienza e il risultato teorico che abbiamo ottenuto per l'ellissoide mostrano che sui corpi di forma allungata la massima densità si trova alle estremità. Il calcolo permette di stabilire che su una punta, per così dire matematica, cioè su una punta perfetta, non smussata, la densità elettrica aumenta man mano che ci si avvicina all'estremità della stessa, dove diventa infinitamente grande. Questo risultato teorico ha una grandissima importanza pratica; mostra che su una punta fisica, sebbene sia sempre più o meno smussata, la densità elettrica deve raggiungere anche un valore molto grande, e che conseguentemente su un conduttore provvisto di una punta, la carica è concentrata in gran parte su questa. È lo stesso per un conduttore con una parte affilata.

Consideriamo il seguente semplice caso. Siano due conduttori a forma di coni di rivoluzione, i cui vertici sono nello stesso punto e gli assi diretti in direzioni opposte. Supponiamo che questi due conduttori siano carichi di elettricità di nome opposto e che, sotto la loro reciproca influenza, si trovino ai potenziali  $V_1$  e  $V_2$  diversi. Su ogni cono di rivoluzione che avrà lo stesso vertice e lo stesso asse dei conduttori, il potenziale  $V$  avrà un solo valore e l'equazione di Laplace  $\Delta V = 0$  porterà, come si sa, a

$$\frac{d \left( \sin \theta \frac{dV}{d\theta} \right)}{d\theta} = 0$$

essendo  $\theta$  l'angolo della generatrice del cono con il suo asse. Se ne deriva

$$\frac{dV}{d\theta} = \frac{C}{\sin \theta} \quad V = C \log \tan \frac{\theta}{2} + C'$$

essendo  $C$  e  $C'$  due costanti arbitrarie. Si determinano le due costanti con la condizione che  $V$  si riduca a  $V_1$  e  $V_2$  rispettivamente per  $\theta = \alpha$  e  $\theta = \pi - \beta$ , e ne risulta

$$C = \frac{V_1 - V_2}{\log \left( \tan \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\beta}{2} \right)} \quad C' = \frac{\log \left[ \left( \tan \frac{\alpha}{2} \right)^{V_2} \left( \tan \frac{\beta}{2} \right)^{V_1} \right]}{\log \left( \tan \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\beta}{2} \right)}$$

Indichiamo con  $r$  la distanza di un punto qualsiasi dal vertice dei coni; si avrà, per le densità  $k_1$  e  $k_2$  dell'elettricità sui due conduttori

$$k_1 = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{r} \frac{dV}{d\theta} = -\frac{1}{4\pi} \frac{C}{r \sin \alpha}$$

$$k_2 = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r} \frac{dV}{d\theta} = \frac{1}{4\pi} \frac{C}{r \sin \beta}$$

Quindi su ciascun conduttore le densità  $k_1, k_2$  variano inversamente alla distanza  $r$  dal vertice e sono in questo punto infinite.

Risultati molto meno semplici si ottengono quando si ha un solo conduttore delimitato da un taglio o da un cono. Green si è occupato del caso della punta conica; A. Sommerfeld ha considerato il problema dello spigolo vivo.

Nel caso di una distribuzione dell'elettricità su un piano indefinito e quando si cerca lo stato nella parte mediana, il problema dipende solo da due variabili  $x$  e  $y$  ed è regolato dall'equazione

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -2\pi k$$

A una tale equazione corrisponde il potenziale

$$V = \iint k \log \frac{1}{r} ds$$

che C. Neumann ha chiamato logaritmico. In un dominio dove  $k = 0$ , l'espressione

$$\frac{\partial V}{\partial x} dy - \frac{\partial V}{\partial y} dx$$

è un differenziale totale ed esiste una funzione coniugata  $U$  tale che  $V + iU$  è una funzione analitica della variabile complessa  $x + iy$ . Maxwell ha fatto importanti applicazioni di questa osservazione.

Anche lo studio della distribuzione dell'elettricità è stato effettuato utilizzando coordinate curvilinee. Ci limiteremo ad indicare il seguente risultato dovuto a Max Abraham, che è importante nella dinamica di un elettrone sferico: l'energia elettrica di un ellissoide dove una carica è uniformemente distribuita nel volume e l'energia di questa carica distribuita sulla superficie di un conduttore della stessa forma sono nel rapporto 6 : 5.

Concluderemo indicando la dimostrazione di un teorema scoperto da G. Green nel 1828, poi nel 1839 da Gauss e Chasles, che non avevano avuto conoscenza della Memoria, dapprima molto poco letta, del matematico inglese. Questo teorema fornisce un numero infinito di soluzioni al problema che abbiamo appena affrontato.

Un gran numero di proposizioni fondamentali della teoria del potenziale si basano sulla trasformazione di integrali di volume in integrali di superficie, che è stata sistematicamente sviluppata da G. Green. Supponiamo che una tale trasformazione sia ben nota. Se  $U$  e  $V$  sono due funzioni ovunque continue nel campo di integrazione e che soddisfano entrambe l'equazione di Laplace, si deduce facilmente dalla trasformazione di Green che si ha

$$\iint \left( U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right) ds = 0 \quad (1.0.166)$$

Se  $U$  e  $V$  o le loro derivate non sono ovunque continue nello spazio considerato, i domini di discontinuità devono essere sottratti e l'integrale di superficie deve essere esteso alle superfici di questi domini esclusi. In particolare se  $U$  è infinito come  $1/r$  in un punto A di coordinate  $a, b, c$ , la cui distanza dal punto  $x, y, z$  è  $r$ , il punto A deve essere escluso da una sfera. Quando il raggio di questa sfera è infinitamente piccolo, e quando si pone  $U = \frac{1}{r}$ , si ottiene la nota formula

$$4\pi V_\lambda = \iint \left( V \frac{\partial \left( \frac{1}{r} \right)}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial n} \right) ds \quad (1.0.167)$$

Ricordiamo ancora la formula (44,b)

$$\frac{\partial V}{\partial n} = -4\pi k$$

si deve intendere che  $\frac{\partial V}{\partial n}$  rappresenta, in questa formula fondamentale, il limite della derivata relativa alla normale esterna per una superficie di livello  $S'$ , quando quest'ultima si avvicina indefinitamente a  $S$ .

Consideriamo ora una famiglia di superfici  $V(x, y, z) = \text{cost}$ , la funzione  $V$  che soddisfa l'equazione  $\Delta V = 0$ , al di fuori di un certo volume  $P$ , e annullantesi all'infinito così come le sue derivate parziali come un potenziale. Supponiamo inoltre che, variando  $C$  da un certo valore  $\gamma$  fino a zero, le superfici

$$V(x, y, z) = C \quad (1.0.168)$$

siano superfici chiuse, che avvolgono interamente il volume  $P$ . Prendiamo una di queste superfici e stendiamo su di essa uno strato la cui densità in ogni punto è inversamente proporzionale alla distanza dalla superficie infinitamente vicina. Stabiliremo che l'azione di questo strato, per ogni punto che gli sia interno, è nulla, e che, per i punti esterni, le superfici di livello sono le superfici della famiglia considerata. Innanzitutto possiamo prendere come espressione della densità  $k = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial V}{\partial n}$ , espressione inversamente proporzionale a  $\partial n$ , poiché, passando da una superficie a quella vicina,  $\partial V$  è costante. Sia  $A$  un punto interno della superficie  $S$  definita dall'equazione (71,p); La formula di Green, applicata al volume indefinito esterno a questa superficie, ci dà

$$\iint \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial \left( \frac{1}{r} \right)}{\partial n} \right) ds = 0$$

Ora, sulla superficie,  $V$  ha il valore costante  $C$ ; pertanto

$$C = -\frac{1}{4\pi} \iint \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial n} ds = \iint \frac{k ds}{r}$$

Quindi, qualunque sia il punto  $A$  interno ad  $S$ , il potenziale dovuto all'attrazione dello strato esteso su  $S$  è uguale alla costante  $C$ . L'attrazione di questo strato è quindi nulla su qualsiasi punto interno.

Applichiamo di nuovo la formula di Green, ma supponendo che il punto  $A$  sia esterno a  $S$ . Avremo

$$V_A = -\frac{1}{4\pi} \iint \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial \left( \frac{1}{r} \right)}{\partial n} \right) ds = -\frac{1}{4\pi} \iint \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial n} ds = \iint \frac{k ds}{r}$$

ciò che mostra che il potenziale dovuto all'attrazione dello strato è uguale, nel punto  $A$  al valore  $V$ , della funzione  $V(x, y, z)$  in questo punto. La famiglia delle superfici, dalla quale siamo partiti, dà quindi le superfici di livello.

La dimostrazione precedente si deve a E. Picard, che l'ha completata con quella di un teorema che è, in un certo senso, l'inverso del precedente e che considerazioni geometriche avevano indotto J. Bertrand ad enunciare come molto probabile, in una Lezione al Collegio di Francia. Si suppone di avere una famiglia di superfici chiuse tali che, se si ricopre una qualsiasi di esse con uno strato la cui densità è in ogni punto inversamente proporzionale alla distanza dalla superficie infinitamente vicina, l'attrazione di questo strato su qualsiasi punto interno è nulla. In queste condizioni, le superfici all'esterno allo strato saranno per esso superfici di livello.

Un'applicazione davvero notevole del metodo Green è stata fatta da Maxwell. Siano  $A$  e  $A'$  i centri di due sfere che si intersecano ad angolo retto; essendo  $M$  uno dei punti di intersezione, il triangolo  $AMA'$  è rettangolo. Sia  $C$  il punto in cui il piano del cerchio di intersezione taglia la linea dei centri; è facile vedere che, scegliendo opportunamente tre masse poste nei punti  $A$ ,  $C$ ,  $A'$ , si può ottenere un sistema attraente per il quale l'insieme delle due sfere forma una superficie di livello. Basterà prendere le tre masse poste in  $A$ ,  $A'$  e  $C$  proporzionali rispettivamente a  $R$ ,  $R'$  e  $-h$ , essendo  $R$ ,  $R'$  i raggi delle due sfere e  $h$  l'altezza  $MC$  del triangolo rettangolo  $AMA'$ . Si può, per applicare il teorema di Green, adottare per la superficie  $S$  l'unione di una porzione presa da ciascuna sfera, in modo da formare una superficie chiusa che racchiuda al suo interno i tre punti di attrazione  $A$ ,  $C$ ,  $A'$ . Si potrà trovare la densità che è necessario supporre a ogni elemento della superficie di rivoluzione generata dalla linea composta da due archi di cerchio, dalla sua rotazione intorno alla linea dei centri; perché la superficie attrattiva così definita sia priva di azione sui punti interni, è necessario supporre in ogni punto della superficie una densità proporzionale all'intensità dell'attrazione esercitata dalle tre masse concentrate in  $A$ ,  $A'$  e  $C$ .

II. INDUZIONE SU UN CONDUTTORE CHE SI TROVA IN UN CAMPO ELETTRICO ASSEGNATO. EQUAZIONE FUNZIONALE DI FREDHOLM. EQUAZIONE FUNZIONALE DI GR. ROBIN. - Il campo può essere dato immediatamente o da masse elettriche fisse  $\eta_0$  che lo producono. Sia  $F_0$  la

forza,  $V_0$  il potenziale in un punto qualunque del campo. Date le masse  $\eta_0$ ,  $F_0$  e  $V_0$  sono note; ma se la forza  $F_0$  è data direttamente, nell'espressione del potenziale  $V_0$  entra una costante indeterminata.

Si devono distinguere due casi: il conduttore può essere messo a terra o isolato. Siano, nel primo caso,  $\eta$  la sua carica,  $V = 0$  il suo potenziale, e, nel secondo,  $\eta = 0$  la sua carica e  $V$  il suo potenziale; sia  $q$  la capacità del conduttore. Cerchiamo la relazione che esiste tra i due problemi corrispondenti a questi due casi, dove designeremo le densità di elettricità rispettivamente con  $k_1$  e  $k_2$ . Supponiamo che il primo problema risolto, cioè  $\eta$  e  $k_1$  trovati, con il potenziale  $V$  uguale a zero. Si ottiene quindi la soluzione del secondo problema, aggiungendo alla carica  $\eta$ , distribuita secondo la condizione  $V = 0$ , la carica  $(-\eta)$  distribuita come sarebbe se il conduttore fosse isolato e non sottoposto all'azione di un campo esterno; se designiamo, in quest'ultimo caso, la densità con  $k$ , si ha  $k_2 = k_1 + k$ , la carica totale è nulla e il potenziale  $V = (-\eta) : q$ . Se, al contrario, il secondo problema è già risolto, cioè se  $k_2$  e  $V$  sono noti, essendo  $\iint k ds$  nullo, determina la grandezza  $\eta = V : q$  e si distribuisce sulla superficie la carica  $(-\eta)$  abbandonata a ogni elemento; sia in quest'ultimo caso  $-k$  la densità, si ha  $k_1 = k_2 - k$  e il potenziale è uguale a zero.

Considereremo dapprima alcuni problemi semplici.

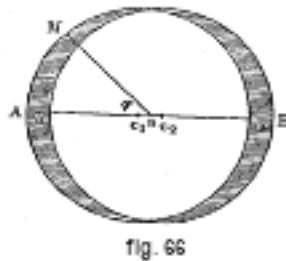


fig. 66

1. SFERA CONDUTTRICE ISOLATA IN UN CAMPO DI INTENSITÀ UNIFORME  $F$ . - Abbiamo indicato nel Volume I il seguente campo di forza uniforme. Consideriamo due sfere dello stesso raggio  $R$ , i cui centri  $c_1$  e  $c_2$  (fig. 66) distano  $a$ . Supponiamo una delle sfere riempita da una sostanza di densità  $+\delta$ , l'altra con una sostanza di densità  $-\delta$ . L'insieme delle due sfere comprenderà sostanzialmente uno spazio vuoto sferico di sostanza, delimitato da due strati di densità  $+\delta$  e  $-\delta$ . La retta AB, che passa per i centri  $c_1$  e  $c_2$ , incontra questi strati nei punti in cui lo spessore è massimo e uguale ad  $a$ . Quando  $a$  è piccolo, si può porre  $c = a \cos \varphi$  per lo spessore  $c$  dello strato in qualsiasi punto M, indicando  $\varphi$  l'angolo tra la retta AB e il raggio tracciato da M a un qualsiasi punto scelto tra  $c_1$  e  $c_2$ .

Più piccolo è  $a$ , più l'uguaglianza  $c = a \cos \varphi$  è corretta. Come abbiamo visto, lo spazio all'interno di questi strati è un campo uniforme, la cui intensità  $\psi$  è parallela ad AB e ha per modulo

$$\psi = \frac{4}{3}\pi\delta a \quad (1.0.169)$$

Sostituiamo gli strati precedenti, la cui densità di volume è  $\delta$ , con strati superficiali di densità  $k$ . Dobbiamo porre a questo scopo  $c\delta ds = k ds$ , oppure  $k = c\delta$ ; al limite, quando  $a$  decresce indefinitamente,  $c = a \cos \varphi$ , e si ha

$$k = a\delta \cos \varphi \quad (1.0.170)$$

L'intensità del campo all'interno dello strato sferico superficiale considerato è determinato dalla formula (72). Proponiamoci di ricoprire di elettricità la superficie della sfera, in modo che l'intensità del campo all'interno della sfera sia nulla, cioè in modo che si abbia  $F + \psi = 0$ . Ciò dà  $\psi = -F$ , o

$$\frac{4}{3}\pi\delta a = -F$$

Se ne deduce  $a\delta = -\frac{3}{4\pi}F$  e si ottiene, pertanto, nell'aria

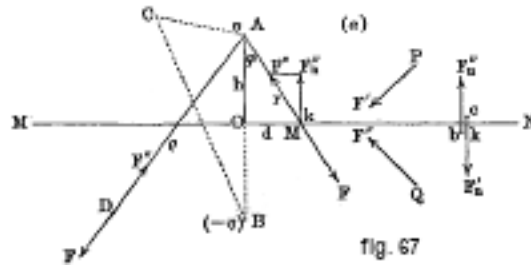
$$k = -\frac{3}{4\pi}F \cos \varphi \quad (1.0.171)$$

In un dielettrico si ha

$$k = -\frac{3}{4\pi}KF \cos \varphi \quad (1.0.172)$$

È visibile che l'angolo  $\varphi$  deve essere contato a partire dal raggio che passa per il punto A, quando la forza  $F$  ha la direzione AB. La formula (72,b) risolve completamente il problema posto; le densità maggiori nei punti A e B sono numericamente uguali a  $\pm 3F : 4\pi$ .

2. INDUZIONE SU UN DISCO CONDUTTORE A PIANO INDEFINITO - Sia MN (fig. 67) la superficie di un disco piano indefinito; in A vi è una carica fissa  $\eta$  di elettricità positiva; sia  $AO = h$  la distanza da A a MN. Si tratta di determinare la densità  $k$  dell'elettricità indotta sul piano MN; la densità  $k$  deve ovviamente avere lo stesso valore in tutti i punti di questo piano che sono alla stessa distanza  $MO = d$  da O.



Il piano MN divide lo spazio in due parti  $(\alpha)$  e  $(\beta)$ ; per la simmetria, è chiaro che la carica di MN produce forze uguali in  $(\alpha)$  e  $(\beta)$ , cioè le forze  $F'$  e  $F''$  in due punti simmetrici P e Q sono uguali in modulo e hanno direzioni simmetriche rispetto a MN. Prendiamo due punti  $b$  e  $c$ , situati su entrambi i lati del piano MN, a una distanza infinitamente piccola da questo piano e sulla stessa normale (nella figura i punti sono stati leggermente distanziati per chiarezza). Se  $F'_n$  e  $F''_n$  sono le componenti normali delle forze in  $b$  e  $c$  dovute solo alla carica su MN, si ha  $F'_n = -F''_n$ . Per l'equilibrio è necessario che in tutti i punti dello spazio  $(\beta)$  l'intensità del campo sia nulla, cioè che in ogni punto D si abbia  $F'' = F$ , con  $F$  che indica la forza  $F = n : \rho^2$  con la quale la carica  $\eta$  in A agisce nel punto D distante di  $\rho = AD$ . Applicando la formula (22,a), si ha  $4\pi k = F''_n - F'_n = 2F''_n$ ; se ne deduce

$$k = \frac{1}{2\pi}F''_n$$

Sia M un punto infinitamente vicino a MN, posto nello spazio  $(\beta)$ ; poniamo  $MA = r$ ,  $MO = d$ ,  $OAM = \varphi$ , si ha

$$F''_n = F'' \cos \varphi = -F \cos \varphi = -\frac{\eta}{r^2} \cos \varphi$$

pertanto

$$k = \frac{1}{2\pi}F''_n = -\frac{\eta}{2\pi r^2} \cos \varphi = -\frac{\eta}{2\pi h^2} \cos^2 \varphi = -\frac{\eta h}{2\pi} \cdot \frac{1}{r^2} \quad (1.0.173)$$

La densità  $k$  in un punto del disco è inversamente proporzionale al cubo della distanza tra questo punto e A. Si può facilmente comprendere (introducendo la variabile indipendente  $\varphi$ ) che la carica totale su MN è uguale a  $-\eta$ . Si agisce in  $(\beta)$  allo stesso modo di una carica  $(-\eta)$  che sarebbe in A; ne consegue che agisce in  $(\alpha)$  come una carica  $(-\beta)$  posta in B. Il campo in C è lo stesso che se il disco MN non esistesse e se si trovasse in B la carica  $(-\eta)$  e in A la

carica  $(+\eta)$ . Si comprende perché il punto B è detto l'immagine elettrica del punto A; questa immagine coincide con l'immagine ottica.

3. PARALLELEPIPEDO RETTANGOLARE CONDUTTORE SOTTO L'INFLUENZA DI UN PUNTO ELETTRIZZATO POSTO ALL'INTERNO DEL SUO INTERNO. - Per ottenere la distribuzione dell'elettricità sulle facce interne di un parallelepipedo rettangolare conduttore sottoposto all'azione di un punto elettrizzato posto al suo interno, è sufficiente cercare il potenziale dell'elettricità delle facce (assunte a potenziale zero) e della carica del punto dato su un punto qualsiasi all'interno del parallelepipedo. Questo problema, trattato per la prima volta da Riemann, è stato risolto nel seguente modo molto elementare da G. Robin, applicando puramente e semplicemente il principio delle immagini.

Poniamo l'origine in uno dei vertici del parallelepipedo dato P e gli assi  $x, y, z$ , lungo i tre spigoli  $a, b, c$  risultanti di questo vertice. Consideriamo le facce interne di P come riflettenti, e prendiamo tutte le immagini del punto elettrizzato, di coordinate  $\alpha, \beta, \gamma$  rispetto al sistema di specchi formato da queste facce. Sia  $+1$  la carica del punto elettrizzato, e conveniamo che l'immagine diretta di un punto la cui carica è  $+1$  sarà influenzata dalla carica  $-1$ , e viceversa.

Se si costruisce il reticolo di parallelepipedi uguale a P, un reticolo i cui vertici hanno le coordinate  $ma, nb, pc$ , le immagini si raggrupperanno attorno ai vertici di ordine pari  $(2ma, 2nb, 2pc)$  in coincidenza con i vertici dei parallelepipedi  $\Pi$  aventi questi vertici come centri e dimensioni  $2\alpha, 2\beta, 2\gamma$ .

Se si chiamano  $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8$  le distanze delle immagini appartenenti a uno stesso parallelepipedo  $\Pi$  in un punto qualsiasi  $(x, y, z)$  interno a P, il potenziale del reticolo di immagini sul punto  $(x, y, z)$  è

$$V = \sum \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_5} - \frac{1}{r_6} + \frac{1}{r_7} - \frac{1}{r_8} \right) \quad (1.0.174)$$

intendendo la sommatoria estesa a tutti i centri  $(2ma, 2nb, 2pc)$  dei parallelepipedi  $\Pi$ . Questo è il potenziale cercato. Infatti  $V$  si riduce a zero su una qualsiasi delle facce di P, perché, ad ogni immagine  $+1$  corrisponde un'immagine  $-1$ , simmetrica alla prima rispetto a questa faccia. La serie (73,b) è convergente. Per mostrarlo, indichiamo con  $\lambda, \mu, \nu$  i coseni direttori della distanza  $r$  dal punto  $(x, y, z)$  al centro di un parallelepipedo  $\Pi$ . Se si trasporta l'origine nel punto  $(x, y, z)$ , le coordinate degli otto vertici di questo parallelepipedo, a cui devono essere alternativamente assegnate le cariche  $+1$  e  $-1$ , sono:

$$\begin{array}{llll} \lambda r + \alpha & \mu r + \beta & \nu r + \gamma & \lambda r + \alpha & \mu r + \beta & \nu r - \gamma \\ \lambda r + \alpha & \mu r - \beta & \nu r + \gamma & \lambda r + \alpha & \mu r - \beta & \nu r - \gamma \\ \lambda r - \alpha & \mu r - \beta & \nu r + \gamma & \lambda r - \alpha & \mu r - \beta & \nu r - \gamma \\ \lambda r - \alpha & \mu r + \beta & \nu r + \gamma & \lambda r - \alpha & \mu r + \beta & \nu r - \gamma \end{array}$$

La parte  $v$  del potenziale fornito dagli otto vertici di  $\Pi$  si può scrivere

$$v = \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) - \left( \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4} \right) + \left( \frac{1}{r_5} - \frac{1}{r_6} \right) - \left( \frac{1}{r_7} - \frac{1}{r_8} \right)$$

Ponendo  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \delta^2$ , si ha

$$r_i^2 = (\lambda r + \alpha)^2 + (\mu r + \beta)^2 + (\nu r + \gamma)^2 = r^2 \left[ 1 + 2 \left( \lambda \frac{\alpha}{r} + \mu \frac{\beta}{r} + \nu \frac{\gamma}{r} \right) + \frac{\delta^2}{r^2} \right]$$

Supponiamo la distanza  $r$  molto grande, e valutiamo  $1/r_i$  fino ai termini del terzo ordine inclusivamente, trascurando quelli di ordine superiore:

$$\frac{1}{r_i} = \frac{1}{r} \left[ 1 + 2 \left( \lambda \frac{\alpha}{r} + \mu \frac{\beta}{r} + \nu \frac{\gamma}{r} \right) + \frac{\delta^2}{r^2} \right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r} \left[ 1 - \left( \lambda \frac{\alpha}{r} + \mu \frac{\beta}{r} + \nu \frac{\gamma}{r} \right) - \frac{\delta^2}{2r^2} + \frac{3}{2} \left( \lambda \frac{\alpha}{r} + \mu \frac{\beta}{r} + \nu \frac{\gamma}{r} \right)^2 \right]$$



Si deduce

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_7} &= \frac{2}{r} \left( \lambda \frac{\alpha}{r} + \mu \frac{\beta}{r} + \nu \frac{\gamma}{r} \right) & \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_5} &= \frac{2}{r} \left( -\lambda \frac{\alpha}{r} + \mu \frac{\beta}{r} + \nu \frac{\gamma}{r} \right) \\ \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_8} &= \frac{2}{r} \left( \lambda \frac{\alpha}{r} + \mu \frac{\beta}{r} + \nu \frac{\gamma}{r} \right) & \frac{1}{r_4} - \frac{1}{r_6} &= \frac{2}{r} \left( -\lambda \frac{\alpha}{r} + \mu \frac{\beta}{r} + \nu \frac{\gamma}{r} \right) \end{aligned}$$

da cui si conclude che  $v$  contiene solo termini del quarto ordine  $kr^{-4} + \dots$ , essendo  $k$  una quantità variabile finita.

Consideriamo ora un parallelepipedo di dimensioni molto grandi, avente per centro l'origine ed omotetico a P. A ogni parallelepipedo  $\Pi$  il cui centro si trova su una delle sue facce, e che fornisce nel punto  $(x, y, z)$  il potenziale  $kr^{-4}$ , corrisponde sulla faccia opposta il centro di un parallelepipedo simmetrico  $\Pi'$ , che fornisce nello stesso punto il potenziale  $-kr'^{-4}$ . La somma di questi due potenziali è evidentemente un infinitesimo del quinto ordine. È allora possibile, a grandissima distanza dall'origine, mantenere solo i parallelepipedi  $\Pi$  posti nel primo angolo delle coordinate. La loro azione è dello stesso ordine di grandezza, nel punto  $(x, y, z)$ , di quella di una sostanza continua di densità variabile, ma finita, che agisce in modo inversamente proporzionale alla quinta potenza della distanza. Se dunque, dall'origine come centro, si descrive nel primo angolo un quarto di emisfero di raggio  $R$  sufficientemente grande, la somma dei termini della serie (73,b) sarà, da un certo rango, paragonabile all'integrale

$$\int_R^\infty \frac{\pi r^2}{2} \frac{dr}{r^5} = \int_R^\infty \frac{\pi dr}{2r^3} = \frac{\pi}{4R^2}$$

che tende a zero. Pertanto la serie (73,b) è convergente.

4. INDUZIONE SU SFERA CONDUTTRICE. - Supponiamo che la sfera sia a terra; Sia  $R$  (fig. 68) il raggio della sfera,  $\eta$  una carica fissa nel punto A e  $AO = a$ . Le tre grandezze  $R, a, \eta$  essendo date, si tratta di trovare la densità  $k$  dell'elettricità indotta in un qualsiasi punto M della superficie sferica, essendo nullo il potenziale  $V$  di questa superficie.

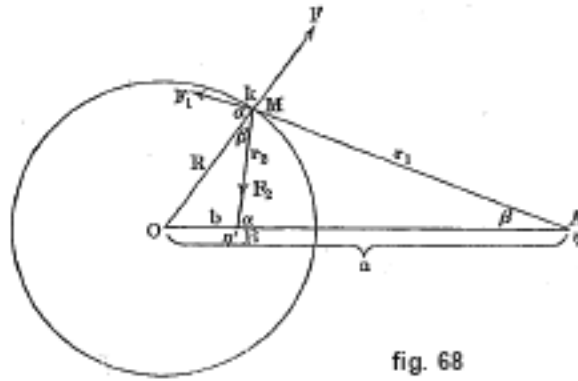


fig. 68

Determiniamo su OA un punto B tale che  $OB = b$  soddisfi la condizione  $ab = R^2$ , cioè che  $b : R = R : a$ ; uniamo M con A e B e poniamo  $MA = r_1$ ,  $MB = r_2$ . Dalla similitudine dei triangoli OMB e OMA, si deduce

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{b}{R} = \frac{R}{a} \quad (1.0.175)$$

cioè, per tutti i punti della superficie sferica il rapporto  $r_2 : r_1$  è una grandezza costante. Sia  $F_1MO = MBA = \alpha$  e  $OMB = MAO = \beta$ . Si ha  $r_1 \cos \beta + r_2 \cos \alpha = a - b$ ; se si sostituiscono i valori di  $r_2$  e di  $b$  dedotti dalla (74), si ottiene

$$a \cos \beta + R \cos \alpha = \frac{a^2 - R^2}{r_1} \quad (1.0.176)$$

Quando si porta in B la quantità di elettricità

$$\eta' = -\eta \frac{R}{a} \quad (1.0.177)$$

e quando si determina il potenziale  $V$  delle cariche  $\eta, \eta'$  in M, si trova dalla (74)

$$V = \frac{\eta}{r_1} + \frac{\eta'}{r_2} = \frac{\eta}{r_1} - \frac{\eta R}{ar_2} = \frac{\eta}{r_1} - \frac{\eta}{r_1} = 0$$

Ne consegue che la distribuzione cercata è tale che la sua azione nello spazio esterno è uguale a quella di una massa  $\eta'$  che si trova in B. In questo caso, infatti, il potenziale  $V$  dovuto alla carica  $\eta$  in A così come la carica cercata ( $k$ ) sulla sfera è nulla in tutti i punti della superficie sferica e quindi in tutti i punti interni; quest'ultima conseguenza è evidente se notiamo che  $V$  essendo nulla su tutta la superficie della sfera, questa superficie è una superficie di livello del potenziale e quindi le linee di forza sono normali ad essa, il che basta per l'equilibrio.

Quando si conosce l'azione esterna della carica, si trova la densità  $k$  dalla formula

$$k = \frac{1}{4\pi} F \quad (1.0.178)$$

dove  $F$  è la forza in un punto esterno, che si trova infinitamente vicino alla superficie e dalla parte della normale esterna. Nel punto M agiscono due forze, vedere la fig. 68:

$$F_1 = \frac{\eta}{r_1^2} \quad F_2 = -\frac{\eta'}{r_2^2} = \frac{\eta R}{a} \cdot \frac{1}{r_2^2} = \frac{\eta a}{R} \cdot \frac{1}{r_1^2}$$

la loro risultante è diretta lungo MO, di modo che

$$F = -(F_1 \cos \alpha + F_2 \cos \beta) \quad (1.0.179)$$

essendo la componente  $F'$  perpendicolare a MO e, come andremo a dimostrare, uguale a zero. Si ha

$$\pm F' = F_1 \sin \alpha - F_2 \sin \beta \quad (1.0.180)$$

se si sostituisce  $F_1$  e  $F_2$  nella (74,d) e (74,e), viene

$$-F = \frac{\eta}{r_1^2} \cos \alpha + \frac{\eta a}{Rr_1^2} \cos \beta = \frac{\eta}{Rr_1^2} (R \cos \alpha + a \cos \beta)$$

$$F' = \frac{\eta}{r_1^2} \sin \alpha - \frac{\eta a}{Rr_1^2} \sin \beta = \frac{\eta}{Rr_1^2} (R \sin \alpha - a \sin \beta)$$

ma  $R \sin \alpha = a \sin \beta$ , pertanto  $F' = 0$ . Inoltre la (74,a) dà

$$-F = \eta \frac{a^2 - R^2}{R} \cdot \frac{1}{r_1^3}$$

e infine, dalla (74,c)

$$k = -\frac{\eta (a^2 - R^2)}{4\pi R} \cdot \frac{1}{r_1^3} \quad (1.0.181)$$

*La densità cercata  $k$  è inversamente proporzionale al cubo della distanza dal punto induttore A. La carica totale sulla sfera è  $\eta'$ ; essa è minore di  $\eta$ , nel rapporto  $R : a$ .*

È facile vedere come la (74.f) porta alla soluzione del problema dell'induzione interna su una sfera, cioè come si può determinare la densità  $k'$  sulla superficie di una cavità sferica, quando

la carica  $\eta'$  si trova in B e quando  $R, b, \eta'$  sono dati. Si ottiene  $k'$  introducendo nella (74,f) le grandezze  $\eta', b, r_2$  al posto di  $\eta, a, r_1$  essendo ora considerata come una quantità positiva. Si ha

$$k' = -\frac{\eta'(R^2 - b^2)}{4\pi R} \cdot \frac{1}{r_2^3} \quad (1.0.182)$$

La carica totale è  $\eta'$  agisce nello spazio esterno come la carica  $(+\eta')$  nel punto B, ma nello spazio interno come una carica  $\eta = -\frac{R}{b}\eta'$  posta nel punto A.

Ci poniamo ora da un punto di vista più generale, ed è opportuno per questo spendere qualche parola sulla teoria dell'equazione, di Fredholm. Ci serviremo di una memoria E. Picard pubblicata nel 1906, per una esposizione sommaria di questa teoria. L'opera fondamentale di Fredholm risale solo al 1903; era stata preceduta da una Nota negli Atti dell'Accademia di Stoccolma (gennaio 1900). Un'equazione di Fredholm è un'equazione funzionale della forma

$$\varphi(x) + \lambda \int_0^1 f(x, s) \varphi(s) ds = \psi(x) \quad (1.0.183)$$

dove  $f(x, s)$  e  $\psi(x)$  sono funzioni date,  $\lambda$  un parametro e  $\varphi(x)$  la funzione incognita. La notevole soluzione che Fredholm ha dato di questa equazione e che indicheremo è stata il punto di partenza, di moltissimi lavori, in particolare quelli di D. Hilbert e Plemelj. D. Hilbert, sviluppando in modo sistematico, in una brillante presentazione, le svariate applicazioni dell'equazione (74,h) e la sua generalizzazione per un maggior numero di variabili, ha messo in luce l'intera portata della teoria di Fredholm. Adottando in linea di principio un bellissimo metodo dovuto a W. Stekloff, ha esteso i risultati precedentemente ottenuti da W. Stekloff, Korn, Kneser e S. Zaremba, nelle loro ricerche su alcune serie analoghe alla serie di Fourier e la cui teoria è stata fondata dalle famose opere di H. Poincaré citate più volte in questa opera.

Supponiamo dapprima che  $f(x, s)$  rimanga finita, quando  $x$  e  $s$  rimangono tra 0 e 1. Introduciamo, con Fredholm, la funzione

[illegible]

Si forma l'intera serie in  $\lambda$

$$D(\lambda) = 1 + \lambda \int_0^1 f(x_1, x_1) ds + \dots + \frac{\lambda_n}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} \int_0^1 \dots \int_0^1 f \left( \begin{matrix} x_1, x_2, \dots, x_n \\ x_1, x_2, \dots, x_n \end{matrix} \right) dx_1 dx_2 \dots dx_n + \dots$$

poi la funzione di  $(\xi, \eta)$ , intera in  $\lambda$ , rappresentata dallo sviluppo

$$D(\xi, \eta) = f(\xi, \eta) + \lambda \int_0^1 f\left(\begin{matrix} \xi, x_1 \\ \eta, x_1 \end{matrix}\right) dx_1 + \dots + \frac{\lambda_n}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} \int_0^1 \dots \int_0^1 f\left(\begin{matrix} \xi, x_2, \dots, x_n \\ \eta, x_2, \dots, x_n \end{matrix}\right) dx_1 \dots dx_n + \dots$$

Con le due equazioni precedenti, si ottiene la soluzione dell'equazione (74,h), per  $\lambda$  non singolare, mediante la formula

$$\varphi(x) = \psi(x) - \lambda \int_0^1 \frac{D_1(x, t)}{D(\lambda)} \psi(t) dt$$

I valori singolari di  $\lambda$  sono le radici dell'equazione

$$D(\lambda) = 0 \quad (1.0.184)$$

Abbiamo così il risultato molto significativo che *la soluzione dell'equazione (74,h) considerata come funzione di  $\lambda$  è una funzione meromorfa in tutto il piano.*

Una discussione approfondita sui valori singolari è stata fatta da Fredholm. Ad ogni radice  $\lambda_0$  dell'equazione (74,i) corrisponde un numero intero  $n(n \geq 1)$ , tale che l'equazione senza secondo membro in  $\Phi$

$$\Phi(x) + \lambda_0 \int_0^1 f(x, s) \Phi(s) ds = 0 \quad (1.0.185)$$

ha  $n$  soluzioni linearmente indipendenti. [Se  $\lambda_0$  è una radice semplice di  $D(\lambda)$ , si ha  $n = 1$ , e, in modo generale, se  $\lambda_0$  è una radice multipla di ordine  $\nu$ , si ha  $n \leq \nu$ ].

Un altro problema molto interessante è stato pure risolto da Fredholm; cioè sapere a quali condizioni l'equazione

$$\varphi(x) + \lambda_0 \int_0^1 f(x, s) \varphi(s) ds = \psi(x) \quad (1.0.186)$$

ha una soluzione. È necessario e sufficiente che la funzione  $\psi(x)$  soddisfi le seguenti condizioni, leggermente diverse nella forma da quelle di Fredholm.

Chiamiamo equazione associata di un'equazione funzionale del tipo che ci interessa l'equazione in cui la funzione  $f(x, s)$  è sostituita da  $f(s, x)$ . Segue immediatamente dalla legge di formazione dell'intera funzione  $D(\lambda)$  e di funzioni analoghe che un'equazione e la sua associata hanno gli stessi valori singolari con lo stesso numero corrispondente  $n$ . Detto questo, consideriamo l'equazione

$$\Psi(x) + \lambda_0 \int_0^1 f(s, x) \Psi(s) ds = 0 \quad (1.0.187)$$

Essa avrà  $n$  soluzioni distinte  $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n$ .

Le condizioni necessarie e sufficienti perché l'equazione (74,j) abbia una soluzione [essendo  $\varphi(x)$  sempre l'incognita] si esprimono con le  $n$  uguaglianze

$$\int_0^1 \Psi_1(x) \psi(x) dx = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

È chiaro che se l'equazione (74,j) ha una soluzione, ne avrà un'infinità che si otterranno aggiungendo la soluzione generale dell'equazione senza secondo membro.

Si è assunto, in quanto precede, che la funzione  $f(x, s)$  rimanga finita. L'integrale, che appare nell'equazione funzionale, avrà spesso un senso anche quando  $f$  diventa infinito. Fredholm ha esaminato anche questo caso nella sua memoria, e il suo metodo consiste essenzialmente nel sostituire all'equazione proposta equazioni equivalenti dove potrà accadere che la funzione che svolge il ruolo di  $f(x, s)$  non diventi più infinita. Riprendiamo l'equazione (74,h); sostituendo sotto il segno di integrazione  $\varphi(x)$  con

$$\psi(x) - \lambda \int_0^1 f(x, s') \varphi(s') ds'$$

e ponendo

$$f_1(x, s') = \int_0^1 f(x, s) f(s, s') ds$$

si ottiene l'equazione

$$\varphi(x) - \lambda^2 \int_0^1 f(x, s') \varphi(s') ds = \psi(x) - \lambda \int_0^1 f(x, s) \psi(s) ds$$

che si dimostra facilmente equivalente alla (74,h) e che è del tipo di Fredholm.

Potrà succedere che  $f_1(x, s')$  rimanga finita; siamo allora riportati al caso precedente. Se così non fosse, si può ricominciare l'operazione partendo questa volta dalla (7a,k). Si è così portati a considerare una serie di funzioni

$$f(x, s), f_1(x, s), \dots, f_n(x, s), \dots$$

dove in una forma generale

$$f_n(x, s) = \int_0^1 f_{n-1}(x, s') f(s, s') ds'$$

Nelle applicazioni più comuni, accadrà che, per un certo valore di  $n$ , la funzione  $f_n(x, s)$  rimarrà finita, e quindi la riduzione cercata verrà eseguita dopo  $n$  operazioni. Supponiamo quindi che  $f(x, s)$  diventi infinito solo per  $x = s$ , e poiché  $\frac{1}{|x-s|^\alpha}$  ( $0 < \alpha < 1$ ). È facile vedere che  $f_n(x, s)$  rimarrà finito in un certo momento. Se, per esempio,  $\alpha$  è minore di  $\frac{1}{2}$ ,  $f_1(x, s)$  rimarrà finito. Il caso di  $\alpha < \frac{1}{2}$  è stato trattato in modo estremamente elegante da D. Hilbert, assumendo un altro punto di vista. Mostra che si può, in questo caso, mantenere la soluzione di Fredholm per  $f$  finita, a patto di sostituire con zero in tutte le determinanti i termini delle diagonali principali che sono necessariamente infinite.

È ovvio che tutti i risultati precedenti possono essere estesi al caso di più variabili.

D. Hilbert ha dimostrato che nel caso in cui la funzione  $f(x, s)$  è simmetrica in  $x$  e  $s$ , i valori singolari di  $\lambda$  sono necessariamente reali. Deduce questo risultato dal metodo di Fredholm, dove l'equazione funzionale integrale è considerata come il limite di un'equazione funzionale finita.

Si può anche dimostrare direttamente con E. Picard, come segue. Supponiamo l'equazione

$$\varphi(x) + \lambda_0 \int_0^1 f(x, y) \varphi(y) dy = 0$$

con  $f(x, y)$  simmetrica, abbia una soluzione diversa da zero per  $\lambda_0 = \lambda_1 + i\lambda_2$  ( $\lambda_2 \neq 0$ ); si avrà

$$\varphi(x) = \varphi_1 + i\varphi_2$$

Sostituendo, si ha

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) + \lambda_1 \int_0^1 f(x, y) \varphi_1(y) dy - \lambda_2 \int_0^1 f(x, y) \varphi_2(y) dy &= 0 \\ \varphi_2(x) + \lambda_2 \int_0^1 f(x, y) \varphi_1(y) dy - \lambda_1 \int_0^1 f(x, y) \varphi_2(y) dy &= 0 \end{aligned}$$

Moltiplicando la prima equazione per  $\varphi_1(x) dx$  e la seconda per  $\varphi_2(x) dx$ , poi sommando e integrando, si avrà

$$\int_0^1 [\varphi_1^2(x) + \varphi_2^2(x)] dx + \lambda_1 \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) [\varphi_1(x) \varphi_1(y) + \varphi_2(x) \varphi_2(y)] dx dy = 0 \quad (1.0.188)$$

Moltiplicando poi le equazioni rispettivamente per  $\varphi_2(x) dx$  e  $\varphi_1(x) dx$ , poi sottraendo e integrando, abbiamo

$$\lambda_2 \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) [\varphi_1(x) \varphi_1(y) + \varphi_2(x) \varphi_2(y)] dx dy = 0 \quad (1.0.189)$$

L'equazione  $(\alpha)$  mostra che il moltiplicatore di  $\lambda_2$  in  $(\beta)$  non è nullo. Avremo quindi  $\lambda_2 = 0$  contro l'ipotesi formulata; l'osservazione è stabilita.

Veniamo ora alle applicazioni dell'equazione di Fredholm.

Il problema di Dirichlet relativo alle funzioni armoniche all'interno di una superficie è stato ridotto da Fredholm all'integrazione di un'equazione funzionale. Questo problema si risolve con un potenziale di doppio strato, essendo l'incognita la densità alla quale è data dalla prima delle equazioni (47,f), dove  $V_i$  è la funzione nota sulla superficie. Si può scrivere questa equazione funzionale nella forma

$$\omega + \frac{1}{2\pi} \iint \omega \frac{\cos \varphi}{r^2} ds = F \quad (1.0.190)$$

(con  $F$  funzione data sulla superficie).

È facile dimostrare che non si è in un caso singolare basandosi sul seguente importante teorema, che è stato dimostrato in modo molto preciso da Plemelj. Si dice spesso che la derivata normale di un potenziale a doppio strato è continua per il passaggio attraverso la superficie. Questo enunciato di per sé è inadatto, come sottolineato da E. Picard, poiché la derivata normale varia in un punto della superficie potrebbe non esistere. Ciò che è esatto senza restrizione è che se si prende, su una normale in un punto  $A_0$  della superficie, la derivata successiva a quella a destra del potenziale  $V$  in due punti posti ai lati di  $A_0$  alla stessa distanza  $\varepsilon$ , la differenza delle derivate tende a zero con  $\varepsilon$ .

È importante qui ricordare bene le notazioni. Chiameremo d'ora innanzi  $m$  il punto variabile della superficie per il quale si prende il potenziale; l'angolo  $\varphi$  è l'angolo formato dalla retta che congiunge  $ds$  a  $m$  la normale esterna alla superficie in  $ds$ .

Se introduciamo il parametro  $\lambda$ , consideriamo, invece dell'equazione (74,1), l'equazione

$$\omega + \lambda \iint \omega \frac{\cos \varphi}{2\pi r^2} ds = F \quad (1.0.191)$$

Anche l'equazione associata all'equazione (74,m) è molto interessante e porta, come indicato da E. Picard, all'equazione funzionale di Robin, di cui ci occuperemo più avanti; essa si presenta anche nel problema della magnetizzazione per influenza che studieremo più avanti. Per ottenere questa equazione associata, è necessario eseguire una permutazione di  $m$  e di  $ds$ ; quindi si ottiene l'equazione

$$\omega + \lambda \iint \omega \frac{\cos \psi}{2\pi r^2} ds = F \quad (1.0.192)$$

dove  $\psi$  (che non si deve confondere con  $\varphi$ ) rappresenta l'angolo formato dalla retta che unisce  $m$  a  $ds$  con la normale esterna alla superficie in  $m$ .

Da quanto detto, le due equazioni associate (74,m) e (74,m') hanno gli stessi valori singolari. Abbiamo detto che  $\lambda = 1$  non era un valore singolare; è immediato al contrario, nell'equazione (74,m), che  $\lambda = -1$  è un valore singolare, poiché l'equazione

$$\omega - \frac{1}{2\pi} \iint \omega \frac{\cos \varphi}{r^2} ds = 0$$

è verificata per  $\omega = \text{cost.}$  Plemelj ha stabilito che i poli della soluzione  $\omega$  dell'equazione (74,m') (considerata come funzione di  $\lambda$ ) erano tutti semplici e almeno uguali a 1 in valore assoluto. Non si deve concludere dal fatto che i poli  $\lambda_0$  siano semplici, che l'equazione senza secondo membro

$$\omega + \lambda_0 \iint \omega \frac{\cos \varphi}{2\pi r^2} ds = 0$$

ha una sola soluzione, vale a dire che il numero  $n$  di cui sopra è necessariamente uguale a 1. C'è qui un errore che si sarebbe tentati di commettere; ma basta supporre che  $S$  si riduca a una sfera per vedere che le cose possono avvenire in modo del tutto diverso. Supponiamo quindi che la superficie  $S$  sia una sfera di raggio 1 (in questo caso  $\varphi = \psi$ ). È facile mostrare che i valori singolari sono

$$\lambda_0 = -(2n + 1)$$

essendo  $n$  un positivo intero nullo. Inoltre, per il valore singolare  $-(2n + 1)$  l'equazione senza secondo membro

$$\omega - (2n + 1) \iint \omega \frac{\cos \varphi}{2\pi r^2} ds = 0$$

ha, come soluzioni distinte in  $\omega$ , le  $2n + 1$  funzioni  $V_n$  di Laplace corrispondenti all'intero  $n$ . In modo generale, si può solo affermare che, per il valore singolare  $\lambda = -1$ , vi è una sola soluzione dell'equazione senza secondo membro

$$\omega - \frac{1}{2\pi} \iint \omega \frac{\cos \varphi}{r^2} ds = 0$$

soluzione che si riduce a una costante.

E. Picard ha fornito il seguente esempio, che porta, per un caso singolare, a un'equazione con secondo membro. Si tratta del problema che ha come scopo trovare una funzione armonica continua  $V$  nel volume limitato da una superficie  $S$ , con dati valori  $F$  per  $\frac{\partial V_i}{\partial n}$  alla superficie. Utilizzando le formule (47,c), (47,e), (47, c'), l'equazione

$$\frac{\partial V_i}{\partial n} = F$$

diviene

$$2\pi k - \iint k \frac{\cos \psi}{r^2} ds = F$$

cioè

$$k - \iint k \frac{\cos \psi}{2\pi r^2} ds = \frac{F}{2\pi}$$

Si tratta quindi di un'equazione della forma (74,m'), per  $\lambda = -1$ , che è un valore singolare. Il problema non è quindi possibile in generale, e troveremo la condizione applicando la regola che abbiamo dato. Dobbiamo prendere l'equazione associata

$$\Psi - \iint \Psi \frac{\cos \varphi}{2\pi r^2} ds = 0$$

che ha la sola soluzione  $\Psi = \text{cost.}$  Si trova pertanto la condizione

$$\iint F ds = 0$$

come deve essere.

Queste considerazioni vengono applicate da E. Picard al problema della distribuzione dell'elettricità su un conduttore, in presenza di masse elettriche fisse che lo influenzano. Sia  $U$  il potenziale dovuto alle masse elettriche fisse, e sia  $V$  il potenziale dovuto allo strato elettrico cercato di densità  $k$  su  $S$ ; si avrà qui

$$F = \frac{\partial U}{\partial n}$$

e la condizione  $(\alpha)$  è soddisfatta. La soluzione dipenderà da una costante arbitraria, poiché si può aggiungere una soluzione dell'equazione senza un secondo membro

$$k - \iint k \frac{\cos \psi}{2\pi r^2} ds = 0$$

che è l'equazione funzionale di Robin di cui parleremo ora. Questa costante arbitraria corrisponde ovviamente alla data carica elettrica del conduttore.

Prima di andare oltre l'equazione di Robin, ricordiamo che E. Picard ha applicato la teoria dell'equazione di Fredholm anche al problema dell'equilibrio della temperatura con la radiazione (Volume III) e al problema della membrana vibrante (Volume I).

G. Robin (1886) ha stabilito direttamente la sua equazione funzionale come segue. Consideriamo un punto  $M$  sulla superficie di un conduttore in cui la densità elettrica vale  $k$ . Questo punto subisce le azioni dei vari elementi elettrizzati  $k' ds'$  del resto della superficie  $S$  e delle cariche  $\eta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ), dei punti elettrizzati esterni, che supporremo nel numero di  $p$ . Il potenziale nel punto  $M$  ha il valore

$$V = \iint \frac{k' ds'}{r} + \sum_1^p \frac{\eta_i}{r_i}$$

dove  $r$  e  $r_i$  sono le distanze del punto  $M$  dall'elemento  $ds'$  e dal punto di carica  $\eta_i$ . Se si prende la derivata di  $V$  lungo la normale esterna  $n$ , si sa che il valore della funzione  $\frac{\partial V}{\partial n}$  in un punto della superficie è la media aritmetica dei valori 0 e  $-4\pi k$  di questa stessa funzione in due punti, l'uno interno, l'altro esterno, infinitamente vicini al primo: è quindi,  $2\pi k$ ; e poiché  $\frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} = \frac{\cos \psi}{r^2}$ , si avrà

$$k = \frac{1}{2\pi} \iint \frac{k' \cos \psi}{r^2} ds' + \frac{1}{2\pi} \sum_1^p \frac{\eta_i \cos(r_i, n)}{r_i^2} \quad (1.0.193)$$

Faremo ora alcune applicazioni molto semplici di questa equazione funzionale, che ne faranno rinascere l'interesse.

Torniamo al problema dell'induzione di un punto elettrizzato su una sfera conduttrice. Chiamando  $R$  il raggio della sfera,  $V$  il suo potenziale costante,  $\eta_1$  la carica del punto,  $d_1$  la sua distanza dal centro della sfera, si ha

$$\frac{\cos \psi}{r} = \frac{1}{2R} \quad d_1^2 = R^2 + r_1^2 - 2Rr_1 \cos(r_1, n)$$

$$V = \iint \frac{k' ds'}{r} + \frac{\eta_1}{r_1}$$

Se, nell'equazione (74,n), si portano i valori dei coseni ricavati dalle prime due relazioni e si tiene conto della terza, si ottiene

$$k = \frac{V}{4\pi R} - \frac{\eta_1}{4\pi R} \frac{d_1^2 - R^2}{r_1^2}$$



Riscopriamo così, per la via più diretta, il risultato che Lord Kelvin ha ottenuto con tali ingegnosi processi indiretti.

Ecco un'altra semplice applicazione. Un corpo di prova è, come sappiamo, un conduttore di piccolissime dimensioni che viene messo a contatto con un altro conduttore di dimensioni finite. La carica presa dal corpo di prova non dipende dalla forma della superficie interessata; è proporzionale alla densità elettrica nel punto toccato, prima del contatto. La difficoltà, nella maggior parte dei casi insormontabile, consiste nel trovare il coefficiente di proporzionalità. Nel caso di una piccola sfera, Poisson è stato in grado di determinare il rapporto tra la sua densità elettrica media e la densità nel punto di contatto: questo rapporto vale  $\pi^2/6$ . L'equazione funzionale di G. Robin permette anche di fare la teoria del corpo di prova, nel caso in cui è il corpo di maggiore attrazione, la cui equazione polare è

$$\frac{\cos \psi}{r^2} = \frac{1}{a^2}$$

La costante  $a$  è il diametro; il corpo, che è di rivoluzione intorno al suo diametro, presenta al polo un appiattimento infinito. Immaginiamo che due corpi di massima attrazione siano messi a contatto con i loro poli; li supponiamo che entrambi conduttori e comunichiamo al loro insieme una carica elettrica  $M$ . Esprimiamo che tutte le repulsioni elettriche si equilibrano nel punto di contatto; assegnando all'indice 1 tutte le grandezze relative al secondo corpo, avremo

$$\iint \frac{k' \cos \psi}{r^2} ds' = \iint \frac{k'_1 \cos \psi_1}{r^2}$$

o, grazie alle equazioni dei due corpi, indicando con  $\eta, \eta_1$  le loro cariche

$$\frac{\eta}{a^2} = \frac{\eta_1}{a_1^2} \quad (1.0.194)$$

Pertanto, la carica totale è ripartita proporzionalmente ai quadrati dei diametri, cioè alle superfici. Supponiamo ora che il secondo corpo sia isolato e possieda da solo la carica  $M = \eta + \eta_1$ . L'equazione (74,n), applicata al polo, dà

$$k_1 = \iint \frac{k'_1 \cos \psi_1}{r_1^2} ds'_1 = \frac{\eta + \eta_1}{2\pi a_1^2}$$

e, se il primo corpo è molto piccolo rispetto al secondo

$$\eta = 2\pi a^2 k_1$$

Secondo la teoria del corpo di prova, questo risultato rimane quando si sostituisce il secondo corpo di maggiore attrazione con un qualsiasi conduttore. Il rapporto cercato è  $2\pi a^2$ . L'appiattimento del corpo di prova al polo fa che un errore di contatto assai grande non influisce in modo significativo sulla distribuzione elettrica del sistema.

G. Robin ha anche dato un'applicazione della sua equazione funzionale all'equilibrio elettrico dell'ellissoide, che permette di trovare analiticamente il risultato ottenuto dal procedimento di sintesi degli ellissoidi omotetici. Sia, infatti,  $d\sigma = \frac{\cos(r, n')}{r^2} ds'$  l'angolo solido sotto il quale, dall'elemento di superficie  $ds$ , si vede l'elemento  $ds'$  la cui normale è  $n'$ . Nel caso non esistano masse induttrici, l'equazione funzionale si potrà scrivere

$$\iint \frac{k' \cos(r, n)}{k \cos(r, n')} d\sigma = 2\pi \quad (1.0.195)$$

Per un ellissoide, si ha

$$\frac{\cos(r, n)}{\cos(r, n')} = \frac{p}{p'}$$

essendo  $p$  e  $p'$  le distanze dal centro ai piani tangenti a  $ds$  e a  $ds'$ ; lo si vede subito notando che la parallela a  $r$ , tracciata dal centro, è divisa da questo punto e dai due piani tangenti in due parti uguali. Si soddisfa quindi l'equazione (74,p) prendendo  $k$  proporzionale ad  $p$ .

All'equazione funzionale di Robin si collega un'interessante espressione dell'energia elettrica. Generalmente, l'espressione della densità su un conduttore comporta un fattore arbitrario, che si determina dandosi o la carica  $\eta$  o il potenziale  $V$ . Ognuna di queste operazioni porta ad una doppia integrazione, per cui l'energia  $W = \frac{1}{2}\eta V$ , si veda la (51,a), si presenta nella forma del prodotto di due integrali doppi. Vedremo che basta un solo integrale doppio per esprimere l'energia elettrica di un conduttore chiuso. Possiamo inoltre supporre che siano presenti un numero qualsiasi di conduttori, non influenzati da cariche fisse. Siano  $M$  un punto di uno di essi,  $m = kds$  la carica in questo punto,  $M'$  un altro punto del sistema,  $m'$  la sua carica,  $\rho$  e  $\rho'$  le distanze dei punti  $M$  e  $M'$  da una fissata origine  $O$ . I vari elementi  $M'$  esercitano in  $M$  una repulsione totale diretta lungo la normale esterna  $n$ , e il cui valore è  $2\pi k$ . Proiettando le repulsioni componenti sulla direzione  $\rho$ , si ha

$$S \frac{m'}{M'M^2} \cos(M'M, \rho) = 2\pi k \cos(n, \rho)$$

Moltiplicando i due membri di questa uguaglianza per  $m\rho = k\rho ds$ , poi integrando su tutta l'estensione delle  $p$  superfici conduttrici, viene

$$SS \frac{mm'}{M'M^2} \cos(M'M, \rho) = \sum_p \iint 2\pi k^2 \rho \cos(n, \rho) ds$$

Si possono, nel primo membro, raggruppare i termini a due a due in modo da mettere in evidenza la somma parziale

$$\frac{mm'}{M'M^2} [\rho \cos(M'M, \rho) + \rho' \cos(M'M, \rho)]$$

Si riconosce facilmente che la parentesi si riduce a  $M'M$ , di modo che il primo membro della nostra equazione,  $SS \frac{mm'}{M'M^2}$ , rappresenta l'energia elettrica  $W$  dell'intero sistema. Abbiamo quindi la formula

$$W = 2\pi \sum_p \iint k^2 \rho \cos(n, \rho) ds \quad (1.0.196)$$

Essa è suscettibile di una leggera trasformazione. Chiamiamo  $d\sigma$  l'elemento della superficie sferica descritta dal punto  $O$  come centro con l'unità per raggio; a seconda che il raggio vettore  $\rho$  esca dal conduttore o vi entri, si avrà

$$\cos(n, \rho) ds = \pm \rho^2 d\sigma$$

e, considerando come negativi i raggi vettori che entrano nel conduttore, come positivi quelli che ne escono, l'equazione (74,q) diviene

$$W = 2\pi \sum_p \iint k^2 \rho^2 d\sigma \quad (1.0.197)$$

Per una sfera di raggio  $R$ , la formula (74,r) dà immediatamente l'espressione nota  $W = 8\pi^2 R^3 k^2$ .

III. DISTRIBUZIONE DELL'ELETTRICITÀ SU UN SISTEMA DI CONDUTTORI. METODO DI MURPHY. METODO DI G. DARBOIRX PER UN SISTEMA DI DUE SFERE - Tra i conduttori, almeno uno deve essere isolato e almeno uno dei conduttori isolati deve avere la sua carica espressa in quantità.

È necessario per l'equilibrio che il potenziale all'interno di ciascuno dei conduttori abbia lo stesso valore in tutti i punti, tale potenziale dovendosi considerare come prodotto da tutte le cariche elettriche presenti.

Il famoso problema della distribuzione dell'elettricità su due sfere fu risolto per primo da Poisson (1811); dopo di lui Plana (1845), Murphy, Hankel, F. Neumann, W. Thomson, Liouville, B. Riemann, Cayley, Kirchhoff (1861), C. Neumann, Bobyleff (1871), G. Darboux (1907), ecc., se ne sono occupati.

Abbiamo già dato un'idea dell'approccio che Poisson ha seguito nell'affrontare il problema delle due sfere. W. Thomson (Lord Kelvin) ha applicato a questo problema il metodo delle immagini elettriche (1853), combinato con il metodo delle successive influenze di Murphy. Siano  $S_a$  e  $S_b$  le due sfere,  $a$  e  $b$  i loro raggi. Il metodo di Murphy consiste nel determinare una serie di strati successivi nel modo seguente. Si mette sulla sfera  $S_a$  uno strato capace di dare un potenziale 1, cioè uno strato uniforme la cui massa indicheremo con  $a$ . Questo strato agisce esternamente come se fosse concentrato nel centro  $A$  della sfera  $S_a$ . Lo si fissa e si determina lo strato indotto sulla superficie della seconda sfera  $S_b$ , non isolata, che equivale a determinare l'immagine  $A'$  rispetto a  $S_b$ , di una massa  $+a$  in  $A$ . Si fissa poi lo strato equivalente ad  $A'$  e si determina la sua influenza sulla sfera non isolata  $S_a$ , cioè la nuova immagine  $A''$  di  $A'$ , e così via. Si ripete la stessa operazione, partendo dalla sfera  $S_b$ , e tutte le masse così determinate vengono moltiplicate per opportuni coefficienti. Ciascuna delle masse e delle densità può essere calcolata esattamente, e se ne deduce la legge della distribuzione finale.

Sia  $x$  la distanza  $AB$  dei centri;  $x_1, x_2, x_3, \dots$  le distanze delle immagini  $A_1, A_2, A_3, \dots$  dal punto  $B$ ;  $x', x'', x''', \dots$  quelle delle immagini  $A', A'', A''', \dots$  dal punto  $A$ . Essendo la carica iniziale della prima sfera  $q = a$ , si ha, per l'immagine  $A'$ ,  $q' = -\frac{qb}{x}$ ,  $BA' = \frac{b^2}{x}$ ,  $x' = x - \frac{b^2}{x}$ . Le immagini successive  $A', A'', \dots$  daranno,  $q_1 = -\frac{q'a}{x}$ ,  $q' = -\frac{q_1b}{x_1}$ ,  $q_2 = -\frac{q''a}{x''}$ ,  $\dots$  e  $x_1 = x - \frac{a^2}{x'}$ ,  $x'' = x - \frac{b^2}{x'}$ ,  $x_2 = x - \frac{a^2}{x'}$ ,  $\dots$ . Ponendo  $C_a = q + q_1 + q_2 + \dots$ ,  $C'_a = q' + q'' + q''' + \dots$ , si vede che  $C_a$  rappresenta la capacità del conduttore isolato  $A$ , in presenza del conduttore  $B$  messo a terra e  $-C'_a$  il coefficiente di elettricità indotta su  $B$ . Lo stesso procedimento determinerà i coefficienti  $C_b$  e  $C'_b$  relativi ad una carica iniziale  $b$  sulla seconda sfera, ed si avrà  $C'_a = C'_b = C_{ab}$ . Se si indica con  $A$  e  $B$  le rispettive cariche delle due sfere per i potenziali  $U$  e  $V$ , si ottengono infine espressioni della forma

$$A = C_a U - C_{ab} V \quad B = C_b V - C_{ab} U$$

Il metodo precedente fornisce quindi la distribuzione dell'elettricità sui due conduttori, in quanto la densità finale in ogni punto è la somma delle densità relative ai vari strati sovrapposti. Quanto all'azione reciproca delle due sfere, essa può essere valutata direttamente dalla risultante delle azioni che ciascuna delle cariche poste in una delle sfere esercita su tutte quelle contenute nell'altra sfera, oppure dall'energia del sistema. Lord Kelvin ha fornito una tabella dei valori dei coefficienti che entrano nell'espressione di questa azione reciproca ed E. Mascart ha stabilito delle formule approssimate.

Sebbene il metodo di Lord Kelvin appena esposto fornisca una soluzione particolarmente semplice del problema della distribuzione dell'elettricità su un sistema di due sfere, il metodo così originale di Poisson continuò ad essere studiato dai matematici. G. Darboux (1907) vi ha recentemente aggiunto un complemento essenziale, grazie al quale acquista tutta la semplicità desiderabile. Poisson, volendo determinare la distribuzione dell'elettricità sulle due sfere, ammette che tale distribuzione ha come asse di simmetria la linea dei centri delle due sfere. Partendo da questa ipotesi, mostra che i potenziali delle due sfere sono sviluppabili in serie, i cui coefficienti sarebbero interamente noti, se solo si potessero determinare i valori dei potenziali per tutti i punti della retta dei centri delle due sfere. Tuttavia, questi valori dei potenziali, che diventano così funzioni di un'unica variabile, sono legati da relazioni che Poisson mette in evidenza e che lo portano all'equazione funzionale che costituisce il grande interesse delle sue due famose memorie

di 1811. G. Darboux ha dimostrato che l'ipotesi di Poisson sulla simmetria della distribuzione elettrica è del tutto inutile e ha fornito il seguente metodo diretto, anch'esso basato sulla risoluzione di un'equazione funzionale, ma che porta immediatamente al valore del potenziale per ogni punto nello spazio, e non più solo per i punti sulla linea dei centri delle due sfere.

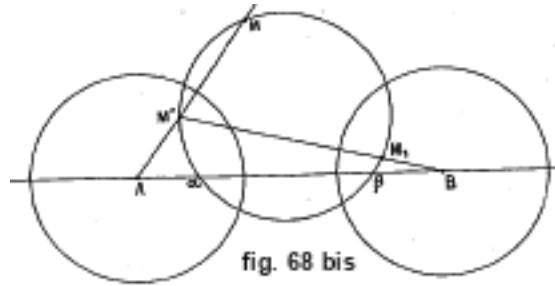
Ricordiamo anzitutto una relazione fondamentale che abbiamo già considerato in precedenza. Si consideri una sfera di centro O e uno strato elettrico distribuito in qualsiasi modo sulla superficie. Siano A e B due punti coniugati rispetto alla sfera. Per un punto qualsiasi M di questa superficie si ha  $\overline{AM} : \overline{BM} = R : \overline{OB} = \overline{OA} : R$ . Se quindi si indicano con  $V_A, V_B$  i potenziali dell'azione che lo strato esercita su A e B, potenziali definiti da integrali come i seguenti:

$$V_A = \iint \frac{kdS}{\overline{AM}} \quad V_B = \iint \frac{kdS}{\overline{BM}}$$

si avrà

$$V_a = \frac{R}{\overline{OA}} V_b = \frac{\overline{OB}}{R} V_B \quad (1.0.198)$$

Ciò posto, consideriamo due sfere elettrizzate di centro A e B (fig. 68 bis) esterne tra loro. Indichiamo con  $a$  e  $b$  rispettivamente i raggi delle due sfere, con  $c$  la distanza dei centri, e siano  $\alpha, \beta$  i due punti reali coniugati entrambi rispetto alle due sfere (A) e (B), e per i quali passano tutte le sfere che sono contemporaneamente ortogonali ad (A) e a (B).



Dato un qualsiasi punto M nello spazio esterno alle due sfere, indichiamo con M' il suo coniugato rispetto ad (A) e con  $M_1$  il coniugato di M' rispetto a (B). I punti M' e  $M_1$  sono evidentemente sulla circonferenza che passa per i punti M,  $\alpha, \beta$ . Se designiamo con  $I_A, I_B$  le inversioni che ammettono per sfere principali (A) e (B), M' si dedurrà da M dall'inversione  $I_A : M_1$ ; si dedurrà da M' dall'inversione  $I_B$  e sarà dedotto da M dalla sostituzione  $I_A I_B$ , che è il prodotto delle due inversioni  $I_A$  e  $I_B$ .

Se indichiamo con  $V_M, V'_M$  rispettivamente i potenziali di (A) e di (B), dobbiamo esprimere che la somma di questi potenziali è costante per i punti situati all'interno delle due sfere. Dobbiamo quindi avere due equazioni come le seguenti:

$$V_{M'} + V'_{M'} = \lambda \quad V_{M_1} + V'_{M_1} = \mu$$

essendo  $\lambda$  e  $\mu$  costanti che dipenderanno dalla carica inizialmente attribuita alle due sfere. Dall'equazione fondamentale (74'a), si ha

$$V_{M'} = V_M \frac{\overline{AM}}{a} \quad V'_{M_1} = V'_{M'} \frac{b}{\overline{BM_1}}$$

pertanto le equazioni precedenti diverranno

$$V_M \frac{\overline{AM}}{a} + V'_{M'} = \lambda \quad V_{M_1} + V'_{M'} \frac{b}{\overline{BM_1}} = \mu \quad (1.0.199)$$

e, eliminando  $V'_{M'}$ , si otterrà l'equazione

$$V_{M_1} \overline{BM_1} - V_M \frac{b}{a} \overline{AM} = \mu \overline{BM_1} - \lambda b$$

Tale è l'equazione funzionale che il potenziale di (A) al di fuori di questa sfera deve soddisfare. G. Darboux la trasforma come segue.

Dalle proprietà elementari dell'inversione, si ha

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{\alpha M}} = \frac{\overline{A\beta}}{\overline{BM'}} \quad \frac{\overline{\alpha M_1}}{\overline{\beta M'}} = \frac{\overline{BM_1}}{\overline{B\beta}} \quad (1.0.200)$$

da cui, eliminando  $\overline{\beta M'}$

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{BM_1}} = \frac{\overline{A\beta}}{\overline{B\beta}} \frac{\overline{\alpha M}}{\overline{\alpha M_1}}$$

Pertanto, se si osserva che si ha, per definizione

$$a^2 = \overline{A\alpha} \cdot \overline{A\beta} \quad b^2 = \overline{B\alpha} \cdot \overline{B\beta}$$

e se si pone

$$q^2 = \frac{\overline{A\alpha}}{\overline{A\beta}} \frac{\overline{B\beta}}{\overline{B\alpha}}$$

si avrà

$$\frac{b}{a} \frac{\overline{AM}}{\overline{BM_1}} = \frac{1}{q} \frac{\overline{\alpha M}}{\overline{\alpha M_1}}$$

l'equazione da risolvere si presenterà quindi nella forma

$$V_M \overline{\alpha M} - q \overline{\alpha M_1} = \frac{\lambda a}{A\beta} \overline{\beta M'} - \mu q \cdot \overline{\alpha M_1} \quad (1.0.201)$$

dove si è utilizzata la seconda delle relazioni (1-74c').

Essendo il punto  $M_1$ , come il punto M, esterno ad (A), applichiamo ad esso le stesse sostituzioni del punto iniziale: dapprima l'inversione  $I_A$  che darà un punto  $M'_1$ , poi a  $M'_1$  l'inversione  $I_\pi$  che darà  $M_2$ ; e così via all'infinito. Avremo nuovi punti che formano due successioni indefinite  $M, M_1, M_2, \dots, M'_1, M'_2, M', \dots$  e tutti questi punti saranno sulla circonferenza iniziale  $\alpha\beta M$ . La costruzione mette in evidenza (e ciò sarà dimostrato analiticamente in seguito) che i punti  $M_i$  tendenti verso il punto-limite  $\beta$  e, similmente, che i punti  $M'_i$  tendano verso  $\alpha$ . La figura mostra anche che la convergenza sarà abbastanza veloce.

Essendo ciò ammesso, applichiamo l'equazione (74-d') ai gruppi di punti così in successione. Avremo equazioni come le seguenti:

$$V_{M_1} \overline{\alpha M_1} - q V_{M_2} \overline{\alpha M_2} = \frac{\lambda \alpha}{A\beta} \overline{\beta M'} - \mu q \overline{\alpha M_2}$$

$$V_{M_{i-1}} \overline{\alpha M_{i-1}} - q V_{M_i} \overline{\alpha M_i} = \frac{\lambda \alpha}{A\beta} \overline{\beta M'_{i-1}} - \mu q \overline{\alpha M_i}$$

Aggiungendo tutte queste equazioni alla prima (74-d') dopo averle moltiplicate rispettivamente per  $q, q^2, \dots, q^{i-1}$ , viene

$$V_M \overline{\alpha M} - q^i V_{M_i} \overline{\alpha M_i} = \frac{\lambda \alpha}{A\beta} [\overline{\beta M'} + q \overline{\beta M'_1} + \dots + q^{i-1} \overline{\beta M'_{i-1}}] - \mu [q \overline{\alpha M'} + q^2 \overline{\alpha M_2} + \dots + q^i \overline{\alpha M'_i}]$$

Abbiamo già notato che i punti  $M_i$  tendono verso il punto  $\beta$ , per cui il potenziale  $V_M$  può non essere finito e continuo. D'altra parte, la quantità  $q$  è essenzialmente minore di 1. Quindi il termine  $(J'Y \cdot \alpha M_i)$  tende a zero, e otteniamo la soluzione del problema nella forma molto semplice

$$V_M = \frac{\lambda \alpha}{\overline{A\beta} \cdot \overline{\alpha M}} [\overline{\beta M'} + q \overline{\beta M'_1} + q^2 \overline{\beta M'_2} + \dots] - \frac{\mu}{\overline{\alpha M}} [q \overline{\alpha M_1} + q^2 \overline{\alpha M_2} + q^2 \overline{\alpha M_3} + \dots] \quad (1.0.202)$$

È inoltre facile verificare che le due serie tra parentesi, il cui termine generale tende verso  $q^i \alpha \beta$ , convergono come progressioni aritmetiche la cui ragione sarebbe uguale a  $q$ .

Ottenuta la soluzione, non resta che trasformarla e svilupparla; e, per questo, occorre stabilire le relazioni tra i punti  $M_i, M'_i$ . A tale scopo, alle coordinate ordinarie  $x, y$  di un punto del piano, G. Darboux sostituisce le coordinate simmetriche immaginarie  $z = x + iy, z_0 = x - iy$ . L'inversione essendo definita da una formula della seguente forma

$$z = \frac{Az'_0 + B}{Cz'_0 + D}$$

è facile vedere che, se si prende per asse delle  $x$  la retta dei centri, e se si indicano con  $\alpha, \beta$  le ascisse dei punti  $\alpha$  e  $\beta$ , l'inversione  $I_A$  sarà definita da una formula come la seguente

$$\frac{(z - \alpha)(z'_0 - \alpha)}{(z - \beta)(z'_0 - \beta)} = s^2 \quad (1.0.203)$$

Questa formula fa infatti corrispondere il punto  $\alpha$  al punto  $\beta$ , e viceversa. Per avere  $s^2$  basta notare che, nell'inversione, il punto A deve corrispondere al punto posto all'infinito: ciò dà la relazione

$$s^2 = \frac{\overline{A\alpha}}{\overline{A\beta}}$$

che farà conoscere  $s^2$ . Si osserverà che  $s^2$  è minore dell'unità.

Analogamente, l'inversione  $I_B$  sarà definita dalla formula

$$\frac{(z'_0 - \beta)(z_1 - \beta)}{(z'_0 - \alpha)(z_1 - \alpha)} = s^2 \quad (1.0.204)$$

e si avrà

$$t^2 = \frac{\overline{B\beta}}{\overline{B\alpha}}$$

anche  $t^2$  sarà inferiore all'unità. Infine, la sostituzione  $I_A I_B$  sarà definita dalla formula

$$\frac{z_1 - \beta}{z_1 - \alpha} = q^2 \frac{z - \beta}{z - \alpha} \quad (1.0.205)$$

ottenuta moltiplicando le due precedenti. Osserviamo l'identità  $q = st$ , che collega le tre frazioni  $q, s, t$ .

L'ultima relazione, messa in forma canonica, permette di dedurre, dall'affisso di M, quello di  $M_i$ . Essa lo darà immediatamente nella forma

$$\frac{z_i - \beta}{z_i - \alpha} = q^{2i} \frac{z - \beta}{z - \alpha}$$

che mostra che il punto  $M_i$  tende verso il punto  $\beta$ ,

Poniamo  $\overline{\alpha\beta} = D$ . Dalla formula precedente si dedurrà

$$\frac{z_i - \beta}{(z - \beta) q^i} = \frac{z_i - \alpha}{(z - \alpha) q^{-i}} = \frac{D}{(z - \alpha) q^{-i} - (z - \beta) q^i}$$

e quindi

$$\frac{\overline{AM_i}}{\overline{\alpha M}} = \frac{Dq^{-i}}{\mathcal{M} [(z - \alpha) q^{-i} - (z - \beta) q^i]}$$

dove il simbolo  $\mathcal{M}$  indica il modulo della quantità che gli è sottoposta.

Se  $V$  indica l'angolo  $\alpha M \beta$ , si ha

$$\mathcal{M} \left[ (z - \alpha) q^{-i} - (z - \beta) q^i \right] = \sqrt{\alpha M^2 q^{-2i} + \beta M^2 q^{2i} - 2\alpha M \cdot \beta M \cos V}$$

La seconda serie che compare nella (74-e') avrà come espressione definitiva

$$-\mu \sum_1^\infty q^i \frac{\overline{\alpha M_i}}{\alpha M} = - \sum_1^\infty \frac{D\mu}{\sqrt{\alpha M^2 q^{-2i} + \beta M^2 q^{2i} - 2\alpha M \cdot \beta M \cos V}}$$

Eseguiamo un calcolo analogo per la prima serie. Si ha, tra  $M_i$  e  $M'_i$ , la relazione stabilita dalla formula ( $I_A$ ), cioè

$$\frac{(z_i - \alpha)(z'_{0i} - \alpha)}{(z_i - \beta)(z'_{0i} - \beta)} = s^2$$

che ci dà

$$\frac{z'_{0i} - \beta}{(z - \alpha) s^{-1} q^i} = \frac{z'_{0i} - \alpha}{(z - \beta) s q^i} = \frac{D}{(z - \beta) s q^i - (z - \alpha) s^{-1} q^{-1}}$$

e di conseguenza

$$\begin{aligned} \frac{\overline{\beta M'_i}}{\alpha M} &= \frac{Ds^{-1}q^{-i}}{\mathcal{M}[(z - \beta) s q^i - (z - \alpha) s^{-1} q^{-1}]} = \\ &= \frac{Ds^{-1}q^{-i}}{\sqrt{\beta M^2 s^2 q^{2i} + \alpha M^2 s q^{-2i} - 2\alpha M \cdot \beta M \cos V}} \end{aligned}$$

Pertanto, se si tiene conto della formula

$$\alpha = \sqrt{A\alpha \cdot A\beta} = A\beta s$$

la prima serie della formula (74-e') diverrà

$$\frac{\lambda\alpha}{A\beta} \sum_0^\infty q^i \frac{\overline{\beta M'_i}}{\alpha M} = \sum_0^\infty \frac{hD}{\sqrt{\beta M^2 s^2 q^{2i} + \alpha M^2 s^{-2} q^{-2i} - 2\alpha M \cdot \beta M \cos V}}$$

Si avrà quindi, per il potenziale  $V_M$ , l'espressione definitiva

$$\left\{ \begin{array}{l} V_M = \lambda \sum_0^\infty \frac{D}{\sqrt{\beta M^2 s^2 q^{2i} + \alpha M^2 s^{-2} q^{-2i} - 2\alpha M \cdot \beta M \cos V}} \\ -\mu \sum_1^\infty \frac{D}{\sqrt{\beta M^2 q^{2i} + \alpha M^2 q^{-2i} - 2\alpha M \cdot \beta M \cos V}} \end{array} \right. \quad (1.0.206)$$

alla quale si potrà unire, scambiando le due sfere, l'espressione seguente per il potenziale della sfera (B)

$$\left\{ \begin{array}{l} V_M = \lambda \sum_0^\infty \frac{D}{\sqrt{\alpha M^2 t^2 q^{2i} + \beta M^2 t^{-2} q^{-2i} - 2\alpha M \cdot \beta M \cos V}} \\ -\mu \sum_1^\infty \frac{D}{\sqrt{\alpha M^2 q^{2i} + \beta M^2 q^{-2i} - 2\alpha M \cdot \beta M \cos V}} \end{array} \right.$$

È facile vedere che queste due espressioni verificano le relazioni (74,b'). È anche facile verificare che si tratta effettivamente di potenziali, perché la formula (74,f') ci dà, introducendo il punto  $A_i$  il cui affisso è definito dall'equazione

$$\frac{z - \alpha}{z - \beta} = q^{2i} \quad (1.0.207)$$

la relazione

$$\frac{\overline{\alpha M_i}}{\overline{\alpha M}} = \frac{D}{(1 - q^{2i})} \frac{1}{\overline{A_i M}}$$

e, anche, se introduciamo il punto  $A'_i$  definito dall'equazione

$$\frac{z - \alpha}{z - \beta} = s^2 q^{2i} \quad (1.0.208)$$

otteniamo la relazione

$$\frac{\overline{\beta M_i}}{\overline{\alpha M}} = \frac{Ds^{-1}q^{-i}}{\mathcal{M}[(z - \beta)sq^i - (z - \alpha)s^{-1}q^{-i}]} = \frac{D}{1 - s^2 q^{2i}} \frac{1}{\overline{A'_i M}}$$

di modo che arriviamo per  $V_M$  all'espressione

$$V_M = \lambda D \sum_0^\infty \frac{sq^i}{1 - s^2 q^{2i}} \frac{1}{\overline{A'_i M}} - \mu \sum_1^\infty \frac{q^i}{1 - q^{2i}} \frac{1}{\overline{A_i M}}$$

che definisce un potenziale.

Se si definissero analogamente i potenziali  $B_i, B'_i$  con le relazioni

$$\frac{z - \beta}{z - \alpha} = q^{2i} \quad (B_i) \quad \frac{z - \beta}{z - \alpha} = t^2 q^{2i} \quad (B'_i)$$

si avrebbe analogamente

$$V'_M = \mu D \sum_0^\infty \frac{tq^i}{1 - t^2 q^{2i}} \frac{1}{\overline{B_i M}} - \lambda D \sum_1^\infty \frac{q^i}{1 - q^{2i}} \frac{1}{\overline{B'_i M}}$$

I punti  $A_i, A'_i, B_i, B'_i$  sono quelli che daranno il metodo delle immagini applicato ai centri delle due sfere. Il punto  $A'_0$ , ad esempio, coincide con A, il punto  $B'_0$  con B. Inversioni successive rispetto a (B) e ad (A) fanno derivare da A successivamente  $B_1, A'_1, B_2, A'_2$ , ecc. Inversioni rispetto ad (A) e a (B) fanno derivare da B successivamente  $A_1$ , poi  $B'_1, A_2, B'_2$ , ecc.

Le espressioni ottenute da G. Darboux con il suo metodo sono molto appropriate al calcolo numerico. Osserviamo che si ha

$$\frac{\overline{\alpha M}}{\sqrt{\beta M^2 q^{2i} + \overline{\alpha M}^2 q^{-2i} - 2\overline{\alpha M} \cdot \overline{\beta M} \cos V}} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \left( \frac{\overline{\beta M}}{\overline{\alpha M}} \right)^\nu q^{i(2\nu+1)} P_\nu(\cos V) \quad (1.0.209)$$

o

$$\frac{\overline{\alpha M}}{\sqrt{\beta M^2 s^2 q^{2i} + \overline{\alpha M}^2 s^{-2} q^{-2i} - 2\overline{\alpha M} \cdot \overline{\beta M} \cos V}} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \left( \frac{\overline{\beta M}}{\overline{\alpha M}} \right)^\nu s^{2\nu+1} q^{i(2\nu+1)} P_\nu(\cos V) \quad (1.0.210)$$

dove  $P_\nu(\cos V)$  rappresenta il polinomio di Legendre di grado  $\nu$ . Le serie che compaiono al secondo membro sono convergenti per tutti i termini dell'espressione (74, g'), poiché, essendo le equazioni delle due sfere (A) e (B)

$$\frac{\overline{\beta M}}{\overline{\alpha M}} = \frac{1}{s} \quad \frac{\overline{\beta M}}{\overline{\alpha M}} = l \quad \text{si}$$

si vede che, nello spazio esterno alle due sfere, il rapporto  $\frac{\overline{\beta M}}{\overline{\alpha M}}$  sarà sempre compreso tra  $\frac{1}{s}$  e  $l$ . Nelle formule precedenti, questo rapporto è sempre moltiplicato almeno per  $s^2$  o  $q^2$ . Pertanto, le serie saranno sempre convergenti, e la loro convergenza diverrà estremamente rapida al crescere di  $i$ .



Se si applicano queste relazioni a tutti i termini delle formule (74,g'), tranne la prima, si avrà

$$V_M - \frac{\lambda\alpha}{\alpha M} = \frac{D}{\alpha M} \sum_{\nu=0}^{\infty} q^{2\nu+1} \left( \frac{\beta M}{\alpha M} \right)^{\nu} P_{\nu}(\cos V) \frac{\lambda s^{2\nu+1} - \mu}{1 - q^{2\nu+1}}$$

Si troverebbe analogamente

$$V_{M'} - \frac{\mu b}{\beta M} = \frac{D}{\beta M} \sum_{\nu=0}^{\infty} q^{2\nu+1} \left( \frac{\alpha M}{\beta M} \right)^{\nu} P_{\nu}(\cos V) \frac{\mu t^{2\nu+1} - \lambda}{1 - q^{2\nu+1}}$$

Si possono pure impiegare le sole formule (74,h') e (74-i') per ottenere una valutazione molto approssimato del resto che si trascura, quando si limitano le serie ai loro primi termini, Si avrebbe, per esempio,

$$V = \lambda \sum_0^{-1} \frac{D}{\sqrt{\beta M^2 s^2 q^{2i} + \alpha M^2 s^{-2} q^{-2i} - 2\alpha M \cdot \beta M \cos V}} - \mu \sum_0^{i-1} \frac{D}{\sqrt{\beta M^2 q^{2i} + \alpha M^2 q^{-2i} - 2\alpha M \cdot \beta M \cos V}} + \frac{D}{\alpha M} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left( \frac{\beta M}{\alpha M} \right)^{\nu} P_{\nu}(\cos V) q^{i(2\nu+1)} \frac{\lambda s^{2\nu+1} - \mu}{1 - q^{2\nu+1}}$$

Rimane, per terminare, da indicare come si calcoleranno  $s, t, q, D, \alpha, \beta$  in funzione dei raggi  $a, b$  delle due sfere e della distanza tra i centri  $c$ . Poniamo  $a + b + c = 2P, c + b - a = 2A, c + a - b = 2B, c - a - b = 2C$ ; si avrà

$$s = \frac{\sqrt{PB} - \sqrt{AC}}{\sqrt{PB} + \sqrt{AC}} \quad t = \frac{\sqrt{PA} - \sqrt{BC}}{\sqrt{PA} + \sqrt{BC}} \quad q = \frac{\sqrt{AB} - \sqrt{PC}}{\sqrt{AB} + \sqrt{PC}}$$

$$\bar{A}\alpha = as = \frac{1}{c} \left( \sqrt{PB} - \sqrt{CA} \right)^2 \quad \bar{B}\alpha = \frac{b}{t} = \frac{1}{c} \left( \sqrt{PA} - \sqrt{CB} \right)^2$$

$$\bar{A}\beta = \frac{a}{s} = \frac{1}{c} \left( \sqrt{PB} - \sqrt{CA} \right)^2 \quad \bar{B}\beta = bt = \frac{1}{c} \left( \sqrt{PA} - \sqrt{CB} \right)^2$$

$$D = \frac{4}{c} \sqrt{ABCP}$$

IV. STATO ELETTRICO DEI DIELETTRICI POSTI IN UN CAMPO ELETTRICO. TEORIA DI MOSSOTTI E CLAUSIUS. - Sappiamo che i non conduttori sono soggetti, in un campo elettrico, a quella che si chiama polarizzazione. Il flusso totale di induzione non cambia quando si passa da un dielettrico all'altro. La formula (21), in cui  $k = 0$ , o (31), mostra che è sufficiente che la componente del flusso di induzione, che è normale alla superficie di separazione S dei due dielettrici, non vari. Siano  $K_1$  e  $K_2$  le costanti dielettriche,  $\Phi_1$  e  $\Phi_2$  le forze elettriche nei due dielettrici,  $\Phi_{1n}$  e  $\Phi_{2,n}$  le componenti di queste forze nella direzione della normale  $n$  alla superficie S rivolta verso il lato del dielettrico  $K_2$ . Si deve avere  $K_1\Phi_{1,n} = K_2\Phi_{2,n}$ , o

$$\frac{\Phi_{1,n}}{\Phi_{2,n}} = \cos t = \frac{K_2}{K_1} \quad (1.0.211)$$

Abbiamo visto invece che si può soddisfare la condizione (75), supponendo che tutto il mezzo sia omogeneo e possieda ad esempio il potere induttivo  $K_1$ , e che allora sulla superficie S sia distribuita una certa carica elettrica, la cui densità indicheremo con  $k$ . Siano  $F'_1$  e  $F'_2$  l'intensità del campo prodotta da questa carica su entrambi i lati della superficie S,  $F'_{1,n}$  e  $F'_{2,n}$  le componenti normali di quest'ultima intensità,  $F$  l'intensità data del campo con un mezzo omogeneo. I valori  $F_1$  e  $F_2$  di quest'ultima intensità sono identici in tutti i punti della superficie S, e così pure per le componenti normali  $F_{1,n} = F_{2,n} = F_n$ . La forza  $\Phi$  è la risultante delle forze  $F$  e  $F'$  e si ha pertanto

$$\begin{cases} \Phi_{1,n} = F'_{1,n} + F_n \\ \Phi_{2,n} = F'_{2,n} + F_n \end{cases} \quad (1.0.212)$$

Considereremo il semplice problema seguente.

SFERA DIELETTRICA IN UN CAMPO UNIFORME DI INTENSITÀ  $F$ . - Sia  $R$  il raggio della sfera (fig. 69),  $K_2$  il potere induttivo di questa sfera,  $K_1$  quello del centro. Abbiamo visto che quando la superficie di una sfera conduttrice, che si trova in un mezzo  $K_1$ , è ricoperta da uno strato di elettricità di densità

$$k_0 = -\frac{3K_1}{4\pi} F \cos \varphi \quad (1.0.213)$$

vedi (72,c), questo strato produce all'interno della sfera un campo uniforme, la cui intensità  $F' = -F$ . La formula (75,b) risolve il problema della distribuzione dell'elettricità su una sfera conduttrice, posta in un campo uniforme di intensità  $F$ , e inoltre in un mezzo il cui potere induttivo è  $K_1$ . L'intensità del campo all'interno della sfera è  $F + F' = F - F = 0$ , come dovrebbe essere per un conduttore.

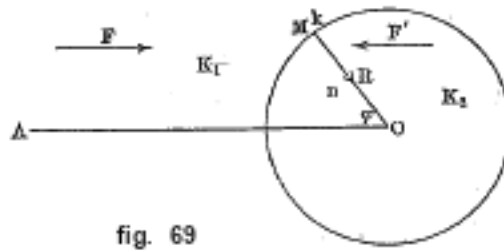


fig. 69

Per una sfera formata da una sostanza dielettrica  $K_2$ , dobbiamo trovare una carica fittizia di densità  $k$ , che dia all'interno e all'esterno della sfera le intensità  $F'_1$ ; e  $F'_2$  che soddisfano le condizioni (75) e (75,a). Vediamo cosa dà una tale distribuzione sulla superficie di una sfera, quando la densità della carica è

$$k = \alpha k_0 = -\frac{3\alpha K_1}{4\pi} F \cos \varphi \quad (1.0.214)$$

dove  $\alpha$  è un coefficiente costante e dove, come prima,  $\varphi = AOM$ . Innanzitutto è chiaro che questa carica produce, all'interno della sfera, un campo elettrico uniforme, la cui intensità è

$$F'_2 = -\alpha F \quad (1.0.215)$$

La densità  $k$  è negativa per tutti i valori di  $\varphi$  compresi tra  $-90^\circ$  e  $+90^\circ$ , cioè per l'emisfero sinistro, ed è quindi evidente che la forza  $F'_2$  ha la direzione indicata in figura. Cerchiamo i valori di  $\Phi_{1,n}$  e  $\Phi_{2,n}$  per un punto qualunque M, assumendo che  $n$  sia la direzione della normale interna alla superficie della sfera. Ricordiamo che introducendo la carica  $k$ , si deve supporre un unico mezzo omogeneo di costante dielettrica  $K_1$ . All'interno della sfera e a una distanza infinitamente piccola dal punto M, si ha

$$F_n = F \cos \varphi$$

$$F'_{2,n} = F'_2 \cos \varphi = -F\alpha \cos \varphi \quad (1.0.216)$$

Se ne deduce

$$\Phi_{2,n} = F'_{2,n} + F_n = (1 - \alpha) F \cos \varphi \quad (1.0.217)$$

Per trovare  $F'_{1,n}$  ci serviremo della formula (22), nella quale tuttavia  $n$  indicherà la normale esterna,

$$F'_{1,n} - F'_{2,n} = -\frac{4\pi k}{K_1}$$

Se si sostituisce il valore (75,c) di  $k$ , si ottiene

$$F'_{1,n} = F'_{2,n} - \frac{4\pi k}{K_1} = -\alpha F \cos \varphi + 3\alpha F \cos \varphi = 2\alpha F \cos \varphi$$

Si ha inoltre

$$\Phi_{1,n} = F'_{1,n} + F_n = 2\alpha F \cos \varphi + F \cos \varphi = (1 + 2\alpha) F \cos \varphi$$

Dividendo la (75,g) per la (75,f), viene

$$\frac{\Phi_{1,n}}{\Phi_{2,n}} = \frac{1 + 2\alpha}{1 - \alpha} = \text{cost} \quad (1.0.218)$$

La densità (76,c) fornisce quindi un rapporto costante tra le componenti normali delle forze elettriche su entrambi i lati della superficie sferica, come richiesto in primo luogo dall'equazione (75).

Per soddisfare completamente questa equazione, si deve porre

$$\frac{1 + 2\alpha}{1 - \alpha} = -\frac{K_2}{K_1} \quad (1.0.219)$$

cioè

$$\alpha = \frac{K_2 - K_1}{K_2 + 2K_1} \quad (1.0.220)$$

Se si porta  $\alpha$  nella (75,c), viene

$$k = -\frac{3K_1}{4\pi} \cdot \frac{K_2 - K_1}{K_2 + 2K_1} F \cos \varphi \quad (1.0.221)$$

Questa formula risolve completamente il problema posto, poiché determina la densità  $k$  della carica, di cui dobbiamo supporre ricoperta la superficie della sfera, per ottenere le forze che si esercitano nell'ipotesi che tutto lo spazio considerato sia omogeneo e possieda ovunque lo stesso potere induttivo  $K_1$ .

Per  $K_2 = K_1$ , si ottiene naturalmente  $k = 0$ ; per  $K_2 > K_1$ ,  $k$  è negativo; per  $K_2 < K_1$ , è positivo, cioè che in questo caso, l'elettrizzazione apparente della sfera è contraria a quella che si osserva su una sfera conduttrice. Per  $K_2 = \infty$ , si ha  $k = k_0$ , si veda la (75,b). Si dimostra facilmente che l'uguaglianza (31,b) è soddisfatta.

All'interno della sfera, si ha, per tutti i valori di  $K_2$ , un campo elettrico uniforme, la cui intensità  $\Phi_2$  è

$$\Phi_2 = F'_2 + F = -\alpha F + F = (1 - \alpha) F = \frac{3K_1}{K_2 + 2K_1} F \quad (1.0.222)$$

Per  $K_2 = K_1$ ,  $\Phi_2 = F$  e per  $K_2 = \infty$ ,  $\Phi_2 = 0$ , come deve essere. La costanza della forza  $\Phi_2$  mostra che una sfera dielettrica, in un campo uniforme, è soggetta in tutti i suoi punti a una stessa polarizzazione, si veda (33,h). Quando la sfera si trova nell'aria, si ha  $K = 1$ ; ponendo  $K_2 = K$ , viene

$$k = -\frac{3}{4\pi} \frac{K - 1}{K + 2} F \cos \varphi \quad (1.0.223)$$

Mediante la formula (33,d), si ottiene, per la polarizzazione  $\Pi$ , l'espressione

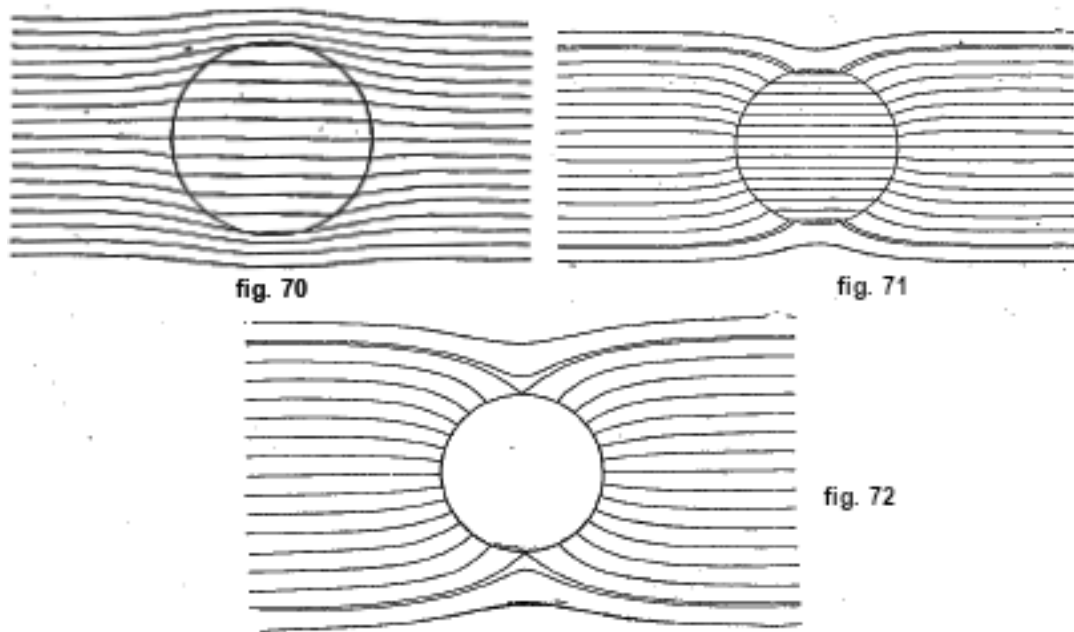
$$\Pi = -\frac{3}{4\pi} \frac{K - 1}{K + 2} F \quad (1.0.224)$$

L'intensità del campo all'interno della sfera è

$$\Phi_2 = \frac{3}{K+2}F \quad (1.0.225)$$

Se si pone  $\Pi = \gamma\Phi_2$ , si ottiene, per la suscettibilità elettrica  $\gamma$ , l'espressione  $(K-1) : 4\pi$ , in accordo con la (34).

Si è rappresentato sulle figure 70, 71 e 72, la distribuzione delle linee di forza per  $K_2 = 0, 48K_1$ ,  $K_2 = 2, 8K_1$  e  $K_2 = \infty$  (sfera conduttrice).



Torneremo alla teoria di Clausius e Mossotti. Questa teoria riproduce solo, come vedremo in seguito, la teoria del magnetismo di Poisson. Quest'ultima ha dato luogo ad obiezioni, che sono state esposte con grande chiarezza da P. Duhem (1886). Fu ripresa da H. Poincaré (1890), che la rese piuttosto rigorosa nel modo seguente.

Una sfera conduttrice si dice polarizzata quando la distribuzione elettrica su di essa è come se fosse posta in un campo uniforme. Consideriamo un dielettrico costituito come suppongono Clausius e Mossotti. Ciascuna delle sfere che contiene si polarizza sotto l'azione di corpi elettrizzati esterni, poiché le dimensioni di queste sfere sono molto piccole, il campo può essere considerato uniforme in prossimità di ciascuna di esse. Diremo che un dielettrico di cui tutte le sfere sono polarizzate è esso stesso polarizzato.

Possiamo facilmente trovare il valore del potenziale della sfera polarizzata, in un punto P esterno ad essa, il cui raggio indicheremo con  $R$ . Supponendo la densità  $\delta = \pm 1$ , chiamando  $\varphi$  l'angolo della direzione OP con la linea dei centri presa come asse delle  $x$ , questo potenziale è  $FR^3 \frac{\cos \varphi}{r^2}$  o  $-\frac{3}{4\pi}uF \frac{\partial^1}{\partial x}$ , essendo  $u$  il volume della sfera. Prendendo assi di coordinate arbitrarie e indicando con  $\Psi$  il potenziale del campo, con  $x, y, z$  le coordinate del centro della sfera, il potenziale della sfera polarizzata è

$$-\frac{3}{4\pi} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial^1}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial^1}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial^1}{\partial z} \right)$$

Immaginiamo ora un elemento di volume  $dxdydz$  del dielettrico, contenente un numero molto grande  $n$  di sfere, e tuttavia abbastanza piccolo perché il campo possa essere considerato uniforme. Sia  $nu = g dxdydz$ , per cui  $g$  è il rapporto tra il volume delle sfere e il volume totale

del dielettrico, e inoltre  $A = -\frac{3g}{4\pi} \frac{\partial \Psi}{\partial x}$ ,  $B = -\frac{3g}{4\pi} \frac{\partial \Psi}{\partial y}$ ,  $C = -\frac{3g}{4\pi} \frac{\partial \Psi}{\partial z}$ ; si avrà per il potenziale dovuto all'elemento polarizzato  $dx dy dz$

$$\left( A \frac{\partial^1}{\partial x} + B \frac{\partial^1}{\partial y} + C \frac{\partial^1}{\partial z} \right) dx dy dz$$

Le tre quantità  $A, B, C$  sono le componenti della polarizzazione e il potenziale  $V$  dovuto all'intero dielettrico si scriverà

$$V = \iiint \left( A \frac{\partial^1}{\partial x} + B \frac{\partial^1}{\partial y} + C \frac{\partial^1}{\partial z} \right) dx dy dz$$

o, integrando per parti

$$V = \iint \frac{ds}{r} (lA + mB + nC) - \iiint \left( \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \right) dx dy dz$$

essendo  $l, m, n$  i coseni direttori della normale alla superficie che delimita il dielettrico.

Sia ora  $V$  il potenziale dovuto ai corpi elettrizzati esterni e  $s$  una qualsiasi delle sferette conduttrici aventi per centro un certo punto  $O$ ; esprimiamo le condizioni di equilibrio elettrico su questa sfera. Scomponiamo il volume del dielettrico in due volumi parziali  $v'$  e  $v''$ , dove il secondo è molto piccolo e contiene la sfera  $s$ . Una molecola elettrica in  $O$  dovrà essere in equilibrio sotto l'azione dei corpi elettrizzati esterni, del volume  $v'$  del dielettrico, delle sfere diverse da  $s$  poste all'interno di  $v''$ , infine della sfera  $s$ . Assumeremo che il volume  $v''$ , pur contenendo un numero molto grande di sfere, sia abbastanza piccolo perché le componenti  $A, B, C$  possano considerarsi come costanti e sceglieremo gli assi in modo che  $B$  e  $C$  siano nulli. Siano  $a, b, c$  le coordinate del punto attratto, di modo che  $r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2$ . Ricordiamo inoltre che  $\Psi$  è il potenziale del campo uniforme che produrrebbe la polarizzazione di ogni sfera conduttrice, e che il potenziale effettivo sia  $V + V_1 = U$ .

La componente dovuta ai corpi esterni sarà  $-\frac{\partial V_1}{\partial a}$ . La componente dovuta alla sfera  $s$  sarà  $+\frac{\partial \Psi}{\partial x}$  poiché, per ipotesi, la sfera è polarizzata come se fosse sotto l'azione di un campo uniforme di intensità  $-\frac{\partial \Psi}{\partial x}$ . Se si sceglie opportunamente la superficie  $S$  che separa i due volumi parziali  $v'$  e  $v''$ , l'azione delle sfere diverse da  $s$  e interne a  $v''$  sarà nulla; siano infatti  $\xi, \eta, \zeta$  le coordinate del centro di una di queste sfere, prendendo come origine il punto  $O$ ; la forza elettrostatica esercitata da tale sfera nel punto  $O$  avrà come componente lungo l'asse  $x$ :

$$-\frac{3u}{4\pi} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial^1}{\partial x} = \frac{3u}{4\pi} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - 3\xi^2}{(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{5/2}}$$

ne risulta che le azioni delle tre sfere che hanno rispettivamente per centro i punti  $(\xi, \eta, \zeta)$ ,  $(\eta, \zeta, \xi)$ ,  $(\zeta, \xi, \eta)$  si annullano a vicenda. Se quindi la superficie  $S$  ha la simmetria cubica e non cambia quando si permutano i tre assi coordinati, le azioni delle diverse sfere contenute all'interno di questa superficie si neutralizzano. È per non aver fatto questa ipotesi che Poisson non è stato rigoroso.

Supporremo, per fissare le idee, che la superficie  $S$  sia una sfera avente centro in  $O$ . Ci resta da valutare l'azione del volume  $v'$ . Chiamando  $V'$  l'integrale  $V$  esteso solo al volume  $v'$ , e  $V''$  lo stesso integrale esteso al volume  $v''$ , si ha, per l'azione del volume  $v'$

$$\frac{\partial V'}{\partial a} = \frac{\partial V}{\partial a} - \frac{\partial V''}{\partial a}$$

o

$$\frac{\partial V''}{\partial a} = \iint (lA + mB + nC) \frac{x}{r^3} ds - \iiint \left( \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \right) \frac{x}{r^3} dx dy dz$$

essendo il primo integrale esteso alla superficie  $S$  e il secondo al volume  $v$ ". Se il raggio della sfera  $S$  è infinitamente piccolo, sarà lo stesso per il secondo degli integrali di quest'ultima formula, ma non del primo. D'altra parte se questo raggio è molto piccolo,  $A, B, C$  sono costanti e abbiamo assunto che  $B$  e  $C$  siano nulli; inoltre  $l$  è il coseno direttore della normale alla sfera, cioè  $x/r$ ; si ha quindi

$$\frac{\partial V''}{\partial a} = A \iint \frac{x^2}{r^4} ds = \frac{4}{3} \pi A$$

L'equazione di equilibrio si scrive pertanto

$$-\frac{\partial V_1}{\partial a} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial a} + \frac{4}{3} \pi A = 0$$

o

$$\frac{\partial (V + V_1)}{\partial a} = \frac{\partial U}{\partial a} = \frac{4}{3} \pi \left(1 - \frac{1}{g}\right) A$$

Invece di prendere per asse la direzione della polarizzazione nel punto considerato, prendiamo assi qualsiasi, e invece di  $a, b, c$  torniamo alla notazione  $x, y, z$ , senza temere confusione; avremo le tre equazioni

$$(1 - K) \frac{\partial U}{\partial x} = 4\pi A \quad (1 - K) \frac{\partial U}{\partial y} = 4\pi B \quad (1 - K) \frac{\partial U}{\partial z} = 4\pi C$$

e ponendo per abbreviare  $K - 1 = \frac{3g}{1-g}$ , o  $g = \frac{K-1}{K+2}$ . Differenziando queste tre equazioni rispettivamente rispetto a  $x, y, z$  e sommando si ha

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left( K \frac{\partial U}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( K \frac{\partial U}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( K \frac{\partial U}{\partial z} \right) + \Delta U = 4\pi \left( \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \right)$$

Ora  $V_1$  è il potenziale dei corpi esterni; si ha quindi  $\Delta V_1 = 0$ . D'altra parte, l'equazione (78,d) mostra che  $V$  può essere considerato come il potenziale dovuto a uno strato di densità  $lA + mB + nC$  distribuito sulla superficie del dielettrico, meno il potenziale di una quantità di elettricità distribuita in questo volume, e avente per densità  $\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}$ . Ne risulta che

$$\Delta U = \Delta V \left( \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \right)$$

e di conseguenza

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( K \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( K \frac{\partial U}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K \frac{\partial U}{\partial z} \right) = 0$$

Ora,  $U = V + V_1$  che designa il potenziale, il confronto dell'equazione a cui siamo appena arrivati con l'equazione fondamentale (20,c), o (41,d), mostra che  $K$  non è altro che il potere induttivo.

Così, in un dielettrico, costituito come lo immagina Mossotti e di potere induttivo  $K$ , il rapporto tra il volume occupato dalle sfere e il volume totale è  $g = \frac{K-1}{K+2}$ . Si trova d'altra parte,  $(1 - K) \frac{\partial U}{\partial x} = 4\pi A = -3g \frac{\partial \Psi}{\partial x}$ . Lo spostamento  $\mathcal{D}$  di Maxwell si scrive allora

$$\mathcal{D} = -\frac{K}{4\pi} \frac{\partial U}{\partial x} = 3g \frac{K}{K-1} \frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\frac{3}{4\pi} \frac{K}{K+2} \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{3}{4\pi} \frac{K}{K+2} F$$

essendo nulle le altre due componenti dello spostamento elettrico, se si prende per asse delle  $x$  la direzione della polarizzazione nel punto considerato, ed essendo  $F$  l'intensità del campo uniforme che polarizzerebbe le nostre sferette così come sono realmente. Da quanto visto, tutto accade come se ci fossero due sfere con lo stesso raggio della sfera conduttrice, una riempita di fluido

positivo di densità 1, l'altra di fluido negativo di densità 1, e se la sfera negativa, coincidente nel normale stato di equilibrio con la sfera positiva, subisse sotto l'influenza del campo uniforme di intensità  $F$  uno spostamento  $x_0$  dato dalla formula  $F = -\frac{4}{3}\pi x_0$ . Tutto avverrà quindi come se ci fosse uno spostamento in blocco dei fluidi elettrici di ciascuna delle sferette. Tuttavia, le sfere conduttrici non occupano l'intero volume del dielettrico; sono separate tra loro da un mezzo isolante avente le stesse proprietà dell'aria, e la somma dei loro volumi sta al volume totale del dielettrico nel rapporto di  $g$  a 1. La somma delle cariche positive riscontrate su queste sfere è quindi  $g$  volte minore della somma di queste stesse cariche, nell'ipotesi che l'intero volume del dielettrico sia occupato da sfere conduttrici. Poiché è lo stesso per le cariche negative, possiamo supporre che ciascuno dei fluidi sia distribuito in tutto il dielettrico con una densità  $g$ , o che ciascuno di essi occupi solo una frazione  $g$  del volume del dielettrico con una densità 1. Il valore dello spostamento medio sarà lo stesso in entrambi i casi, cioè  $gx_0$  o  $-g\frac{3F}{4\pi}$ , e di conseguenza lo spostamento del fluido positivo rispetto al fluido negativo, che differisce solo di segno dal precedente, sarà

$$\mathcal{D}' = g \frac{3F}{4\pi} = \frac{3}{4\pi} \frac{K-1}{K+2} F$$

Il rapporto tra lo spostamento nella teoria di Poisson e lo spostamento di Maxwell è quindi  $\frac{\mathcal{D}'}{\mathcal{D}} = \frac{K-1}{K}$ . In aria lo spostamento è nullo, adottando le idee di Poisson, poiché per l'aria  $K = 1$ . Con Maxwell lo spostamento in aria ha il valore  $\frac{F}{4\pi}$ . Questa è la differenza essenziale tra le due teorie. Ma possiamo mettere d'accordo queste teorie, notando che la differenza che abbiamo appena indicato è legata alla scelta dell'unità per il potere induttivo della sostanza isolante che separa le sfere conduttrici. È facile verificare che se indichiamo con  $K$  il potere induttivo di questa sostanza, si ha

$$g = \frac{K-K_1}{K+2K_1} \quad \frac{\mathcal{D}'}{\mathcal{D}} = \frac{K-1}{K}$$

Quest'ultima formula mostra che se  $K_1$  è molto piccolo, il rapporto degli spostamenti è vicino all'unità. I due spostamenti avrebbero quindi sostanzialmente lo stesso valore se  $K$ , fosse infinitamente piccolo, il che richiede che  $g$  differisca infinitamente poco dall'unità, cioè che lo spazio non conduttivo che separa le sfere conduttrici sia infinitamente piccolo. Abbiamo però introdotto solo l'ipotesi della forma sferica dei conduttori disseminati nel dielettrico per avere maggiore semplicità nei calcoli; le conseguenze restano vere per qualsiasi forma dei conduttori, e possiamo rappresentare un dielettrico come formato da celle conduttrici separate da partizioni non conduttrici. Basta allora, per accordare la teoria di Poisson con quella di Maxwell, supporre che queste partizioni abbiano uno spessore infinitamente piccolo, poiché allora  $g$  differisce infinitamente poco dall'unità e che esse siano formate da una sostanza isolante di potere induttivo infinitamente piccolo  $K_1$ . H. Poincaré ha mostrato che questo accordo si trova in tutte le conseguenze della teoria di Maxwell e che dal punto di vista matematico quest'ultima teoria è identica a quella di Poisson così modificata. Ma ha fatto notare che una costituzione così eterogenea sembrava difficile da ammettere per i dielettrici liquidi o gassosi e soprattutto per il vuoto interplanetario, e non pensa che Maxwell considerasse lo spostamento elettrico come lo spostamento di una vera sostanza. La sostanza del pensiero di Maxwell è ben diversa, come emerge dalla sua teoria.

IV. EQUIPOLLENZA DELLE MASSE ELETTRICHE. METODO D'ESAME H. POINCARÉ. - Sia  $S$  una qualsiasi superficie chiusa; all'interno di  $S$  ci sono corpi qualsiasi, che insieme contengono la quantità di elettricità  $M$ . Gli elementi di  $M$  possono avere segni diversi, e può quindi accadere che  $M = 0$ . Diremo che abbiamo a che fare con una distribuzione interna di massa. Dimostriamo ora che è impossibile, attraverso lo studio dello spazio esterno alla superficie  $S$ , avere indicazioni sul modo in cui la massa  $M$  è distribuita all'interno di  $S$ . Ci baseremo su questo teorema che vi è un'infinità di distribuzioni della massa  $M$  all'interno di  $S$ , che generano lo stesso campo di forza all'esterno di  $S$ . La dimostrazione si basa sul noto teorema che uno strato sferico omogeneo esercita all'esterno la stessa azione di una sfera concentrica omogenea della stessa

massa. Supponiamo che un elemento  $dM$  della massa  $M$  sia sostituito da una distribuzione uniforme all'interno di uno strato sferico di qualsiasi densità, al centro della quale si trova  $M$ ; il raggio di questo strato è scelto arbitrariamente, ma in modo tale che lo strato sferico sia interamente all'interno di  $S$ . Il campo all'esterno di  $S$  non è quindi cambiato, sebbene la distribuzione interna della massa abbia già subito qualche modifica. Una tale sostituzione di gusci sferici agli elementi di massa può essere ripetuta tutte le volte che si desidera, e in questo modo si ottiene una nuova distribuzione interna, che produce all'esterno di  $S$  lo stesso campo della data distribuzione iniziale. È chiaro che vi è un'infinità di distribuzioni interne equivalenti della massa  $M$ , che generano lo stesso campo esterno, per cui lo studio di questo campo non può dirci nulla sulla distribuzione interna in  $S$ .

Questo teorema vale non solo per le cariche elettriche che si trovano all'interno di  $S$ , ma ovviamente rimane vero nel caso in cui si tratti della materia ponderabile ordinaria che è contenuta in  $S$ . Lo useremo in seguito anche per le masse magnetiche.

Ci proponiamo ora di dimostrare che tra le distribuzioni interne di massa equivalenti, ne esiste una in cui tutta la massa  $M$  giace sulla superficie  $S$ , cosicché le masse interne possono essere trasportate su una superficie chiusa in maniera equipollente. Una dimostrazione, non del tutto rigorosa, è la seguente: sostituiamo ogni elemento  $dM$  con una distribuzione uniforme sulla superficie di una sfera scelta di volta in volta in modo da essere tangente alla superficie  $S$  in un punto qualunque, tale che una parte di  $dM$  venga trasportata sulla superficie  $S$ . Con la ripetizione indefinita di questa operazione, l'intera massa interna sarà infine sulla superficie  $S$ .

Ecco una dimostrazione migliore. Qualunque sia la natura delle masse interne  $M$ , possiamo immaginare che le si sostituisca con cariche elettriche, contenenti una quantità totale di elettricità  $M$ . Supponiamo che  $S$  sia la superficie interna di un conduttore cavo di qualsiasi forma esterna, messo a terra. Riappare, in questo caso, sulla superficie  $S$ , una carica indotta di distribuzione ben determinata, che indicheremo simbolicamente con  $(-N)$ . Sappiamo già di avere quantitativamente  $M = N$ . La massa interna  $M$  e la carica indotta  $(-N)$  generano in tutti i punti esterni alla superficie  $S$  un potenziale nullo; producono quindi campi di forza della stessa intensità, ma diretti in versi opposti. Se ora cambiamo il segno della carica indotta, otteniamo una distribuzione di massa sulla superficie  $S$ , che è quantitativamente uguale alla massa interna  $M$  e che agisce all'esterno di  $S$  esattamente come la massa interna  $M$ . Abbiamo quindi questo teorema:

*Masse interne possono essere trasportate in modo equipollente su una superficie chiusa. La distribuzione delle masse equipollenti si ottiene determinando la carica indotta su  $S$  dalle masse interne e cambiandone il segno.*

La distribuzione data dalla (74,g), può essere considerata come il risultato di un trasporto equipollente della massa  $\eta'$  in B (fig. 68) sulla superficie della sfera, prendendo  $-k'$  invece di  $k$ .

Quando le masse  $M$  sono all'esterno della superficie  $S$ , si può anche modificare la loro distribuzione in un numero infinito di modi, senza che il campo cambio all'interno di  $S$ . Volendo trasportare le masse in un modo equipollente sulla superficie  $S$ , come nella prima dimostrazione, accadrà che una parte delle masse andrà all'infinito e, denotando, la distribuzione delle masse su  $S$  con  $(+N)$ , avremo  $N < M$ . La massa  $N$  è qui la carica  $(-N)$  indotta su  $S$  da  $M$  cambiato segno, essendo  $S$  considerata ora come la superficie esterna di un conduttore messo a terra. La formula (74,f), dà, prendendo il segno opposto, la distribuzione sulla superficie della sfera che è equivalente alla massa  $\eta$  in A (fig. 68). Il rapporto delle grandezze qui indicate con  $M$  e  $N$  si ottiene mediante la formula (74,b); si ha  $M : N = a : R$ .

Sono queste le idee implementate da H. Poincaré, nell'applicazione del suo famoso metodo dell'esame del problema di Dirichlet. Questo può essere prima ridotto alla ricerca di quella che viene chiamata la funzione di Green. Si debba trovare una funzione  $V$  che, all'interno di una superficie  $S$ , soddisfi l'equazione di Laplace, e su questa superficie assuma determinati valori. Supponiamo di aver trovato una funzione  $U$  finita, che soddisfa l'equazione  $\Delta U = 0$ , continua



all'interno di  $S$  eccetto in un punto  $P$  interno ad  $S$  dove la funzione  $U$  sarà infinita tale che la differenza  $U - \frac{1}{r}$  sia finita, essendo  $r$  la distanza dal punto  $(x, y, z)$  al punto  $P$ . Per completare la definizione della funzione  $U$ , si richiede il suo annullamento in tutti i punti di  $S$ . Si dimostra allora che il valore di  $V$  nel punto  $P$  è uguale all'integrale esteso all'intera superficie  $S$

$$V_P = \frac{1}{4\pi} \iint V \frac{\partial U}{\partial n} ds$$

Quando si saprà trovare la funzione di Green, si saprà come risolvere il problema di Dirichlet. La ricerca della funzione di Green si riduce invece, utilizzando il metodo delle immagini di Lord Kelvin, al problema della distribuzione elettrostatica sulla superficie di un conduttore. Questo problema della distribuzione elettrostatica è solo un caso particolare del problema di Dirichlet, e tuttavia si vede che il caso generale si riduce ad esso. Il metodo di Murphy permette anche di ridurre il problema della distribuzione alla superficie di più conduttori isolati, al caso di un solo conduttore, dove è quindi sufficiente posizionarsi.

La funzione di Green  $U$  relativa ad una sfera  $S$  e a un punto  $P$  si ottiene come segue. Sia  $R$  il raggio della sfera e  $O$  il suo centro; prendiamo sulla retta  $OP$  una lunghezza  $OQ = \frac{R^2}{OP}$ ; la funzione  $U$  sarà il potenziale delle due masse, uno uguale a 1 e posto nel punto  $P$ , l'altro uguale a  $-\sqrt{\frac{OQ}{OP}}$  e posto in  $Q$ . Il valore di  $\frac{\partial U}{\partial n}$  corrispondente a un elemento qualunque della sfera  $S$  è in ragione inversa del cubo della distanza di questo elemento dal punto  $P$ ; esso è uguale a  $\frac{R^2 - OP^2}{R} \frac{1}{MP^3}$ , dove  $M$  è il centro di gravità dell'elemento considerato. Se si considera una sfera  $S$  e un punto  $P$  interno a questa sfera, il potenziale di una massa elettrica uguale a 1 e posto in  $P$  sarà uguale a  $\frac{1}{MP}$  nel punto  $M$ . Immaginiamo allora che questa stessa massa elettrica uguale a 1 sia distribuita sulla superficie della sfera  $S$  in modo tale che la densità su un elemento qualsiasi di questa sfera sia inversamente proporzionale al cubo della distanza di questo elemento dal punto  $P$ . Il potenziale  $V'$  di questa massa così distribuita sarà uguale a  $\frac{1}{MP}$  in ogni punto  $M$  esterno alla sfera e minore di  $\frac{1}{MP}$  se il punto  $M$  è interno alla sfera. Consideriamo infatti una funzione uguale alla funzione  $U$  di Green all'interno della sfera e nulla all'esterno. Questa funzione soddisfa ovunque l'equazione Laplace; è continua tranne che nel punto  $P$  e sulla superficie della sfera. Nel punto  $P$  la funzione diventa infinita e la sua differenza con  $\frac{1}{MP}$  rimane finita; sulla superficie della sfera, la funzione stessa rimane continua, ma la sua derivata normale subisce un salto improvviso pari a  $\frac{R^2 - OP^2}{R} \frac{1}{MP^3}$ . Dobbiamo concluderne che questa funzione è uguale al potenziale di diverse masse elettriche distribuite nel modo seguente: una massa uguale a 1 in  $P$ , una massa di densità  $-\frac{R^2 - OP^2}{4\pi R} \frac{1}{MP}$  in diversi punti della superficie  $S$ . Questa seconda massa è la massa definita in precedenza e il cui potenziale era  $V'$ , ma cambiata di segno. Si ha quindi  $\frac{1}{MP} - V' = 0$  all'esterno di  $S$  e  $\frac{1}{MP} - V' > 0$  all'interno.

Nei metodi che abbiamo citato in precedenza, otteniamo la soluzione del problema di Dirichlet cercando una successione di funzioni che soddisfino l'equazione  $\Delta V = 0$ , ognuna delle quali soddisfi le condizioni al contorno meglio della precedente. H. Poincaré, nel metodo a scansione, cerca funzioni che soddisfino tutte le condizioni al contorno e, ciascuna delle quali soddisfi l'equazione  $\Delta V = 0$  meglio della precedente. Ovviamente si può sempre trovare una sfera  $\Sigma$  tale che il conduttore sia interamente contenuto all'interno di questa sfera. Si può poi trovare un sistema numerabile di sfere in numero infinito  $S_1, S_2, S_3, \dots$ , che gode delle due seguenti proprietà; ciascuna delle sfere sarà interamente esterna al conduttore; ogni punto dello spazio al di fuori del conduttore appartiene ad almeno una delle sfere del sistema. Questa proposizione è quasi ovvia a priori. Sia  $O$  il centro e  $R$  il raggio della sfera  $\Sigma$ ; immaginiamo una certa quantità di elettricità positiva distribuita uniformemente alla sua superficie con una densità  $\frac{1}{4\pi R}$ . Sia  $V_0$  il potenziale dovuto a questa distribuzione; avremo  $V_0 = 1$  all'interno della sfera  $\Sigma$  e in particolare all'interno del conduttore e  $V_0 = R/OM$ , quando il punto  $M(x, y, z)$  è esterno a  $\Sigma$ . Si ha, in tutti i casi  $0 < V_0 \leq 1$ , e  $V_0$  tende a zero, quando il punto  $M$  si allontana indefinitamente. Ora eseguiremo la seguente serie di operazioni. Abbiamo visto sopra che se una massa elettrica  $P$  è

all'interno di una sfera  $S$ , può essere sostituita da una massa uguale distribuita sulla superficie della sfera in modo che la densità in ogni punto di questa superficie sia in proporzione inversa del cubo della distanza da questo punto al punto  $P$ . Il potenziale rispetto a un punto esterno a  $S$  non è modificato, il potenziale rispetto a un punto interno è diminuito. Si può chiamare questo strato elettrico steso sulla superficie di  $S$  lo strato equipollente alla massa unica  $P$ . Ciò posto, supponiamo di sostituire tutte le masse elettriche, che possono esistere all'interno di una sfera  $S_i$ , con lo strato equipollente distribuito sulla superficie di questa sfera. Il potenziale in un punto esterno a  $S$  non cambierà e il potenziale in un punto interno a  $S_i$  diminuirà. Questa operazione si potrà chiamare: esaminare la sfera  $S_i$ .

Partiamo dalla massa elettrica distribuita su  $\Sigma$  e il cui potenziale è  $V_0$ . Ognuno dei punti di  $\Sigma$  appartenenti ad una delle sfere  $S_i$ , alcune di queste sfere conterranno elettricità; sia  $S_1$  uno di quelli che la contengono; esaminiamo questa sfera; poi ancora la sfera  $S_2$ , se questa contiene elettricità, e così via. Le operazioni devono essere dirette in modo che ogni sfera venga scansionata un numero infinito di volte. Si possono, ad esempio, scansionare le sfere nel seguente ordine:

$$S_1 S_2 S_1 S_2 S_3 S_1 S_2 S_3 S_4 S_1 S_2 S_3 S_4 S_5 S_1 S_2 S_3 S_4 S_5 S_6 \dots$$

È facile vedere che in questo modo ogni sfera viene scansionata un numero infinito di volte.

Sia allora  $V_1$  ciò che diviene il potenziale  $V_0$  dopo la prima operazione,  $V_2$  come diventa  $V_1$  dopo la seconda operazione; sia infine  $V_n$  ciò che accade al potenziale dopo  $n$  operazioni. Supponiamo che la  $n$ -esima operazione consista nella scansione della sfera  $S_k$ . Si avrà

$$\begin{aligned} V_n &= V_{n-1} & \text{all'interno di } S_k \\ V_n &< V_{n-1} & \text{all'interno di } S_k \end{aligned}$$

Si avrà quindi in tutti i casi

$$V_n \leq V_{n-1}$$

Questa disuguaglianza mostra che in un punto qualunque dello spazio,  $V_0$  è sempre decrescente (o almeno sempre non crescente), all'aumentare dell'indice  $n$ .

È importante notare che non esiste mai una massa elettrica negativa. All'inizio, abbiamo sulla sfera  $\Sigma$  uno strato elettrico uniforme e positivo. Nessuna delle operazioni successive può introdurre masse negative. In effetti, la scansione di qualsiasi sfera consiste nel sostituire le masse elettriche positive situate all'interno di questa sfera con strati positivi equipollenti distribuiti sulla superficie di questa sfera. Si ha pertanto  $V_n > 0$ . Quindi, in un punto qualsiasi dello spazio,  $V_n$  è sempre positivo e decrescente. Pertanto, quando  $n$  cresce indefinitamente,  $V_n$  tende a un limite finito e determinato  $V$ ; la funzione  $V$  così definita in tutti i punti dello spazio è la soluzione del problema.

VI. FORZE PONDEROMOTRICI NEL CAMPO ELETTRICO. - L'azione mutua tra le cariche secondo la legge di Coulomb (ovvero gli sforzi di tensione e pressione tra i tubi) produce forze ponderomotrici, cioè forze che agiscono sui corpi portanti le diverse cariche, poste nel campo elettrico. Il calcolo di queste forze non presenta particolari difficoltà, quando è data la distribuzione di tutti le cariche e quando, di conseguenza, si conoscono tutte le forze componenti che agiscono su ogni corpo.

In certi casi semplici, le forze ponderomotrici si determinano molto facilmente. Lo mostreremo con alcuni esempi.

1. Determinare la forza  $f$  con la quale una carica  $\eta$ , uniformemente distribuita sulla superficie di una piccola sfera non conduttrice per esempio, è attratta da una piastra conduttrice molto grande messa a terra. Come abbiamo visto, la piastra agisce, nella parte di spazio dove si trova la carica  $\eta$ , come una carica  $-\eta$  portata dall'immagine elettrica della carica  $\eta$ , la quale immagine, nel caso considerato, coincide con l'immagine ottica. Se la distanza della carica  $\eta$ , (centro della Sfera) dalla superficie del plateau è  $h$ , si ha  $f = \eta^2 : 4h^2$ .

Determinare la forza  $f$  con cui una carica  $\eta$ , uniformemente distribuita sulla superficie di una piccola sfera non conduttrice, è attratta da una sfera conduttrice messa a terra. Indicheremo con  $R$  il raggio della sfera, con  $a$  la distanza dalla carica  $\eta$  (centro della sfera piccola) dal centro  $O$  della sfera conduttrice. Come sappiamo, la carica indotta sulla sfera conduttrice agisce, nello spazio esterno, come una carica  $\eta' = -\eta \frac{R}{a}$  posta in un punto situato sulla retta  $\eta O$  alla distanza  $b = R^2 : a$  dal centro. Se ne deduce

$$f = \frac{\eta\eta'}{(a-b)^2} = \frac{\eta^2 Ra}{(a^2 - R^2)^2} = \frac{\eta^2 Ra}{c^4}$$

essendo  $c$  la lunghezza della tangente tracciata dal centro della piccola sfera alla superficie della sfera conduttrice data. Se  $\eta$  si trova all'interno di una sfera cava, alla distanza  $b$  dal centro  $O$ , si ha

$$f = \frac{\eta^2 Rb}{(R^2 - b^2)^2} = \frac{\eta^2 Rb}{c^4}$$

essendo  $c$  la semi corda tracciata da  $\eta$  normalmente al raggio  $\eta O$ .

3. La forza  $f$ , che agisce sulla parte mobile di una delle armature di un condensatore piano molto grande, è espressa dalla formula (57).

4. Confrontiamo le forze che agiscono su una sfera dielettrica e su una sfera conduttrice isolata, in un campo uniforme. Supponiamo che  $f$  sia la forza che agisce sulla sfera dielettrica di potere induttivo  $K_2$ , e  $f_0$  la forza esercitata su una sfera conduttrice isolata di uguale dimensione, posta nello stesso punto. Sia  $K$ , in entrambi i casi, il potere induttivo del mezzo circostante. Essendo il campo uniforme, le cariche sono distribuite con densità rispettivamente date dalle formule (72,c), e (77). Queste due densità si distinguono per il fattore costante  $\alpha$  dato dalla (76,b). Per circostanze identiche, questo fattore è uguale al rapporto cercato delle forze, in modo che si ha

$$f = \frac{K_2 - K_1}{K_2 + 2K_1} f_0 \quad (1.0.226)$$

Nell'aria,  $K_1 = 1$ ; se si pone inoltre  $K_2 = K_1$ , si ottiene

$$f = \frac{K - 1}{K + 2} f_0 \quad (1.0.227)$$

Occupiamoci ora, in modo generale, del calcolo delle forze ponderomotrici, che agiscono in un campo elettrico. Si devono distinguere due casi, a seconda che la carica o il potenziale del conduttore considerato debba o meno rimanere costante.

CASO I. *Le cariche dei conduttori non cambiano*, nei movimenti che eseguono sotto l'azione delle forze che agiscono su di essi. Consideriamo un sistema di corpi  $A_1, A_2, A_3, \dots$ ; sia  $\eta_1$  la carica costante di uno di questi corpi  $A_1$ . Indichiamo con  $W$  l'energia elettrica dell'intero sistema e con  $dR$  il lavoro infinitamente piccolo compiuto dalle forze elettriche, quando il corpo  $A_1$  compie un movimento infinitamente piccolo, possibile nelle condizioni meccaniche cui è sottoposto. È evidente che se questo movimento è dovuto alle forze elettriche, il lavoro  $dR$  è una quantità positiva; esso può essere eseguito solo a scapito dell'energia potenziale  $W$ , quindi abbiamo l'equazione

$$dR = -dW \quad (1.0.228)$$

Sia  $f_x$  la forza che agisce sul corpo  $A_1$  nella direzione di  $x$ ; quando il corpo  $A_1$  si sposta in questa direzione,  $W$  varia, e si può considerare, tra gli altri,  $W$  come funzione di  $x$ ; per uno spostamento  $dx$ , si ha  $dR = f_x dx$ , di modo che  $f_x dx = -\frac{\partial W}{\partial x}$ , da cui

$$f_x = -\frac{\partial W}{\partial x} \quad (1.0.229)$$

Supponiamo che  $M_p$  sia il momento della coppia, che tende a far ruotare il corpo  $A_1$  attorno a un certo asse, e sia  $\varphi$  l'angolo che misura questa rotazione a partire da una posizione iniziale qualunque. Si può allora considerare  $W$  come fosse una funzione dell'angolo  $\varphi$ . Quando il corpo  $A_1$  ruota attorno all'asse  $p$  dell'angolo  $d\varphi$ , si ha  $dR = M_p d\varphi$ , pertanto

$$M_p = -\frac{\partial W}{\partial \varphi} \quad (1.0.230)$$

Abbiamo per  $W$  l'espressione generale (51,d),

$$W = \frac{1}{2} \sum V \eta \quad (1.0.231)$$

Supponiamo che la disposizione dei corpi subisca un cambiamento infinitamente piccolo sotto l'azione di forze elettriche, che quindi compiono un lavoro positivo. L'uguaglianza (81) vale; la (81,c) ci dà in generale

$$dW = \frac{1}{2} \sum V d\eta + \frac{1}{2} \sum \eta dV$$

per ipotesi, tutte le  $d\eta$  sono nulle, e rimane

$$W = \frac{1}{2} \sum \eta dV \quad (1.0.232)$$

La grandezza  $dW$  è negativa; si vede quindi che *il sistema tende ad effettuare movimenti nei quali il potenziale diminuisce*. Il sistema tende verso il minimo dell'energia possibile nelle condizioni date.

CASO II. *I potenziali dei conduttori non variano*. Consideriamo un sistema di conduttori  $A_1, A_2, A_3, \dots$ , mantenuti a potenziali costanti  $V_1, V_2, V_3, \dots$  mediante comunicazione con le sorgenti di elettricità  $B_1, B_2, B_3, \dots$ . Si possono considerare questi ultimi passati come conduttori le cui capacità  $q_1, q_2, q_3, \dots$  sono infinitamente grandi, cosicché i loro potenziali non variano quando viene sottratta loro una certa quantità finita di elettricità. Supponiamo dapprima che le capacità  $q_i$  dei corpi  $B_i$  sono quantità finite. Indichiamo con  $\eta_i$  le cariche dei corpi  $A_i$ . Se i corpi  $A_i$  del sistema considerato si spostano infinitamente poco sotto l'azione del campo elettrico in cui si trovano, le forze elettriche compiono un certo lavoro  $dR$ , che trova la sua sorgente nell'energia  $W_A$  di questi corpi e nell'energia  $W_B$  delle sorgenti  $B_i$  con cui comunicano, in modo che si ha

$$dR = -(dW_A + dW_B) \quad (1.0.233)$$

Prendiamo per  $W_A$  e  $W_B$  le espressioni

$$W_A = \frac{1}{2} \sum V \eta \quad W_B = \frac{1}{2} \sum q V^2$$

abbiamo

$$\begin{cases} dW_A = \frac{1}{2} \sum V d\eta + \frac{1}{2} \sum \eta dV \\ dW_B = \sum q V dV \end{cases} \quad (1.0.234)$$

La somma delle cariche dei corpi  $A_i$  e  $B_i$  poste in comunicazione deve rimanere costante; in altri termini si ha, tolti gli indici, per ogni coppia di corpi  $A$  e  $B$ ,  $\eta + qV = \text{cost}$ , cioè

$$d\eta + qdV = 0 \quad (1.0.235)$$

$$V d\eta + qV dV = 0$$

Se ne deduce, per tutte le coppie  $A_i$  e  $B_i$

$$\sum V d\eta + \sum qV dV = 0 \quad (1.0.236)$$

Se si tiene conto di questa relazione (82,a), si trova

$$dW_A = \frac{1}{2} \sum \eta dV - \frac{1}{2} \sum qV dV = \frac{1}{2} \sum \eta dV - \frac{1}{2} dW_B$$

o

$$2dW_A + dW_B = \sum \eta dV$$

Sostituendo il valore di  $dV$  dedotto dalla (82,b) e introducendo, per maggior chiarezza, le notazioni  $\eta_A$  invece di  $\eta$  e  $q_B$  invece di  $q$ , si ha

$$2dW_A + dW_B = - \sum \frac{\eta_A d\eta_A}{q_B} \quad (1.0.237)$$

$W_A$  è l'energia del sistema considerato di conduttori  $A_i$ , le cui cariche sono  $\eta_A$ ;  $W_B$  è l'energia dei corpi  $B_i$  con cui comunicano e le cui capacità sono  $q_B$ . Se si passa al caso in cui i corpi  $B_i$  sono vere sorgenti di elettricità, capaci di mantenere costanti i potenziali sui corpi  $A_i$ , si devono considerare le quantità  $q_B$  come infinitamente grandi. Si ottiene al limite

$$2dW_A + dW_B = 0 \quad (1.0.238)$$

Confrontando questa espressione con la (82), si ha

$$dW_A - dR = 0$$

cioè

$$dR = dW_A \quad (1.0.239)$$

$$-dW_B = dW_A + dR = 2dW_A = 2dR \quad (1.0.240)$$

$dR$  è il lavoro positivo svolto nello spostamento dei corpi  $A_i$ . Si vede che, *se i potenziali dei corpi formanti un sistema devono rimanere costanti, il lavoro  $dR$  delle forze elettriche è uguale all'aumento di energia di questo sistema. Le sorgenti, che mantengono costanti i potenziali, perdono una quantità di energia doppia rispetto al lavoro  $dR$ ; una metà è impiegata per produrre questo lavoro, l'altra per aumentare l'energia del sistema di conduttori considerato.*

Il sistema tende verso l'energia massima possibile nelle condizioni date.

Riunendo i due casi considerati, si può dire che *le cariche rimanendo costanti, il sistema tende ad una diminuzione di energia e di potenziali, ma che i potenziali rimanendo costanti, tende ad un aumento di energia e di cariche.*

## 11. Prime indicazioni sulla dispersione dell'elettricità

Studiando in questo capitolo le proprietà fondamentali del campo elettrico abbiamo allo stesso tempo fatto conoscere i fenomeni più semplici, che si verificano continuamente, per così dire, quando si ha a che fare con l'elettricità statica. Ai fenomeni di questa natura si possono unire la perdita di elettricità, anche se essa non può essere strettamente annoverata tra i fenomeni elettrostatici, in quanto rappresenta una variazione continua del campo, cioè una variazione sia in intensità che in direzione delle forze che agiscono in questo campo. Il fenomeno in questione ha quindi un carattere dinamico e appartiene piuttosto al campo elettrico variabile che studieremo in seguito; ma, poiché è estremamente importante e, si può dire, del tutto elementare, riteniamo necessario parlarne qui già brevemente. Ciò è tanto più legittimo in quanto la perdita di elettricità, cioè la graduale diminuzione dell'intensità delle forze elettriche, è una proprietà del campo che effettivamente si osserva quasi sempre in pratica.

Il fenomeno della perdita di elettricità consiste nel fatto che qualsiasi corpo elettrizzato, lasciato a se stesso, perde gradualmente la sua carica. Rimanderemo a più tardi lo studio

dettagliato di tutte le cause di una tale perdita; ci limiteremo per il momento alla semplice indicazione delle cause fondamentali della dispersione, senza entrare in alcun dettaglio.

Una delle principali cause della graduale perdita di carica risiede nel fatto che l'isolamento di un corpo elettrizzato non è mai perfetto nella maggior parte dei casi. L'elettricità sfugge attraverso supporti, piedi, ecc., che fungono da isolanti; in altre parole, le estremità dei tubi di tensione che, nella immagine B, esercitano pressioni trasversali l'uno sull'altro, scorrono lentamente lungo la superficie degli isolatori. Tali perdite di cariche sono fortemente favorite dagli strati di umidità presenti sulla superficie degli isolatori; di conseguenza la perdita di elettricità è particolarmente elevata in aria umida. Una volta si credeva che l'aria umida fosse un conduttore di elettricità; gli esperimenti di Warburg hanno mostrato il vero motivo per cui la perdita aumenta quando l'umidità dell'aria è elevata. La paraffina è assai poco igroscopica; può quindi fungere da buon isolante, anche con elevata umidità dell'aria, oggi è molto utilizzata.

Una seconda causa di perdita risiede nella convezione, cioè nel trasporto di elettricità da parte del gas ambiente, ad esempio l'aria. L'elettricità passa sulle particelle d'aria a contatto immediato con la superficie del corpo elettrizzato, subendo queste particelle probabilmente una modifica di natura particolare (ionizzazione) sulla quale non ci dilungheremo ora. Lo strato d'aria è carico di elettricità con lo stesso nome della superficie del corpo e respinta da questo corpo; al suo posto viene aria nuova, che a sua volta si elettrizza e si respinge, ecc. Si forma così, attorno al corpo elettrizzato, una continua corrente d'aria. Come abbiamo visto, la tensione superficiale  $P$  dell'elettricità è proporzionale al quadrato della densità  $k$ , vedi (25,a), Poiché la tendenza dell'elettricità a passare dalla superficie di un conduttore nello spazio circostante è determinata dalla tensione  $P$ , è chiaro che la perdita deve in generale aumentare contemporaneamente alla densità  $k$ . Ma sappiamo d'altra parte che l'elettricità è distribuita sulla superficie dei conduttori in modo tale che la densità  $k$  assuma valori particolarmente elevati sulle parti sporgenti, ad esempio sugli spigoli vivi e soprattutto sulle punte. Ne consegue che in tali luoghi la perdita deve essere maggiore; questo è ciò che si osserva nella realtà. Un conduttore isolato, dotato di una punta, non può in generale essere elettrizzato, tanto è intensa la perdita o, come talvolta si dice, il flusso di elettricità attraverso la punta. Se un punto posto orizzontalmente viene collegato a una macchina elettrica, dalla punta esce, per così dire, una corrente d'aria con tale violenza che si può sentire nella mano e può spegnere la fiamma di una candela.

Si consideri un conduttore elettrizzato positivamente A e una punta metallica B, cioè un corpo a forma di cono con un angolo al vertice molto piccolo. Se si applica B per la sua base contro il corpo A, la carica di quest'ultimo scompare; la stessa cosa avviene, quando si pone il corpo B a terra e quando lo si avvicina ad A, ruotando la punta verso la superficie A. In questo caso scorre dalla punta dell'elettricità negativa indotta, che viene trasportata da una corrente d'aria sulla superficie del corpo A, dove annulla la carica positiva esistente. Supponiamo ora che B sia un conduttore isolato, ad esempio una sfera provvista di una punta orizzontale. Quando avviciniamo B ad A, il punto rivolto dalla parte opposta ad A, e poi togliamo B da A, troviamo che B è elettrizzato negativamente; l'elettricità positiva (con lo stesso nome) scorre attraverso la punta, in modo che questa funga da terra. Quando avviciniamo B al corpo A, volgendo la punta verso A, e allontanando la punta separando i corpi, troviamo che la carica del corpo A è diminuita, ma che B è positivamente elettrizzato; in questo caso l'elettricità negativa (di nome opposto) indotta su B è fluìta attraverso la punta e passata su A, mentre l'elettricità positiva indotta è rimasta su B. Il risultato è come se una parte della carica fosse passata da A attraverso la punta su B, cioè come se la punta avesse sottratto o risucchiato una parte della carica dal corpo A. Per questo a volte si parla di un'azione aspirante delle punte, che si trovano in prossimità della superficie dei conduttori elettrizzati.

Il tasso di perdita di elettricità dipende, come vedremo, dalla natura del gas circostante e dal suo stato fisico, cioè dal suo voltaggio e dalla sua temperatura.

Il fenomeno della perdita di elettricità ha acquistato un particolare interesse, da quando

è stata scoperta l'azione dell'energia radiante su questo fenomeno, non tanto delle forme di energia radiante considerate nel Volume II quanto dei nuovi raggi che saranno studiati alla fine di questo lavoro, i raggi di Röntgen, i raggi di Becquerel (uranio), e in generale i raggi emessi dai corpi radioattivi. Tutto quanto è associato a questo tema si lega strettamente alla questione della ionizzazione dei gas e non può essere trattato ora. Ci limiteremo a questa indicazione che di tutte le forme di energia radiante considerate nel Volume II (raggi elettrici, infrarossi, visibili e ultravioletti), solo i raggi ultravioletti agiscono sulla perdita di energia elettrica e, più precisamente, dell'elettricità negativa, la cui velocità di perdita aumenta fortemente sotto l'azione di questi raggi; i raggi ultravioletti non esercitano alcuna influenza apprezzabile sul tasso di perdita di cariche positive.

Parleremo nel capitolo V (elettricità atmosferica) della conducibilità elettrica dell'aria, che dipende dal grado di ionizzazione; questa ionizzazione esercita una grandissima influenza sulla perdita di elettricità alla superficie dei conduttori isolati.





## 2. Le sorgenti del campo elettrico

### 1. Introduzione

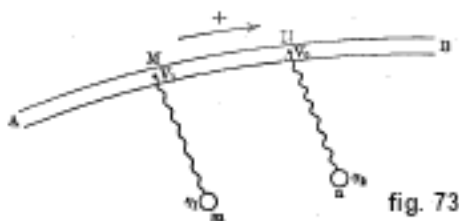
Abbiamo chiamato sorgenti del campo elettrico o, come si dice più comunemente, sorgenti di elettricità, le operazioni di fenomeni che sono accompagnati dalla comparsa di un campo elettrico o, in altre parole, dall'elettrizzazione di un certo corpo. La questione delle sorgenti di elettricità richiede un'analisi molto completa dei fenomeni così come li si osserva in modo immediato; presenta grandi difficoltà e siamo ancora lontani da una soluzione definitiva. Ha dato origine a numerose e molto diverse teorie; la termodinamica permette di trovare certe leggi, legando tra loro le grandezze che svolgono un ruolo nei fenomeni direttamente osservati, ma non può dare alcuna indicazione sugli elementi, la cui azione combinata costituisce l'origine di un determinato fenomeno.

Cercheremo di esporre il più completamente possibile lo stato di questa questione e di presentare le diverse teorie a cui ha dato origine nella forma che esse possiedono attualmente. Ma, preliminarmente, riteniamo necessario riunire alcune nozioni preliminari che abbiamo già in parte fatto conoscere in questo volume o nei precedenti.

1. Abbiamo già dato la definizione dell'unità elettrostatica (el. st.) C.G.S. di quantità di elettricità; abbiamo espresso, con l'aiuto di questa unità, vedi (12), l'unità elettromagnetica (el. mg.) C.G.S. e il coulomb. Torneremo più tardi sulle unità st. el. e el. mg., sottintendendo che sono C.G.S.

2. Abbiamo dato una definizione di el. st. C.G.S. di potenziale o, che è la stessa cosa, di differenza di potenziale; ci siamo imbattuti in un'altra definizione più chiara (con una sfera di raggio pari a 1 cm). Abbiamo anche visto (43,a), che l'unità pratica del potenziale, il volt, è uguale a  $\frac{1}{300}$  unità el. st C.G.S. di potenziale, e che il lavoro volt-coulomb è uguale a un joule = 0,24 grandi calorie.

3. Il fenomeno della corrente elettrica sarà studiato in dettaglio in seguito. Ci limiteremo qui alle seguenti indicazioni. Come si sa, l'equilibrio (riposo) dell'elettricità su un conduttore è possibile solo a condizione che il potenziale abbia in tutti i punti del conduttore lo stesso valore. Supponiamo che lungo un qualsiasi conduttore, ad esempio lungo il filo AB, figura 73, il potenziale diminuisca costantemente nella direzione di B; se si collegano rispettivamente due punti M e N del conduttore, mediante fili sufficientemente lunghi, con sfere identiche  $m, n$ , si troverà che le cariche  $\eta_1, \eta_2$  di tali sfere sono diverse e che  $\eta_1 > \eta_2$ ; si avrà  $\eta_1 : \eta_2 = V_1 : V_2$  ed essendo  $V_1, V_2$ , i potenziali dei punti M e N. In tale filo si stabilisce una corrente elettrica, che può essere considerata come un flusso continuo di elettricità positiva da M a N e di elettricità negativa nella direzione opposta. Diciamo allora che c'è una caduta di potenziale lungo il conduttore AB; l'entità della caduta tra M e N è uguale a  $V_1 - V_2$ . Quando la distanza MN è uguale all'unità,  $V_1 - V_2$  rappresenta la caduta di potenziale per unità di lunghezza, detta anche gradiente di potenziale. Quando è presente un campo elettrico in un dielettrico, per esempio nell'aria, si parla ancora di gradiente di potenziale, che si esprime in volt per centimetro. È chiaro che il gradiente può servire a misurare l'intensità del campo in un dato punto, si veda la (40).



4. Agli atomi dei vari elementi chimici si assegna una valenza, che è definita dal numero di atomi di idrogeno ai quali possono unirsi o che possono sostituire. Si introduce anche il concetto di valenza di un gruppo di più atomi, come si vede nei seguenti esempi:

*Sono monovalenti:* H, K, Na, Li, Ag, Cl, Br, I, FI,  $AzH^4$ , OH, CAz,  $AzO^3$ ,  $ClO^3$ ,  $BrO^3$ ,  $IO^3$ ,  $CHO^2$ ,  $C^2H^2O^2$ , ecc.

*Sono bivalenti:* Ba, Sr, Ca, Mg, Zn, Cd, Cu, O, S,  $SO^4$ ,  $CrO^4$ ,  $CO^3$ ,  $SiO^3$ , ecc.

La valenza può anche cambiare in diverse combinazioni; così, in  $CuCl^2$  il rame è bivalente, in  $Cu^2Cl^2$  è monovalente.

Il peso molecolare di una combinazione è determinato dalla somma dei pesi atomici di tutti gli atomi, che entrano nella composizione della molecola. Ponendo  $O = 16$ ,  $H = 1,008$ ,  $Az = 14,04$ ,  $Cl = 35,45$ ,  $S = 32,06$ ,  $Cu = 63,6$ , si hanno, ad esempio, i seguenti pesi molecolari:  $O^2 = 32$ ,  $H^2O = 18$ ,  $AzH^4Cl = 53,5$ ,  $Cu^2Cl^2 = 198,1$ ,  $CuCl^2 = 134,5$ ,  $SO^4H^2 = 98,1$ ,  $SO^4Cu = 159,66$ , ecc. Si chiama grammo-molecola di una data sostanza il numero di grammi di questa sostanza che è uguale al suo peso molecolare; quindi, 1 gr-mol. di idrogeno è pari a 2,016 g, di ossigeno a 32 g, di sale ammoniacale a 53,5 g, di acido solforico (anidro) a 98 g della sostanza corrispondente.

5. La molecola può, in molti casi, dividersi in due parti determinate dette *ioni*; questo vale, ad esempio, per le molecole di sali e acidi e anche, in determinate condizioni, per le molecole che contengono due atomi identici ( $H^2$ ,  $Cl^2$ ). Abbiamo già avuto più volte occasione di accennare alla teoria secondo la quale le sostanze disciolte nell'acqua sono in parte dissociate, cioè scomposte in ioni (ionizzate); quando la soluzione è molto diluita, questa scomposizione può essere completa. Tali sostanze sono chiamate elettroliti.

6. L'equivalente di un elemento monovalente è uguale al suo peso atomico. L'equivalente di un gruppo atomico monovalente è uguale alla somma dei pesi atomici degli atomi di quel gruppo. Così, l'equivalente di  $AzH^4 = 18,04$ , di  $OH = 17,01$ , di  $AzO^3 = 62,04$ , ecc. L'equivalente di un composto, che si dissocia in ioni monovalenti, è uguale al suo peso molecolare. Ad esempio, gli equivalenti dei composti HCl, NaCl, KBr, NaI, TlFl,  $AzH^4Cl$ ,  $AzO^3H$ ,  $AzO^3Ag$ ,  $ClO^3K$ ,  $C^2H^2O^2Na$ , NaOH,  $ClO^4Ag$ ,  $IO^3K$ ,  $MnO^4K$ ,  $AzO^2K$ ,  $AsO^2Na$ , ecc. sono uguali ai pesi molecolari di questi composti.

L'equivalente

di un elemento la cui valenza è $k$	è uguale	del peso atomico dell'elemento
di un gruppo atomico la cui	alla frazione	della somma dei pesi atomici
valenza è $k$	$\frac{1}{k}$	degli atomi del gruppo
di un composto che si dissocia in		del peso molecolare del
ioni la cui valenza è $k$		composto

Così si hanno i seguenti equivalenti:  $\frac{1}{2}O = 8$ ,  $\frac{1}{2}Ca = 20,02$ ,  $\frac{1}{2}SO^4 = 48,03$ ,  $\frac{1}{2}CO^3 = 30,0$ ,  $\frac{1}{2}SO^4H^2 = 49,04$ ,  $\frac{1}{2}SO^4Cu = 78,33$ ; inoltre,  $\frac{1}{2}CO^3Na^2$ ,  $\frac{1}{2}MgCl^2$ ,  $\frac{1}{2}K^2S$ ,  $\frac{1}{2}Az^2O^6Ba$ ,  $\frac{1}{2}(C^2H^3O^2)Ca$ ,  $\frac{1}{2}CrO^4MG$ ,  $\frac{1}{2}(MnO^4)^2Ca$ ,  $\frac{1}{3}PO^4H^3$ ,  $\frac{1}{3}AsO^3Na^3$ ,  $\frac{1}{4}P^2O^7Na^4$ ,  $\frac{1}{5}IO^6Na^5$ ,  $\frac{1}{6}Al^2Cl^6$ ,  $\frac{1}{6}(SO^4)^3Cr^2$ ,  $\frac{1}{6}Fe^2Cl^6$ , ecc.

In sintesi, l'equivalente è sempre calcolato per un atomo monovalente (H, Cl, ecc.) o per un gruppo monovalente. Per CuCl, ad esempio, l'equivalente è uguale al peso molecolare, mentre

per  $CuCl^2$  è solo la metà; lo stesso vale nel caso in cui la formula del primo composto sia scritta nella forma  $Cu^2Cl^2$ .

7. Il numero di grammi di una sostanza data uguale all'equivalente è chiamato il grammo-equivalente di quella sostanza. Si può vedere da quanto precede che il grammo-equivalente è uguale alla grammo-molecola solo per composti che si dissociano in ioni monovalenti, ad esempio per  $HCl$ ,  $KBr$ ,  $AzH^4Cl$ ,  $AzO^3H$ ,  $ClO^3Li$ , ecc. Il grammo-equivalente di ossigeno pesa  $8g$ , di solfato di rame  $79,83g$ , e così via a seconda dell'equivalente.

8. Secondo la legge di Avogadro, uguali volumi di gas alla stessa temperatura e alla stessa pressione contengono lo stesso numero di molecole. Sia  $n$  il numero di molecole contenute in  $1\text{ cm}^3$  a  $0^\circ$  e a una pressione di  $760\text{ mm}$ ; abbiamo indicato nel Volume I il numero

$$n = 2 \cdot 10^{19} \quad (2.0.1)$$

ma alcuni autori danno numeri che differiscono notevolmente dal precedente. Poiché la densità dei gas è proporzionale al peso molecolare, è evidente che una grammo-molecola di gas, ad esempio  $2g$  di  $H^2$ ,  $32g$  di  $O^2$ ,  $30g$  di  $AzO$ ,  $44g$  di  $CO^2$ , occupa sempre lo stesso volume alla stessa temperatura e alla stessa pressione, e quindi contiene lo stesso numero di molecole che indicheremo con  $N$ . Poiché  $1g$  grammo di  $H^2$  ha a  $0^\circ$  e a  $760\text{ mm}$  un volume pari a  $11165\text{ cm}^3$ , una grammo-molecola di gas, e di conseguenza anche di qualsiasi sostanza, contiene

$$N = 4,5 \cdot 10^{23} \quad (2.0.2)$$

molecole. Questo numero indica anche quanti sono gli atomi, cioè gli ioni contenuto in un grammo equivalente di idrogeno ( $1g$ ) e in generale di qualsiasi gruppo monovalente o di qualsiasi composto formato da ioni monovalenti. Nella ionizzazione di un grammo equivalente di un composto formato da ioni monovalenti, si ottengono  $N$  ioni di ogni tipo. Ma, per l'ossigeno in particolare, si arriva ad un altro risultato: una grammo-molecola, cioè  $32g$  di ossigeno, contiene  $N$  molecole; quindi un grammo equivalente o  $8g$  contiene  $\frac{1}{2}N$  atomi o ioni  $O$ . Gli esempi forniti prima mostrano che, nella ionizzazione di un grammo-equivalente di  $SO^4Cu$ ,  $Az^2O^6Ba$ ,  $CrO^4Mg$ , ecc., si ottiene  $\frac{1}{2}N$  ioni di ogni tipo. La ionizzazione di un grammo equivalente di  $CO^3Na^2$ , o di  $\frac{1}{2}CO^3Na^2$ , dà  $N$  ioni e  $\frac{1}{2}N$  ioni di  $CO^2$ ;  $AsO^3H^3$  dà  $N$  ioni e  $\frac{1}{3}N$  ioni di  $AsO^3$ ;  $Al^2Cl^6$  dà  $\frac{1}{3}N$  ioni di  $Al$  e  $N$  ioni  $Cl$ .

Si ottiene quindi, nella ionizzazione di un grammo equivalente di un composto o di un elemento chimico (ad esempio  $H^2$ ,  $O^2$ ,  $Cl^2$ , ecc.),  $\frac{1}{k}N$  ioni di natura determinata, quando ogni ione ha una valenza uguale a  $k$ , cioè  $N$  monovalenti,  $\frac{1}{2}N$  bivalenti, ecc.

## 2. Proprietà elettriche degli ioni. Elettroni

Come già accennato, molte sostanze disciolte si scompongono in ioni. Non c'è dubbio che anche i gas subiscono la ionizzazione in circostanze diverse. Infine, un gran numero di scienziati ammette che anche le molecole dei corpi solidi, dei metalli per esempio, possono dissociarsi in ioni; questa idea fu sviluppata per la prima volta da Giese (1889).

La ionizzazione di una sostanza disciolta dipende in larga misura dal solvente. Nernst e J. J. Thomson (1894) hanno trovato che il potere ionizzante di un solvente è tanto maggiore quanto maggiore è la costante dielettrica  $K$  di questo solvente; il valore più alto di  $K$  appartiene all'acqua ( $K = 80$ ) e la maggiore ionizzazione avviene nelle soluzioni acquose.

La moderna teoria degli ioni si basa sull'ipotesi che ogni ione sia legato a una certa quantità di elettricità. Se uno ione ha una carica positiva, si chiama *catione*, e se la sua carica è negativa, *anione*. Agli anioni appartengono  $Cl$ ,  $Br$ ,  $I$ ,  $FI$ ,  $OH$ ,  $AzO^2$ ,  $CAz$ ,  $AzO^3$ ,  $ClO^3$ ,  $ClO^4$ ,  $SO^4$ ,  $SeO^4$  ecc., e ai cationi, idrogeno, metalli,  $AzH^4$ ,  $PH^4$ , alcuni derivati organici di  $AzH^4$ ,  $PH^4$ , ecc. Nella ionizzazione di una molecola si formano sempre un anione e un catione, che hanno cariche

uguali. Se gli ioni di una sostanza disciolta si spostano, anche le loro cariche elettriche si spostano con loro. Si ammette che, a parte il movimento dell'elettricità risultante dallo spostamento degli ioni, nelle soluzioni non esiste altro movimento dell'elettricità. Lo spostamento degli ioni nelle soluzioni non può quindi essere considerato come la conseguenza di un flusso di elettricità attraverso la soluzione, la natura propria di tale flusso risiede proprio nello spostamento degli ioni.

Osserviamo anche che gli anioni e i cationi si muovono sempre in direzioni opposte, se, naturalmente, a parte il movimento irregolare degli ioni in tutte le direzioni, esiste una direzione definita predominante nel movimento degli ioni. La ricerca sperimentale, di cui parleremo più avanti, ha portato alla seguente proposizione fondamentale:

*Ogni grammo equivalente di qualsiasi ione contiene la stessa quantità  $F$  di elettricità positiva o negativa, che è uguale a*

$$\left\{ \begin{array}{l} F = 96540 \text{ coulomb} \\ F = 9654 \text{ unità el. mag, CGS} = 2,896 \cdot 10^{14} \text{ unità el. st. CGS} \end{array} \right. \quad (2.0.3)$$

Questa quantità  $F$  potrebbe essere chiamata l'unità elettrochimica della quantità di elettricità. Ad esempio, 1,008 g di H, 35,45 g di Cl, 17,01 g di OH, 62,04 g di  $AzO^3$ , 8 g di O, ecc. sono correlati a  $F$ , se H, Cl e O sono costituiti solo da ioni.

La quantità in peso della sostanza di uno ione, che è legata a un coulomb, è chiamata l'equivalente elettrochimico dello ione; è ovviamente uguale a  $\frac{1}{96540}$  grammo equivalente. Per maggiore comodità, essa si esprime in milligrammi; così l'equivalente elettrochimico di  $H = 0,01044 \text{ mg}$ ,  $Ag = 1,118 \text{ mg}$ ,  $Cl = 0,3673 \text{ mg}$ ,  $OH = 0,1762 \text{ mg}$ ,  $\frac{1}{2}Cu = 0,3294 \text{ mg}$ ,  $\frac{1}{2}Zn = 0,3388 \text{ mg}$ ,  $\frac{1}{2}O = 0,08288 \text{ mg}$ ,  $\frac{1}{2}SO^4 = 0,4976 \text{ mg}$ , ecc.

Abbiamo già ricordato che un grammo equivalente di ogni ione monovalente contiene lo stesso numero  $N$  di ioni; ma, poiché lo stesso grammo equivalente è legato alla quantità di elettricità  $F$ , ogni ione monovalente preso isolatamente, ad esempio H, K, Na, Ag, Cl, OH,  $AzO^3$ , ecc., contiene una stessa quantità di elettricità  $e = F : N$ . Se si pone  $N = 4,4 \cdot 10^{23}$ , si ha  $e = 2,2 \cdot 10^{-19} \text{ coulomb} = 2,2 \cdot 10 - 20 \text{ unità el. mg C.G.S.} = 6,6 \cdot 10^{-10} \text{ unità el. st C.G.S.}$ . Tuttavia, molte ricerche, che indicheremo in seguito, portano a ritenere che il numero

$$e = \frac{F}{N} = 10^{-19} C = 10^{-20} \text{ unità el. mg C.G.S.} = 3 \cdot 10^{-10} \text{ unità el. st C.G.S.} \quad (2.0.4)$$

è più vicino alla realtà. Viceversa si deduce  $N = 10^{24}$ , numero che rimane entro i limiti individuati da diversi autori, basati sulla teoria cinetica dei gas (Volume I). La carica  $e$  rappresenta la quantità elementare o l'atomo di elettricità; è l'elettrone. Richarz, Stoney, J. J. Thomson e Planck hanno trovato valori per  $e$  che differiscono più o meno da quello qui dato. Il primo tentativo di determinarne il valore si deve, sembra, a Budde (1885). Planck (1902) ha ottenuto

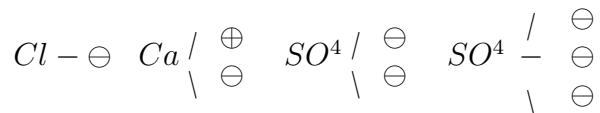
$$e = 4,69 \cdot 10^{-10} \text{ unità el. st. CGS} \quad (2.0.5)$$

È chiaro che uno ione bivalente, come Ba, Zn,  $SO^4$ ,  $CO^2$ , ecc., è legato a due elettroni; uno ione trivalente, per esempio  $PO^4$  (da  $PO^4H^3$ ) a tre elettroni, ecc. La valenza di uno ione è determinata dal numero di elettroni, che sono legati a questo ione. Se si indica con  $m$  la massa dello ione espresso in grammi, con  $e$  la carica espressa in unità el. mg. C.G.S., si ottiene, per un atomo di idrogeno, l'espressione  $m = 1 : N = 10^{-24} g$ , da cui approssimativamente

$$\frac{e}{m} = 10^4 \quad (2.0.6)$$

A volte si indica l'elettrone positivo con il simbolo  $\oplus$ , l'elettrone negativo con  $\ominus$ . Si può considerare uno ione come una combinazione di un atomo di materia con un elettrone. Werner

ha indicato casi in cui, in un determinato gruppo di atomi, un atomo può essere sostituito da un elettrone, un atomo elettronegativo, ad esempio Cl, essendo sostituito da un elettrone positivo e viceversa; nella combinazione  $Cl\ominus$ , l'atomo Cl sostituisce, in effetti, per così dire, l'elettrone positivo della molecola neutra  $\oplus\ominus$ , che non contiene alcuna sostanza ponderabile. Da ciò, uno ione rappresenta un atomo o un gruppo di atomi, le cui valenze sono sature di elettroni, tanto che si potrebbe anche scrivere



In tempi recenti si è posta la questione di sapere qual è la massa e anche il peso di un elettrone; i primi tentativi di risolvere questo problema si devono a Lieben (1900).

Quando gli ioni sono sotto l'influenza di forze elettriche, vale a dire quando si stabilisce un campo elettrico in una soluzione, gli ioni iniziano a muoversi nella direzione delle forze agenti. Non c'è dubbio che gli ioni subiscano, in questo movimento, una notevole resistenza, attribuibile ad una sorta di attrito degli ioni sulle molecole del solvente e sugli altri ioni. Per questo motivo la velocità degli ioni non è in genere molto elevata. È lo ione idrogeno che possiede la maggiore velocità; tra i cationi, i metalli si muovono circa cinque volte più lentamente di H. Tra gli anioni, l'idrossido OH ha la velocità più elevata; è circa 0,6 di quella di H; Cl, Br, I sono animati approssimativamente dalla stessa velocità di K e Na. I valori assoluti delle velocità sono stati determinati per la prima volta da F. Kohlrausch, Lodge, Cattaneo e altri. Se la caduta di potenziale è di 1 volt per centimetro, le velocità degli ioni (in  $H^2O$  a  $18^\circ$ ) sono

Cationi	$\frac{cm}{s}$	Anioni	$\frac{cm}{s}$
H	0,00300	OH	0,00157
K	0,00057	Cl	0,00059
$AzH^4$	0,00055	$AzO^3$	0,00053
Ag	0,00046	$ClO^3$	0,00046
Mg	0,00029	$C^2H^2O^2$	0,00029

Poiché conosciamo la carica di uno ione, si possono facilmente calcolare le forze sotto la cui azione si produce il movimento degli ioni. Si trova che queste forze sono molto grandi. Per trasportare 1 grammo di ioni idrogeno con una velocità di  $1 \text{ cm/s}$ , è necessaria una forza di 330 milioni di chilogrammi. Questo numero è dello stesso ordine di quello ottenuto nel volume III per le forze che agiscono nella diffusione. Per ogni ione idrogeno preso separatamente, si trova una forza uguale a  $7 \cdot 10^{-10} \text{ mg}$  circa.

Abbiamo già detto che è necessario ammettere anche l'esistenza di ioni nei gas. La ionizzazione dei gas aumenta sotto l'azione delle forze elettriche, per il passaggio attraverso i gas di raggi ultravioletti e nuovi, così come in certe altre circostanze. Gli ioni costituiscono, per così dire, in un gas poco rarefatto, dei nuclei attorno ai quali si raccolgono le molecole non ionizzate del gas, le particelle di vapore acqueo, la polvere, ecc., cosicché la mobilità degli ioni viene quindi notevolmente ridotta. Negli strati superiori dell'atmosfera, l'aria è più fortemente ionizzata che negli strati inferiori. Sembra che gli ioni negativi siano più adatti degli ioni positivi a formare centri, agglomerati di particelle, goccioline d'acqua, ecc.

Nel campo elettrico si produce un movimento degli ioni dei gas; gli ioni negativi generalmente si muovono più velocemente di quelli positivi.

Per una caduta di potenziale di 1 volt per centimetro, gli ioni d'aria non rarefatti si muovono con velocità comprese tra 1 e  $2 \text{ cm/s}$ . La velocità degli ioni idrogeno (a una pressione di  $760 \text{ mm}$ ) è di circa  $5 \text{ cm/s}$ .

Nel seguito faremo conoscere più compiutamente tutta una serie di fenomeni, nei quali si ha a che fare con correnti di elettroni che si muovono con rapidità. Tali sono certi fenomeni elettrici osservati nei gas rarefatti (i raggi catodici, per esempio), così come certi raggi emessi dalle sostanze radioattive. La questione di sapere quale sia la grandezza della carica posseduta da una particella, presa isolatamente in tale corrente, e quale sia la grandezza della massa  $m$  di sostanza ponderabile a cui questa carica è legata, è di grandissimo interesse. Le ricerche di J. J. Thomson e di altri studiosi hanno dato l'importantissimo risultato che *la grandezza della carica considerata è proprio uguale alla quantità elementare di elettricità in precedenza indicata con  $e$ , vedi (4), cioè uguale alla quantità detta elettrone che è legata ad uno ione di un elettrolita disciolto*. Da ciò segue il ruolo, per così dire, universale di questa grandezza; rappresenta proprio l'elemento di quantità di elettricità, al quale forse corrisponde una sorta di unità di tensione nell'etere.

Il rapporto  $e/m$ , per una corrente di elettroni, è stato determinato da numerosi fisici, di cui considereremo i lavori in seguito. Essi hanno trovato, per  $e/m$ , espresso in unità el. mag., valori che si trovano in un intorno di

$$\frac{e}{m} = 10^7 \quad (2.0.7)$$

Ma abbiamo visto che quando l'elettrone è legato in soluzione ad un atomo di idrogeno, si ha  $e : m = 10^4$ , si veda (5). Poiché la grandezza  $e$  è la stessa nei due casi, ne consegue che *in una corrente di elettroni ogni elettrone è legato a una quantità di sostanza ponderabile, la cui massa è circa 1000 volte inferiore alla massa di un atomo di idrogeno*. Le difficoltà sollevate da una tale concezione sono aumentate ancora quando si è trovato che il rapporto  $e/m$  dipende dalla velocità  $v$  con cui si muovono gli elettroni; maggiore è  $v$ , maggiore è anche la massa  $m$ . Questa circostanza ha portato alcuni scienziati a pensare che la massa  $m$ , alla quale l'elettrone è legato nelle radiazioni, è una *massa apparente*. La teoria data da Abraham e gli esperimenti di Kaufmann (1903) hanno portato una conferma a questa idea, secondo cui l'inerzia manifestata dalle particelle della corrente di elettroni è dovuta alla reazione del campo magnetico, prodotta dal movimento degli elettroni, su loro stessi. La quantità  $m$  non sarebbe quindi una massa ponderabile, ma una *massa elettromagnetica*. Si può ritenere che una massa qualsiasi  $m$  come avente esclusivamente un carattere elettromagnetico e come una mera apparenza; è possibile costruire tutta la meccanica su principi elettromagnetici e farne una dipendenza della teoria dell'elettricità? Il semplice fatto che si possa porre una simile domanda mostra quali profondi cambiamenti stiano attualmente subendo le nostre concezioni del mondo esterno. Torneremo, come abbiamo già detto, su tutti questi problemi che qui ci limitiamo ad accennare.

### 3. Osservazioni generali sul contatto dei corpi

Il contatto di corpi chimicamente o fisicamente diversi costituisce una sorgente di elettricità. La questione se questo contatto, per diventare una sorgente dello stato elettrico, debba essere accompagnato da qualche altro fenomeno, per esempio una reazione chimica, una diffusione reciproca delle sostanze presenti, ecc., non può essere ancora oggi (1910) considerato risolto. Lasciaremos temporaneamente da parte questa domanda e ci limiteremo ad esporre ciò che è ciò che è immediatamente accessibile all'osservazione o al risultato diretto dell'esperienza dell'esperienza. Considereremo dapprima il contatto di conduttori, cioè in particolare dei metalli e delle soluzioni di sali e acidi: abbiamo chiamato queste ultime soluzioni elettrolitiche. Ammetteremo, in tali soluzioni, l'esistenza degli ioni le cui proprietà sono state presentate nel paragrafo precedente.

Quando due conduttori formati dalle sostanze A e B sono a contatto, entrambi sono elettrizzati e in verso opposti. I loro potenziali sono disuguali, cioè tutti i punti del corpo A sono a un potenziale, tutti quelli del corpo B a un altro. In altre parole, in tutti i punti della superficie di contatto S dei corpi A e B si verifica un salto di potenziale. L'entità di questo salto non dipende né dalla forma né dalle dimensioni dei corpi A e B, né dalla grandezza o dalla forma

della superficie di contatto S. Né risulta dall'occasionale stato elettrico del sistema formato dai due corpi, cioè dal potenziale dell'uno o dell'altro di questi corpi. Dipende esclusivamente dalla costituzione chimica e dallo stato fisico dei due corpi. Chiameremo forza elettromotrice la causa che produce questa differenza di potenziale, e ammetteremo che agisce solo sulla superficie S di contatto. Prenderemo per sua misura la differenza tra i potenziali dei corpi A e B. Designando questa forza elettromotrice con  $E$  e i potenziali dei corpi A e B con  $V_1$  e  $V_2$ , si ha l'uguaglianza numerica

$$E = V_1 - V_2 \quad (2.0.8)$$

Si prende come direzione della forza elettromotrice quella che va dal corpo a potenziale minore al corpo a quello a potenziale maggiore, cioè da B verso A, se  $V_1 > V_2$ . Designeremo anche simbolicamente l'intensità della forza elettromotrice con  $A|B$ , A e B possono essere i simboli chimici delle sostanze a contatto. Ad esempio,  $SO^4Zn|Zn$  rappresenta la forza elettromotrice o la differenza di potenziale per una soluzione di solfato di zinco e per lo zinco parzialmente immerso in questa soluzione. Il segno  $A|B$  indicherà sempre che dobbiamo sottrarre dal potenziale del corpo A il potenziale del corpo B; si ha:

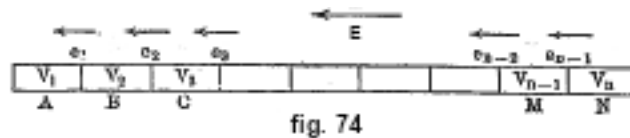
$$A|B = -B|A \quad (2.0.9)$$

Il fatto dell'esistenza di un salto di potenziale può essere spiegato dalla presenza di un doppio strato elettrico sulla superficie di contatto S. La formula (47,d), mostra che il momento  $\omega$  di questo doppio strato è

$$\omega = \frac{1}{4\pi} (V_1 - V_2) = \frac{1}{4\pi} E \quad (2.0.10)$$

Si è effettivamente portati ad ammettere che le cariche dei corpi A e B a contatto sono quasi interamente disposte sulla superficie S di contatto; sulle regioni libere delle superfici di A e B sono presenti quantità relativamente trascurabili di queste cariche.

Consideriamo ora una catena di corpi a contatto A, B, C..., M, N, rappresentata schematicamente in figura 74.



Assumeremo che tutte le parti della catena abbiano la stessa temperatura, e indicheremo con  $e_1, e_2, e_3, \dots, e_{n-2}, e_{n-1}$  le forze elettromotrici, che agiscono rispettivamente tra due corpi vicini, essendo  $n$  il numero di tutti i corpi. Siano  $V_1, V_2, V_3, \dots, V_n$  i rispettivi potenziali degli  $n$  corpi; si ha allora

$$e_1 = V_1 - V_2 = A|B \quad e_2 = V_2 - V_3 = B|C \quad e_{n-1} = V_{n-1} - V_n = M|N$$

Queste quantità possono essere in parte positive, in parte negative. Chiameremo forza elettromotrice della catena la somma delle forze elettromotrici agenti sulle varie superfici di contatto della catena. Se designiamo questa somma con  $E$ , si ha  $E = \sum e_k$  oppure, sostituendo  $e_k$  con il suo valore

$$E = A|B + B|C + \dots + M|N = \sum e_k = V_1 - V_n \quad (2.0.11)$$

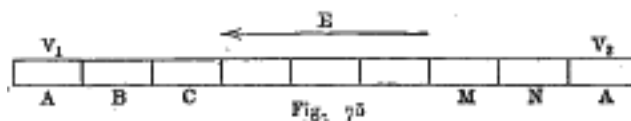
*La forza elettromotrice di una catena è uguale alla differenza di potenziale alle sue estremità; è uguale anche alla somma dei salti di potenziali che si verificano in essa.* Questa forza elettromotrice è diretta dall'estremità dove il potenziale è più basso a quella dove è più alto, in

modo da opporsi, per così dire, all'equalizzazione dei potenziali che si verificherebbe nel flusso di corrente in verso opposto dell'elettricità positiva.

Di particolare interesse è il caso in cui le sostanze agli estremi della catena sono le stesse, cioè in cui la catena è costituita dalle sostanze A, B, C, ..., M, N, A (fig. 75). Chiameremo una tale serie di corpi a contatto una catena regolarmente aperta. Indichiamo con  $V_1$  e  $V_2$  i potenziali delle estremità, cioè dei due corpi A; si ha allora

$$e_1 = V_1 - V_2 = A|B + B|C + \dots + M|N + N|A \quad (2.0.12)$$

Una combinazione di questo tipo deve ovviamente comprendere almeno tre sostanze (A, B, C) e quattro corpi (A, B, C, A), ovvero tre coppie  $A|B + B|C + C|A$ , poiché una catena ABA, che contiene solo due sostanze, dà sempre  $A|B + B|A = 0$ , vedi (8).



Lo studio delle catene regolarmente aperte mostra che tutti i conduttori devono essere divisi in due classi.

1. I conduttori della prima classe possiedono la seguente proprietà: la forza elettromotrice di una catena regolarmente aperta, formata da conduttori della prima classe, è nulla. La formula (11) dà  $V_1 = V_2$ ; le estremità formate da sostanze identiche hanno lo stesso potenziale, qualunque sia il numero e la natura dei conduttori intermedi, purché siano tutti di prima classe,

Ai conduttori della prima classe appartengono tutti i metalli, nonché altri conduttori solidi: carbone, alcuni minerali solidi, ossidi come il perossido di manganese, ecc. Si ha, per esempio.

$$Fe|Cu + Cu|Al + Al|Sn + Sn|Ag + Ag|Zn + Zn|Fe = 0$$

Nel caso di tre sostanze, si ha

$$A|B + B|C + C|A = 0 \quad (2.0.13)$$

Se ne deduce, si veda la (8)

$$A|B + B|C = A|C \quad (2.0.14)$$

ad esempio

$$Zn|Fe + Fe|Cu = Zn|Cu$$

La formula (12) esprime la legge di Volta: la somma delle forze elettromotrici  $A|B + B|C$  è uguale alla forza elettromotrice  $A|C$ .

Poiché  $E = 0$ , l'espressione generale (11) dà, per i conduttori di prima classe

$$A|B + B|C + C|D + \dots + M|N = A|N \quad (2.0.15)$$

cosa che si ottiene immediatamente mediante la formula (12) poiché  $A|B + B|C = A|C$ ,  $A|C + C|D = A|D$ , ecc., ad esempio

$$Zn|Ag + Ag|Mg + Mg|Fe + Fe|Cu = Zn|Cu$$

La formula (12,a) mostra che la differenza di potenziale di due conduttori della prima classe, ottenuta per contatto diretto di questi conduttori non cambia, quando si interpone tra essi un numero qualunque di altri conduttori della prima classe. Si hanno per esempio, nel primo caso, i potenziali  $V_1$  e  $V_2$ , e, nel secondo caso, i potenziali  $V_1, V', V'', V''', \dots, V_2$ , dove  $V', V'', V''', \dots$



sono i rispettivi potenziali dei corpi intermedi, potendo tali potenziali essere sia superiori che inferiori ai potenziali  $V_1$  e  $V_2$ .

Supponiamo che  $A|B$  e  $A|C$  siano quantità positive. La formula (12) mostra che quando  $A|B$  è minore di  $A|C$ ,  $B|C$  deve essere una quantità positiva; in altre parole, nella serie A, B, C, ogni corpo assume un potenziale più alto, quando è a contatto con uno di quelli che lo seguono:  $B|C > 0$ , ma  $B|A < 0$ ; inoltre la differenza di potenziale è tanto maggiore quanto più i corpi sono tra loro distanti nella serie:  $A|C > A|B$  e  $A|C > B|C$ . È facile generalizzare questo risultato.

Tutti i conduttori della prima classe possono essere classificati in modo tale che ciascuno di essi messo a contatto con uno di quelli che lo seguono abbia un potenziale maggiore e messo a contatto con un corpo che lo precede abbia un potenziale minore. Se un determinato corpo viene messo a contatto con corpi diversi, la differenza di potenziale è tanto maggiore quanto più il secondo corpo è lontano dal primo della serie. Tale serie è chiamata serie Volta. Indicando simbolicamente la serie di Volta come segue:

$$A, B, C, D, \dots, M, N, P, \dots, X, Y, Z$$

si ha ad esempio,  $C|D < C|M < C|P < C|X < C|Z$ : inoltre  $D|B < 0$ ,  $D|M > 0$ ,  $D|Y > 0$ ,  $N|D < 0$ ,  $N|X > 0$ , ecc.

II. I conduttori della seconda classe non obbediscono alla legge di Volta e non possono formare una serie di Volta. Ai conduttori della seconda classe appartengono tutti gli elettroliti, ad esempio soluzioni di acidi e sali, sali fusi e acidi, ecc. Ammettiamo che contengono ioni e abbiamo visto che, a parte il movimento dell'elettricità legata a questi ioni, non può esistere in essi nessun altro movimento di elettricità.

Indichiamo i conduttori della seconda classe con  $S_1, S_2, S_3$ , ecc., i conduttori della prima classe con  $A, B, C$ , ecc. La proprietà fondamentale degli elettroliti si esprime con le formule seguenti:

$$\begin{cases} A|S + S|B \leq A|B \\ E = V_1 - V_2 = A|S + S|B + B|A \leq 0 \\ E = V_1 - V_2 = A|S_1 + S_1|S_2 + S_2|B + B|A \leq 0 \end{cases} \quad (2.0.16)$$

In quest'ultimo,  $V_1$  e  $V_2$  sono i potenziali dei due corpi identici A, che si trovano ai due estremi di una catena regolarmente aperta; naturalmente le grandezze  $E, V_1, V_2$  non sono le stesse nelle due serie scritte simbolicamente. Le formule (13) portano al seguente risultato:

*In una catena regolarmente aperta, nella quale entrano conduttori della seconda classe, cioè elettroliti, agisce una forza elettromotrice  $E$  diversa da zero; questa forza elettromotrice è uguale alla differenza di potenziale delle estremità della catena.* Il suo verso coincide con quello in cui dominano i salti positivi di potenziale, cioè il verso in cui il potenziale cresce; in altre parole,  $E$  è diretto da  $V_1$  a  $V_2$ , se  $V_2 < V_1$ .

Il simbolo  $S_1|S_2$  corrisponde al caso del contatto di due elettroliti; in pratica, questi elettroliti sono solitamente separati da un setto poroso, fatto ad esempio di argilla non ghiacciata. Un vaso poroso viene solitamente utilizzato all'interno di un vaso di vetro più grande; uno degli elettroliti è posto all'interno del primo, nel secondo, cioè attorno al vaso poroso, l'altro elettrolita.

Una catena regolarmente aperta, formata da uno o due conduttori A, B della prima classe, e uno o due elettroliti  $S$ , o da tre elettroliti, è detta un *elemento voltaico* o *elemento di pila*. Un tale elemento può essere realizzato secondo uno dei seguenti schemi:

1. Un conduttore della prima classe e due elettroliti:

$$E = A|S_1 + S_1|S_2 + S_2|A \quad (2.0.17)$$

2. Due conduttori della prima classe e due elettroliti:

$$E = A|S + S|B + B|A \quad (2.0.18)$$

3. Due conduttori della prima classe e un elettrolita:

$$E = A|S_1 + S_1|S_2 + S_2|B + B|A \quad (2.0.19)$$

4. Tre elettroliti:

$$E = S_1|S_2 + S_2|S_3 + S_3|S_4 \quad (2.0.20)$$

I due elettroliti a contatto possono essere rappresentati da due soluzioni di una stessa sostanza, ma di diversa concentrazione. La catena si chiama pertanto un *elemento di concentrazione*; nel tipo (14,a), questo elemento si compone, per così dire, solo di due sostanze.

Nelle combinazioni precedenti,  $E$  non è uguale a zero, mostrando che gli elettroliti non seguono la legge di Volta. Si può però dare, per la combinazione (14,b), una formula che esprime una legge analoga a quella di Volta. Si considerino tre conduttori A, B e C immersi a due a due nello stesso liquido S e indichiamo con  $(A, B)$ ,  $(B, C)$  e  $(A, C)$  le forze elettromotrici di queste combinazioni di conduttori. Avremo:

$$\begin{aligned} (A, B) &= A|S + S|B + B|A \\ (B, C) &= B|S + S|C + C|B \\ (A, C) &= A|S + S|C + C|A \end{aligned}$$

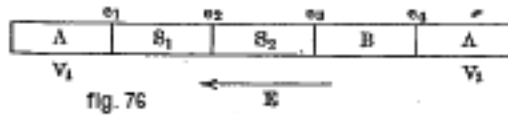
Se si sommano le prime due espressioni e si tiene conto che  $B|S + S|B = 0$  e che  $C|B + B + A = C|A$ , si ottiene

$$(A, B) + (B, C) = (A, C) \quad (2.0.21)$$

che esprime una legge analoga a quella di Volta, per un sistema composto di due conduttori della prima classe e di un elettrolita. Qualcosa di simile avviene anche per una combinazione di due conduttori della prima classe con due elettroliti, vedi (14,c), se si suppone che i tre conduttori A, B, C sono rispettivamente immersi negli elettroliti  $S_1, S_2, S_3$ , e se si trascura in ogni caso la piccolissima forza elettromotrice che esiste tra gli elettroliti. Abbiamo

$$\begin{aligned} (A, B) &= A|S_1 + S_1|S_2 + S_2|B + B|A \\ (B, C) &= B|S_2 + S_2|S_3 + S_3|C + C|B \\ (A, C) &= A|S_1 + S_1|S_3 + S_3|C + C|A \end{aligned}$$

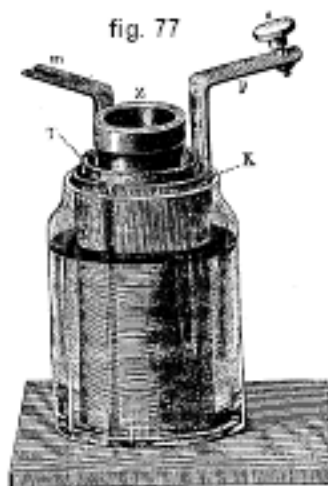
Se si sommano le prime due grandezze e se si ammette che tutte le  $S_i|S_k$  sono molto piccole, o che si ha approssimativamente  $S_1|S_2 + S_2|S_3 = S_1|S_3$ , si ottiene ancora l'uguaglianza (15).



Torniamo alla combinazione più importante, formata da due conduttori A e B della prima classe e da due elettroliti  $S_1$  e  $S_2$ ; tale combinazione è rappresentata schematicamente dalla figura 76. Se si pone  $A|S_1 = e_1$ ,  $S_1|S_2 = e_2$ ,  $S_2|B = e_3$ ,  $B|A = e_4$ , viene

$$E = V_1 - V_2 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = A|S_1 + S_1|S_2 + S_2|B + B|A \quad (2.0.22)$$

Si può citare come esempio di una tale combinazione l'elemento o coppia di Daniell, rappresentato in figura 77. Un vaso di vetro è suddiviso in due scomparti da un setto poroso T; una soluzione diluita di acido solforico viene versata nello scomparto interno, in modo che in ogni circostanza in esso ci sia solo solfato di zinco, che può in generale sostituire l'acido

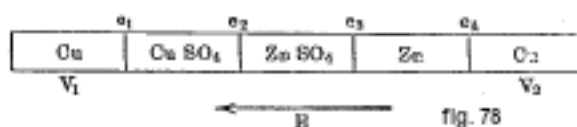


Nello stesso compartimento è posto un cilindro o un tondino di zinco  $Z$ , al quale è saldata una lamina di rame  $m$ . Nel compartimento esterno viene versata una soluzione di solfato di rame, lungo la quale scorre un foglio di rame  $R$  arrotolato a cilindro, al quale è saldata anche una striscia di rame  $p$ . Si ha, per l'elemento Daniell,

$$e_1 = Cu|CuSO^4 \quad e_2 = CuSO^4|ZnSO^4 \quad e_3 = ZnSO^4|Zn \quad e_4 = Zn|Cu$$

$$E = V_1 - V_2 = Cu|CuSO^4 + CuSO^4|ZnSO^4 + ZnSO^4|Zn + Zn|Cu \quad (2.0.23)$$

$V_1$  e  $V_2$  sono i potenziali delle due estremità in rame  $p, m$ , essendo il potenziale  $V_1$  dell'estremità  $p$  maggiore del potenziale  $V_2$  dell'estremità  $m$ . Quando l'elemento è percorso dall'estremità  $m$ , la somma dei salti di potenziale è una quantità positiva e la forza  $E$  agisce nel verso che va dallo zinco  $Z$  verso il rame  $K$ , o più esattamente dal rame  $m$  verso il rame  $Kp$ . La figura 78 mostra la distribuzione delle sostanze nell'elemento Daniell, sotto forma di una catena regolarmente aperta corrispondente allo schema di figura 76. Ricordiamo che  $E$  è uguale a circa un volt per l'elemento Daniell e che, negli elementi di pila comuni,  $E$  generalmente oscilla tra uno e due volt.



Per semplificare, parleremo semplicemente di metalli nel seguito, quando si tratterà propriamente di conduttori della prima classe, ai quali appartengono anche altri conduttori solidi.

Da tutto quanto precede risulta che, in una catena regolarmente aperta formata da due metalli  $A$  e  $B$  e da due elettroliti, quattro forze elettromotrici  $e_1, e_2, e_3, e_4$  agiscono sulle quattro superfici di contatto del corpo della catena; la somma di queste forze elettromotrici è uguale a  $E$  e contemporaneamente alla differenza dei potenziali  $V_1 - V_2$  delle estremità della catena. Esistono numerosi metodi per misurare  $E$  e la differenza di potenziale  $V_1 - V_2$ ; li indicheremo in seguito. Diremo che l'esistenza della differenza di potenziale  $V_1 - V_2$  è un fatto sperimentale dimostrato e solidamente accertato; l'entità di tale differenza può essere misurata molto accuratamente.

Si presentano due questioni fondamentali:

I. - Quali sono le circostanze dalle quali dipende la grandezza  $E = V_1 - V_2$ ?

II. - Quale è in particolare, la grandezza di ciascuno dei componenti  $e_1 = A|S_1, e_2 = S_1|S_2, e_3 = S_2|B, e_4 = B|A$  della grandezza  $E$ , che è uguale a  $V_1 - V_2 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ ?

Le stesse due domande si pongono ovviamente anche per le catene più semplici, alle quali si riferiscono le formule (14,a), (14,b) e (14,d).

Alla prima domanda, relativa alla grandezza della somma  $E$ , che è facile da osservare e misurare direttamente, c'è una risposta ben determinata e perfettamente chiara, che renderemo nota nel paragrafo successivo.

Alla seconda domanda non è stata data ancora una risposta definitiva (1910). Sappiamo qual è la grandezza della somma  $E$ , da cosa dipende, con quali altre grandezze è legata da leggi; ma non possiamo dire nulla di completamente conclusivo sui componenti che compongono questa somma.

È molto probabile che, nella formula (16), la quantità  $e_2 = S_1|S_2$  è piccola rispetto a  $E$ , purché le sostanze A, B,  $S_1$ ,  $S_2$  siano scelte in modo che la quantità  $E$  non sia molto piccola, uguale ad esempio a una piccola frazione di volt. Rimangono due tipi di componenti della grandezza  $E$ , da un lato quelli della stessa natura  $e_1 = A|S_1$  e  $e_3 = S_2|B$ , d'altra parte la quantità  $e_4 = B|A$ . Si tratta di sapere come si distribuisce la somma  $E$  tra questi due tipi di componenti. Uno è preponderante o hanno all'incirca lo stesso valore, o forse uno è addirittura nullo? In altre parole, dove cercare la sorgente che produce la differenza dei potenziali ai capi di una catena regolarmente aperta? È dove i metalli si incontrano, o al contatto tra questi metalli e gli elettroliti, o in entrambi i luoghi?

Un numero abbastanza elevato di autori molto autorevoli è del parere che  $e_4$  sia molto piccolo rispetto a  $e_1$  ed  $e_3$  e che questa componente entri solo per pochi millesimi nella somma  $E$ , quindi il contatto dei metalli con gli elettroliti rappresenta la principale sorgente della forza elettromotrice di un elemento della pila, l'unico che deve essere tenuto presente. Così pensa la scuola tedesca di elettrochimica: Ostwald, Nernst, Jahn, Le Blac, Lüpke e altri. Ci sono studiosi, soprattutto in Inghilterra (Lodge, per esempio), che pensano che  $e_4 = 0$ , cioè che il contatto tra metalli non dia di per sé alcuna forza elettromotrice. Ma vi sono allo stesso tempo fisici non meno illustri che fanno misure della grandezza  $e_4$  per diverse combinazioni di metalli, trovando che  $e_4$  può essere uguale alla metà, a tre quarti e ad una frazione ancora maggiore della grandezza  $E$ , che  $e_4$  può raggiungere valori fino a un volt. Si vedono innumerevoli esperimenti e misure dovute ai sostenitori dell'uno o dell'altro modo di vedere e allo stesso tempo una critica di questi esperimenti, che a volte sembra presentare solo un rapporto completamente estraneo al soggetto e quasi denota ignoranza di ciò che gli oppositori si sforzano di dimostrare. Non dobbiamo qui schierarci per un campo o per l'altro, né tenere un'opinione piuttosto che un'altra sulla grandezza  $e_4$ ; in primo luogo dobbiamo dare un quadro dello stato attuale della scienza e indicare solo di conseguenza ciò che è stato fatto da entrambe le parti. Anche se la questione fondamentale in sé non è ancora risolta, ciò non ci impedirà di continuare la nostra presentazione, perché il ruolo principale spetta alla quantità  $E$ , somma delle componenti contestate, cioè la quantità per la quale non può esistere alcuna controversia.

Ci interessa soprattutto la prima delle due questioni fondamentali, quella della legge secondo la quale la quantità  $E$  dipende dalle altre grandezze fisiche, perché si può in parte basare questa legge sul fondamento veramente solido della Fisica moderna, i due principi della termodinamica. Invece di determinare sinteticamente, come si fa di solito, la grandezza  $E$ , dopo aver considerato in precedenza le grandezze  $e$ , seguiremo il percorso inverso: considereremo prima ciò che si osserva immediatamente, quanto stabilito senza contestazione, e solo dopo passeremo alla considerazione di quanto fatto fino ad oggi, per risolvere la controversa questione delle componenti della forza elettromotrice di una catena regolarmente aperta, formata da una serie di conduttori della prima classe a contatto ed elettroliti.

## Forza elettromotrice di un elemento della pila. Elemento della pila reversibile

Dalla (16) abbiamo la relazione seguente

$$E = V_1 - V_2 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = A|S_1 + S_1|S_2 + S_2|B + B|A \quad (2.0.24)$$

Chiameremo i conduttori A e B elettrodi o poli, l'elettrodo A, che ha il potenziale  $V_1$  più alto, essendo l'elettrodo positivo o il polo positivo, e l'altro B, il cui potenziale  $V_2 < V_1$ , l'elettrodo negativo o il polo negativo.

Abbiamo inoltre visto che la forza elettromotrice, che agisce sulla superficie di due corpi in una catena, dipende solo dalla natura e dallo stato fisico di questi corpi. Questo è il caso di ognuno dei quattro componenti della grandezza  $E$ , e quindi della stessa somma  $E$ . Si ha quindi la seguente legge:

La forza elettromotrice di qualsiasi elemento di pila dipende solo dalla natura e dallo stato fisico delle sostanze di cui l'elemento è composto. In altre parole, la grandezza  $E$  dipende dalla scelta dei conduttori A e B della prima classe e degli elettroliti  $S_1, S_2$ ; dipende anche dalla temperatura, dalla pressione, dalla concentrazione delle soluzioni  $S_1$  e  $S_2$  e da altri fattori fisici. D'altra parte, la forza elettromotrice di un elemento è indipendente dalla forma e dalle dimensioni dell'elemento, nonché dalla particolare disposizione che ricevono i conduttori solidi e liquidi.

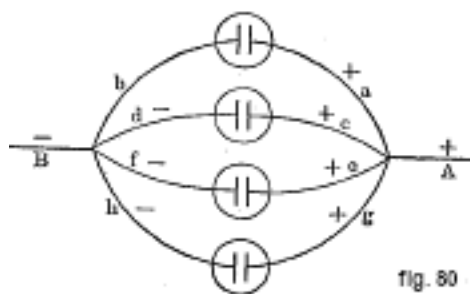
Senza fare alcuna ipotesi sulle componenti della grandezza  $E$ , possiamo determinare qual è la forza elettromotrice  $E$  di un numero qualsiasi di elementi tra loro associati, ovvero di quella che viene chiamata una batteria di elementi. Supponiamo di avere  $n$  elementi uguali, ognuno dei quali ha la forza elettromotrice  $E_0$ . Come vedremo in seguito, esistono diversi modi per raggruppare gli elementi in una batteria; considereremo solo i due più importanti: il raggruppamento in serie o in cascata e il raggruppamento in parallelo o in superficie.



Nel raggruppamento in serie, gli elementi formano una serie continua come quella rappresentata schematicamente nella figura 79; il polo positivo di un elemento è collegato al polo negativo di quello vicino. Se si indicano con  $V_a, V_b, V_c$ , ecc. i rispettivi potenziali dei punti  $a, b, c$ , ecc., si ha  $V_b - V_a = E_0, V_c - V_b = E_0, V_d - V_c = E_0$ , ecc. La grandezza cercato è quindi, in questo caso,

$$E = nE_0 \quad (2.0.25)$$

La forza elettromotrice di una batteria di  $n$  elementi in serie è  $n$  volte maggiore della forza elettromotrice di un singolo elemento. La grandezza  $E$  è uguale alla differenza  $V_n - V_a$  dei potenziali ai capi della batteria aperta. Con valori elevati di  $n$  si possono ottenere differenze di potenziale abbastanza considerevoli, per effetto anche di elettrizzazioni abbastanza elevate delle estremità. Ne consegue che le estremità di una batteria aperta di elementi in serie possono essere utilizzate come sorgenti di grandi cariche elettriche. Se queste estremità sono unite a due corpi (della stessa sostanza conduttrice), questi ultimi si elettrizzano e la differenza dei loro potenziali è  $E = nE_0$ .



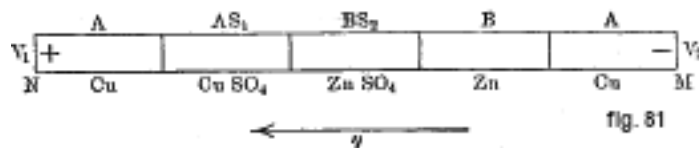
Nel raggruppamento in parallelo, tutti gli  $n$  poli positivi degli elementi sono riuniti così come gli  $n$  poli negativi come mostra schematicamente la figura 80. Si ha, in questo caso,  $V_a - V_b = E_0$ ,  $V_c - V_d = E_0$ ,  $V_e - V_f = E_0$ , ecc.; inoltre  $V_a = V_c = V_e = \dots = V_g$  e  $V_b = V_d = V_f = \dots = V_h$  poiché i conduttori della stessa natura messi in comunicazione devono avere lo stesso potenziale. Da ciò risulta che la grandezza  $E$ , che è uguale a  $V_A - V_B$ , deve essere uguale a  $E_0$

$$E = E_0 \quad (2.0.26)$$

La forza elettromotrice di una batteria di  $n$  elementi raggruppati in parallelo è uguale alla forza elettromotrice di un singolo elemento. Tutti gli  $n$  elementi formano in qualche modo un elemento unico di una costruzione più complessa.

Ammetteremo, in seguito, che uno dei due ioni dell'elettrolita  $S_1$  è identico alla sostanza  $A_1$  e analogamente che uno dei due ioni dell'elettrolita  $S_2$  è identico alla sostanza B. Un caso del genere si verifica, ad esempio, quando  $S_1$  e  $S_2$  sono soluzioni di sali dei metalli A e B. Per ragioni che indicheremo in seguito, l'elemento di batteria così formato è un elemento reversibile; aggiungeremo anche elettrodo reversibile, qualsiasi elettrodo i cui ioni sono nell'elettrolita con cui è a contatto. L'elemento Daniell è ovviamente un elemento reversibile; questo rimane vero quando la soluzione di solfato di zinco viene sostituita con una soluzione di  $SO^4H^2$ , poiché allora si forma subito una certa quantità di  $SO^4Zn$ .

Vediamo cosa deve accadere quando una certa quantità di elettricità attraversa un elemento reversibile. Lasciaremos da parte la questione dell'origine di quell'elettricità. La figura 81 riporta di nuovo lo schema di una catena regolarmente aperta; sotto, a titolo d'esempio, sono indicate le parti costitutive dell'elemento Daniell. Sia  $V_1 > V_2$ , in modo che N è l'elettrodo positivo, M quello negativo.



La forza elettromotrice dell'elemento è

$$E = V_1 - V_2 \quad (2.0.27)$$

Supponiamo che la quantità di elettricità  $q$  sia trasportata da M a N, cioè dal potenziale più basso al potenziale più alto. Il movimento dell'elettricità negli elettroliti consiste, come abbiamo visto, in uno spostamento di ioni. Per comodità indicheremo la composizione degli elettroliti con  $AS_1$  e  $BS_2$ , essendo A e B i cationi, che portano elettricità positiva e si muovono nella direzione che va da M a N, mentre gli anioni  $S_1$  e  $S_2$  si muovono nel verso opposto. Un tale spostamento di ioni è accompagnato da reazioni chimiche, il cui insieme rappresenta sempre una reazione esotermica, cioè una reazione in cui viene rilasciato calore. Gli ioni  $S_2$  si

spostano verso destra e si uniscono al metallo dell'elettrodo B, che si dissolve. Si può supporre che B contenga anche ioni e che questi ioni siano di due tipi. In questo caso il fenomeno della dissoluzione equivale all'emissione di una corrente di ioni elettrizzati positivamente provenienti da B, che si uniscono agli ioni negativi  $S_2$ . Gli ioni B positivi dell'elettrolita  $BS_2$  si uniscono agli ioni  $S_1$ ; gli ioni positivi A dell'elettrolita  $AS_1$  si muovono verso l'elettrodo A, sul quale si depositano sempre, come si dice di solito, si separano, cedendo la loro carica che scorre verso N. Di conseguenza l'elettrodo B si dissolve, l'elettrolita  $AS_1$  si decompone e il metallo A viene depositato sull'elettrodo A. Pertanto, nell'elemento Daniell, lo Zn si dissolve, mentre il Cu viene depositato sull'elettrodo di rame. La formazione di  $ZnSO^4$  avviene con rilascio di calore, la scomposizione di  $CuSO^4$  con assorbimento di calore; ma la liberazione di calore è preponderante, cosicché si ottiene infine una reazione esotermica. I processi chimici che avvengono nel caso in esame, cioè quando gli elettroliti contengono gli ioni A e B, sono ovviamente reversibili: se una quantità di elettricità  $\eta$  attraversa l'elemento della pila in senso contrario, l'elettrodo A (Cu) si dissolve e su B (Zn) si deposita il metallo da cui è formato questo elettrodo. Il significato delle espressioni elettrodi reversibili ed elemento di pila reversibile sono ora comprensibili.

Indichiamo con  $q$  la quantità di calore, espressa in joule (0,24 gr. cal.) che si sprigiona nell'elemento e che proviene dalle reazioni chimiche che accompagnano il passaggio di un coulomb, cioè il trasporto di  $1/96540$  grammo-equivalenti di ioni di ogni tipo. Indichiamo anche con  $q'_0$  e  $q''_0$  i dati termochimici, solitamente forniti dalle tabelle, corrispondenti alle due reazioni che avvengono rispettivamente agli elettrodi, supponendo che queste due reazioni avvengano nel verso positivo, cioè con rilascio di calore, come sarebbe il caso se entrambi gli elettrodi si dissolvessero. Le quantità  $q_0$  e  $q''$  sono date nelle tabelle in grammi calorie, riferite a un grammo di metallo che si scioglie. Indicheremo con  $\sigma'$  e  $\sigma''$  i grammi equivalenti degli elettrodi, con  $\varepsilon'$  ed  $\varepsilon''$  i loro equivalenti elettrochimici espressi in milligrammi. Si ha allora

$$q = \frac{q'_0\sigma' - q''_0\sigma''}{96540 \cdot 0,24} = \frac{q'_0\varepsilon' - q''_0\varepsilon''}{1000 \cdot 0,24} \text{ joule} \quad (2.0.28)$$

Applichiamo i due principi della termodinamica al processo reversibile infinitamente piccolo, che avviene quando la quantità di elettricità  $d\eta$  passa da M a N; se si esprime  $d\eta$  in coulomb,  $E = V_1 - V_2$  in volt, si ottiene il lavoro del trasporto dell'elettricità in joule e si deve, di conseguenza, esprimere anche le quantità di calore in joule. Supponiamo che nello stesso tempo in cui fluisce  $d\eta$  si produca un riscaldamento di  $dt$  gradi dell'elemento di pila e denotiamo la sua capacità termica con  $c$ . Si determina facilmente la variazione della capacità termica, nel passaggio della quantità di elettricità  $d\eta$ . Sia ad esempio  $c_1$  la capacità termica di tutte le sostanze che partecipano alla reazione, considerando un equivalente elettrochimico di ciascuna di esse,  $c_2$  la capacità termica delle sostanze prese nella stessa quantità che si sono formate dopo la reazione. È ovvio che  $c_2 - c_1$  è la variazione della capacità termica dell'elemento di pila, nel passaggio di un coulomb, e conseguentemente

$$dc = (c_2 - c_1) d\eta \quad (2.0.29)$$

Sia  $dQ$  la quantità di calore (espressa in joule) che proviene dall'esterno; all'interno dell'elemento di pila si libera il calore  $qd\eta$ . La quantità totale di calore  $dQ + qd\eta$  serve a riscaldare l'elemento e a trasportare la quantità di elettricità  $d\eta$ , dal potenziale  $V_2$  al potenziale  $V_1$ . Per il primo effetto occorre il calore  $cdt$ , per il secondo il calore  $(V_1 - V_2) d\eta = Ed\eta$ . Se ne deduce

$$dQ = cdt + (E - q) d\eta \quad (2.0.30)$$

Una perdita di energia chimica  $qd\eta$  e un riscaldamento avvengono nell'elemento di pila. L'energia  $U$  dell'elemento varia quindi della quantità

$$dU = cdt - qd\eta \quad (2.0.31)$$

Applichiamo i due principi della termodinamica alle equazioni fondamentali (22) e (23). La grandezza  $dU$  deve essere un differenziale esatto; si ha quindi

$$\frac{\partial c}{\partial n} = -\frac{\partial q}{\partial t} \quad (2.0.32)$$

La grandezza  $\frac{dQ}{T}$ , dove  $T$  indica la temperatura assoluta, deve inoltre essere pure un differenziale esatto; pertanto

$$\frac{\partial \frac{c}{T}}{\partial n} = \frac{\partial \frac{E-q}{T}}{\partial t}$$

ciò che dà

$$T \frac{\partial c}{\partial n} = T \left( \frac{\partial E}{\partial t} - \frac{\partial q}{\partial t} \right) - E + q$$

Semplificando i due membri mediante la (24), si ha

$$E = q + T \frac{\partial E}{\partial t} \quad (2.0.33)$$

Questa è la famosa formula di Helmholtz, che esprime la relazione che lega la forza elettromotrice  $E$  di un elemento reversibile e l'effetto termochimico  $q$ . Sir W. Thomson (Lord Kelvin) e Helmholtz avevano pensato che si ha semplicemente

$$E = q \quad (2.0.34)$$

uguaglianza che è nota sotto il nome di regola di Thomson ( $E$  si esprime in volt,  $q$  in joule per equivalente elettrochimico della sostanza degli elettrodi). L'equazione (25) mostra che  $E$  può essere sia maggiore che minore di  $q$ , a seconda che  $E$  diminuisca o aumenti con la temperatura.

Se si confronta la (24) con la (21), si vede che

$$\frac{\partial q}{\partial t} = c_1 - c_2 \quad (2.0.35)$$

Differenziando la (25) rispetto a  $t$ , si ha

$$T \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = -\frac{\partial q}{\partial t} = c_2 - c_1 \quad (2.0.36)$$

Abbiamo introdotto, nel volume III, Cap. V, una formula dalla quale si deduce facilmente la (26). La (27) dà

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \int \frac{c_2 - c_1}{T} dt + K \quad (2.0.37)$$

dove  $K$  rappresenta una costante; portando questo valore nella (25), si ha

$$E - q = T \int \frac{c_2 - c_1}{T} dt + KT \quad (2.0.38)$$

Si può facilmente trovare un'espressione generale di  $E$  in funzione di  $q$ . Scriviamo la (25) nella forma

$$\frac{TdE - EdT}{T^2} = -\frac{qdT}{T^2}$$

se ne deduce

$$\begin{aligned} \frac{E}{T} &= -\int \frac{qdT}{T^2} + K \\ E &= -T \int \frac{qdT}{T^2} + KT \end{aligned} \quad (2.0.39)$$



Integrando per parti si passa agevolmente dalla (30) alla (29), tenendo conto della (26). Ricordiamo che  $q$  si calcola usando la formula (20).

La formula (25) mostra che nei casi in cui è applicabile la regola di Thomson  $E = q$ , vedi (25,a),  $E$  e  $q$  non dipendono da  $T$ , e quindi  $c_1 = c_2$ , vedi (26); la capacità termica di un elemento non varia quindi in conseguenza delle reazioni che in esso avvengono. Tuttavia, non possiamo affermare il contrario; se si ha  $c_1 = c_2$ ,  $q$  non dipende da  $T$ , ma  $E$  può essere una funzione lineare della temperatura assoluta.

Il secondo termine dell'espressione (25) di  $E$  non è grande in generale, e si può porre, per molti elementi della pila,  $E = q$ , cioè calcolare  $E$  usando la formula (20). Quindi, per l'elemento Daniell,  $q'_0$  è il calore di dissoluzione (in grammo-calorie) di un grammo di zinco in  $SO^4H^2$ ,  $q''_0$  la stessa grandezza per un grammo di rame,  $\varepsilon'$  e  $\varepsilon''$  sono gli equivalenti elettrochimici di zinco e rame in milligrammi; sapendo che  $q' = 1635_0$ ,  $q''_0 = 881$ ,  $\varepsilon' = 0,337$ ,  $\varepsilon'' = 0,328$ , si trova  $q = 1,09$  joule per coulomb che fluisce. Tralasciando il secondo termine nella (25), si ha  $E = 1,09 \text{ volt}$ , che è molto vicino alla realtà. Gockel, Czapski, Jahn, Bugarski, Chrouschtscheff, Sitikoff e altri hanno dimostrato la correttezza della formula Helmholtz (25) con misure dirette. Torneremo su più avanti su questi lavori.

Il fatto che l'equazione di Helmholtz sia immediatamente deducibile dalla teoria dell'energia libera esposta nel volume III, è di grandissimo interesse. Se si indica con  $U$  l'energia chimica dell'elemento di pila, che scompare quando un coulomb attraversa l'elemento, si ha  $U = q$ . Il lavoro così ottenuto è compreso nel lavoro di trasporto di un coulomb dal potenziale  $V_2$  al potenziale  $V_1$ . Esprimendo il lavoro in volt-coulomb, si ha  $V_1 - V_2$  per il suo valore, cioè  $E$ . Dalla stessa nozione di energia libera, nei processi isotermitici, sembra che questo lavoro sia svolto a spese dell'energia libera, di modo che si deve avere  $E = F$ , dove  $F$  è l'energia libera che corrisponde alla fornitura di energia  $U$ . Ma, secondo la teoria dell'energia libera, abbiamo

$$F = U + T \frac{\partial F}{\partial t}$$

Se si sostituiscono i valori  $F = E$  e  $U = q$ , si ottiene la formula (25) di Helmholtz.

Broniewski (1908) ha mostrato che si ottiene in prima approssimazione la formula (25), supponendo che la formula semplificata (25,a) sia valida quando la temperatura assoluta è nulla.

La teoria dell'energia libera permette di trovare come la forza elettromotrice  $E$  di un elemento reversibile dipenda dalla pressione esterna. Supponiamo che la reazione chimica, che avviene nel passaggio di un coulomb attraverso l'elemento, sia accompagnata da un aumento di volume e che l'energia libera  $F$  e il volume  $v$  abbiano inizialmente i valori  $F_1$  e  $v_1$  e, dopo il passaggio del coulomb, i valori  $F_2$  e  $v_2$ . Sia  $p$  la pressione esterna; il passaggio del coulomb avviene in modo isotermitico e alla pressione costante  $p$ . L'energia libera persa  $F_1 - F_2$  è stata utilizzata per il trasporto del coulomb e per l'aumento di volume da  $v_1$  a  $v_2$ . È necessario spendere  $E$  joule per il trasporto di un coulomb; per l'aumento di volume sono necessari  $Ap(v_2 - v_1)$  joule, essendo  $A$  l'equivalente termico del lavoro. Si ha quindi l'equazione

$$F_1 - F_2 = E + Ap(v_2 - v_1)$$

che dà

$$\frac{\partial F_1}{\partial p} - \frac{\partial F_2}{\partial p} = \frac{\partial E}{\partial p} + Ap \left( \frac{\partial v_2}{\partial p} - \frac{\partial v_1}{\partial p} \right) + A(v_2 - v_1) \quad (2.0.40)$$

Ma abbiamo trovato, nel volume III

$$F = U - TS$$

dove (per  $T = \text{cost}$ )

$$\frac{\partial F}{\partial p} = \frac{\partial U}{\partial p} - T \frac{\partial S}{\partial p}$$

Si ha ora

$$dS = \frac{dU - A p dv}{T}$$

e quindi

$$T \frac{\partial S}{\partial p} = \frac{\partial U}{\partial p} + A p \frac{\partial v}{\partial p}$$

Se ne deduce

$$\frac{\partial F}{\partial p} = -A p \frac{\partial v}{\partial p}$$

cioè

$$\frac{\partial F_1}{\partial p} - \frac{\partial F_2}{\partial p} = A p \left( \frac{\partial v_2}{\partial p} - \frac{\partial v_1}{\partial p} \right)$$

Se si porta questo valore nella (30,a), si ottiene, per il caso di una contrazione isoterica dell'elemento, la notevole equazione

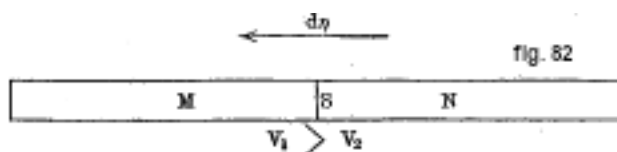
$$\frac{\partial E}{\partial p} = A (v_2 - v_1) \quad (2.0.41)$$

Essa esprime che quando la reazione chimica nell'elemento è accompagnata da un aumento di volume  $v$  ( $v_2 > v_1$ ), la forza elettromotrice  $E$  diminuisce all'aumentare della pressione esterna  $p$ ; se invece il volume  $v$  diminuisce,  $E$  aumenta all'aumentare di  $p$ . Ciò è del tutto in accordo con il principio di Le Chatèlier-Braun (volume III).

Le notevoli equazioni (25) e (31) risolvono la questione di come la forza elettromotrice  $E$  di un elemento reversibile dipenda dalla temperatura  $T$  e dalla pressione  $p$ . Queste equazioni indicano il ruolo giocato da una variazione della capacità termica e da una variazione del volume dell'elemento, nelle reazioni chimiche che accompagnano lo spostamento degli ioni negli elettroliti, o, che è la stessa cosa, il passaggio dell'elettricità attraverso l'elemento. È un fatto molto importante essere stati in grado di stabilire queste equazioni, senza tener conto delle componenti  $e_1, e_2, e_3, e_4$  della grandezza  $E$ . L'esattezza delle formule che abbiamo introdotto non può essere messa in dubbio, perché sono state ottenute termodinamicamente. Lo stesso si può dire delle deduzioni del paragrafo successivo.

## 5. Il fenomeno di Peltier

Lo scienziato francese Peltier ha scoperto il seguente fenomeno: quando una certa quantità di elettricità viene fatta passare attraverso la superficie di contatto  $S$  (fig. 82) o la saldatura di due corpi  $M$  e  $N$ , si produce, a seconda della direzione di questa corrente, un'emissione o assorbimento di calore in corrispondenza della superficie  $S$ , vale a dire un particolare riscaldamento o raffreddamento su tale superficie.



La termodinamica permette di stabilire una relazione tra l'entità di questo effetto termico e l'entità della forza elettromotrice  $e$ , misurata dalla differenza  $V_1 - V_2$  dei potenziali dei due corpi. Si consideri un processo reversibile infinitamente piccolo, in cui la temperatura (assoluta)  $T$  dei corpi  $M$  e  $N$  aumenta di  $dT$  e contemporaneamente la quantità di elettricità  $d\eta$  fluisce da

N a M, cioè dal potenziale più piccolo al più grande. Sia  $dQ$  la quantità di calore, infinitamente piccola, che viene dall'esterno in questo processo. Si può allora porre

$$dQ = cdT + hd\eta \quad (2.0.42)$$

La quantità  $c$  ha qui il carattere di una capacità termica,  $h$  il carattere di un calore latente; quest'ultimo è il calore necessario per mantenere la saldatura a temperatura costante, quando questa è attraversata dalla quantità unitaria di elettricità. Sia  $q$  ciò che si chiama il calore di Peltier, cioè la quantità di calore liberata o assorbita dalla saldatura, quando questa saldatura è attraversata dalla quantità unitaria di elettricità. Si ha

$$q = \pm h \quad (2.0.43)$$

Il calore  $dQ$  è speso per l'aumento dell'energia  $U$  e nel lavoro di trasporto della quantità di elettricità  $d\eta$  dal potenziale  $V_2$  al potenziale  $V_1$ ; quest'ultimo lavoro è  $(V_1 - V_2) d\eta = cd\eta$ . Si ha quindi

$$dQ = dU + ed\eta \quad (2.0.44)$$

Se si confronta la (32) con la (32,b), si ottiene

$$h = \frac{\partial U}{\partial \eta} + e \quad e = \frac{\partial U}{\partial T}$$

Se ne deduce

$$\frac{\partial h}{\partial T} = -\frac{\partial e}{\partial \eta} = \frac{\partial e}{\partial T} \quad (2.0.45)$$

Il secondo principio della termodinamica dà

$$\frac{\partial \frac{e}{T}}{\partial \eta} = \frac{\partial \frac{h}{T}}{\partial T}$$

o

$$\frac{\partial h}{\partial T} = -\frac{\partial e}{\partial \eta} = \frac{h}{T} \quad (2.0.46)$$

Si ha quindi, dalle equazioni (32,c) e (32,d),

$$h = T \frac{\partial e}{\partial T} \quad (2.0.47)$$

Si ha infine, dalla (32,a)

$$q = \pm T \frac{\partial e}{\partial T}$$

Questa formula determina il calore di Peltier che viene assorbito in corrispondenza della saldatura, quando la stessa è attraversata dalla quantità unitaria di elettricità. Se la grandezza  $e$  non dipendesse da  $T$ , si avrebbe  $q = 0$ . Se  $e$  in funzione della temperatura avesse la forma  $e = CT$ , si avrebbe  $q = \pm e$ .

## 6. La teoria di Nernst

Il fisico tedesco Nernst ha fornito verso il 1889 una nuova teoria della produzione delle forze elettromotrici in sistemi di conduttori a contatto. Accolta dapprima con sospetto, questa teoria, nel suo successivo sviluppo, ha permesso di spiegare un gran numero di fenomeni diversi e di stabilire completamente le leggi quantitative a cui sono soggetti, così come è servita da linea guida in molte delle ricerche recenti. Un'importante scuola di studiosi, soprattutto tedeschi, l'ha presa come base di tutta l'elettrochimica. Partendo da una rappresentazione definita del

meccanismo di produzione delle forze elettromotrici negli elementi delle pile, essa non si limita solo alla determinazione della somma di tali forze, cioè della quantità  $E$ , ma conduce anche ad una soluzione del controverso problema delle quattro componenti di questa quantità. In considerazione di un aspetto particolarmente caratteristico della teoria di Nernst, può essere chiamata la teoria osmotica degli elementi di pila.

La teoria della pressione osmotica è stata trattata nel volume I e poi, molto più dettagliatamente, nel volume III, dove abbiamo presentato, tra l'altro, la teoria della diffusione, anch'essa costruita da Nernst sulla nozione di pressione osmotica. Ricorderemo che questa teoria identifica le proprietà delle sostanze disciolte con quelle dei gas; la pressione osmotica di una sostanza disciolta è uguale alla pressione che la stessa sostanza eserciterebbe se riempisse sotto forma di gas lo spazio occupato dalla soluzione. Per le soluzioni diluite valgono le leggi di Mariotte e Gay-Lussac, da cui anche la formula

$$pv = RT \quad (2.0.48)$$

nella quale  $R$  è la costante relativa allo stato gassoso.

Prima di sviluppare la teoria di Nernst, diremo qualche parola sulle unità mediante le quali misureremo le diverse grandezze considerate, e determineremo il valore numerico corrispondente a queste unità della costante  $R$ , per gli ioni contenuti in un soluzione diluita di qualsiasi elettrolita, quest'ultimo essendo considerato completamente dissociato. Prenderemo per unità di lunghezza il centimetro, per unità di potenziale, e quindi di forza elettromotrice, il volt. L'unità di intensità di campo sarà quindi il volt-centimetro, cioè l'intensità di un campo in cui il potenziale varia di un volt su una distanza di un centimetro. Prenderemo il coulomb per unità di quantità di elettricità. Ne consegue che l'unità di lavoro sarà il *volt coulomb* = 1 *joule* = 10 *megaerg*. Tale lavoro si compie nel trasporto di un coulomb a una distanza di un centimetro, in un campo la cui intensità è uguale all'unità, cioè uguale a un volt-centimetro. Si vede da ciò che l'unità di forza è pari a  $10^7$  *dine*, e che l'unità di pressione è uguale a  $10^7$  *dine/cm²*. L'unità di massa, cioè l'unità di quantità di ioni, sarà allora una massa tale che l'unità di forza viene esercitata su di essa nel campo unitario. È chiaro che questa massa deve essere messa in relazione con un coulomb; si deve quindi prendere come unità di numero di ioni l'equivalente elettrochimico. Se  $n$  è il numero di ioni monovalenti (H, Cl, Br, I, K, Na, Ag, Cu di  $Cu_2Cl_2$ ,  $AzO_3$ , ecc.) legati a un coulomb, il numero di ioni bivalenti (O, S, Ba, Zn, Cu di  $CuCl_2$  o di  $CuSO_4$ ,  $SO_4$ ,  $CO_2$ , ecc.) legati a un coulomb è uguale a  $\frac{1}{2}n$ , poiché ogni ione preso tra i primi è legato a un elettrone, e ogni ione preso tra i secondi a due elettroni. In modo generale, il numero di ioni di valenza  $k$  legato a un coulomb è uguale a  $\frac{1}{k}n$ . Ne consegue che i volumi occupati dalla quantità unitaria di ioni, ad una data temperatura e ad una data pressione, sono inversamente proporzionali alla valenza  $k$ . Al contrario, la quantità unitaria di ioni esercita, sotto un dato volume e temperatura, una pressione osmotica inversamente proporzionale alla valenza  $k$ .

Determiniamo ora il valore numerico della costante  $R$  della formula (33,a). Ponendo  $T = 273$  e  $v = 1 \text{ cm}^3$ , si ha  $R = p$ ;  $R$  è quindi numericamente uguale alla pressione (misurata in  $10^7 \text{ erg/cm}^2$ ) di un equivalente elettrochimico di ioni, contenuto a  $0^\circ$  in  $1 \text{ cm}^3$ . Se indichiamo questa pressione con  $p_0$  per gli ioni monovalenti, per  $H$ , per esempio, si ha, per uno ione di valenza  $k$ ,

$$R = \frac{p_0}{k} \quad (2.0.49)$$

Determiniamo  $p_0$ , per esempio per l'idrogeno. Sappiamo che 1 litro di idrogeno a  $0^\circ$  e a una pressione di un'atmosfera pesa 0,08955 *g*. Ne deduciamo, con un facile calcolo, che 2 grammi di idrogeno a  $0^\circ$  in  $1 \text{ cm}^3$  esercitano una pressione di 22420 atmosfere. Dalla legge di Avogadro risulta che tale è anche l'espressione di un grammo equivalente, cioè di uno ione-grammo di H, contenuto a  $0^\circ$  in un volume pari ad  $1 \text{ cm}^3$ . L'equivalente elettrochimico è 96540 volte più piccolo del grammo equivalente; quindi la pressione desiderata è

$$\begin{aligned} p_0 &= \frac{22420}{96540} \text{ atm} = \frac{22420 \times 1033,3}{96540} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = \frac{22420 \times 1033,3 \times 981}{96540} \frac{\text{dyne}}{\text{cm}^3} = \\ &= \frac{22420 \times 1033,3 \times 981}{96540 \cdot 10^7} \frac{10^7 \text{ dyne}}{\text{cm}^3} = 0,861 \cdot 10^{-4} \frac{10^7 \text{ dyne}}{\text{cm}^3} \end{aligned}$$

Si ha quindi

$$R = \frac{0,861 \cdot 10^{-4}}{k} \quad (2.0.50)$$

essendo  $k$  la valenza dello ione ( $k = 1$  per H ad esempio, ma  $k = 2$  per O).

Facciamo qualche altra osservazione sul movimento degli ioni. Abbiamo indicato con  $v$  e  $u$  le velocità assolute di ioni e cationi sotto l'azione dell'unità di forza. Tali sono pertanto le velocità degli ioni, in primo luogo quando l'unità di intensità del campo (volt-cm) vale nella soluzione e in secondo luogo sotto l'azione dell'unità di pressione osmotica ( $10^7$  dyne/cm<sup>2</sup>). Tuttavia, c'è una differenza importante tra questi due casi: nel primo, le velocità  $u$  e  $v$  hanno versi differenti, nel secondo lo stesso verso. Supponiamo che la quantità di elettricità  $\eta$  scorra attraverso l'elettrolita; ciò significa che attraverso una qualsiasi sezione trasversale  $S$  dell'elettrolita sono trasportate dagli anioni e dai cationi, in direzioni opposte, due quantità di elettricità di nomi opposti, la cui somma, se non si tiene conto del segno, è uguale a  $\eta$ . Queste due quantità di elettricità devono essere proporzionali alle velocità  $v$  e  $u$ ; pertanto, quando la quantità di elettricità  $\eta$ , scorre attraverso l'elettrolita, la sezione  $S$  è attraversata in versi opposti da

$$\begin{cases} \text{la quantità di elettricità positiva } \eta & \frac{u}{u+v} \\ \text{la quantità di elettricità negativa } \eta & \frac{v}{u+v} \end{cases} \quad (2.0.51)$$

Indicheremo infine come Nernst concepisce il meccanismo di diffusione negli elettroliti ionizzati. Supponiamo che la concentrazione della soluzione vari in una direzione qualsiasi  $x$ , ad esempio diminuisca dal basso verso l'alto. In questo caso anche la pressione osmotica  $p$  è una funzione di  $x$  e, sotto l'influenza di questa pressione, si verifica una diffusione, cioè uno spostamento dei due tipi di ioni nello stesso verso. Tuttavia, sotto l'azione di forze uguali, i due tipi di ioni acquistano velocità diverse e gli uni devono muoversi più velocemente degli altri. Supponiamo, ad esempio,  $u > v$ ; i cationi allora si muovono più velocemente degli anioni, e tende a prodursi una sorta di separazione degli ioni di nomi opposti. Ma una tale separazione deve creare anzitutto un campo elettrico nella soluzione, che tende a ritardare il movimento dei cationi e ad accelerare quello degli anioni. A causa dell'enormità delle cariche elettriche degli ioni, una preponderanza eccessivamente debole, sfuggente ad ogni misura, degli uni sugli altri fa sorgere una tale differenza di potenziale, e di conseguenza anche una tale intensità di campo, che è sufficiente pareggiare in grandezza le velocità degli ioni, già diretti nella stessa direzione. Avviene così la diffusione della sostanza disciolta, sotto l'azione combinata della pressione osmotica e del campo elettrico che si crea con la diffusione, i due tipi di ioni si spostano con la stessa velocità dai luoghi di maggiore concentrazione della soluzione a quelli di concentrazione inferiore.

La teoria di Nernst che ora discuteremo si basa sulle nozioni precedenti. Considereremo prima i casi particolari, poi il caso generale in cui questa teoria viene applicata al calcolo delle forze elettromotrici.

1. FORZA ELETTROMOTRICE DI CONTATTO TRA SOLUZIONI DIVERSE SOLO PER IL GRADO DI CONCENTRAZIONE. - Tra le soluzioni di una sostanza, che differiscono solo per il loro grado di concentrazione, sorge una certa forza elettromotrice  $E$ , cioè una differenza di potenziale  $V_1 - V_2$ ; per calcolare questa differenza Nernst indicò due metodi.

*Primo metodo.* Sia  $c$  la concentrazione della soluzione in una sezione trasversale  $S$ , la cui coordinata è  $x$ ;  $c$  è il numero di grammi equivalenti della sostanza disciolti in un centimetro cubo; Indichiamo con  $c_1$  e  $c_2$  le concentrazioni nei piani dove regnano i potenziali  $V_1$  e  $V_2$ , e supponiamo  $c_1 > c_2$ , prendendo l'asse delle  $x$  nella direzione delle concentrazioni decrescenti, cioè nella direzione di diffusione. Tracciamo due piani di coordinate  $x$  e  $x + dx$ ; essi limitano uno strato, in cui sono presenti  $cSdx$  grammi-molecole dell'elettrolita. Sul piano  $x$  agisce la pressione  $SP$ , sul piano  $x + dx$  la pressione  $S\left(P + \frac{dP}{dx}dx\right)$ ; ne deriva che la quantità di sostanza  $cSdx$  è soggetta a una forza uguale a  $-S\frac{dP}{dx}dx$ , essendo il secondo fattore negativo, e che su

un grammo-equivalente si esercita la forza  $-\frac{1}{c} \frac{dP}{dx}$ . Sotto l'azione di tale forza, la sezione  $S$  è attraversata nel tempo  $\tau$  dalle seguenti quantità

$$\begin{cases} \text{di cationi} & -cSu\tau \cdot \frac{1}{c} \frac{dP}{dx} = -S\tau \frac{dP}{dx} u \\ \text{di anioni} & -cSv\tau \cdot \frac{1}{c} \frac{dP}{dx} = -S\tau \frac{dP}{dx} v \end{cases} \quad (2.0.52)$$

A causa della diversità delle velocità, si genera un campo elettrico, la cui intensità è uguale a  $-\frac{dV}{dx}$ , dove  $V$  è il potenziale. Sotto l'azione di questa forza, la sezione  $S$  è attraversata nel tempo  $\tau$  dalle seguenti quantità

$$\begin{cases} \text{di cationi} & -cSu\tau \frac{dV}{dx} \\ \text{di anioni} & +cSv\tau \frac{dV}{dx} \end{cases} \quad (2.0.53)$$

Per l'effetto combinato della pressione osmotica e del campo elettrico, i due tipi di ioni attraversano la sezione  $S$  in quantità uguali  $M$ , di modo che si ha

$$M = -S\tau u \left( \frac{dP}{dx} + c \frac{dV}{dx} \right) = -S\tau v \left( \frac{dP}{dx} - c \frac{dV}{dx} \right) \quad (2.0.54)$$

Questa stessa grandezza determina la quantità di sostanza disciolta, diffusa nel tempo  $\tau$  attraverso la sezione  $S$ . La formula (35) dà

$$\frac{dV}{dx} = \frac{1}{c} \frac{v - u}{v + u} \frac{dP}{dx} \quad (2.0.55)$$

Se si introduce questo valore nella (35), si ha

$$M = -\frac{2uv}{u + v} S\tau \frac{dP}{dx} \quad (2.0.56)$$

Supponiamo che la soluzione sia sufficientemente diluita in modo che le leggi di Mariotte e Gay-Lussac siano applicabili a ciascun tipo di ione. Il volume occupato da un grammo equivalente è uguale a  $\frac{1}{c}$  e possiamo ora scrivere la formula (33,a) come segue

$$P = cRT \quad (2.0.57)$$

Se si introduce questo valore nella (35,a) e (35,b), si ha

$$\frac{dV}{dx} = -\frac{1}{c} \frac{u - v}{u + v} \frac{RT}{c} \frac{dc}{dx} \quad (2.0.58)$$

$$M = -\frac{2uv}{u + v} RST\tau \frac{dc}{dx} \quad (2.0.59)$$

Considerando i fenomeni di diffusione, siamo giunti a una formula (Tomo I e III) che, tenendo conto delle nostre attuali notazioni, si scrive

$$M = -KS\tau \frac{dc}{dx} \quad (2.0.60)$$

dove il valore numerico del fattore  $R$  è dato nella (34);  $u$  e  $v$  sono le velocità in centimetri al secondo, per una caduta di potenziale di un volt-centimetro o per una pressione di 10 megadyne per centimetro quadrato. L'equazione principale (36) dà l'espressione della forza elettromotrice cercata tra le sezioni in cui le concentrazioni sono  $c_1$  e  $c_2$  ( $c_1 > c_2$ ):

$$E = V_1 - V_2 = -\frac{u - v}{u + v} RT \ln \frac{c_1}{c_2} \text{ volt} \quad (2.0.61)$$

Il valore numerico del fattore  $R$  è, come precedentemente menzionato, dato dalla (34). Abbiamo supposto che  $u > v$  e ottenuto per  $E$  un valore negativo, come dovrebbe essere, con il potenziale più elevato corrispondente al luogo dove la concentrazione è minore. Se si introduce, al posto dei logaritmi naturali  $\ln$ , i logaritmi ordinari  $\log$ , è necessario dividere il numero  $R$  per 0,4343 e si ha allora

$$E = V_1 - V_2 = -0,0002 \frac{u-v}{u+v} \frac{1}{k} T \ln \frac{c_1}{c_2} \text{ volt} \quad (2.0.62)$$

dove  $k$  è la valenza degli ioni.

Se si pone  $k = 1$  e  $T = 273 + 18$  (temperatura ordinaria), si ha

$$E = V_1 - V_2 = -0,0578 \frac{u-v}{u+v} \frac{1}{k} \log \frac{c_1}{c_2} \text{ volt} \quad (2.0.63)$$

*Secondo metodo.* - Abbiamo mostrato che se l'unità di quantità di gas alla temperatura  $T$  si dilata, passando dalla pressione  $P_1$  alla pressione  $P_2$ , il gas compie un lavoro

$$r = RT \ln \frac{P_1}{P_2}$$

dove la costante  $R$  si riferisce all'unità di quantità di gas scelta. Supponiamo che  $\eta$  i coulomb passino dalla sezione di concentrazione  $c_1$  alla sezione di concentrazione  $c_2$  e che si abbia  $c_1 > c_2$ ;  $P_1$  e  $P_2$  sono le pressioni osmotiche. Il lavoro delle forze elettriche è  $r = (V_1 - V_2) \eta$ ; ma come risultato di questo lavoro,  $\eta \frac{u}{u+v}$  unità di quantità di cationi passano dalla pressione  $P_1$  alla pressione  $P_2$  e  $\eta \frac{v}{u+v}$  unità di quantità di anioni dalla pressione  $P_2$  alla pressione  $P_1$ , poiché abbiamo preso, per unità di quantità di ioni, quella che è legata all'unità di quantità di elettricità. Il passaggio degli anioni dalla pressione  $P_2$  alla pressione  $P_1$  è accompagnato da una dilatazione, cioè da un lavoro compiuto dagli ioni stessi uguale a

$$\eta \frac{v}{u+v} RT \ln \frac{P_1}{P_2}$$

di modo che il lavoro totale compiuto nella soluzione è uguale a

$$\eta (V_1 - V_2) + \eta \frac{u}{u+v} RT \ln \frac{P_1}{P_2}$$

Esso è impiegato per comprimere i cationi, che passano dalla pressione  $P_2$  alla pressione  $P_1$ ; si ha quindi

$$\eta (V_1 - V_2) + \eta \frac{u}{u+v} RT \ln \frac{P_1}{P_2} = \eta \frac{v}{u+v} RT \ln \frac{P_1}{P_2}$$

Se si tiene conto che  $P_1 : P_2 = c_1 : c_2$  se ne deduce

$$E = V_1 - V_2 = -\frac{u-v}{u+v} RT \ln \frac{c_1}{c_2} \text{ volt}$$

cioè la formula (39). Questa formula mostra che  $E$  è proporzionale a  $T$ . Si noti ancora che l'equazione (25) di Helmholtz porta allo stesso risultato, perché si ha  $q = 0$ , per cui rimane  $E = T \frac{dE}{dT}$ , da cui risulta che  $E = CT$ , essendo  $C$  una costante, cioè un fattore indipendente dalla temperatura.

Nernst (1892), Planck e Loven (1896) hanno esteso la teoria che abbiamo appena spiegato al contatto di elettroliti diversi che non reagiscono chimicamente tra loro. Couette aveva proposto un'altra teoria; ma, quando egli stesso misurò (1900) la differenza di potenziale tra due soluzioni di acido solforico diversamente concentrate, si manifestò un completo accordo dei risultati delle misure, non con la sua teoria, come aveva sperato, ma con la teoria di Nernst.

II. FORZA ELETTRICITRICE TRA UN ELETTRODO ED UNA SOLUZIONE DI UNO DEI SUOI SALI. - Ci limitiamo al caso di un elettrodo metallico immerso in una soluzione di uno dei sali della stessa miscela (Cu e  $CuSO^4$ , Ag e  $AgAzO^3$ , ecc.). Abbiamo detto sopra che un tale elettrodo era chiamato elettrodo reversibile. Si tratta di trovare la grandezza  $E = V_m - V_s$ , dove  $V_m$  designa il potenziale dell'elettrodo,  $V_s$  quello della soluzione. Alcuni studiosi, Pellat, per esempio, pensano che si ha  $E = 0$ . Nernst ha determinato  $E$  nel modo seguente. Sia  $p$  la pressione osmotica,  $c$  la concentrazione della soluzione, che contiene cationi. Il passaggio del metallo nella soluzione consiste nel fatto che gli ioni positivi di questo metallo si separano da esso, cosicché il metallo si elettrizza negativamente. Si ha  $V_m < V_s$ . Quando l'unità di elettricità passa dall'elettrodo alla soluzione, le forze elettriche agiscono compiono un lavoro  $E = V_m - V_s$  negativo. Una quantità di cationi legata a questa elettricità passa contemporaneamente dal metallo nella soluzione, cioè prende la pressione  $p$ . Se si aumenta la concentrazione della soluzione fino alla pressione  $p + dp$ ,  $E$  diventa  $E + dE$ . Supponiamo che i cationi passati nella soluzione occupino alla pressione  $p$  il volume  $v$  e alla pressione  $p + dp$  il volume  $v + dv$ , essendo  $dv$  una quantità negativa. Il lavoro compiuto dai cationi è, nel secondo caso, maggiore della quantità  $p dv$ . Quindi dobbiamo avere l'equazione

$$dE + p dv = 0$$

o

$$dE = d(V_m - V_s) = -p dv = RT \frac{dp}{p}$$

ciò che dà

$$E = V_m - V_s = RT \ln p + C$$

Ponendo  $C = -RT \ln P$ , dove  $P$  è una nuova costante, si ha

$$V_m - V_s = RT \ln \frac{p}{P}$$

o

$$V_s - V_m = RT \ln \frac{p}{P} \text{ volt} \quad (2.0.64)$$

Come abbiamo detto,  $V_s$  è il potenziale della soluzione,  $V_m$  quello del metallo; il valore numerico di  $R$  è dato dalla (34). Per Ag si ha  $k = 1$ ; per lo Zn e il Cu, è necessario porre  $k = 2$ .

Nernst ha determinato il significato fisico della grandezza  $P$  nel modo seguente. L'insieme degli ioni, nel caso presente i cationi, che si separano dall'elettrodo possiede una certa tensione di dissoluzione, del tutto analoga alla pressione osmotica. Se si ha  $P > p$ , si verifica, quando si immerge il metallo nella soluzione, un passaggio di cationi in questa soluzione, che acquista così un eccesso di elettricità positiva. I cationi si distribuiscono sulla superficie dell'elettrodo, dove si raccoglie nuovamente la carica negativa che rimane nell'elettrodo. Si produce così un doppio strato elettrico, che corrisponde ad una determinata differenza di potenziale, vedi (47,c), e che dà luogo a una forza diretta dalla soluzione verso il metallo. L'equilibrio si verifica quando questa forza è uguale alla differenza di pressione  $P - p$ . È sufficiente una separazione molto debole (non misurabile) dei cationi dal catodo perché si formi un doppio strato. Per  $P = p$ , si ha  $V_s - V_m = 0$ . Se  $P < p$ , i cationi si precipitano dalla soluzione sull'elettrodo, fino a quando il doppio strato, che è positivo dalla parte dell'elettrodo, raggiunge l'equilibrio alla differenza di pressione  $p - P$ . Se si indica con  $C$  la concentrazione che corrisponderebbe alla pressione osmotica  $P$ , si può scrivere l'equazione (42) nella forma seguente

$$V_s - V_m = RT \ln \frac{C}{c} \quad (2.0.65)$$

Si deve considerare ancora aperta la questione di sapere se la grandezza  $P$  abbia davvero il significato fisico attribuitole da Nernst. Ci limiteremo alla seguente osservazione molto importante.



Le misure dirette della quantità  $V_s - V_m$  danno valori numerici per la grandezza  $P$ , alcuni di quantità inammissibile, altri decisamente troppo piccoli, per diversi metalli. Ma Leffeldt (1900) ha mostrato che quando si ammette che le soluzioni seguono non la legge di Mariotti, ma la legge di Van der Waals, si ottiene, per esempio per lo zinco, invece del numero  $10^{19} atm$ , inverosimilmente grande, il numero  $20000 atm$ , che è un valore perfettamente possibile.

III. - FORZA ELETTROMOTRICE DI UN ELEMENTO DI CONCENTRAZIONE. - Si consideri un elemento formato da due metalli M identici, immersi in due soluzioni dello stesso sale del metallo M, le cui concentrazioni  $c_1, c_2$  sono diverse. Sia  $c_1 > c_2$ ; le soluzioni possono essere separate l'una dall'altra da un setto poroso. Designando i potenziali con  $V_1, V_1', V_2', V_2$ , si ha il seguente schema

$$\begin{array}{cccc} M & \text{soluzione } c_1 & \text{soluzione } c_2 & M \\ V_1 & V_1' & V_2' & V_2 \end{array}$$

Le formule (39) e (43) danno

$$\begin{aligned} V_1' - V_2' &= \frac{u-v}{u+v} RT \ln \frac{c_1}{c_2} \\ V_1 - V_1' &= -RT \ln \frac{C}{c_1} \\ V_2' - V_2 &= RT \ln \frac{C}{c_2} \end{aligned}$$

Se queste si sommano, si ottiene, per la forza elettromotrice di un elemento di concentrazione

$$V_1 - V_2 = \frac{2v}{u+v} RT \ln \frac{c_1}{c_2} \text{ volt} \quad (2.0.66)$$

essendo data la costante  $R$  dalla (34). Per la forza elettromotrice di ciò che si chiama un elemento di concentrazione del secondo tipo, dove la sostanza dei due elettrodi emette gli anioni della soluzione ( $Hg^2Cl^2$  disciolto in HCl, per esempio), si ottiene una formula che differisce dalla (44) solo per la sostituzione di  $2u$  con  $2v$  al numeratore del primo fattore.

È significativo che Helmholtz (1877) abbia stabilito, molto prima di Nernst, un'espressione della forza elettromotrice per un elemento di concentrazione, basandosi sul fatto che la pressione del vapore non è la stessa sopra soluzioni di diversa concentrazione, e applicando i principi della termodinamica ad un certo ciclo a cui tale elemento può essere sottoposto. Nernst ha dimostrato che la formula (44) può essere dedotta dalla formula di Helmholtz (assumendo soluzioni molto diluite). Nel Capitolo V, § 10 (Campo magnetico costante), esporremo la teoria che Helmholtz ha dato dell'elemento di concentrazione.

Bruhnes e Guyot (1908) hanno mostrato che è possibile stabilire le formule di Nernst, senza introdurre la nozione di sforzo di dissoluzione.

Ci troviamo in presenza di un caso del tutto distinto dell'elemento di concentrazione, quando, in una soluzione ovunque omogenea di un sale del metallo M, ci sono due amalgami della stessa miscela M, differenti nel loro grado di concentrazione. La forza elettromotrice è quindi ovviamente

$$V_1 - V_2 = RT \ln \frac{P}{p} - RT \ln \frac{P_1}{p} = RT \ln \frac{P}{P_1} \text{ volt} \quad (2.0.67)$$

Qui  $P$  e  $P_1$  indicano le tensioni di dissoluzione del metallo M nei suoi due amalgami,  $p$  la pressione osmotica dei cationi nell'elettrolita. Se si ammette che le tensioni  $P$  e  $P_1$  sono proporzionali alle concentrazioni  $C$  e  $C_1$  del metallo M nei due amalgami, si ottiene l'espressione

$$V_1 - V_2 = RT \ln \frac{C}{C_1} \quad (2.0.68)$$

IV. CASO DI DUE METALLI IMMERSI IN SOLUZIONI DEI LORO SALI (TIPO DELL'ELEMENTO DANIELL). - Trascurando la forza elettromotrice di contatto delle due soluzioni, la formula (42) dà

$$V_2 - V_1 = R_1 T \ln \frac{P_1}{p_1} - R_2 T \ln \frac{P_2}{p_2} \quad (2.0.69)$$

dove  $P_1$  e  $P_2$  sono le tensioni di dissoluzione dei due metalli,  $p_1$  e  $p_2$  le pressioni osmotiche dei cationi nelle due soluzioni,  $R_1$  e  $R_2$  i valori della costante  $R$ , che possono differire tra loro per il fattore  $k$ .

La teoria osmotica di NERNST è applicabile anche a molte altre questioni, ad esempio al calcolo della forza elettromotrice degli elementi gassosi, di cui parleremo più avanti, ecc. Ci limiteremo, tuttavia, agli esempi precedenti; dovremo inoltre, nel paragrafo seguente, indicare ancora un altro caso in cui questa teoria molto importante e ingegnosa può essere impiegata.

La nostra esposizione sarebbe incompleta, se non menzionassimo che molti fisici autorevoli rifiutano di ammettere la teoria di Nernst; a questi scienziati appartengono Bancroft, Pellat, Carhart, Guyoy e altri. Bancroft, ad esempio, ha rilevato che la formula di Nernst per la forza elettromotrice dell'elemento di concentrazione non è identica a quella di Helmholtz solo nel caso di soluzioni estremamente diluite, mentre quest'ultima vale per tutte le concentrazioni. Carhart (1908) ha mostrato che la formula (44) di Nernst è esatta solo se si può trascurare il calore di diluizione (Volume III) della soluzione, cosa che non è possibile in tutti i casi. Infine Pellat (1908), misurando la differenza di potenziale tra soluzioni di mercurio e cloruro di mercurio a diverse concentrazioni, ha trovato risultati che contraddicono la teoria di Nernst. Héséhoux ha cercato di spiegare questi risultati, basandosi sulla sua teoria dell'elettricità di contatto.

## 7. Nozioni preliminari sulla polarizzazione elettrolitica

Questo fenomeno, di cui ora occorre spendere qualche parola, viene solitamente chiamato semplicemente polarizzazione; abbiamo adottato una denominazione più completa, per indicare che non ha nulla in comune con la polarizzazione delle radiazioni studiate nel Volume II.

Il fenomeno della polarizzazione elettrolitica, su cui torneremo più dettagliatamente in seguito, consiste in quanto segue. Si consideri un elemento aperto, per il quale la differenza di potenziale ai poli o la forza elettromotrice è uguale a  $E = V_1 - V_2$ . Si può avere in particolare  $E = 0$ , quando, ad esempio, due elettrodi identici sono immersi nello stesso elettrolita. Quando una certa quantità di elettricità passa attraverso l'elemento perturbando così l'equilibrio esistente, si manifesta nell'elemento una nuova forza elettromotrice  $e$ , che si oppone al movimento iniziale dell'elettricità, in altre parole, la differenza di potenziale  $V_1 - V_2$  subisce una certa variazione  $V'_1 - V'_2 = e$ , che tende a produrre all'interno dell'elemento un movimento di elettricità avente verso contrario a quello del movimento esistente. Questo fenomeno è chiamato polarizzazione e la grandezza  $e$  la forza elettromotrice di polarizzazione.

Senza toccare la questione del meccanismo con cui si produce la grandezza  $e$ , possiamo dire che la comparsa di questa quantità è una conseguenza necessaria del principio di Le Chatelier-Braun. Secondo questo principio, *ogni azione su un sistema che ne perturba l'equilibrio provoca una reazione che tende a diminuire quell'azione*. Il passaggio dell'elettricità attraverso l'elemento di pila, cioè lo spostamento all'interno dell'elettrolita degli ioni in due direzioni opposte, rappresenta tale rottura dell'equilibrio. La forza elettromotrice è la reazione che tende a diminuire lo spostamento degli ioni, cioè a dare a questo movimento un verso contrario a quello iniziale.

A seconda della composizione dell'elemento e del verso della corrente elettrica sono possibili tutta una serie di casi diversi; i due seguenti sono di particolare interesse.

1. DUE ELETTRODI DIFFERENTI, ENTRAMBI REVERSIBILI; per esempio, due metalli in soluzioni dei loro sali. In questo caso una corrente elettrica non turba affatto l'equilibrio, poiché la dissoluzione di uno dei metalli e il deposito sull'altro elettrodo metallico di particelle dello stesso metallo produce solo una certa variazione nella concentrazione della soluzione. Nel caso ideale di perfetta reversibilità, la polarizzazione è nulla, in altre parole  $e = 0$ .

2. DUE ELETTRODI IDENTICI, IN UN LIQUIDO. - In questo caso, la forza elettromotrice iniziale  $E$  è nulla. Il passaggio di una corrente elettrica, cioè lo spostamento degli ioni, è accompagnato

dalla comparsa di una differenza di potenziale  $V'_1 - V'_2 = e$ , che tende a spostare gli ioni in verso contrario. Questo è il classico esempio di due elettrodi di platino in una soluzione di acido solforico; è anche il caso di due lamine di piombo, ricoperte di minio o litargirio e immerse in una soluzione di acido solforico (ordinario accumulatore). La teoria della polarizzazione elettrolitica può servire da esempio caratteristico nelle controversie che stanno suscitando varie dottrine scientifiche. Quando si confrontano le teorie di Helmholtz, di Warburg e di Nernst, soprattutto nella loro applicazione a casi particolari, è facile riconoscere che esse poggiano su principi e concezioni che hanno poco in comune. Va detto, inoltre, che il meccanismo che produce la forza elettromotrice di polarizzazione varia molto a seconda dei casi. Considerando il lato puramente esteriore del fenomeno, si può dire che, per effetto della comparsa di cationi e anioni sulle superfici degli elettrodi, si producono modificazioni equivalenti alla sostituzione di questi elettrodi con altri, cosicché invece della iniziale forza elettromotrice  $E$ , se ne ottiene un'altra, che differisce da  $E$  per la quantità  $e$ . Ciò è particolarmente evidente nel secondo dei due casi precedenti, dove si hanno elettrodi identici, in modo che  $E = 0$ ; la comparsa degli ioni rende gli elettrodi diversi, e quindi le due forze elettromotrici alle superfici di contatto degli elettrodi con l'elettrolita cessano di essere uguali in intensità e di segno opposto.

Le modificazioni prodotte dalla comparsa degli ioni possono essere molto diverse. Nell'esempio precedente dell'accumulatore al piombo, appaiono i cationi  $H^2$  e gli anioni  $SO^4$  sull'ossido di piombo, cosicché il catodo si disossida, mentre l'anodo si trasforma in perossido di piombo o sulla sua superficie si forma  $PbSO^4$ . In altri casi gli ioni si fermano alla superficie dell'elettrodo, senza cedere le loro cariche, e su questa superficie si forma allora un doppio strato elettrico, cioè compare un salto di potenziale. A volte un doppio strato già esistente viene modificato dallo spostamento degli ioni.

Il fatto che la variazione alle superfici degli elettrodi non possa superare un certo limite, ciò che corrisponde a una massima polarizzazione possibile, è molto importante. Se si tratta di un doppio strato elettrico, questo limite viene raggiunto nel momento in cui altri ioni avanzanti cominciano a cedere le loro cariche agli elettrodi, cosicché il momento del doppio strato cessa di crescere, e di conseguenza anche il salto di potenziale che corrisponde a questo doppio strato.

Sarebbe prematuro sviluppare qui più compiutamente la teoria in questi diversi casi; ci limiteremo quindi ad alcune sommarie indicazioni.

Supponiamo che l'elemento sia costituito da due elettrodi di mercurio, tra i quali vi sia una soluzione di acido solforico, e di conseguenza anche ioni di mercurio o una soluzione molto diluita e completamente dissociata di solfato di mercurio. Nernst considera la polarizzazione di un tale elemento come il risultato dello spostamento degli ioni mercurio verso il catodo, cosicché la concentrazione della soluzione cessa di essere dappertutto la stessa e che di conseguenza si genera una forza elettromotrice di elemento di concentrazione. Nernst ha considerato in modo analogo anche il caso di due elettrodi di platino in una soluzione di acido solforico, supponendo che tali elettrodi contengano sulla loro superficie ossigeno, la cui concentrazione varia, quando su un elettrodo compare ossigeno, sull'altro idrogeno. Le teorie di Helmholtz e Warburg differiscono essenzialmente da tale concezione. La formazione dei doppi strati sopra menzionati gioca, nella teoria della polarizzazione proposta da Helmholtz, il ruolo principale. Torneremo ancora sui fenomeni di polarizzazione, nel capitolo che sarà specialmente dedicato all'elettrolisi.

## 8. Elettrometro capillare ed elettrodi a goccia

Prima di passare allo studio sperimentale dell'elettroizzazione a contatto di diversi corpi, dobbiamo far conoscere uno dei metodi impiegati in questo studio; sebbene molti fisici abbiano riposto grandi speranze su questo metodo, la questione di sapere se possa essere accettato e se sia applicabile in questa ricerca ha dato luogo a discussioni molto lunghe e vivaci.

Si tratta dei cosiddetti fenomeni elettrocapillari e della possibilità di applicarli alla misura delle forze elettromotrici, mediante l'elettrometro capillare immaginato da Lippmann e il metodo dell'elettrodo a goccia, perfezionato in particolare da Ostwald e Paschen.

Separiamo anzitutto dal fenomeno effettivamente osservato i tentativi che sono stati fatti per darne una spiegazione teorica.

Consideriamo il mercurio e un elettrolita, ad esempio una soluzione di acido solforico, che vengono messi in contatto. Tra il mercurio e l'elettrolita si stabilisce una differenza di potenziale che indicheremo con  $V_0$ . La superficie del mercurio ha una certa tensione superficiale  $\alpha_0$ . Supponiamo che, con un qualsiasi processo, la differenza di potenziale tra il mercurio e l'elettrolita venga modificata e sia  $V$  tale variazione. Si trova allora che la tensione superficiale del mercurio assume un nuovo valore  $\alpha$ , cioè varia di una quantità  $\alpha - \alpha_0$  che è una funzione di  $V$ , in modo che si può porre

$$\alpha - \alpha_0 = f(V) \quad (2.0.70)$$

Per determinare come  $\alpha$  dipende da  $V$ , si può usare il semplicissimo dispositivo di Lippmann, modificato da Quincke. Questo strumento (fig. 83) è costituito da due tubi comunicanti, uno largo, l'altro capillare, contenenti mercurio. Il tubo capillare contiene al di sopra del mercurio una soluzione di acido solforico; la sua estremità è piegata e immersa in una soluzione identica contenuta in un vaso di vetro; sul fondo di questo si trova del mercurio. Due fili permettono di stabilire una determinata differenza di potenziale  $V$  tra il mercurio nel tubo capillare e quello nel vaso. A tale scopo si possono ad esempio unire i due fili ai poli di un elemento di batteria.

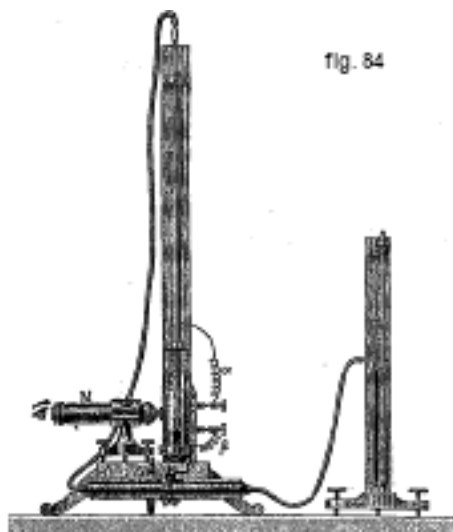


La comparsa della nuova differenza di potenziale è accompagnata da uno spostamento di quantità equivalenti di ioni H e O verso le due superfici di mercurio nel tubo capillare e nel recipiente di vetro. Questi ioni sono distribuiti da un lato sulla superficie molto piccola del mercurio nel tubo capillare, dall'altro sulla superficie relativamente molto grande del mercurio nel recipiente di vetro. Qualunque ruolo si attribuisca a questi ioni, sia che si ammetta che essi determinino un doppio strato elettrico o che la loro presenza modifichi la pressione osmotica, in tutti i casi il salto di il potenziale che producono alla superficie grande deve essere molto piccolo rispetto a quello che avviene alla superficie del mercurio nel tubo capillare. Possiamo quindi ammettere che tutta la differenza di potenziale  $V$ , che si è realizzata, si produce esclusivamente sulla superficie del mercurio che si trova nel tubo capillare.

Supporremo che il mercurio nel tubo capillare funga da catodo, in modo che sulla sua superficie si produca una polarizzazione da parte dell'idrogeno. Si trova che il livello di mercurio scende nel tubo capillare, quando  $V$  aumenta; ne consegue che la tensione superficiale  $\alpha$  del mercurio

aumenta, contemporaneamente alla differenza di potenziale  $V$ . Insufflando aria, attraverso un tubo di gomma munito di rubinetto, nel ramo largo dei tubi comunicanti, si alza il livello del mercurio nel tubo capillare e questo livello può essere riportato alla posizione iniziale. L'entità della pressione dell'aria soffiata, necessaria per arrivare a questo risultato, può essere utilizzata come misura di  $\alpha - \alpha_0$ .

Sullo stesso principio si basa l'elettrometro a capillare Lippmann, che è rappresentato in figura 84. Si tratta di uno strumento di misura di grande sensibilità e molto comodo da usare; permette di misurare i decimillesimi di volt e le sue indicazioni sono sostanzialmente istantanee. L'indice di mercurio che ne costituisce la parte essenziale non oscilla mai, si ferma immediatamente nella posizione di equilibrio che corrisponde alla differenza di potenziale che si vuole misurare. L'elettrometro a capillare Lippmann, la cui costruzione risale al 1873, è costituito essenzialmente da un sottilissimo tubo A contenente una colonna di mercurio a contatto con acqua acidulata. L'estremità inferiore del tubo verticale A si restringe in un tubo capillare molto rastremato, la cui sezione diminuisce verso questa estremità che si trova nel recipiente di vetro B. Il tubo A contiene il mercurio, che scende nel tubo capillare fino a una sezione tale che la pressione normale alla superficie sia abbastanza forte da bilanciare tutto il peso della colonna di mercurio; impiegando un tubo di  $1/100$  di millimetro di diametro, come si fa di solito, la pressione, con la differenza di potenziale di un elemento Daniell, raggiunge una mezza atmosfera, e siccome invece l'indice mobile ha un peso di pochi millesimi di milligrammo, la sua inerzia è quasi nulla; da qui la rapidità delle indicazioni. Il resto del tubo capillare, così come il recipiente di vetro B, sul fondo del quale si trova il mercurio, contengono una soluzione di acido solforico. Il mercurio in A e B comunica con delle viti di pressione  $\alpha$  e  $\beta$ , da cui partono dei fili che portano a una sorgente qualsiasi di differenza di potenziale. Il microscopio M serve per osservare il menisco del mercurio.



Il serbatoio in gomma T pieno d'aria, comunica con l'estremità superiore del tubo A e con il manometro H. Si può, girando una vite, comprimere il serbatoio utilizzando le due tavolette tra le quali si trova. Quando si collega  $\alpha$  con il polo negativo,  $\beta$  con il polo positivo della sorgente della differenza di potenziale, il livello di mercurio sale nel tubo capillare in un punto più ampio dove, nonostante la minore convessità del menisco, la pressione normale riprende il suo valore iniziale. Comprimendo il serbatoio T, il mercurio nel tubo capillare viene riportato alla sua posizione originaria: il manometro H indica quindi di quanto è aumentata la pressione normale, e di conseguenza anche la tensione superficiale. Lippmann (1874) ha mostrato che se l'elettricità modifica le forze capillari, queste possono viceversa essere utilizzate per produrre elettricità. Date due masse di mercurio puro poste sotto dell'acqua, se una di esse viene deformata

meccanicamente, diventa negativa o positiva rispetto all'altra, a seconda che la sua superficie sia aumentata o diminuita.

Unendo le due masse con un filo metallico, si scopre che questo filo è percorso da una corrente. La quantità di elettricità liberata è proporzionale alla variazione della superficie del mercurio. Quanto alla forza elettromotrice creata, può raggiungere  $\frac{9}{10}$  di un Daniell. Il fenomeno è notevole, facile da evidenziare con strumenti anche grossolani, e c'è da stupirsi che non sia stato notato prima.

Volendo produrre in questo modo una corrente elettrica di durata indefinita, si può utilizzare un piccolo dispositivo a imbuto disposto nel modo seguente: un imbuto di vetro contenente mercurio è munito di un sottile beccuccio che si tuffa nell'acqua; il mercurio che scorre cade sul fondo del vaso, dove c'è già uno strato di mercurio. Se si riunisce quest'ultimo mercurio con quello nell'imbuto attraverso un circuito metallico di cui fa parte un galvanometro, si trova che il galvanometro è deviato e che la deviazione dura quanto il flusso, cioè indefinitamente, a condizione, naturalmente, che il mercurio caduto sul fondo del vaso venga ripreso con una pipetta e rimesso nell'imbuto. L'esperimento riesce con mercurio purissimo e con acqua distillata e bollita, o anche bollente, e quindi priva di aria. La corrente, infatti, non è di origine chimica, ma meccanica: è il lavoro svolto sollevando il mercurio dal fondo del vaso fino all'imbuto, che si trasforma all'infinito in energia elettrica per mezzo delle forze capillari che tendono ad opporsi all'uscita del mercurio.

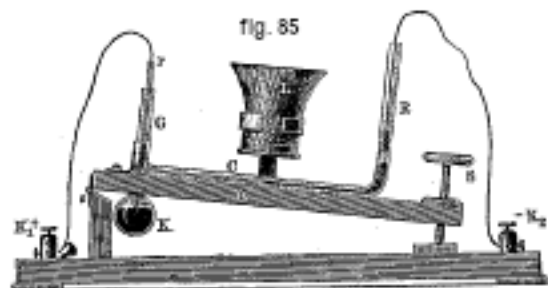
Per rendere ancora più visibile agli occhi la correlazione tra le due serie di fenomeni sopra indicati, Lippmann ha costruito un motore capillare che può trasformare l'elettricità in lavoro o elettricità in lavoro a piacimento. Due bicchieri pieni di mercurio vengono posti in un recipiente pieno di acqua acidulata; in ogni bicchiere si immerge un fascio di tubi capillari che la depressione capillare tende a sollevare. Le due spinte sono uguali e si bilanciano alle estremità di una sorta di bilanciere. Ma quando si fa passare una corrente, il bilanciere si inclina e trasmette il suo movimento a un volano che comincia a girare. Il dispositivo stesso mette in moto un distributore di elettricità, grazie al quale il movimento continua all'infinito. È quindi sufficiente mettere in comunicazione i poli di un elemento Daniell per vedere il volano iniziare a girare, o in un senso o nell'altro, a seconda della direzione della corrente. Questo stesso dispositivo può invece generare una corrente elettrica. Basta rimuovere la pila, mettere al suo posto un galvanometro e girare a mano il volano per vedere l'ago del galvanometro deviare indefinitamente, e la direzione della deviazione dell'ago cambiare con il verso della rotazione.

Si potrebbe basare sullo stesso principio dei motori elettrocapillari che presentano le forme più diverse. La teoria di questi apparecchi mostra che essi godono della singolare proprietà che il lavoro fornito dipende non dal loro volume, ma dall'area della superficie di contatto tra i due liquidi. Si può quindi assegnare ai loro organi dimensioni tali che la macchina elettrocapillare sia più potente di una macchina a vapore di pari volume; è sufficiente suddividere il mercurio in porzioni sufficientemente numerose perché la sua superficie totale raggiunga la dimensione necessaria.

Numerosi fisici, in particolare Root, Hansen e Bouty hanno applicato l'elettrometro capillare di Lippmann a ricerche che non avrebbero potuto essere intraprese senza il suo aiuto. Anche i fisiologi ne hanno fatto uso. Marey l'ha usato per cogliere e fissare, con l'ausilio della fotografia, le rapide fluttuazioni subite o dalla corrente della torpedine, o dalla corrente fornita dal cuore o dai muscoli durante la loro contrazione. Loven, Christiani e Fleischl hanno successivamente immaginato vari modelli di elettrometri capillari, alcuni verticali, altri orizzontali, di costruzione semplificata, ma di sufficiente precisione per la ricerca in fisiologia.

Ostwald ha costruito uno strumento relativamente semplice, la cui disposizione è mostrata in figura 85. La lente L serve ad osservare l'estremità di una colonna di mercurio nel tubo capillare C, che contiene, oltre alla sferetta K, una soluzione di acido solforico. Il filo isolato  $r$  unisce la vite di pressione  $K_1$  con il mercurio di K. La sensibilità dello strumento diminuisce

all'aumentare dell'inclinazione del tubetto C, sotto il quale vi è una scala. Diverse varianti di questo dispositivo sono state costruite da Berget, Chervet, Claverie, ecc. S. W. Smith (1903) ha costruito un elettrometro portatile.



Abbiamo detto che ad ogni valore di  $V$  corrisponde una posizione di equilibrio esattamente invariabile del mercurio in un bicchiere sottile, e che da questo esperimento e da altri analoghi si conclude che  $\alpha - \alpha_0$  è una funzione di  $V$ . Lippmann ha verificato questa deduzione con una precisione che a volte raggiunge  $1/30000$  e ha costruito la curva che rappresenta i valori di  $\alpha - \alpha_0$  in funzione di  $V$ . Da notare che in precedenza, quando non si teneva conto delle condizioni elettriche dell'esperimento, le misure delle costanti capillari erano fatte molto male, perché queste costanti subivano variazioni apparentemente irregolari, che si attribuivano ad impurità accidentali o a lenti cambiamenti molecolari, ma che in realtà sono di origine elettrica. Non appena si ha cura, mediante opportune comunicazioni, di rendere costanti le differenze di potenziale tra i due liquidi, questi apparenti perturbazioni scompaiono e la misura delle costanti capillari comporta una grande precisione.

Lo studio dettagliato che Lippmann fece per primo dei fenomeni di elettrocapillarità diede i seguenti risultati. *Quando la differenza di potenziale  $V$  (aggiunta a quella già esistente  $V_0$ ) cresce a poco a poco a partire da zero, l'aumento di tensione  $\alpha - \alpha_0$  cresce prima rapidamente, poi più lentamente e, per  $V = 0,9 D$  (essendo  $D$  la forza elettromotrice dell'elemento Daniell), cioè per  $V$  uguale a circa 1 volt, raggiunge un massimo, per cui  $\alpha_m = 1,47\alpha_0$ ; se  $V$  continua ad aumentare, la tensione superficiale diminuisce e, per  $V = 2D$ , il valore di  $\alpha$  differisce di più da  $\alpha_0$ .* È facile determinare come la quantità  $\alpha - \alpha_0$  dipenda da  $V$ , prendendo del mercurio puro. Ne consegue che l'elettrometro capillare può essere utilizzato per effettuare misure molto precise delle forze di elettromotrici, purché queste rimangano inferiori a un volt.

Quando una grossa goccia di mercurio è in equilibrio sotto acqua pura, basta aggiungere una piccola quantità di un metallo come lo zinco per vederla contrarsi fortemente. H. Davy, che conosceva questo esperimento, ammirava l'energia con cui una traccia di un metallo solubile scuoteva, in queste condizioni, diverse libbre di mercurio. I movimenti energetici si ottengono anche aggiungendo all'acqua pura acido cloridrico, acido cromico, ecc. Qualsiasi cambiamento nella composizione di uno dei liquidi cambia la forma della goccia alterando il valore delle sue costanti capillari. Si potrebbe credere che il cambiamento della composizione chimica dei due liquidi eserciti sulle costanti capillari un'azione che viene a sovrapporsi a quella che può esercitare l'elettricità. Non è così.

Siano, infatti, due sottili tubi uguali, pieni di acqua pura, e comunicanti con lo stesso serbatoio di mercurio; la depressione capillare, e di conseguenza il livello del mercurio, sono uguali nei due tubi. Se aggiungiamo acido cloridrico da una parte, acido cromico dall'altra, queste sostanze producono subito il loro effetto: il livello scende da una parte, sale dall'altra. Ma basta mettere in comunicazione elettrica tra loro le due masse acquose per mezzo di un filo bagnato perché le due colonne di mercurio ritornino allo stesso livello; se il filo bagnato viene rimosso, il dislivello ricompare. Questo perché le sostanze aggiunte agiscono solo modificando le forze elettromotrici e lo stato elettrico del sistema; riducendo, mediante opportune comunicazioni elettriche, le

differenze di potenziale delle due parti a parità, la composizione chimica diventa indifferente. Con questo metodo e con altri più precisi, Lippmann si è assicurato che questo fatto è generale: *la tensione superficiale è funzione solo della differenza di potenziale tra i due liquidi a contatto; non dipende dalla loro composizione chimica*. Quando la concentrazione della soluzione di acido solforico nell'elettrolita capillare viene modificata, o quando questo elettrolita viene sostituito da altri, si trova che *il valore massimo  $\alpha_m$  della tensione superficiale è indipendente dall'elettrolita; ma il valore  $V$ , per il quale  $\alpha = \alpha_m$ , varia a seconda degli elettroliti*. Gli amalgami, così come la lega fusa (a 90°) di Wood, manifestano fenomeni del tutto analoghi.

Affrontando la spiegazione dei fenomeni elettrocapillari che abbiamo appena menzionato, dobbiamo rilevare che la diatriba molto vivace su questo argomento porta sulle concezioni essenzialmente diverse che sono state adottate per il meccanismo dei fenomeni che si verificano alla superficie del mercurio, quando varia la differenza di potenziale tra il mercurio e l'elettrolita. Se si indica questa differenza con  $\varphi$ , si ha

$$\varphi = V_0 + V \quad (2.0.71)$$

di modo che si può scrivere la (47) nella forma seguente:

$$\alpha - \alpha_0 = f(V) = f(\varphi - V_0) \quad (2.0.72)$$

La spiegazione di Helmholtz (1881) poggia, nei suoi tratti essenziali, sulla seguente concezione. Sulla superficie di contatto tra il mercurio e l'elettrolita si forma un doppio strato elettrico, di cui uno dei degli strati componenti si trova sulla superficie del mercurio e l'altro è formato dalle cariche degli ioni raccolti attorno a questa superficie. La tensione superficiale  $\alpha$  del mercurio diminuisce per effetto dell'elettrizzazione, la reciproca repulsione degli elementi della carica che agendo contro le forze coesive che tendono a diminuire l'area superficiale del mercurio. Questa tensione  $\alpha$  diventa più grande, quando il mercurio funge da catodo e i cationi carichi positivamente (idrogeno) raggiungono la sua superficie, il risultato è che la elettrizzazione iniziale del mercurio, che è a contatto con l'elettrolita, è positiva e che tale elettrizzazione diminuisce, quando gli anioni si allontanano dalla superficie del mercurio. Il massimo  $\alpha_m$  della tensione superficiale  $\alpha$  si ha quando il doppio strato scompare completamente, cioè quando  $\varphi = 0$ ,  $V = -V_0$ . Se  $V$  aumenta ulteriormente, il mercurio riceve un'elettrizzazione negativa, sulla sua superficie si forma uno strato di cationi e la tensione comincia a diminuire. Questo spiega non solo l'esistenza stessa del massimo  $\alpha_m$ , ma anche il fatto sopra menzionato che  $\alpha_m$  è indipendente dalla natura dell'elettrolita.

Prima di considerare le altre spiegazioni dei fenomeni elettrocapillari che sono state proposte, stabiliremo le equazioni ottenute con l'ausilio di considerazioni termodinamiche da Lippmann (1875), e considereremo poi un'interessante applicazione della teoria di Helmholtz di cui abbiamo appena parlato.

Lippmann ha fornito una teoria matematica completa dei fenomeni di elettrocapillarità, senza ricorrere ad alcuna ipotesi sul ruolo delle forze molecolari. Si evita ogni ipotesi osservando che un sistema elettrocapillare può percorrere un ciclo chiuso, cioè passare per un'infinità di forme e stati elettrici diversi per tornare infine alla sua forma e al suo stato iniziale. In questo caso si scriverà che c'è equivalenza tra il lavoro meccanico ottenuto e il lavoro elettrico speso. Entrano quindi in questa teoria solo elementi verificabili dall'esperienza, cioè il principio di equivalenza, la formula di Gauss  $\alpha ds$  per il lavoro meccanico ottenuto, essendo  $ds$  la variazione dell'area della superficie di contatto, la relazione stabilita dall'esperienza tra la tensione superficiale e la differenza di potenziale, infine l'ipotesi, verificabile anche dall'esperienza, che il sistema, tornando allo stato iniziale, restituisce tutta l'elettricità che gli è stata originariamente fornita. Il calcolo porta a risultati molto semplici. Essendo la variazione della tensione superficiale  $\alpha$  e del potenziale  $\varphi$  un fenomeno reversibile, se si modifica meccanicamente l'entità dell'area superficiale



del mercurio e quindi anche della tensione  $\alpha$ , si produce una variazione di  $\varphi$ ; indichiamo con  $s$  l'area della superficie del mercurio, con  $\eta$  la carica di questa superficie, con  $k = \eta : s$  la densità superficiale di carica, e supponiamo che  $s$  e  $\eta$  siano variati di  $ds$  e di  $d\eta$ ; l'energia  $U$  del sistema subisce in questo caso le seguenti variazioni: l'energia dovuta alla tensione superficiale aumenta di  $\alpha ds$ , l'energia della carica aumenta di  $k\varphi dk$  in conseguenza dell'aumento della carica stessa. Si ha pertanto

$$dU = (\alpha + k\varphi) ds + s\varphi dk$$

Questa grandezza deve essere il differenziale esatto di una certa funzione di  $s$  e di  $k$ ; di conseguenza

$$\frac{\partial(\alpha + k\varphi)}{\partial k} = \frac{\partial\varphi}{\partial s}$$

Le grandezze  $\alpha$  e  $\varphi$  dipendono solo da  $k$ ; si ha quindi

$$\frac{d\alpha}{dk} + \varphi + k \frac{d\varphi}{dk} = \varphi$$

$$\frac{d\alpha}{dk} + k \frac{d\varphi}{dk} = 0$$

o

$$\frac{d\alpha}{d\varphi} = -k \quad (2.0.73)$$

Questa è la famosa equazione di Lippmann e Helmholtz. Essa stabilisce una relazione tra la tensione superficiale  $\alpha$ , il salto di potenziale  $\varphi$  e la densità  $k$  della carica elettrica. Planck è giunto a questa equazione partendo dalla seconda legge della termodinamica e, come Lippmann, in modo assolutamente indipendente da ogni particolare rappresentazione dei fenomeni che avvengono alla superficie di separazione del mercurio e dell'elettrolita.

In un lavoro pubblicato nel 1881 Helmholtz ha mostrato che la sua teoria del doppio strato è qualitativamente in accordo con i fenomeni elettrocapillari. Lippmann (1882) andò oltre, integrando un'equazione differenziale che Helmholtz si era limitato a discutere, e ha potuto dimostrare che l'ipotesi del doppio strato è numericamente in accordo con l'esperimento. Il doppio strato è del tutto analogo a un condensatore carico; se si indica con  $q$  la capacità dell'unità di area di questo condensatore, di modo che  $\eta = qs\varphi$ , si ottiene, poiché  $\eta = ks$ ,  $k = q\varphi$ ,  $dk = qd\varphi$ , cioè  $k = dk : d\varphi$ . L'equazione (49) dà ora

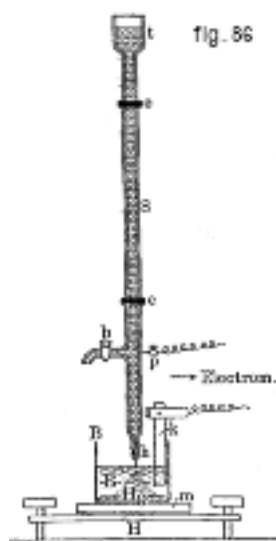
$$\frac{d^2\alpha}{d\varphi^2} = -\frac{dk}{d\varphi} = -q \quad (2.0.74)$$

Le osservazioni precedenti mostrano che la relazione  $\alpha = f(\varphi)$  si può rappresentare nella forma  $\alpha = A + B\varphi + C\varphi^2$ . Supponiamo che  $\alpha$  assuma il suo valore massimo  $\alpha_m$  per  $\varphi = \varphi_m$ . Si ha allora,

$$-\frac{d^2\alpha}{d\varphi^2} = \frac{2(\alpha_m - \alpha)}{(\varphi_m - \varphi)^2} = q \quad (2.0.75)$$

Ma abbiamo visto che la capacità  $q$  dell'unità di area è uguale a  $1 : 4\pi d$ . Le grandezze  $\alpha_m - \alpha$  e  $\varphi_m - \varphi$  si osservano direttamente e di conseguenza Lippmann ha potuto calcolare il valore delle grandezze  $q$  e  $d$ ; ha trovato  $d = 1,4 \cdot 10^{7-7} mm$ . (correggendo un errore nei suoi calcoli). Ora, dalla definizione stessa del doppio strato,  $d$  è la distanza molecolare che separa il mercurio dall'acqua, anche quando il mercurio è bagnato dall'acqua. È bene ricordare che Lord Kelvin ha trovato una volta, per vie del tutto diverse, quando lo zinco e il rame si toccano, un risultato dello stesso ordine di grandezza. Indubbiamente l'esistenza di intervalli molecolari come quelli delle molecole stesse è e resta un'ipotesi; ma, quando si riesce a calcolare numericamente il valore di parametri la cui prima interpretazione è ipotetica, questi parametri hanno un'utilità indipendente da

ogni interpretazione, e riprendono il loro posto in tutte le ipotesi. Se ne potrebbero trovare frequenti esempi in Fisica. La quantità  $d$ , in particolare, che rappresenti o meno una distanza intermolecolare, può servire ad esprimere semplicemente alcune delle proprietà delle superfici per le quali è stata determinata.



Passiamo ora all'interessante applicazione che può essere fatta della teoria di Helmholtz a ciò che si chiama gli elettrodi a goccia. La formazione di un doppio strato elettrico richiede del tempo; Helmholtz ha concluso che se il mercurio è costretto a fluire rapidamente attraverso una piccola apertura nell'elettrolita, che lo scompone in un gran numero di goccioline molto fini, la differenza di potenziale  $\varphi$  tra il mercurio e l'elettrolita diventa uguale a zero. Quando è già stata stabilita una differenza di potenziale, la carica di mercurio è trasportata dalle goccioline fino a scomparire, cioè fino ad avere  $\varphi = 0$ . Si può quindi riunire l'elettrolita ad un dispositivo simile che serve a misurare il grado di elettrizzazione (elettroscopio sensibile, elettrometro, vedi dopo), senza introdurre una nuova forza elettromotrice nella catena.

Ostwald (1887) ha utilizzato per primo questa circostanza, costruendo un elettrodo a goccia dove l'apertura che serviva a far scorrere del mercurio era all'interno dell'elettrolita. L'uso di un tale elettrodo da parte di diversi fisici (Exner e Tuma, Pellat, Braun, Miesler, ecc.) ha dato solo risultati contraddittori fino a quando Paschen (1890) ne ha modificato la costruzione, ponendo l'apertura sopra la superficie dell'elettrolita, in modo che il punto in cui il flusso continuo di mercurio si scompone in goccioline finissime si trova proprio su questa superficie. L'elettrodo Paschen è rappresentato in figura 86; B è un recipiente di vetro contenente l'elettrolita E; è posto su una lastra di ebanite  $m$ ;  $h$  è l'apertura attraverso la quale scorre il mercurio;  $k$  è un'asta di metallo (o di altra sostanza);  $p$  è una vite di bloccaggio fissata ad un filo, che attraversa la parete del tubo di vetro S ed è a contatto con il mercurio. Si assume che la differenza di potenziale tra  $k$  ed E sia uguale alla differenza di potenziale tra  $k$  ed il mercurio in S, cioè tra  $k$  e  $p$ . La questione se questa supposizione sia giustificata è di grande importanza. Se è fondata, l'elettrodo a gocce appena descritto permette di misurare una differenza di potenziale tra un metallo o un altro corpo solido e un elettrolita, in altre parole di risolvere l'annosa questione della dimensione delle componenti della forza elettromotrice di un elemento. C'è attualmente un'intera scuola di studiosi, cliente che ritiene la questione risolta; ma, come vedremo in seguito, l'applicazione del metodo degli elettrodi a gocce solleva a sua volta numerose difficoltà, senza parlare del valore della spiegazione dei fenomeni elettrocapillari proposta da Helmholtz, che è contestata da molti fisici. Richiameremo in seguito le ricerche effettuate con gli elettrodi a gocce.

Warburg (1890) ha proposto una spiegazione completamente diversa dei fenomeni elettrocapillari. Ha mostrato (1889) che quando la soluzione di acido solforico a contatto con il mercurio

contiene ossigeno dell'aria disciolto, si forma un solfato di mercurio. Alla superficie stessa del mercurio la concentrazione della soluzione contenente questo sale supera la concentrazione nel resto del liquido di una certa quantità  $\Gamma$ . Nell'elettrometro capillare, questa quantità è la stessa sulle due superfici di mercurio, e  $\Gamma = 0$  quando si ha una superficie pulita di mercurio ( $k = 0$ , secondo la teoria di Helmholtz). Quando il mercurio nel tubo capillare diventa il catodo, gli ioni H si separano dal sale di Hg, cosicché la concentrazione della soluzione salina diminuisce; allo stesso tempo, aumenta sull'altra superficie di mercurio (nel vaso di vetro). Si forma così un elemento di concentrazione. Se si rapporta  $\Gamma$  con l'unità di area e se si indica con  $c$  l'equivalente elettrochimico del mercurio, la quantità  $\Gamma : c$ , come hanno mostrato Warburg e Planck, svolge lo stesso ruolo di  $k$  nella teoria di Helmholtz e, invece della (49), si ottiene l'equazione

$$\frac{d\alpha}{d\varphi} = -\frac{\Gamma}{c} \quad (2.0.76)$$

Le teorie di Helmholtz e di Warburg differiscono essenzialmente nei loro risultati. Le grandezze  $\Gamma : c$  e  $k$  sono della stessa natura, sono quantità di elettricità rapportate all'unità di area; ma esse sono di un ordine di grandezza completamente diverso:  $k$  è un numero estremamente grande, poiché è la densità della carica di un condensatore le cui superfici sono a distanza molecolare, mentre  $\Gamma : c$  corrisponde alla carica degli ioni di mercurio che si distribuiscono in uno strato dell'elettrolita, il cui spessore potrebbe non essere molto piccolo. Anche la produzione stessa delle cariche è diversa: nella teoria di Helmholtz, abbiamo spostamenti delle cariche nell'elettrolita e nel mercurio, che raggiungono solo le due superfici del doppio strato; in altre parole, abbiamo una corrente di carica; si tratta invece, nella teoria di Warburg, di una corrente di elettricità che va dall'elettrolita al mercurio senza interruzione, cioè di una corrente di conduzione. Warburg si basa sul fatto che la tensione superficiale  $\alpha$  del mercurio aumenta, quando la concentrazione della soluzione diminuisce nel tubo capillare; ciò è stato confermato dalle osservazioni dirette di G. Meyer (1892); così si spiega l'aumento di  $\alpha$ , quando  $\varphi$  aumenta e il mercurio funge da catodo. G. Meyer (1894) spiega la presenza di un massimo e la conseguente diminuzione della grandezza  $\alpha$  con la formazione, per grandi valori di  $\varphi$ , di amalgami di metalli, i cui sali sono disciolti nell'elettrolita; ma, nel caso in cui questo elettrolita è una soluzione di acido solforico, G. Meyer non ha potuto scoprire il processo chimico che potrebbe essere considerato come la causa della diminuzione di grandezza  $\alpha$ . Non è riuscito a dimostrare la formazione di un amalgama di idrogeno, a cui inizialmente ha cercato di attribuire la diminuzione della tensione superficiale.

Molti scienziati si sono sforzati di trovare dimostrazioni sperimentali dell'una o dell'altra delle teorie presentate, nonché della legittimità dell'impiego degli elettrodi a goccia. G. Meyer, Behn (1897) ed altri ancora hanno dato prove a favore della teoria di Warburg. Tuttavia, Warburg ha riconosciuto nuovamente nel 1898 che la sua teoria non può spiegare la diminuzione nel caso della soluzione di acido solforico.

Un alvoro di Rothmund (1894) sostiene in particolare la teoria di Helmholtz e le conseguenze che ne derivano. Rothmund ha trovato però che l'elettrolita deve essere saturato con il sale di mercurio che gli corrisponde, purché il l'elettrometro capillare dia un massimo di  $\alpha$  per  $\varphi = 0$ ; quando c'è un amalgama nell'elettrometro, l'elettrolita deve essere saturato con il sale del metallo disciolto nel mercurio.

S. W. Smith (1900) e St. Meyer (1896) hanno fatto uno studio critico della teoria Helmholtz. Schreder (1894) ha teoricamente stabilito la dipendenza che esiste tra la tensione superficiale  $\alpha$  e la differenza di potenziale  $\varphi$ ; ha trovato

$$\frac{d\alpha}{d\varphi} = -A\varphi e^{B\varphi}$$

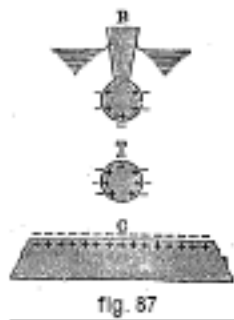
dove  $A$  e  $B$  sono due costanti.

Nernst ha dato nel 1896 una nuova spiegazione dell'azione degli elettrodi a gocce, basata sulla teoria osmotica delle forze elettromotrici esposta nel § 5. Questa spiegazione è la seguente:

quando il mercurio è a contatto con la soluzione di un sale di mercurio, per esempio, con una soluzione di calomelano, un certo numero di ioni mercurio si uniscono immediatamente al mercurio e gli cedono la loro carica positiva; gli anioni negativi del cloro si raccolgono sulla superficie, fino a quando il doppio strato formatosi corrisponde alla differenza di potenziale, vedi (42),

$$E = RT \ln \frac{P}{p}$$

$p$  è la pressione osmotica del sale disciolto,  $P$  una certa caratteristica costante del mercurio, ma dipendente dall'elettrolita (tensione di dissoluzione). La goccia T (vedi figura 87 dovuta a Palmaer), che cade dall'apertura del tubicino B, si muove contemporaneamente agli anioni.



Appena la goccia raggiunge la superficie del mercurio in C, che è già ricoperta da una sufficiente quantità di anioni, elimina i cationi di mercurio che, con gli anioni, ricostituiscono il sale. In un flusso continuo di gocce, si ottiene una diminuzione della concentrazione attorno a B e un aumento attorno a C, cosicché l'intero sistema forma un elemento di concentrazione, come ipotizzato anche dalla teoria di Warburg. Senza entrare in ulteriori dettagli, ci limitiamo a segnalare che Palmaer ha mostrato in tre interessanti memorie (1898, 1899 e 1901) che l'elettrodo a goccia produce effettivamente le variazioni di concentrazione della soluzione, oggetto della teoria di Nernst. Tuttavia, prima della pubblicazione della seconda memoria di Palmaer, G. Meyer (1899) aveva mostrato che la teoria di Warburg spiega anche le variazioni di concentrazione osservate, e pure Palmaer lo riconosce nel suo secondo lavoro. Nella sua terza memoria (1901), Palmaer ha nuovamente intrapreso un confronto tra le teorie di Helmholtz, Warburg e Nernst. Si arriva al risultato che la teoria di Nernst è quella che meglio spiega i fenomeni elettrocapillari, ma che nessuna delle teorie proposte può rendere conto di tutti i dettagli di tali fenomeni, ad esempio l'asimmetria dei due rami della curva che esprime la dipendenza tra la tensione superficiale e la differenza di potenziale. Si noti che negli esperimenti di Palmaer l'apertura del tubo, come si vede nella figura schematica 87, era all'interno dell'elettrolita. Nernst e Palmaer lasciano completamente da parte la questione della polarizzazione e della sua influenza sulla tensione superficiale del mercurio. Ulteriori ricerche sono state fatte da Bernstein (1901), Van Laar (1902), V. Lerch (1902), Kucera (1903), Gouy (1903), Krueger (1903), Lenkewitz (1904), Billitzer (1904), Krüger (1904), Christiansen (1905), Vinning (1906) e Reboul (1908, 1909). Van Laar ha cercato di spiegare teoricamente l'asimmetria della curva capillare; è stabilito che il massimo della tensione superficiale può non coincidere con il momento in cui la differenza di potenziale tra il mercurio e il liquido si annulla; la differenza può arrivare fino a 0,04 volt. Ne conclude che l'elettrometro capillare non può in generale servire per misurazioni precise della differenza di potenziale tra un metallo e un elettrolita.

Gouy ha studiato minuziosamente la forma della curva capillare in funzione della composizione e concentrazione dell'elettrolita; ha trovato che il massimo della curva non coincide con la scomparsa della differenza di potenziale tra il mercurio e l'elettrolita. Ha pure riconosciuto che per gli amalgami la tensione superficiale dipende solo dall'elettrolita e dalla differenza

di potenziale, ma non dalla natura del metallo disciolto nel mercurio. Questa legge è stata confermata da Christiansen. Infine Gouy (1906) ha studiato l'influenza dell'aggiunta di vari composti organici sulla forma della curva, in un numero molto elevato di casi.

Reboul ha pubblicato una ricerca molto interessante. Ha sostituito l'acqua acidulata con liquidi debolmente conduttori (alcool, etere) e ha trovato anche qui uno spostamento del menisco sotto l'azione di una forza elettromotrice. I liquidi cattivi conduttori non danno uno spostamento percettibile; ma, non appena vengono esposti all'azione ionizzante dei raggi X, inizia un lento e duraturo spostamento del mercurio che, dopo l'estinzione dei raggi X, persiste a lungo. La cosa più notevole è che Reboul ha osservato lo stesso fenomeno sostituendo il liquido con l'aria e producendo tra il mercurio del tubo e quello del recipiente una differenza di potenziale (fino a 440 volt). Non appena l'aria è stata esposta all'azione dei raggi X, si ha uno spostamento del menisco nel tubo capillare. Nel suo ultimo lavoro (1909), Reboul ha studiato il fenomeno nei gas rarefatti, dove la ionizzazione era prodotta da scariche elettriche.

Ripeteremo ancora una volta che *abbiamo insistito sui fenomeni elettrocapillari e sugli elettrodi a gocce per le speranze che su di essi si erano fondate; si era pensato che avrebbero consentito di risolvere il secolare e fondamentale problema per la teoria dei fenomeni elettrici della forza elettromotrice a contatto tra metalli e gli elettroliti, e conseguentemente anche di risolvere la questione della rispettiva grandezza delle componenti della forza elettromotrice di un elemento.*

## 9. Stato attuale della questione della forza elettromotrice di contatto

Abbiamo parlato nei paragrafi precedenti del fenomeno in cui si manifesta una differenza di potenziale alle estremità di una serie di sostanze a contatto. Questa differenza è uguale alla somma delle forze elettromotrici  $e_1 + e_2 + e_3 + \dots$  agenti sulle superfici di contatto delle diverse sostanze, e si chiama forza elettromotrice della serie data di sostanze o dell'elemento considerato; lo designeremo con  $E$ .

Nella combinazione particolarmente interessante di due conduttori A e B della prima classe con due elettroliti  $S_1$  e  $S_2$ , si ha, vedasi (16),

$$E = A|S_1 + S_1|S_2 + S_2|B + B|A = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 \quad (2.0.77)$$

ad esempio, per l'elemento di Daniell,

$$e_1 = Cu|CuSO^4 \quad e_2 = CuSO^4|ZnSO^4 \quad e_3 = ZnSO^4|Zn \quad e_4 = Zn|Cu$$

e

$$E = Cu|CuSO^4 + uSO^4|ZnSO^4 + ZnSO^4|Zn + Zn|Cu \quad (2.0.78)$$

Ci siamo posti in precedenza due quesiti: 1. da quali circostanze dipende la grandezza  $E$ ? 2. qual è il rispettivo valore delle componenti di  $E$ ? Abbiamo visto nel § 4 in che misura sia possibile, basandosi in parte sui principi della termodinamica, dare una risposta alla prima questione. Abbiamo ulteriormente considerato una delle nuove teorie, vale a dire quella di Nernst, che cerca di risolvere anche il secondo problema, ma può dare una soluzione completa e precisa solo in alcuni casi particolari, ad esempio per gli elementi di concentrazione.

Abbiamo pure già accennato che la grandezza  $e_2 = S_1|S_2$  è comunque molto piccola rispetto a  $E$  e che si trova ridotta a un confronto della grandezza  $e_4 = B|A$  con le grandezze  $e_1 = A|S_1$  e  $e_3 = S_2|B$ , cioè alla domanda di sapere dove risiede esattamente la sorgente di  $E$ , nel punto di contatto dei metalli tra ( $e_4$ ) o nel punto di contatto dei metalli con gli elettroliti ( $e_3$  ed  $e_1$ ). Considereremo brevemente, nei paragrafi seguenti, alcuni dei numerosissimi tentativi fatti per risolvere questo problema sperimentalmente.

Se avessimo abbreviato ulteriormente la seguente esposizione, e addirittura l'avessimo soppressa del tutto, il lettore avrebbe perso ben poco. Infatti, quando non si ragiona per partito preso

e si considera oggettivamente lo stato attuale della questione, si è portati a riconoscere che il risultato delle numerose ricerche sperimentali fatte è nullo o quasi nullo. Nei lavori più recenti, si vede ancora che alcuni sostengono che  $e_4$  è una grandezza trascurabile rispetto a  $e_1$  e  $e_3$ , altri, al contrario, che  $e_4$  è la parte principale di  $E$ , essendo le componenti  $ee_1, e_3$  piccole o addirittura nulle. Ogni nuova ricerca suscita critiche da parte del campo avverso, che si sforza di dimostrare o che il metodo adottato non è corretto o che l'interpretazione dei risultati ottenuti è imprecisa. Un gran numero di memorie, che non molto tempo fa erano considerate dei classici, oggi non hanno più nemmeno interesse storico; quindi non ne parleremo. A conferma di quanto appena detto, abbiamo raccolto nella tabella seguente i risultati ottenuti da vari autori, nella misura delle componenti  $e_1, e_2, e_3, e_4$  della forza elettromotrice  $E$  dell'elemento Daniell. Non abbiamo cercato di presentare un quadro completo, limitandoci ai valori più caratteristici. Tutte le grandezze sono espresse in volt; poiché qui interessa solo il valore relativo approssimato dei numeri, abbiamo preso  $E$  uguale a 1 volt, quando i risultati non erano dati in volt dagli stessi autori. Affinché la somma delle quattro componenti sia positiva, andiamo dal polo positivo Cu al polo negativo Zn, passando per  $CuSO^4, ZnSO^4, Zn$ . Il simbolo (0) significa che l'autore citato ritiene la grandezza essere troppo piccola (uguale a 0,01 volt, ad esempio) o addirittura nulla.

Autori	Anno	$e_1 \text{ Cu} CuSO^4$	$e_2 \text{ CuSO}^4 ZnSO^4$	$e_3 \text{ ZnSO}^4 Zn$	$e_4 \text{ Zn} Cu$
Clifton	1877	—	—	—	0,85
Strintz	1878	—	—	—	0,93
Hallwaghs	1886	—	—	—	0,84
Kohlrausch	1850	+0,028	−0,033	0,358	0,75
Ayrton e Perry	1880	+0,07	—	0,28	0,43
Exner e Tuma	1888	−0,406	—	1,275	—
Gouré e Villemontée	1890	+0,287	(0)	0,231	0,692
Ostwald	1887	+0,38	—	0,73	(0)
Paschen	1891	+0,02	+0,464	0,58	(0)
Miesler	1887	−0,2	+0,22	1,06	(0)
Pellat	1890	(0)	0,547	(0)	0,664
Neumann	1894	+0,585	(0)	0,524	(0)
Rothmund	1894	+0,445	(0)	0,587	(0)

Ogni commento sarebbe superfluo; il confronto delle ultime tre righe è particolarmente interessante. Vediamo quale completa discordanza esista tra i risultati ottenuti fino ad oggi; nel considerare la questione in modo imparziale e del tutto oggettivo, si deve riconoscere che nulla sappiamo attualmente delle componenti della forza elettromotrice di un elemento, e si pone ancora il problema, così come un secolo fa, di sapere se la sorgente di elettricità deve essere ricercata nel contatto tra i metalli o nel contatto dei metalli con gli elettroliti. È chiaro che non è necessario descrivere in dettaglio le varie misure e accennare ai risultati; ci limiteremo all'essenziale.

## 10. Ricerca sperimentale dell'elettrizzazione a contatto di conduttori della prima classe

Qui si tratterà principalmente del contatto dei metalli. Il fatto seguente non può subire il minimo dubbio: quando due metalli M e N si toccano, su di essi compaiono due cariche elettriche di nomi opposti e quantitativamente uguali. Supponiamo che allo stesso tempo questi metalli acquisiscano una certa differenza di potenziale  $M|N = V_1 - V_2$ , uguale alla forza elettromotrice

che ora indicheremo con  $e$ . Vedremo in seguito che alcuni fisici negano l'esistenza di una tale differenza di potenziale.

La storia della scoperta dei fenomeni fondamentali è in poche parole la seguente. Nel 1789, la moglie del professor L. Galvani notò che i muscoli delle gambe di una rana appena scuoiata si contraevano quando si producevano scosse elettriche nelle vicinanze. Studiando questo schema, Galvani scoprì che contrazioni simili si verificavano anche quando i muscoli venivano toccati in due punti con metalli differenti, messi a contatto tra loro. Spiegò questo fenomeno con la scarica di un particolare fluido nervoso o vitale, accumulato nei nervi e la cui distribuzione diveniva uniforme attraverso i metalli. A. Volta è stato il primo a indicare che il ruolo principale in questo fenomeno è svolto dal contatto di corpi diversi, che appare come l'origine dell'elettrizzazione di questi corpi. Si può quindi ritenere che Volta aveva creato la teoria del contatto, cioè la teoria che ammette che il contatto di corpi diversi costituisce già di per sé una fonte di elettrificazione.



Descriveremo alcuni degli esperimenti fondamentali, mediante i quali si dimostra che i metalli messi a contatto si elettrizzano.

Su un elettroscopio sufficientemente sensibile, avvitiamo un disco di rame non verniciato (fig. 88) e su quest'ultimo adagiamo con cura una lastra di zinco isolata e anch'essa non ricoperta di vernice. Quando questa seconda piastra viene poi rimossa, l'elettroscopio rileva la comparsa nel disco di rame di una carica elettrica negativa. Se scambiamo i dischi, otteniamo una carica positiva.

Per rafforzare la carica, si procede come segue. Si avvita sull'elettroscopio un disco di ottone  $b$  ricoperto di vernice (fig. 89) e su di esso si pone un disco identico  $a$  provvisto di manico isolante  $A$ . Queste due piastre, separate dagli strati isolanti di vernice, formano un condensatore piano di grandissima capacità. Il piatto  $b$  è collegato con un disco di rame  $k$ ; da  $a$  parte un filo, la cui estremità  $h$  è fissata in una posizione invariabile. Si pone su  $k$  una lastra di zinco  $z$ , munita di una maniglia di vetro  $B$ . Se si solleva poi il disco  $z$  abbastanza in alto in modo che la sua faccia superiore arrivi a toccare l'estremità  $h$  del filo, le due cariche passano sul condensatore  $ab$ . Si ripete un gran numero di volte (circa 50) l'operazione consistente nel posare  $z$  su  $k$  e poi metterlo a contatto con  $h$ . Il condensatore  $ab$  riceve in queste condizioni cariche relativamente grandi, che si raccolgono quasi interamente sui due lati dello strato di vernice che separa i dischi  $a$  e  $b$ . Se si leva poi il disco  $a$ , la carica  $b$  si manifesta facilmente grazie all'elettroscopio. Lord

Kelvin (W. Thomson) ha mostrato che la riuscita dell'esperimento dipende in larga misura dal modo in cui il disco  $z$  viene rimosso.

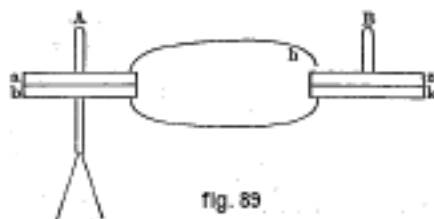


fig. 89

È necessario che il contatto dei dischi  $k$  e  $z$  avvenga il più possibile contemporaneamente in tutti i punti. Questa è la condizione che consente una buona riuscita dell'esperimento, cioè quando il disco  $z$  è collegato a qualsiasi meccanismo che gli consenta di muoversi solo in una direzione normale alla sua superficie.



fig. 90

Per mostrare che l'elettrizzazione non dipende dalla superficie di contatto, che copre la faccia superiore del disco di rame  $k$  (fig. 90) avvitato sull'elettroscopio, nonché la faccia inferiore del disco di zinco  $z$ , con uno strato di vernice. Dopo aver posizionato  $z$  su  $k$ , si collegano le altre due facce non smaltate di  $k$  e  $z$  mediante un filo di rame, come mostrato in figura. Allontanando poi questo filo e rimuovendo la piastra  $z$ , si osserva la stessa azione sull'elettroscopio come nel primo degli esperimenti precedenti. Per evitare qualsiasi attrito tra corpi di diversa natura, che, come vedremo, è anche fonte di elettricità, si può prendere un filo, metà di rame, l'altra metà di zinco, e toccare il disco  $k$  con l'estremità in rame, il disco  $z$  con quello in zinco. L'azione è la stessa del caso precedente.

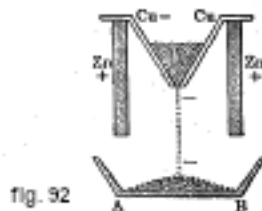
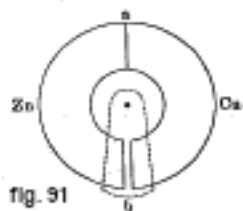
Non ci fermeremo agli esperimenti in cui si tocca con il dito una delle piastre, perché il contatto di un dito sempre più o meno umido complica le circostanze del fenomeno e introduce un elemento del tutto nuovo, il contatto di un metallo con un liquido.

L'esperimento che segue è molto probante. Con due dischi piatti di rame e zinco si forma un anello (fig. 91), le cui due metà vengono saldate lungo la linea  $a$  mentre l'anello rimane aperto in  $b$ . Sopra l'anello disposto orizzontalmente è sospeso un ago piatto orizzontale, la cui posizione di equilibrio è mostrata con linee tratteggiate nella figura. Se si elettrizza positivamente questo ago, esso ruota verso la metà dell'anello che è in rame, se è elettrizzato negativamente, dalla parte della metà in zinco. W. Thomson ha modificato questo esperimento costruendo un elettrometro a quadranti, nel quale una coppia di quadranti disposti a croce è di rame, l'altra coppia di zinco. Collegando a due a due i quadranti (di diversa natura) posti uno vicino all'altro, osservava, quando l'ago dell'elettrometro era elettrizzato, le stesse deviazioni di quest'ultimo, in una direzione o nell'altra, come nell'esperimento sopra descritto con l'anello. Un altro dei suoi esperimenti era il seguente: in un cilindro di zinco (fig. 92) è posto un imbuto di rame, dal



quale fuoriesce limatura di rame in un recipiente AB collegato a un elettroscopio; quest'ultimo manifesta un'elettrizzazione negativa.

Non c'è quindi dubbio che si osserva una elettrizzazione nel contatto dei conduttori della prima classe; a questi conduttori appartengono non solo i metalli, ma anche altri conduttori solidi, come il carbonio, diversi ossidi, piriti, ecc.



Non c'è dubbio inoltre che i conduttori di prima classe possono essere classificati in una serie di Volta e che obbediscono alla legge di Volta.

Molti fisici si sono occupati della distribuzione dei corpi in una serie di Volta, in cui ogni corpo posto a contatto con il successivo si elettrizza positivamente, e con il precedente negativamente. Si possono citare, tra gli altri, Volta, Ritter, Seebeck, Péclet, Munk, Pfaff. Queste ricerche hanno mostrato che la posizione di un corpo della serie Volta dipende in larga misura dal suo stato fisico ed in particolare dallo stato della sua superficie. Una pulizia imperfetta, una lucidatura più o meno rifinita e in particolare gli strati di ossido hanno una grande influenza. Non sorprende quindi che l'ordine dei corpi nella serie di Volta stabilito da vari fisici differisca, come mostrano i seguenti esempi:

Volta: (+) Zn, Pb, Sn, Fe, Cu, Ag, Au, C (grafite),  $MnO^2$  (-).

Seebeck: (+) Zn, Pb (lucido), Sn, Pb (non lucidato), Sb, Bi, Fe, Cu, Pt, Ag (-).

Pfaff: (+) Zn, Cd, Sn, Pb, Wo, Fe, Bi, Sb, Cu, Ag, Au, Pt, Pd (-).

Péclet: (+) Zn, Pb, Sn, Bi, Sb, Fe, Cu, Au (-).

Auerbach ritiene la serie seguente come la più probabile: (+) Al, Zn, Sn, Cd, Pb, Sb, Bi, Hg, Fe, Acciaio, Cu, Au, Carbonio, Ur, Pt, Pd,  $MnO^2$ ,  $PbO^2$  (-).

N. A. Hésénhous trova che i metalli si succedono nella serie di Volta da (+) verso (-), secondo la loro densità decrescente.

Abbiamo già parlato della legge di Volta; abbiamo visto che essa è espressa dalla formula  $A|B + B|C = A|C$ , ad esempio,  $Zn|Fe + Fe|Cu = Zn|Cu$ . Se ne deduce

$$A|B + B|C + C|D + \dots + M|N = A|N$$

La differenza di potenziale tra i due metalli (A e N) è la stessa sia che siano a diretto contatto, sia che si trovino alle estremità di una qualsiasi catena di metalli. Si ha inoltre

$$A|B + B|C + C|D + \dots + M|A = 0$$

La forza elettromotrice, che agisce in una catena di metalli le cui estremità (A) sono le stesse, è nulla. Abbiamo già osservato che queste leggi si riferiscono solo al caso in cui tutte le parti della serie di corpi a contatto sono alla stessa temperatura.

Prima di procedere alle varie determinazioni delle forze elettromotrici  $e = M|N$ , prendiamo in considerazione quella che ai vari autori è parsa la fonte delle elettrizzazioni che si manifestano indubbiamente a contatto con i metalli. Volta riteneva che non solo il contatto dei metalli tra loro, ma anche il contatto di un metallo con un elettrolita, fosse di per sé, cioè indipendentemente da qualsiasi reazione chimica, la causa delle elettrizzazioni osservate. Ai sostenitori della teoria a contatto, nel caso del contatto tra i metalli apparteneva anche Helmholtz, che spiegava la comparsa delle cariche con l'ipotesi che i diversi metalli attraggano l'elettricità in modo

disuguale; inoltre, lo stesso metallo attirerebbe elettricità positiva e negativa con forza disuguale; ad esempio, il rame attirerebbe più fortemente l'elettricità negativa, lo zinco l'elettricità positiva, il che spiegherebbe la loro elettrificazione al contatto. Helmholtz supponeva che queste attrazioni agissero solo a distanze estremamente ridotte.

Si noti che l'idea, talvolta espressa, che la teoria del contatto è in contraddizione con il principio di conservazione dell'energia, non è fondata. Osserviamo, infatti, in tutti i casi in cui il contatto di due metalli si presenta come una sorgente continua e in qualche modo inesauribile di qualsiasi forma di energia, che la reale sorgente è ben diversa. Ad esempio, l'energia elettrica del condensatore carico  $ab$  in fig. 89, si manifesta a scapito del lavoro aggiuntivo che deve essere speso per sollevare la lastra di zinco  $z$ , per vincere l'attrazione reciproca delle lamine  $k$  e  $z$  cariche di elettricità di nomi opposti.

Dopo la nascita della teoria del contatto, è apparsa molto rapidamente la cosiddetta teoria chimica, che nel tempo ha subito un gran numero di modifiche diverse. Già nel 1800 Fabroni aveva avanzato l'idea che l'elettizzazione a contatto dei metalli con gli elettroliti originasse dall'azione chimica dei corpi in presenza. Si può considerare De la Rive (1837) come il fondatore della teoria chimica; fu lui il primo ad avanzare in maniera precisa l'idea che la causa dell'elettizzazione a contatto con i metalli andasse ricercata nello strato di aria umida sempre esistente tra due lastre metalliche. Non riprodurremo qui la spiegazione un po' forzata da lui data del fatto che al contatto del rame con lo zinco, ad esempio, si osserva semplicemente l'elettizzazione opposta a quella che si verifica quando rame e zinco sono immersi fianco a fianco nell'acqua. È importante notare che la teoria chimica ha ammesso in tutte le fasi del suo sviluppo che la causa dell'elettizzazione a contatto con i metalli va ricercata nell'azione dell'aria ambiente sui metalli a contatto. Questa azione era solitamente considerata puramente chimica; si credeva, ad esempio, che l'elettizzazione fosse una conseguenza dell'ossidazione a cui sono sottoposte le superfici dei metalli nell'aria. Molte ricerche sono state intraprese per risolvere la questione del ruolo dell'ambiente nel fenomeno considerato. Ma la maggior parte di queste ricerche non hanno potuto portare a una soluzione; per esempio, gli esperimenti sul contatto dei metalli nel vuoto non potevano dare risultati soddisfacenti, perché quello che si chiamava vuoto era in fondo solo uno spazio riempito di aria più o meno rarefatta, in cui l'azione dell'aria non poteva differire essenzialmente da quella esercitata a pressione atmosferica.

Di molto maggiore interesse sono gli esperimenti fatti in uno spazio pieno di un gas qualsiasi, dopo che l'aria e il vapore acqueo ne sono stati accuratamente rimossi; tali sono gli esperimenti di W. Zahn, condotti in azoto puro e secco. Particolarmente importanti sono gli esperimenti di J. Brown, che collocò l'elettrometro a quadrante di W. Thomson, in uno spazio che poteva essere riempito da diversi gas. Si è così trovato che il rame a contatto con il ferro, ad esempio, diventa negativo nell'aria, ma positivo nell'idrogeno solforato. La formazione di strati di solfuri e la comparsa di nuove forze elettromotrici tra questi strati ed i metalli non può essere la causa del fenomeno, perché, dopo un certo tempo, quando gli strati di solfuri avevano raggiunto uno spessore sufficiente, la deviazione dell'ago dell'elettrometro cessava. Un cambio di segno si osserva anche quando Cu e Ni sono a contatto in aria (Cu +) e in HCl gassoso (Cu -). Tra gli altri osservatori ricordiamo anche Spiers e Schultze-Berge; quest'ultimo ha scoperto che la presenza di ozono rende Au, Pt e ottone più fortemente negativi e che il Pt diventa fortemente positivo nell'idrogeno.

Inoltre, Christiansen ha riconosciuto che la differenza di potenziale tra il carbone e un amalgama di stagno liquido aumenta da 0,2 a 0,74 volt, quando la durata del loro contatto con l'aria aumenta da 0,002 a 0,02 secondi. Quando l'aria viene sostituita dall'idrogeno, la differenza diminuisce di 0,8 volt. Se si prende, invece del carbone, mercurio puro, si ottiene, per amalgama di zinco|Hg, in idrogeno (poco umido),  $e = +0,88 \text{ volt}$ , ecc.; in ossigeno secco,  $e = -0,76 \text{ volt}$ ; la differenza è quindi di 1,64 volt.

Di grande interesse sono gli esperimenti di Pellat e di Erskine-Murray, che hanno mostrato

la notevole influenza di modificazioni anche lievissime dello stato della superficie dei metalli a contatto. Pellat ha scoperto che la differenza di potenziale tra le lastre di Cu e Au variava quando il Cu era per un certo tempo sotto l'azione di una lastra di piombo molto vicina.

Gli esperimenti di Grove, Gassiot e J. Brown, che hanno mostrato l'insorgere di una differenza di potenziale anche nel caso in cui due lastre metalliche siano molto vicine tra loro, senza toccarsi, depongono anch'esse a favore della grande influenza dell'ambiente circostante sulla grandezza  $E$ . Pellat ha osservato (1881) che la pressione dell'aria agisce sulla grandezza  $e$ ; ma gli esperimenti di Bottomley (1885) non hanno confermato questo fatto. È chiaro, da quanto precede, che il mezzo agisce su  $e$ ; i fatti su cui si basa questa conclusione sembrano quindi contraddire la teoria del contatto. Ma la vecchia teoria chimica, che ammetteva che in tutti i casi di contatto tra corpi una certa reazione chimica appare come fonte di elettricità, non resiste alla critica neanche in questa forma; è quasi del tutto abbandonata e non prenderemo in considerazione i tentativi di Exner di ritornarvi in una forma leggermente modificata.

Attualmente si sta costruendo una nuova cosiddetta teoria anticontatto, che sarebbe sbagliato chiamare teoria chimica. I fautori di questa teoria ammettono che, in una catena regolarmente aperta (metallo A, uno o due elettroliti, metallo B, metallo A), la quantità  $A|B$  è molto piccola o addirittura nulla; ma, nel caso in cui due metalli si toccano, per esempio nell'esperimento di W. Thomson (figura 91), l'aria fa la parte di un elettrolita. Abbiamo visto qual è il ruolo degli ioni negli elettroliti liquidi; la nuova teoria dell'anticontatto si basa sul fatto che anche i gas sono soggetti a ionizzazione, che esiste sempre in misura maggiore o minore. S. Arrhenius aveva già dimostrato nel 1888 che, se tra due fili di Zn e Pt si trova aria ionizzata artificialmente (usando ad esempio i raggi catodici), tra questi fili appare una differenza di potenziale che arriva fino a 0,86 volt.

Lodge e altri hanno recentemente sviluppato la teoria dell'anticontatto, secondo la quale l'aria deve essere considerata un elettrolita. Lodge (1900) pensa che tra qualsiasi metallo e l'aria circostante ci sia una differenza di potenziale, che è, per esempio, di 1,8 volt per lo zinco, e 0,8 volt per il rame. I vari metalli sono quindi già prima del loro contatto a potenziali diversi, generalmente inferiori a quelli dell'aria circostante. Quando il metallo Zn e il metallo Cu vengono messi a contatto, i loro potenziali diventano uguali, una certa quantità di elettricità negativa passa dallo zinco al rame, così che dopo la separazione dei metalli e tenendo conto delle loro azioni esterne, il rame appare negativo, lo zinco positivo, rispetto allo zinco e al rame che non sono stati a contatto e che non manifestano alcuna elettrizzazione, poiché sono allora circondati da cariche di elettricità positiva residenti negli strati d'aria contigui. Se  $V$  è il potenziale comune di zinco e rame, l'aria ha intorno allo zinco il potenziale  $V = +1,8 \text{ volt}$ , e intorno al rame il potenziale  $V = +0,8 \text{ volt}$ . Nell'aria stessa c'è una lenta caduta di potenziale di 1 volt, che è uguale al salto di potenziale normalmente riferito alla superficie di contatto dei metalli.

Riecke (1898) applicò per primo la nuova teoria degli elettroni in moto alla spiegazione dei fenomeni che avvengono al contatto tra i metalli.

Indicheremo un'altra circostanza, la cui importanza è altrettanto grande, qualunque sia la causa a cui si attribuisce la produzione della grandezza  $e$ . Questo è ciò che viene chiamato la connessione dei corpi con la terra. Di solito si prende il potenziale della terra uguale a zero e si assume che qualsiasi corpo messo a terra sia anch'esso a potenziale zero. Una tale ipotesi è possibile, purché riguardi fenomeni elettrostatici, nei quali si tratta generalmente di potenziali molto grandi relativi a un volt. Ma non è la stessa cosa quando si tratta di potenziali di 1 o 2 volt, e ancor più di una frazione a volte piccola di volt. In questo caso non si deve perdere di vista che la messa a terra di un corpo, anche quando esso e tutti i conduttori intermedi sono costituiti dalla stessa sostanza, equivale alla comunicazione del corpo "con un terreno più o meno meno umido, cioè indubbiamente con un elettrolita. È chiaro che il corpo assume allora un potenziale diverso da quello della terra. In realtà le cose sono ancora più complicate, perché i corpi intermedi, ad esempio le condotte dell'acqua e del gas, sono formate da sostanze diverse

da quella del corpo considerato; tra questi corpi intermedi, così come tra il primo di essi e il corpo dato, compaiono nuove forze elettromotrici. Si può ammettere che ogni corpo metallico è stato in comunicazione con la terra; ne consegue che i vari corpi possono essere già a potenziali diversi prima del loro contatto. In ogni caso bisogna ricordare che la messa a terra di un corpo lo porta ad un potenziale, che dipende dalla natura di questo corpo, da quella dei corpi intermedi, e forse anche dalle caratteristiche del suolo in un dato luogo.

Diamo un breve riassunto delle varie ricerche intraprese allo scopo di misurare l'entità della forza elettromotrice  $e$ , cioè della differenza di potenziale tra metalli a contatto. Quanto detto nel paragrafo precedente e in questo spiega perché non ci soffermeremo sui risultati numerici di questa ricerca.

R. Kohlrausch (1853) ha utilizzato il condensatore rappresentato in figura 48. Per misurare la carica assunta dal condensatore in un dato esperimento, separò le armature e ne collegò una con un elettrometro sensibile (di Dellmann). Le indicazioni di questo strumento servivano per misurare la carica e di conseguenza anche la differenza di potenziale delle armature del condensatore. Ad esempio, per misurare la differenza  $Zn|Pt$ , prendeva piastre di Zn e Pt. Dopo averle messe a contatto in modo immediato, eseguiva la misura con il metodo precedente e otteneva subito sull'elettrometro il valore  $A = Zn|Pt$  della grandezza cercata. Egli determinava un altro valore di questa quantità e allo stesso tempo il rapporto di  $Zn|Pt$  con la forza elettromotrice  $D$  di un elemento Daniell nel modo seguente. Prendeva un elemento Daniell irregolarmente aperto, cioè la combinazione  $Cu - CuSO^4 - ZnSO^4 - Zn$ , in cui la differenza di potenziale agli estremi era ovviamente pari a  $D - Zn|Cu$ . Dopo aver collegato lo zinco con la piastra di zinco del condensatore e il rame con quella di platino, otteneva sull'elettrometro la misura della grandezza

$$B = D - Zn|Cu + Pt|Cu = D - (Zn|Cu + Cu|Pt) = D - Zn|Pt$$

Collegando al contrario lo zinco con il platino, il rame con quello dello zinco, otteneva la misura della grandezza

$$C = D - Zn|Cu + Cu|Zn + Zn|Pt = D + Zn|Pt$$

Le quantità  $B$  e  $C$  danno i valori ricercati di  $Zn|Pt$  e  $D$ , quindi anche il rapporto tra loro. Kohlrausch ha trovato, ad esempio,  $Zn|Cu = 0,48D$ . Non indicheremo le altre particolarità di questo metodo. Gerland (1868) e Clifton (1877) usarono un metodo simile; l'ultimo ha trovato  $Zn|Cu = 0,852 \text{ volt}$ . Non citeremo altri valori.

Hankel (1861-1865) ha determinato i valori di  $e = A|B$  come segue. Su una lastra orizzontale di rame K messa a terra, pose un'altra lastra metallica A. Avvicinava quindi, venendo dall'alto, una seconda lastra di rame K, fino a una certa distanza  $\delta$  dalla lastra A; questa distanza era uguale a  $0,94 \text{ mm}$  e doveva essere la stessa in tutti gli esperimenti. La piastra  $K_1$  era poi messa a terra per breve tempo, sollevandola poi ad una grandissima altezza e collegandola a un elettrometro (di Hankel). L'indicazione  $S$  di quest'ultimo serviva da misura della carica della piastra  $K_1$  nel momento della sua messa a terra. Sostituendo A con una piastra B di un altro metallo, Hankel ha ottenuto un'altra indicazione  $S_1$  dall'elettrometro. È facile dimostrare che  $S - S_1 = \beta$ .  $A|B, \beta$  rappresentano rispettivamente un certo fattore di proporzionalità. Si poteva in questo modo trovare il rapporto tra diversi valori di  $e$  o questi stessi valori numerici, ponendo  $Zn|Cu = 100$ . Non citeremo alcun risultato.

Hallwachs (1886) utilizzò l'elettrometro a quadranti. Vedremo in seguito che la deviazione  $S$  dell'ago di questo strumento è determinata dalla formula

$$S = C (V_1 - V_2) \left[ V - \frac{1}{2} (V_1 + V_2) \right] \quad (2.0.79)$$

dove  $V$  indica il potenziale dell'ago,  $V_1, V_2$  quelli delle due coppie di quadranti posti a croce e collegati tra loro. Hallwachs ha utilizzato un elettrometro i cui quadranti erano di ottone. Ha inoltre costruito una serie di aghi in Cu, Ag, Pt, Al e Zn. Metteva una delle coppie di quadranti a terra, l'altra con l'ago, e nello stesso tempo con uno dei poli di una batteria, l'altro polo della quale era a terra. Sia  $E$  il potenziale così assunto dai quadranti, ed  $e$  la differenza di potenziale tra l'ago e i quadranti di ottone. Si ha  $V_1 = E$ ,  $V_2 = 0$ ,  $V = E + e$  e la formula (53) dà la deviazione dell'ago

$$S_1 = CE \left( \frac{1}{2}E + e \right)$$

Invertendo i poli della batteria, si ottiene  $V_1 = -E$ ;  $V_2 = 0$ ,  $V = -E + e$  e la deviazione

$$S_2 = CE \left( \frac{1}{2}E - e \right)$$

Se ne deduce

$$e = \frac{1}{2}E \frac{S_1 - S_2}{S_1 + S_2} \quad (2.0.80)$$

Introducendo correzioni di vario genere, Hallwachs riuscì a trovare i valori relativi delle quantità  $A|ottone$ , e quindi anche di  $A|B$ . Tra i suoi risultati, quelli che hanno un carattere negativo sono di particolare interesse. Ha rilevato che la quantità  $Cu|Q$  (dove  $Q$  sta per ottone) aumenta nel corso di 18 ore da 0,018 a 0,056; che  $Zn|Q$ , nel corso di 4 ore, diminuisce da 0,825 a 0,755; che la grandezza  $Al|Q$ , dopo essere sceso dopo sei mesi da 0,94 a 0,2, è risalito, dopo la pulizia dell'ago, a 0,94. Tutti i valori sopra si riferiscono a volt. Hallwachs ha trovato  $Zn|Cu = 0,843 \text{ volt}$ .

Ayrton e Perry operarono nel modo seguente: posero due lastre metalliche orizzontali A e B alle estremità di una tavola orizzontale, mobile attorno ad un asse verticale passante per il suo centro. Su A e B erano poste due lastre orizzontali di ottone M e N, che potevano essere collegate tra loro o con i quadranti di un elettrometro. Le piastre M e N sono state prima unite, poi la A con la B; su M e N apparivano allora cariche indotte dalle cariche delle piastre A e B. Ciò fatto, se si collegavano M e N con i quadranti dell'elettrometro, l'ago, che era mantenuto ad alto potenziale, rimaneva immobile. Si faceva poi ruotare di  $180^\circ$  la tavola con le piastre e si collegavano allora solo le piastre M e N con l'elettrometro. La deviazione dell'ago poteva fungere da misura della quantità cercata  $e = A|B$ . Ayrton e Perry trovarono  $Zn|Cu = 0,75 \text{ volt}$ .

Altre ricerche furono fatte da Christiansen (1893), Exner (1882-1887), Oulianine (1887), Exner e Tuma (1888), Pellat (1880, 1887), Schulze-Berge (1881), J. Brown (1887, 1899), Spiers (1900), Majorana (1899), Erskine-Murray (1898), Lord Kelvin (1897), Grimsehl (1902), Lodge, Héséhou, Brown (1903), Warburg (1904) e altri ancora. Parleremo di alcuni di questi lavori; indicazioni sui loro risultati sono già state date in parte nella prima metà di questo paragrafo. Il primo dei due metodi, utilizzato da Pellat, è molto interessante. Portava a zero la differenza di potenziale  $e$  dei due metalli, compensandola con un'altra differenza di potenziale  $e'$ , che poteva modificare a piacere e misurare con estrema precisione. Si prendeva come grandezza  $e'$  la differenza di potenziale tra un punto fisso ed un punto variabile su un filo percorso da una corrente elettrica; tra questi punti si stabiliva una caduta di potenziale. Spiers (1900) ha utilizzato una variante del metodo Pellat nello studio dell'influenza esercitata dal gas circostante sulla quantità  $e$ . Del resto, W. Thomson aveva già impiegato in precedenza (1861) un analogo metodo di compensazione.

Majorana ha condotto una serie di esperimenti estremamente istruttivi. Due piastre metalliche verticali, di zinco e rame ad esempio, vengono prima messe a terra, mentre sono a grande distanza l'una dall'altra, in modo da prendere cariche disuguali. Se poi vengono avvicinate tra loro (fino a 0,5 mm), su di esse appaiono cariche di avvicinamento per effetto dell'induzione e si può evidenziarle mediante l'elettrometro. Quando mettiamo a terra le piastre, tanto da

essere molto vicine tra loro, si può, dopo averle separate, manifestare e misurare le cariche di allontanamento, Majorana è riuscito inoltre ad osservare una mutua attrazione di metalli collegati tra loro. Un filo di quarzo argentato è sospeso davanti ad una piastra di metallo lucidato, posta in posizione leggermente inclinata, in modo che, se viene avvicinata gradualmente dal filo, deve dapprima toccare l'estremità inferiore. L'estremità superiore del filo e la piastra sono collegati. Osservando al microscopio l'estremità inferiore del filo e la sua immagine speculare prodotta dalla piastra, Majorana ha notato un brusco avvicinamento tra tale estremità e la superficie della lastra (in zinco), quando la loro distanza era uguale a  $0,1\text{ mm}$ . Successivamente (1900) Majorana ha osservato un'attrazione tra due piastre orizzontali, la superiore delle quali era collegata al giogo di una bilancia molto sensibile. Lo spostamento del giogo è stato misurato con il metodo di Fizeau-Pulfrich. La quantità  $e$  è stata compensata secondo il metodo di Pellat ed è stato quindi possibile misurare la quantità  $e = M|Ag$ , dove  $M$  è il metallo del piatto. Majorana ha trovato  $Zn|Ag = 0,9\text{ volt}$ ,  $Cu|Ag = 0,4\text{ volt}$ ; se ne deduce  $Zn|Cu = 0,5\text{ volt}$ .

Infine, Majorana ha nuovamente misurato i valori di  $e$  per le combinazioni  $Zn|Au$ ,  $Al|Au$  e  $Fe|Au$  a  $-180^\circ$  (temperatura dell'aria liquida) e ha scoperto che a una temperatura così bassa la grandezza  $e$  è evanescente; per esempio, cade per  $Zn|Au$  da  $0,88$  a temperatura ordinaria a  $0,05$  a  $-180^\circ$ .

Sorse un'interessante polemica tra Lord Kelvin e Lodge: il primo difendeva la teoria del contatto, il secondo sosteneva che  $e$  è uguale a zero (vedi sopra). Lord Kelvin si riferiva tra l'altro al lavoro di Enskine-Murray (1898) che, con il metodo della compensazione, ha trovato che ricoprendo le superfici dei metalli con uno strato isolante (cera, vetro), i loro punti di contatto rimanendo soli allo scoperto, non influenzano il valore di  $e$ , che dipende però in larga misura dallo stato della superficie, ad esempio dal grado della sua lucidatura.

J. Brown (1903) ha trovato che la grandezza  $e = Zn|Cu$  diventa zero, quando fra questi metalli si trova dell'olio a  $145^\circ$ ; spiega questo fatto con la dissoluzione in olio della pellicola elettrolitica, che ricopre i metalli e deve essere considerata come la causa della produzione di  $e$ . Warburg (1904) ha confermato questo risultato. Ha scoperto che  $e$  non dipende dalla natura del gas circostante e diventa quasi zero in un gas perfettamente secco; sostiene la teoria del contatto completamente confutata.

La questione rimane quindi aperta. Va anche ricordato che tutti gli esperimenti, che manifestano l'esistenza di cariche sui metalli a contatto, non dimostrano nulla da soli, perché non si tratta di provare l'esistenza delle cariche, di cui nessuno ha mai dubitato, ma di cercare l'origine della loro sorgente.

Dobbiamo ancora segnalare una definizione inesatta della grandezza  $e$ , sulla quale talvolta ci siamo basati. Poiché nel passaggio dell'unità di quantità di elettricità da un metallo a un altro, si spende un lavoro  $\pm e$ , si è ipotizzato che in corrispondenza della superficie di contatto debba essere rilasciata una quantità di calore  $q = \pm e$ . Edlund (1869-1871) riteneva possibile trovare la quantità  $e$  misurando  $q$  e la trovò molto piccola per diverse coppie di metalli. Ma questo metodo è discutibile; abbiamo stabilito la formula (33), che mostra che  $q$  è una funzione di  $e$  completamente diversa e più complicata; è solo nel caso in cui  $e$  è proporzionale alla temperatura assoluta che si ha la formula  $q = \pm e$ .

Anche gli isolanti (dielettrici) si elettrizzano, a quanto pare, quando entrano in contatto tra loro o con i conduttori. I primi esperimenti in questa direzione furono fatti da Davy, Fechner, Munk e A. C. Becquerel. Ricerche più precise si devono A. J. Thomson (1876), Ayrton e Perry (1878), Hoorweg (1880), Knoblauch (1901) e Héséhoux (1901). Si trova, per esempio, che la cera a contatto con lo zolfo si elettrizza positivamente, e negativamente a contatto con gomma, gommalacca, ottone, ecc. Gli isolanti non possono essere ordinati secondo una serie di Volta e di conseguenza, naturalmente, non seguono la legge Volta. A. Coehn (1898) giunse alla conclusione che quello dei due corpi a contatto, che ha la maggiore costante dielettrica, si elettrizza positivamente. Come ha mostrato Heydweiller, questa regola si applica comunque solo

agli isolanti.

## 11. Ricerca sperimentale dell'elettrizzazione a contatto di elettroliti con conduttori della prima classe

Abbiamo introdotto nel § 6 la teoria di Nernst che, in tutta una serie di casi particolari, dà in modo ben definito la grandezza della forza elettromotrice agente al contatto degli elettroliti tra loro e con i conduttori di prima classe.



Abbiamo anche presentato al § 8 i metodi dell'elettrometro capillare e degli elettrodi a goccia che, secondo alcuni autori, consentono di misurare la differenza di potenziale al contatto di un metallo con un elettrolita. Consideriamo qui nel loro ordine storico i risultati delle diverse misure di questa differenza di potenziale.

L'esistenza di una elettrizzazione al contatto di un elettrolita liquido con un metallo può essere dimostrata nel modo seguente. Su un elettroscopio sensibile (fig. 93) è avvitato un piatto orizzontale di metalli da studiare, ad esempio di zinco; questo piatto non è visibile in figura, ha la stessa dimensione del disco *a* e l'estremità inferiore del filo *d* è a contatto con esso. Si pone sul piatto di zinco una lastra *b* di vetro o mica, di diametro un poco più grande, e su questa un foglio di carta vetrata *a* impregnata del liquido studiato, ad esempio di acqua. Si può così tendere con un pennello uno strato di liquido sulla superficie *b*. Si tocca poi, con il filo di zinco isolato *d*, simultaneamente il disco inferiore e lo strato di liquido in *c*; le cariche si raccolgono sui due lati della piastra *b*. Se si allontana il filo *d* e si toglie la piastra *b* contemporaneamente al liquido, si ottiene nell'elettroscopio una deviazione, prodotta dalla carica del piatto metallico inferiore. Quando si sostituisce l'elettroscopio con un elettrometro, si può, oltre al segno, determinare anche l'intensità della carica. Entrambi dipendono dalla natura del metallo e del liquido.

Questo metodo fu particolarmente applicato da Buff (1842). HA trovato che tutti i metalli si elettrizzano negativamente nell'acqua e in una soluzione di potassa caustica; solo il Pt e l'Au si elettrizzano positivamente in acido solforico molto diluito; nell'acido nitrico concentrato, lo zinco diventa molto debolmente negativo, Pt, Au, Cu, Fe positivi, ecc.

I liquidi a contatto con i metalli non seguono la legge di Volta, come mostra l'esempio seguente:  $H^2O|Zn > H^2O|Cu$ , cioè  $Cu|H^2O + H^2O|Zn > 0$ ; se  $H^2O$  a contatto con Zn e Cu seguisse la legge di Volta, avremmo  $Cu|H^2O + H^2O|Zn = Cu|Zn$ , e quindi  $Cu|Zn > 0$ , mentre l'esperienza dà  $Zn|Cu > 0$  e quindi  $Cu|Zn < 0$ .

Hankel (1865) ha confrontato i valori di  $M|H^2O$ , dove *M* indica qualsiasi metallo, con la quantità  $Zn|Cu$ , con un metodo simile a quello appena descritto. Il piatto di rame inferiore era sostituito da un grande imbuto pieno d'acqua e comunicante con un tubo verticale, anch'esso contenente acqua; in quest'ultimo, immergeva il metallo messo a terra *M*. Senza entrare in

maggiori dettagli, notiamo che le esperienze di Hankel hanno mostrato un'influenza straordinariamente grande della condizione della superficie del metallo. A seconda che il piatto levigato, preparato da poco, fosse solo immerso nel liquido o che vi fosse rimasto per un certo tempo (da 10 a 30 minuti), o che fosse conservato per un certo tempo all'aria prima di essere immerso nell'acqua, sono stati ottenuti numeri estremamente diversi: le stesse differenze erano osservate, confrontando metalli lucidati con metalli lavorati con una lima. Ponendo  $Zn|Cu = 100$ , Hankel ha trovato valori oscillanti, ad esempio per Pt tra 14 e  $-16$ , per l'Au tra 10 e  $-19$ , per il Pd tra  $+3$  e  $-23$ , per l'ottone tra  $+8$  e  $-116$ , per il Fe tra  $+27$  e  $-23$ , per lo Zn tra  $-16$  e  $-45$ , per Al tra  $-25$  e  $-78$ , per l'Hg tra  $-6$  e  $-30$ , ecc.

Gerland (1868, 1883) si è servito di un metodo analogo a quello di Kohlrausch; una delle armature orizzontali di un condensatore fu sostituita da una lastra di vetro, sulla quale poggiava un foglio di carta vetrata imbevuta d'acqua. I valori numerici ottenuti da Hankel e Gerland non concordano, il che non sorprende dopo quanto appena detto sull'influenza dello stato della superficie del metallo.

Kohlrausch ha determinato in modo analogo la quantità  $e$ , nel caso del contatto di metalli con soluzioni di sali e di acidi. Alcuni dei suoi risultati sono riportati nella tabella che precede. Esperimenti dello stesso tipo sono stati fatti anche da Clifton, Ayrton e Perry (1878), Exner e Tuma (1888), Gouré de Villemontée (1890), Pellat (1889) e altri. Ayrton e Perry hanno utilizzato il metodo in cui una delle piastre di metallo è sostituita da un piattino di porcellana riempito con il liquido in esame.

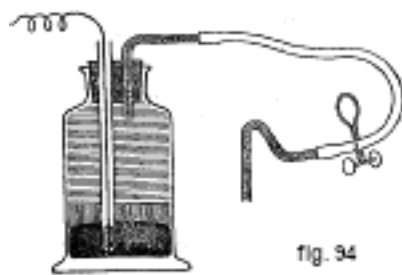
Abbiamo descritto nel § 8 l'elettrometro capillare e il metodo degli elettrodi a gocce, e abbiamo elencato gli autori che li hanno impiegati e le ragioni che si oppongono alla loro applicazione alla misura della differenza di potenziale tra metalli ed elettroliti. Ci resta ora da indicare brevemente i risultati ottenuti dagli autori che abbiamo citato.

Ostwald (1887) ha trovato che Zn e Cd sono negativi in tutti gli acidi, Cu, Sb, Bi, Ag e Hg positivi. In tutti gli ossidi diluiti (acidi solforico, nitrico, fosforico, formico, acetico, ossalico, ecc.), l'elettizzazione di un dato metallo è la stessa. Paschen e Rothmund hanno misurato la differenza di potenziale  $e$  tra il mercurio (così come tra amalgami liquidi) ed elettroliti. Si è riscontrato che, per un basso contenuto di metallo disciolto nel mercurio (0,01%), gli amalgami danno per  $e$  gli stessi valori degli stessi metalli puri. Paschen ha trovato, per il mercurio e l'acido solforico debole,  $e = 0,840 \text{ volt}$ ; Rothmund, che ha saturato l'acido con solfuro di mercurio, ha ottenuto  $e = 0,926 \text{ volt}$ . Per l'amalgama di rame, Rothmund ha trovato  $e = 0,445 \text{ volt}$ ; per l'amalgama di zinco,  $e = -0,587 \text{ volt}$ .

È stato recentemente osservato che si ottengono liquidi perfettamente determinati partendo da soluzioni normali che contengono un grammo equivalente di sostanza disciolta per litro d'acqua; si scrive, in breve, soluzioni  $n$ .

Ostwald ha proposto di confrontare le forze elettromotrici di diversi elettrodi, cioè di diverse combinazioni di conduttori ed elettroliti della prima classe, con un elettrodo normale e di costruire quest'ultimo nel modo seguente. In un recipiente di vetro (fig. 94) si versa del mercurio che si ricopre con uno strato di calomelano; il vaso viene quindi riempito con una soluzione  $n$  (o una soluzione  $1/10n$ ) di cloruro di potassio. Il tappo della bottiglia è attraversato da un filo di platino, isolato da un tubo di vetro e che giunge fino al mercurio, così come con un tubo di vetro con un raccordo di gomma, riempito con la stessa soluzione. La forza elettromotrice di questo elettrodo si innalza, secondo le misure di Palmaer (1907), a  $0,5732 \text{ volt}$ . L'opera di Palmaer contiene una bibliografia completa sui fenomeni elettrocapillari e sugli elettrodi a gocce dal 1875 al 1906.





Dopo aver considerato i risultati di esperimenti relativi al contatto di metalli con elettroliti, passeremo alle indagini fatte nel caso in cui due metalli A e B si trovano uno dopo l'altro in un elettrolita S. La forza elettromotrice di tale combinazione è uguale  $A|S + S|B$ . Indichiamo queste grandezze con  $(A, B)$ . Se si pongono a due due tre conduttori A, B, C della prima classe in uno stesso elettrolita S, si ottengono tre grandezze:  $(A, B) = A|S + S|B$ ,  $(B, C) = B|S + S|C$  e  $(A, C) = A|S + S|C$ ; siccome  $S|B + B|S = 0$ , si ha  $(A, B) + (B, C) = (A, C)$ . Del resto la combinazione seguente  $A|S + S|B + B|A$ , che è più complicata e rappresenta una catena regolarmente aperta, che si è sottoposto alle ricerche sperimentali. Abbiamo visto al § 3 che una tale combinazione soddisfa alla stessa formula

$$(A, B) + (B, C) = (A, C) \quad (2.0.1)$$

se si introduce la notazione simbolica  $A|S + S|B + B|A = (A, B)$ .

La formula (54) mostra che i metalli possono essere ordinati, rispetto ad un determinato elettrolita, seguendo una serie analoga a quella di Volta, in modo che ogni metallo combinato all'interno di questo elettrolita con uno dei precedenti si elettrizza negativamente, e con uno dei seguenti positivamente. La distribuzione dei metalli in una tale serie dipende dalla natura dell'elettrolita S. Molti fisici si sono occupati della questione di questa distribuzione dei metalli, ad esempio Fechner (soluzione acquosa di NaCl), Davy (soluzioni di  $H^2SO^4$ , KOH,  $K^2S$ ), Faraday (soluzioni di  $H^2SO^4$ ,  $HAzO^3$ , Hcl, KOH,  $K^2S$ ), Schoenbein ( $HAzO^3$ ), ecc. Ecco alcune di queste serie:

*Acqua*, Fechner: Zn, Pb, Sn, Fe, Sb, Bi, Cu, Ag, Au; Maththiessen: K. Na, Ca, Mg.

*Soluzione di  $H^2SO^4$* . Faraday: Zn, Cd, Sn, Pb, Fe, Ni, Bi, Sb, Cu, Ag.

*Soluzione di KOH*. Faraday: Zn, Sn, Cd, Sb, Pb, Bi, Fe, Cu, Ni, Ag.

*Soluzione di  $K^2S$* . Faraday: Cd, Zn, Cu, Sn, Sb, Ag, Pb, Bi, Ni, Fe.

*Soluzione di KCy*. Poggendorf: Zn, Cu, Cd, Sn, Ag, Ni, Sb, Pb, Hg, Pd, Bi, Fe, Pt, C.

*Acido azotico concentrato*. De la Rive: Sn, Zn, Fe, Cu, Pb, Hg, Ag. Fe.

Va da sé che queste serie devono dipendere in larga misura anche dallo stato fisico e chimico delle superfici dei metalli.

Inoltre, sono stati fatti molti studi dettagliati sulla combinazione di due conduttori e un elettrolita. Qui mostreremo alcuni dei risultati ottenuti.

I perossidi si trovano generalmente all'estremità della serie, cioè sono negativi, quando li si combina all'interno di un qualsiasi elettrolita con dei metalli; anche gli ossidi di Cu, Fe e Pb sono negativi in combinazione con i metalli puri. I sali fusi, così come il vetro e la mica riscaldati, possono agire come l'elettrolita S e dare anche notevoli differenze di potenziale. Oberbeck e Edler (1891) hanno studiato la combinazione Hg - S - Am, dove Am denota un amalgama, che generalmente contiene piccole quantità di un altro metallo M. Si è trovato che, per un numero molto grande di soluzioni S di sali e acidi, l'ordine di successione dei metalli M, i cui amalgami danno differenze di potenziale decrescenti con il mercurio, è lo stesso, cioè: Zn, Cd, Sn, Pb, Bi. Il metallo del sale, quando non è identico al metallo M, non ha quasi alcuna influenza; ma quando il metallo del sale è lo stesso metallo M, la differenza di potenziale diminuisce. Ad esempio, l'amalgama di cadmio dà nelle soluzioni di NaBr, KBr e  $ZnBr^2$  i valori 0,630, 0,641 e 0,624 volt, e in una soluzione di  $CdBr^2$  il valore più piccolo 0,561 volt.

Il carbonio e il sodio metallico danno forze elettromotrici straordinariamente grandi che, per alcuni liquidi, arrivano fino a 4,5 volt, come ha mostrato Corminas. Hoorweg e Righi hanno trovato che sostituendo l'elettrolita con liquidi cattivi conduttori, come cera, stearina, lacca, zolfo fuso o oli vari, si ottengono talvolta anche forze elettromotrici piuttosto elevate.

Alla tipologia considerata appartengono anche gli elementi di concentrazione di tipo particolare, composti da un liquido e due amalgami, che si distinguono tra loro per il grado di concentrazione del metallo disciolto. La teoria di Nernst ci ha fornito la formula (45) per questi elementi. G. Meyer (1891) ha studiato le combinazioni Zn e  $ZnSO^4$ , Cd e  $CdI^2$ , Sn e  $SnCl^2$ , Cu e  $CuSO^4$ , Na e NaCl,  $Na^2CO^3$ ,  $Na^2SO^4$ , Pb e acetato di piombo, trovandosi i metalli in due amalgami di concentrazione diversa. Le misure hanno dato risultati che concordano perfettamente con la formula di Nernst (45).

Alle combinazioni del tipo considerato appartiene anche la famosa pila di Volta, nella quale, per la prima volta, si ottenne una moltiplicazione della forza elettromotrice raggruppando in serie combinazioni identiche di corpi diversi. La pila Volta, che supporremo posta verticalmente, è costituita da un gran numero di dischi di rame e zinco impilati, un foglio di tela impregnato di acqua o meglio ancora di una soluzione diluita di acido solforico, sale da cucina, sale di ammoniaca, ecc., essendo interposto tra ciascuna coppia di dischi metallici; designeremo il liquido con S. Tutti i dischi devono essere disposti nello stesso ordine; sul disco di lamiera ci deve essere, ad esempio, sempre un disco di rame o sempre un disco di zinco. Si ottiene così, in particolare, il seguente ordine

$$Cu-Zn-S - Cu-Zn-S - Cu-Zn-S - Cu - ecc. \quad (2.0.2)$$

Il potenziale può aumentare o diminuire dal basso verso l'alto; ciò non dipende affatto dai dischi (Cu, Zn o S), che si trovano alle estremità della pila, ma solo dal loro ordine di successione, cioè dalla natura del disco (Zn o Cu) che si trova direttamente sopra S. Il potenziale cresce sempre nella direzione da S a Cu o, analogamente, da Cu a Zn, o da Zn a S. Con la distribuzione (55), così come, ad esempio, nella seguente  $S - Cu - Zn - S - Cu - Zn - S - ecc.$ , il potenziale aumenta dal basso verso l'alto. Nella distribuzione

$$Cu-S-Zn - Cu-S-Zn - Cu-S-Zn - -Cu - ecc. \quad (2.0.3)$$

o per esempio, nella seguente  $Zn - Cu - S - Zn - Cu - S - Zn - ecc.$  il potenziale decresce dal basso verso l'alto. Una pila regolarmente costruita deve iniziare e finire con lo stesso disco, anche S essendo considerato come tale. Se si chiama coppia l'insieme di due dischi metallici e una di rondella di panno bagnato, una pila formata da  $n$  coppie deve comprendere  $3n + 1$  dischi. La cosa più naturale è iniziare e finire con il rame, perché di solito i fili di rame sono fissati alle estremità della pila. In questo caso la pila può avere un disco di rame in basso e un disco di zinco in alto e comprendere in tutto  $3n$  dischi, sostituendo il filo di rame superiore il disco di rame superiore. Sia  $E$  la forza elettromotrice della pila, cioè la differenza di potenziale tra le sue estremità. Supponiamo che i potenziali crescano dal basso verso l'alto, cioè che lo Zn poggi direttamente sul Cu. Si può considerare tutta la pila come scomposta in  $n$  parti uguali, che chiameremo elementi; indichiamo con  $e$  la forza elettromotrice di ciascuno di questi elementi; tra gli elementi non c'è forza elettromotrice, quindi si ha  $E = ne$ . Bisogna considerare il limite tra due elementi vicini come posto al centro di uno dei dischi, cioè di un disco la cui sostanza è quella con cui inizia e finisce la pila (solitamente Cu). Ogni elemento inizia e finisce quindi con la stessa sostanza e consiste, ad eccezione dei due elementi estremi, di due dischi interi e due semidischi. Una pila formata ad esempio da quattro elementi si scompone secondo lo schema seguente, quando alle estremità si trova Cu:

$$Cu - Zn - S - Cu | Cu - Zn - S - Cu | Cu - Zn - S - Cu | Cu - Zn - S - Cu \quad (2.0.4)$$

Il simbolo  $Cu|Cu$  rappresenta qui un disco intero diviso idealmente in due metà. Se alle estremità della pila si trova Zn o S, si ottengono le seguenti divisioni:

$$Zn-S-Cu - Zn|Zn-S-Cu - Zn|Zn-S-Cu - Zn|Zn-S-Cu-Zn \quad (2.0.5)$$

$$S-Cu-Zn - S|S-Cu-Zn - S|S-Cu-Zn - S|S-Cu-Zn-S \quad (2.0.6)$$

Il valore di  $e$ , e quindi anche di  $E$ , è in ogni caso lo stesso, poiché si ha:

$$Cu|Zn + Zn|S + S|Cu = Zn|S + S|Cu + Zn|S + Cu|Zn = S|Cu + Cu|Zn + Zn|S$$

È chiaro che il fissaggio alle estremità della pila di due fili di rame o di altri due fili della stessa natura non cambia il valore di  $E$  negli ultimi due schemi, poiché si ha  $Cu|Zn + Zn|Cu = 0$  e  $Cu|S + S|Cu = 0$ . Si comprende ora anche perché  $E$  non dipende dalla natura dei dischi che si trovano alle estremità della pila, ma solo dalla loro distribuzione caratterizzata come sopra. In nessun caso le combinazioni di dischi tre a tre (es. Cu - Zn - S) devono essere considerate come elementi della pila, perché tra le combinazioni vicine agiscono comunque forze elettromotrici (es. S|Cu).

Se si ammette che i potenziali crescono dal basso verso l'alto, l'estremità inferiore della pila è detta negativa, l'estremità superiore positiva; le estremità sono talvolta chiamate anche i poli della pila. Quando uno dei poli è messo a terra, l'altro è elettrizzato conformemente al suo nome. Quando uno dei dischi al centro è messo a terra, quello inferiore è elettrizzato negativamente, quello superiore positivamente.

La pila a volte è costruita in modo da contenere un numero intero di coppie ( $3n$  dischi), cioè che l'ultimo disco non è messo a posto, vedere gli schemi (55, b, c, d). In questo caso il numero di elementi non è completo e si ha per i tre schemi  $E = ne - S|Cu$ ,  $E = ne - Cu|Zn$ ,  $E = ne - Zn|S$ . *Il segno dell'elettricità alle estremità della pila è lo stesso nei tre diagrammi (55, b, c, d) e rimane invariato se si tolgono uno o due dischi.* È chiaro quindi che Cu e Zn possono, quando si trovano alle estremità della pila, fungere sia da polo positivo che da polo negativo.

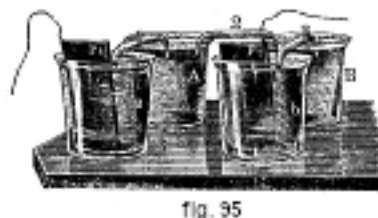
Volta, Dellmann, Peltier, Pécelet, Ritter, Fechner, Biot, Erman, Jäger, Branly (1873) e in particolare Angot (1874) si sono occupati dello studio teorico e sperimentale della pila.

Una variante della batteria Volta è rappresentata dalle cosiddette batterie a secco, la cui denominazione non è molto precisa. Differiscono dalla pila di Volta soprattutto perché lo strato liquido (panno imbevuto di liquido) è sostituito da uno strato apparentemente secco, ma che in realtà contiene ancora, se non altro, tracce di un liquido, ad esempio tracce di acqua, aria, sempre più o meno umido. Pile secche sono state costruite da Behrens, Zamboni, Bohnenberger, Jäger, Riffault, Maréchaux, De Luc, ecc.

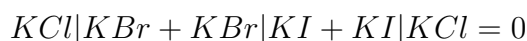
Behrens ha costruito la sua pila con due metalli (Zn e Cu o foglio di stagno e ottone) e di fogli di carta dorata, dapprima imbevuta in una soluzione di sale da cucina, poi seccata. La pila di Zamboni è costituita da dischi di carta argentata (una lega di Sn e Zn) e dorata (rame), oltre a carta argentata ricoperta sul lato bianco da uno strato di perossido di manganese. Le estremità delle pile secche, che sono formate da un gran numero di questi dischi (2000, per esempio), sono costantemente cariche di elettricità di nomi contrari. Quando queste cariche vengono rimosse, si riprendono piuttosto lentamente. Se si secca completamente una cosiddetta pila a secco essa cessa di agire, come mostrato da Erman e Parrot. Nella normale aria umida, le pile a secco rimangono attive per diverse decine di anni. Considereremo in seguito l'uso di pile a secco nella costruzione di elettroscopi sensibili. Si è già descritto l'elettroscopio di Fechner (fig. 8), che contiene una batteria a secco disposta orizzontalmente.

## 12. Studio sperimentale dell'elettizzazione a contatto di due elettroliti

Abbiamo applicato la teoria di Nernst al calcolo della forza elettromotrice di contatto tra le soluzioni che differiscono solo per il loro grado di concentrazione, e abbiamo detto che tra l'altro Planck ha esteso l'applicazione di questa teoria al caso più generale del contatto tra due liquidi diversi, che non agiscono chimicamente l'uno sull'altro.



Passiamo ora ai risultati degli studi sperimentali relativi a questa questione. Nobili per primo ha osservato la comparsa di una forza elettromotrice al contatto di liquidi. Più tardi Fechner (1838) ha utilizzato il seguente metodo. Prese quattro bicchieri (fig. 95), due dei quali *a, b* erano pieni di un liquido (*S*), *A* di un liquido (*S*<sub>1</sub>) e *B* di un terzo (*S*<sub>2</sub>). Dei tre sifoni che univano i bicchieri, i sifoni 1 e 3 contenevano il liquido *S*, riempiendo *a* e *b*; il sifone 2 conteneva uno dei due liquidi versati in *A* e *B*. Inoltre, in *a* e *b*, erano immerse due lastre di platino, di cui si misurava la differenza di potenziale *e*. Poiché le due lamine si trovavano nello stesso liquido, il contatto del platino con questo liquido non ha influenzato il valore di *e*, che consisteva di tre parti:  $e = S|S_1 + S_1|S_2 + S_2|S$ . Quando i liquidi agiscono chimicamente l'uno sull'altro, una di queste tre parti deve essere scissa in due. Quando le soluzioni *S*<sub>1</sub> e *S*<sub>2</sub> danno una nuova soluzione *S'*, *S*<sub>1</sub>|*S*<sub>2</sub> deve essere sostituita dalla somma *S*<sub>1</sub>|*S'* + *S'*|*S*<sub>2</sub>; ad esempio, per *S*<sub>1</sub> = *KOH* e *S*<sub>2</sub> = *HAzO*<sup>3</sup>, si sceglie come strato intermedio *KAzO*<sup>3</sup>. La semplice esistenza della grandezza *e* per un gran numero di combinazioni mostra che i liquidi a contatto generalmente non seguono la legge di Volta. Si fa eccezione per alcune soluzioni di sali isomorfi, di costituzione analoga; abbiamo, si ha per esempio:



Ciò mostra che le soluzioni di *KCl*, *KBr* e *KI* a contatto tra loro seguono la legge di Volta. Lo stesso vale per molti sali del tipo *MSO*<sup>4</sup>, *M*<sup>2</sup>*SO*<sup>4</sup> (ad eccezione del sale di ammonio), *MAzO*<sup>3</sup>, *M(AzO*<sup>3</sup>)<sup>2</sup>, *MCl* e *MCl*<sup>2</sup>.



Wild ha evitato l'uso dei sifoni servendosi del dispositivo mostrato in figura 96. Sul fondo di una vasca *A* sono fissati due tubi verticali, chiusi inferiormente da due stessi fondi metallici. Lo stesso liquido viene prima versato nei due tubi, poi con cautela un altro nel tubo di destra, ed infine un terzo nel vaso *A* e nella parte superiore del tubo di sinistra. Si misura la differenza di

potenziale delle basi metalliche; se risulta essere nulla, significa che i liquidi seguono la legge di Volta. S. Schmidt ha utilizzato uno strumento simile.

Le misure quantitative sono state eseguite da Kohlrausch (1850), E. Du Bois-Reymond. (1867), Worm-Müller (1870), Bichat e Blondlot (1883, 1855), Gouré De Villemontée (1890), Paschen (1890), Chanoz (1907) e altri.

Worm-Müller ha scoperto che la combinazione acqua-acido-alcali-acqua può dare notevoli forze elettromotrici  $e$ , fino a 0,5 volt, se si prende ad esempio la soda caustica e uno degli acidi  $HCl$ ,  $HAzO^3$ ,  $H^2SO^4$ . Si è anche notato che, per la serie formata da un acido, un alcalino e una soluzione di sale, della stessa composizione e della stessa concentrazione che nella combinazione dei primi due, si ottiene  $e = 0$ . Ma se si cambia la concentrazione della soluzione, si trova un valore di  $e$  diverso da zero. L'acido si elettrizza positivamente a contatto con l'alcalino o con la soluzione di sale, la soluzione di sale essendo positiva rispetto all'alcalino.

Bichat e Blondlot hanno misurato con due metodi la differenza di potenziale  $e = S_1IS_2$  di due liquidi  $S_1$  e  $S_2$  a contatto. Il primo di questi metodi richiama quello di Fechner; nel secondo, hanno utilizzato l'elettrometro capillare e determinato dapprima le quantità  $S_1|Hg$  e  $S_2|Hg$ , basandosi sulla teoria secondo la quale la massima tensione superficiale si ottiene quando i potenziali del liquido e del mercurio sono equalizzati mediante polarizzazione artificiale. Hanno quindi determinato la grandezza  $Hg|S_1 + S_1|S_2 + S_2|Hg$ , mettendo il liquido  $S_2$  nell'elettrometro. In questo modo si ottiene la quantità  $S_1|S_2$ . I risultati trovati dai due metodi erano totalmente differenti; quindi, per due soluzioni di  $H^2SO^4$  e  $Na^2SO^2$ , il primo metodo ha dato  $e = H^2SO^4|Na^2SO^4 = +0,129 volt$ , il secondo  $e = -0,20 volt$ . Bichat e Blondlot attribuiscono la differenza al fatto che, nel primo caso, essendo i liquidi a contatto con l'aria, compaiono nuove forze elettromotrici.

Paschen (1890) ha usato il metodo degli elettrodi a goccia. Ha trovato, ad esempio,  $CuSO^4|ZnSO^4 = 0,46 volt$ .

Molti fisici hanno verificato la differenza di potenziale  $E$  al contatto tra due soluzioni di diversa concentrazione. Paschen ha misurato la quantità  $E$  con il metodo degli elettrodi a goccia e ha trovato che, per le soluzioni di  $ZnSO^4$ ,  $KCl$  e  $HCl$ , una soluzione molto diluita, e per la soluzione di  $CuSO^4$  al contrario, una soluzione molto concentrata manifestante un potenziale più alto.

Chanoz (1907) ha mostrato che la differenza di potenziale al limite di due liquidi deve dipendere, perché, nello strato intermedio che si forma per diffusione, il passaggio da un liquido all'altro può essere continuo o discontinuo. Ha studiato combinazioni come le seguenti:

$$Soluzione\ 1|Soluzione\ 2|Soluzione\ 1'$$

Le soluzioni 1 e 1' erano identiche, ma il passaggio era continuo tra 1 e 2, discontinuo tra 2 e 1'. Questa combinazione dava in molti casi una forza elettromotrice misurabile, per esempio quando 2 era acqua pura, al contrario  $1 = 1'$  era una soluzione che conteneva più di due ioni (miscela), oppure quando 1 e 2 differivano solo per concentrazione, contenevano così più di due ioni; ma quando 1 e 2 ne contenevano solo due, non sorgeva alcuna forza elettromotrice.

Verifiche sperimentali della formula di Nernst (39) sono state intraprese da Nernst (1890), Negrauer (1891) e altri ancora; hanno ottenuto risultati del tutto soddisfacenti. Per due soluzioni di  $H^2SO^4$ , le cui concentrazioni sono nel rapporto di 1 a 10, la teoria di Nernst dà il valore  $E = 0,042 volt$ ; Couette ha trovato nei suoi esperimenti  $E = 0,055 volt$ ; anche due soluzioni di  $ZnSO^4$  hanno dato risultati concordanti.

Dopo aver considerato il caso del contatto di un elettrolita con un metallo e quello di due elettroliti tra loro, possiamo ora passare al contatto di due elettroliti  $S_1$  e  $S_2$  con un metallo A. La forza elettromotrice  $E$  è allora

$$E = A|S_1 + S_1|S_2 + S_2|A$$

Di particolare interesse è il caso in cui  $S_1$  e  $S_2$  sono soluzioni della stessa natura, ma di diversa concentrazione, entrando il metallo A nella composizione del sale disciolto;  $E$  rappresenta allora in effetti la forza elettromotrice di un elemento di concentrazione, la cui teoria fu sviluppata prima da Helmholtz (1877) e poi da Nernst (1888). Abbiamo introdotto la formula (44), che permette di calcolare il valore di  $E$  per un elemento di concentrazione. Già, prima degli scienziati precedenti, studi sperimentali di elementi simili erano stati avviati (in parte anche per il caso in cui A non entra nella composizione del sale, o quando S è la soluzione di un acido) da Walker (1826), Faraday (1840), Bleekroed (1871), Eccher (1865, pubblicato nel 1879), Kittler (1881), Pagliani (1886) e altri. Eccher ha rilevato che, per determinate sostanze,  $E$  non dipende dai valori assoluti delle concentrazioni  $c_1$  e  $c_2$  delle due soluzioni, ma solo dal rapporto  $c_1 : c_2$  di tali quantità, come richiesto anche dalla formula di Nernst (44).

La formula di Helmholtz, la cui identità con la formula di Nernst può essere dimostrata per soluzioni molto diluite, è stata verificata dallo stesso Helmholtz e dal Moser (1881); quest'ultimo svolse le sue ricerche sulle soluzioni di  $CdI^2$ ,  $ZnSO^4$  e  $CuSO^4$  e si è avuta una perfetta concordanza dei risultati con quelli calcolati dalla formula. La formula di Nernst è stata verificata da molti fisici, tra gli altri dallo stesso Nernst, da Jahn, Leffeldt, ecc. A titolo di esempio, citeremo la catena formata da due soluzioni di  $AgAzO^3$  tra elettrodi di Ag ( $c_1 : c_2 = 10$ ); l'esperimento dà  $E = 0,055 \text{ volt}$ ; introducendo nella sua formula una correzione per tener conto che il grado di dissociazione diminuisce in una soluzione più concentrata, Nernst ha trovato con il calcolo  $0,057 \text{ volt}$  (senza questa correzione aveva ottenuto  $0,0608 \text{ volt}$ ).

Una generalizzazione consiste nella combinazione di due metalli o in generale di due conduttori A e B della prima classe con due elettroliti  $S_1$  e  $S_2$ ; per una tale combinazione, la forza elettromotrice  $E$  è espressa dalla somma  $E = A|S_1 + S_1|S_2 + S_2|B$  oppure, se si sceglie una catena regolarmente aperta, dalla somma  $E = A|S_1 + S_1|S_2 + S_2|B + B|A$ . Abbiamo esposto nel § 4 la soluzione teorica di alcune questioni che riguardano una combinazione di questo tipo, e abbiamo introdotto le importanti formule (25), e (31). Rimandiamo, per lo studio delle diverse specie di elementi, al capitolo dedicato ai fenomeni elettrochimici. Indicheremo qui semplicemente che tutta una serie di ricerche sperimentali hanno dimostrato la completa esattezza delle formule (25) e (31); su questa ricerca torneremo più avanti.

### 13. Contatto di gas con i conduttori della prima e seconda classe

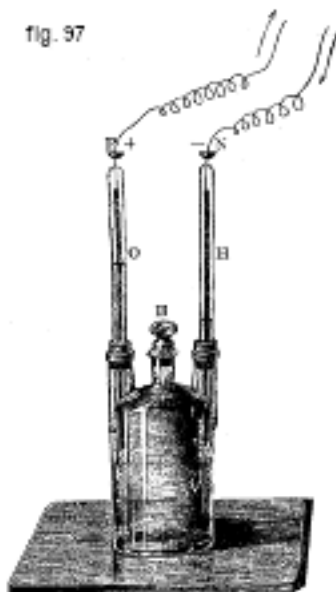
Abbiamo indicato che la differenza di potenziale tra metalli a contatto è spiegata da qualche autore. Lodge, ad esempio, con la differenza di potenziale che si origina tra i metalli e i gas che li circondano, l'aria per esempio. Abbiamo inoltre citato una serie di ricerche che dimostrano l'influenza del mezzo sulla differenza di potenziale dei metalli a contatto.

Kohlrausch (1850), Ayrton e Perry (1880), Bichat e Blondlot (1883), Gouré de Vellemontée e Kenrick (1896) hanno dedotto dai loro esperimenti che tra gas e liquidi a contatto appare anche una certa differenza di potenziale. Gli ultimi due fisici hanno utilizzato il metodo dell'elettrodo a caduta; Kenrick ha trovato che la differenza di potenziale è particolarmente grande, quando si aggiungono alle soluzioni dei sali inorganici (KCl) di piccole quantità di sostanze organiche, per esempio dell'acquavite, etere, canfora, ecc.

Un caso più complicato di contatto, quello tra metalli, gas e liquidi, è rappresentato da quello che viene chiamato un elemento a gas, formato da un liquido nel quale sono immersi due metalli identici, in qualche modo saturi di gas diversi.

Grove (1839) ha per primo costruito e studiato un elemento a gas. Nei tubi laterali di una bottiglia a tre tubi V (fig. 97), erano disposti tubi chiusi alla loro estremità superiore, che contenevano lunghe lamine di platino collegate in alto a fili di platino saldati nei tubi. L'intera bottiglia e i tubi erano riempiti con una soluzione diluita di acido solforico. Per mezzo di un tubo ricurvo, l'ossigeno O veniva quindi introdotto attraverso l'apertura B in uno dei tubi laterali e

l'idrogeno H nell'altro. Un tale elemento possedeva una forza elettromotrice abbastanza grande (più di un volt), il platino che era in O svolgeva il ruolo di polo positivo, cioè aveva un potenziale maggiore del platino in H.



Va da sé che la sorgente della forza elettromotrice deve trovarsi nel liquido, ma non nelle parti superiori dei tubi dove il platino è a diretto contatto con i gas. Ciò è dimostrato dal fatto che lo strumento di Grove può essere sostituito da un altro, in cui le due lamine di platino sono immerse in due liquidi separati tra loro da un setto poroso, uno dei liquidi essendo saturo di ossigeno, l'altro di idrogeno, come hanno mostrato Schönbein e altri. Quando nello strumento di Grove si riempie solo un tubo laterale di idrogeno, si ottiene ancora una forza elettromotrice piuttosto grande. Ma se solo un tubo è riempito di ossigeno, si trova un valore piccolo di  $e$ , che però aumenta rapidamente quando l'ossigeno viene ozonizzato.

I fenomeni che avvengono nell'elemento a gas mostrano che il platino, in qualche modo saturo di gas, e il platino puro, immerso nello stesso liquido, formano un elemento dotato di una determinata forza elettromotrice. L'essenziale nell'elemento a gas non consiste certo nel fatto che uno strato di gas ricopra semplicemente e meccanicamente la superficie del platino, ma nel fatto che il gas penetra (si diffonde) all'interno del metallo.

Quando si prendono altri gas al posto di O e H, si trova che, combinati tra loro e con metalli diversi, possono essere intercalati nella stessa serie che formano i metalli quando sono combinati a due a due. La serie assume la forma seguente: (Pt+Cl), (Pt+Br), (Pt+I), (Pt+O), (Pt+AzO), (Pt+CO<sup>2</sup>), (Pt+Az), metalli che scompongono l'acqua, (Pt+C<sup>2</sup>H<sup>4</sup>), (Pt+etere), (Pt+alcool), (Pt+S), (Pt+P), (Pt+CO), (Pt+H), metalli che scompongono l'acqua. È notevole che tutti i metalli che non si scompongono con l'acqua formano un gruppo continuo, tra i cui membri non è intercalato uno solo dei corpi (Pt+gas), e che è lo stesso per i metalli che scompongono l'acqua. È un fatto molto importante che questi fenomeni si manifestino anche quando si prende del carbone poroso, ma non del carbone compatto e non poroso all'interno del quale i gas non possono penetrare.

Ricerche sperimentali dettagliate sull'elemento a gas sono state fatte da Beetz (1849), Peirce (1879), Markowski (1891), Bose (1900) e Wulff (194). Indicheremo rispettivamente con  $Pt_H$  e  $Pt_O$  le lamine di platino con idrogeno e ossigeno. Beetz ha trovato

$$\begin{aligned} Pt_H | H^2SO^4 | Pt &= 0,826 \text{ volt} \\ Pt | H^2SO^4 | Pt_O &= 0,190 \text{ volt} \\ Pt_H | H^2SO^4 | Pt_O &= 1,02 \text{ volt} \end{aligned}$$

Markowski, le cui misure sono state eseguite con molta cura, ha ottenuto

$$\begin{aligned}Pt_H|H^2SO^4|Pt &= 0,646 \text{ volt} \\Pt|H^2SO^4|Pt_O &= 0,372 \text{ volt} \\Pt_H|H^2SO^4|Pt_O &= 1,02 \text{ volt}\end{aligned}$$

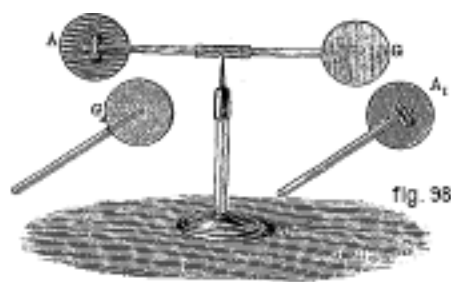
Entrambi gli osservatori hanno trovato lo stesso valore di  $1,02 \text{ volt}$  per la combinazione  $Pt_H$  e  $Pt_O$ , sebbene i loro valori per i componenti fossero diversi. Una forza elettromotrice si ottiene anche nel caso in cui le due lamine di platino siano ricoperte da uno stesso gas, a pressioni diverse, il che si ottiene facilmente, aggiungendo ad uno degli elettrodi un gas indifferente al gas attivo. Tali elementi sono stati studiati da Bose (1900), il quale, inoltre, ha compiuto uno studio generale ed esaustivo dell'elemento a gas considerato sotto tutti i punti di vista; tra l'altro ha trovato che la forza elettromotrice prodotta dalla presenza di un gas dipende direttamente dalla solubilità di questo gas nel metallo che forma l'elettrodo. Wulf (1904) ha studiato come la forza elettromotrice dipende dalla pressione e ha scoperto che questa dipendenza (fino a  $1000 \text{ atm}$ ) concorda con la teoria di Helmholtz.

#### 14. Attrito, come sorgente di elettricità. Triboelettricità

Abbiamo studiato nei §§ da 3 a 13 il semplice contatto dei corpi, come fonte di elettricità. Passiamo ora a considerare le altre fonti e ci occuperemo prima dell'attrito. L'elettrizzazione dovuta all'attrito di corpi non conduttori ha reso noti per la prima volta alcuni dei più semplici fenomeni elettrici; fino alla fine del Settecento l'attrito rappresentava l'unica fonte di elettricità, se si esclude l'induzione elettrostatica, anch'essa annoverabile tra le fonti di elettrificazione. La capacità dell'ambra strofinata di attrarre corpi leggeri era già nota nell'antichità. Fino al 1600, questo fatto è rimasto isolato nell'illimitato dominio dei fenomeni elettrici che ci sono familiari. Nel 1600 Gilbert scoprì che anche altri corpi (zolfo, resina, vetro, pietre preziose, ecc.) acquisiscono per attrito la capacità di attrarre corpi leggeri. Otto V. Guericke (1671) scoprì poi che questi corpi leggeri, dopo il contatto con i corpi strofinati, ne sono respinti. Nel 1694 Boyle osservò che l'attrazione è reciproca, cioè che per parte loro i corpi strofinati sono attratti dai corpi circostanti. Stephen Gray (1729) in seguito evidenziò la differenza tra le proprietà dei conduttori e degli isolanti e, per la prima volta, elettrizzò i conduttori fissandoli a degli isolanti. Nel 1734 Dufay per primo indicò che esistono due tipi di elettricità e trovò le regole della loro mutua azione. Winkler (1744) fu anche il primo ad utilizzare un cuscino di pelle come elemento sfregante, e Canton (1762) ricoprì questo cuscino con un amalgama di stagno, poi sostituito da Kienmayer con un amalgama di stagno e zinco.

L'attrito di due corpi l'uno contro l'altro li elettrizza entrambi e le loro cariche hanno la stessa grandezza, ma sono di segno opposto. L'elettrizzazione per attrito e la comparsa di cariche di diversa natura possono essere dimostrate nel modo seguente: su una punta verticale (fig. 98) può ruotare liberamente una bacchetta di vetro, alle cui estremità sono fissati un disco di vetro  $G$  e un disco di legno  $A$ , rivestito da un lato di pelle spalmata di amalgama. Due dischi identici  $G_1$  e  $A_1$  sono fissati alle estremità delle bacchette di vetro. Se si strofina l'uno contro l'altro  $A$  e  $G_1$  o  $G$  e  $A_1$  (o  $A$  e  $G$ ,  $A_1$  e  $G_1$ ),  $G$  e  $G_1$  si elettrizzano positivamente,  $A$  e  $A_1$  negativamente. Avvicinando a turno  $A_1$  e  $G_1$  a  $A$  e  $G$ , ci si può convincere che  $A$  e  $A_1$ ,  $G$  e  $G_1$  hanno elettrizzazioni dello stesso nome,  $A$  e  $G_1$ ,  $A$  e  $G$  elettrizzazioni di nomi opposti. Molti fisici hanno studiato l'influenza di varie circostanze, come le dimensioni le superfici che si sfregano, la velocità del movimento, la grandezza della pressione nell'attrito, ecc., sull'elettrizzazione ottenuta. Così Riecke ha trovato che, a parità di altre circostanze, la massima densità ottenibile della carica è tanto minore quanto più grandi sono le superfici di attrito.





Tutti i corpi possono essere distribuiti in una serie, in cui ognuno sfregato contro uno di quelli che lo precedono si elettrizza negativamente, e contro uno di quelli che lo seguono positivamente. Tali serie sono state stabilite da Wilcke, Young, Herbert, Faraday, e altri. La serie di Wilcke è la seguente: vetro, lana, piume, legno, vernice, cera bianca, vetro smerigliato, P, S, metalli. Faraday ha dato la seguente serie: pelliccia di gatto e orso, flanella, avorio, piume, cristallo di rocca, vetro flint, cotone, seta bianca, mano umana, legno, gommialacca, metalli (Fe, Cu, ottone, Sn, Ag, Pt), zolfo. Non si deve inoltre trascurare che modificazioni talvolta insignificanti nelle proprietà della superficie dei corpi, come pure il modo di sfregamento, la temperatura, ecc. influenzano in larga misura la posizione di un corpo nella serie. Citiamo alcuni esempi. Il vetro smerigliato strofinato con lana, legno, carta e con mano asciutta si elettrizza negativamente; il vetro comune al contrario, positivamente. Se il vetro smerigliato e il vetro comune vengono strofinati l'uno contro l'altro, il primo diventa (-), il secondo (+). Il vetro comune, dopo essere stato riscaldato in una fiamma ad olio, di etere, di zolfo, di carbonio, d'idrogeno, nonché dopo immersione in  $H^2SO^4$ ,  $HCl$ ,  $HAsO^3$ , lavato ed asciugato, diventa (-), quando prima era diventato (+). Strofinata con quasi tutti i corpi, una superficie nuova di guttaperca si elettrizza (-), una superficie vecchia (+). Un nastro di cotone o di seta a volte si elettrizza in modo diverso, a seconda che lo sfregamento avvenga in senso longitudinale o trasversale. È particolarmente interessante che anche corpi identici, come i due pezzi di un corpo di aspetto omogeneo che sono stati rotti, si carichino di elettricità di nomi opposti, quando vengono strofinati l'uno contro l'altro. La polvere di cotone sembra essere la più negativa di tutti i corpi. Il ghiaccio sfregato contro molti corpi solidi, così come con l'acqua, si elettrizza positivamente.

Hésénhous (1901) ha studiato da moltissimi punti di vista come l'elettrizzazione per attrito dipenda dalle proprietà dei corpi scelti. Ha indicato casi in cui l'attrito di corpi del tutto diversi non produce elettrizzazione (metallo e certi tipi di legno). Dedusse inoltre da esperimenti fatti con Georgiewski (1902) che nell'attrito di due corpi chimicamente identici, il più denso si elettrizza positivamente. L'aumento di densità poteva essere ottenuto per lucidatura (metalli, gesso, marmo, ebanite, legno, ecc.) o per deformazione (compressione per vetro, estensione per gomma); un disco flessibile di ebanite, strofinato con un altro disco non deformato, dà (+) sulla faccia concava, (-) su quella convessa. La polvere, che scorre sulla superficie di un corpo, da cui proviene (marmo, vetro, neve), si elettrizza negativamente.

La serie, di cui si è parlato sopra e secondo la quale si possono disporre i dielettrici, coincide con quella che si ottiene classificando gli stessi corpi secondo il loro grado di durezza. A titolo di esempio, Hésénhous fornisce le seguenti serie: (+) diamante (10), topazio (8), cristallo di rocca (7), vetro levigato (5), mica (3), calcite (3), zolfo (2), cera ( $< 1/4$ ) (-); i numeri tra parentesi indicano il grado di durezza secondo la scala usata dai mineralogisti. Nel contatto dei metalli si ottiene esattamente il fenomeno opposto. Per i dielettrici liquidi, la sostanza che ha la massima tensione superficiale o la massima costante dielettrica ha (+). Riscaldandosi, il dielettrico diventa dapprima negativo rispetto alla stessa sostanza non riscaldata; ma a una temperatura più alta diventa positivo. Così lo zolfo a  $80^\circ$  manifesta (-) e a  $120^\circ$  un forte (+), in momentaneo contatto con lo zolfo freddo.

Hésénhous ha anche scoperto che, sotto l'influenza del radio, il vetro, il quarzo e la mica acquistano rapidamente la proprietà di elettrizzarsi positivamente, quando vengono strofinati

con le stesse sostanze non precedentemente sottoposte all'azione del radio. Ebanite, zolfo e selenio diventano prima negativi, ma poi anche positivi, sotto l'azione prolungata del radio.

L'elettrizzazione dei metalli per attrito è stata studiata da Cavallo, Haüy, De la Rive, Macfarlane, Gaugain, Faraday, Dessaignes e molti altri. De la Rive ha trovato che tutti i metalli si elettrizzano negativamente per attrito con una mano asciutta, l'avorio, il corno, il sughero, la gomma e la resina. Quando la superficie del metallo è ricoperta da uno strato di ossido, a volte si osserva anche un'elettrizzazione positiva. Macfarlane e Gaugain hanno trovato che tutti i metalli sono positivamente elettrizzati nell'attrito con lo zolfo. Va detto che i risultati ottenuti dai vari osservatori sono estremamente contraddittori. Anche il mercurio si elettrizza, quando vi si immerge e si estrae rapidamente una bacchetta di vetro, ceralacca, calcite, ecc. L'elettrizzazione di polveri sottoposte ad attrito ha un interesse pratico. Quando una polvere viene fatta passare attraverso un setaccio o un pezzo di mussola, per esempio, essa viene generalmente elettrizzata; così, lo zolfo in fiore come il minio in polvere, setacciati separatamente attraverso la mussola, sono elettrizzati negativamente; ma, se si setaccia una miscela di zolfo e di minio, in conseguenza dell'attrito tra le particelle delle due sostanze, lo zolfo si elettrizza negativamente e il minio positivamente. Quando si cosparge con questa miscela la superficie di un corpo, le cui diverse regioni sono cariche di elettricità di nomi opposti, lo zolfo si raccoglie nei punti che sono elettrizzati positivamente e il minio in quelli dove l'elettrizzazione è negativa. In questo modo si formano sulla superficie configurazioni di macchie rosse e gialle. Tali configurazioni sono generalmente dette figure di Lichtenberg, dal nome dello scienziato che si è servito principalmente dell'aspersione per studiare la distribuzione dell'elettricità sulla superficie degli isolanti. Villarsy (1788) per primo utilizzò una miscela di zolfo e minio. Buerker (1900) ha mostrato che una miscela di tre polveri - carminio, lycopodio e zolfo fiorito - dà ottimi risultati. Le regioni positive mostrano macchie rosse luminose e le regioni negative macchie gialle, i cui dettagli sono molto meglio visibili rispetto a quando si utilizza una miscela di zolfo e minio.

Ebert e Hoffmann (1900) hanno osservato che i metalli (ottone, Al, Fe, Zn, Pb, Cu, Ag, Au, Pt, Pd, Sn) così come gli isolanti (ceralacca, vetro, legno, resina) immersi in aria liquida si elettrizzano negativamente. Si sono convinti che la causa di questa elettrizzazione vada ricercata nell'attrito delle cellule considerate con le minuscole particelle di ghiaccio contenute nell'aria liquida. Sembra quindi che quasi tutti i corpi strofinati con ghiaccio molto freddo si elettrizzino negativamente.

Non risulta che gas e vapori secchi (surriscaldati) siano elettrizzati per attrito sulla superficie dei corpi solidi. Per quanto riguarda l'attrito dei gas sui liquidi, si può citare l'esperimento di Lord Kelvin, secondo il quale i gas si elettrizzano passando attraverso l'acqua o soluzioni di sali. Nell'attrito di un gas o di un vapore contenente particelle liquide, si produce talvolta una fortissima elettrizzazione. Questo fenomeno fu studiato per la prima volta da Armstrong (1844) e poi da Faraday, le cui ricerche si concentrarono in particolare sull'attrito del vapore umido che scorre ad alta pressione attraverso tubi di diverse sostanze. Faraday ha scoperto che l'aria, che contiene il vapore dell'acqua, della trementina o dell'olio d'oliva, è elettrizzata dall'attrito sul rame. L'elettrizzazione del vapore acqueo, che fuoriesce da una caldaia all'aria aperta attraverso un tubo, dipende dalla natura delle gocce contenute in questo vapore, oltre che dalla sostanza del tubo. Nella maggior parte dei casi, il vapore si elettrizza positivamente; l'elettrizzazione è particolarmente forte, quando il vapore deve fluire attraverso un tubo tortuoso, la cui parete interna è formata da certi tipi di legno. La costruzione della macchina elettrica di Armstrong, che descriveremo in seguito, si basa su questo fenomeno. Anche l'acido carbonico liquido è fortemente elettrizzato quando fuoriesce da una bottiglia di ferro attraverso un tubo; ma, se il tubo viene riscaldato in modo che sia attraversato solo da acido carbonico gassoso, non si manifesta alcuna elettrizzazione.

Fin qui la questione del meccanismo, con cui l'elettricità si origina per attrito, non è risolta. La più probabile è che l'attrito rappresenta un caso particolare del contatto di corpi, in cui è

particolarmente favorita l'azione delle cause che in genere producono elettrizzazione al contatto.

Hésélous ha dato, per l'elettrizzazione dei corpi a contatto, e di conseguenza anche a causa dell'attrito, una spiegazione basata sulla teoria degli elettroni. A contatto con i corpi, la tensione superficiale diminuisce, così che parte degli elettroni si libera. Gli elettroni negativi, essendo i più mobili, devono uscire dal corpo più velocemente degli elettroni positivi. Quando i corpi a contatto differiscono solo per la loro densità, il più denso rilascia più elettroni e di conseguenza si elettrizza positivamente. Lo stesso vale per i dielettrici riscaldati, la cui densità diminuisce all'aumentare della temperatura. Ma, in un forte riscaldamento, l'aumento della dissociazione, cioè il più rapido rilascio di elettroni, prende il sopravvento, per cui cambia il segno dell'elettrizzazione. Nei metalli, la proprietà di emettere ioni, che diminuisce all'aumentare della densità del metallo, gioca il ruolo principale. Quanto maggiore è la costante dielettrica  $K$  di una sostanza, tanto più debole è l'intensità dell'azione reciproca tra gli elettroni, vedi (11), e tanto più facilmente si effettua il loro rilascio. Di conseguenza, in due dielettrici a contatto, quello con il  $K$  più grande si elettrizza positivamente.

Si può chiamare l'elettricità ottenuta per attrito *triboelettricità*. Questa denominazione era stata dapprima data all'elettricità che compare, in certe particolari circostanze di attrito, tra corpi di diversa natura; ma si è riconosciuto in seguito che, proprio in questo caso, il ruolo principale spetta al riscaldamento che avviene nell'attrito e che si produce un fenomeno termoelettrico che considereremo in seguito.

Anche il raschiamento e lo schiacciamento dei corpi sono fonti di elettricità. Molti autori pensano di poterli identificare, comunque, con la fonte di elettricità sopra considerata, l'attrito. Altri ritengono, invece, che lo strappo meccanico che avviene nel raschiamento e nello schiacciamento produca spesso un'azione ben diversa dall'attrito superficiale. Quando i piccoli pezzi staccati da un corpo per raschiamento su una piastra metallica collegata con un elettroscopio, è facile mostrare il loro stato elettrico. Si trova così che il ghiaccio è positivamente elettrizzato, essendo questo in accordo con gli esperimenti di Eebert e Hoffmann. Per altre sostanze il risultato talvolta varia a seconda che la raschiatura avvenga con un coltello smussato o affilato; in quest'ultimo caso, l'elettricità del coltello ha il tempo di passare sulle particelle raschiate. Wüllner ha riscontrato che le particelle staccate per raschiatura dalla ceralacca sono talvolta positivamente elettrizzate.

Abbiamo ricordato un lavoro di Coehn. La regola da lui formulata, secondo la quale, nel contatto di due corpi, quello che possiede la maggiore costante dielettrica si elettrizza positivamente, vale anche per le elettrizzazioni che si manifestano nell'attrito dei dielettrici.

## 15. Altre sorgenti di elettricità

Dopo aver considerato il contatto e l'attrito, daremo ora uno schema delle altre sorgenti di elettricità, alcune delle quali saranno studiate più in dettaglio in altre parti di questo lavoro. Parleremo anche di fenomeni che sono stati a lungo considerati fonti di elettricità e lo sono tuttora da alcuni autori, ma che ovviamente non dovrebbero essere considerati come tali.

I. PASSAGGIO DI CORPI DA UNO STATO DI AGGREGAZIONE A UN ALTRO. - Citiamo questa fonte di elettricità, riconosciuta oggi come priva di esistenza propria, per l'importanza storica delle lunghe lotte suscitate dalla questione di sapere se vi sia elettrizzazione nel passaggio dei corpi da uno stato di aggregazione all'altro (eccetto la cristallizzazione), specialmente nell'evaporazione e nell'ebollizione. Molti fisici, in particolare Volta e successivamente Palmieri, affermarono che la vaporizzazione dell'acqua era di per sé una fonte di elettricità e che il vapore prodotto è positivamente elettrizzato.

Ma le ricerche condotte con grande cura da numerosi sperimentatori (Blake, Kalischer, Petinelli) hanno mostrato che anche la tumultuosa vaporizzazione dell'acqua pura non è una sorgente di elettricità. Quando si versa, in un piccolo crogiolo rovente, una goccia di qualsiasi

soluzione salina ( $CuSO_4$ , in particolare), questa goccia assume prima la forma sferoidale, e poi, quando la temperatura del crogiolo è scesa a sufficienza, avviene il contatto diretto con la parete, la vaporizzazione quasi istantanea della goccia, e una parte della quale viene proiettata in tutte le direzioni. Un elettroscopio collegato al crogiolo indica in questo momento un'elettrizzazione piuttosto forte. Non c'è dubbio che la fonte di questa risiede nell'attrito tra le particelle del liquido e il sale depositato sulla parete del crogiolo, così come tra il sale e questa parete. L'elettrizzazione del crogiolo è quasi sempre negativa; è positiva quando la goccia contiene Br, I o KOH.

II. CRISTALLIZZAZIONE. - La formazione di cristalli rappresenta anche una fonte di elettricità molto dubbia. Nella solidificazione di una sostanza fusa, spesso compaiono cariche elettriche in superficie; ma si spiegano facilmente con l'attrito sulla parete del vaso della sostanza semi solidificata, che continua a contrarsi e ha un coefficiente di dilatazione diverso dal vaso (per esempio lo zolfo fuso in un vaso di vetro). Ci sono casi in cui la formazione di cristalli all'interno di una soluzione è accompagnata da una emissione di luce che ricorda le scariche elettriche. Un fenomeno di questo tipo è stato a lungo osservato nella cristallizzazione dell'acido arsenico, dell'idrossido di potassio, della soda e di alcuni altri sali. Bandrowski ha osservato una luce molto intensa, talvolta anche deboli scintille, all'interno di soluzioni in cui avveniva una cristallizzazione molto rapida, ad esempio in una soluzione satura di NaCl, nella miscela di acqua con alcool. È molto probabile che, anche in questo caso, la fonte dell'elettrizzazione sia l'attrito all'interno della soluzione. È anche possibile che qui abbia un ruolo una delle altre fonti di elettricità, che si manifestano proprio nei cristalli e che considereremo poco dopo (piezoelettricità e piroelettricità).

III. REAZIONI CHIMICHE. - Abbiamo visto che la vecchia teoria chimica poneva la fonte dell'elettrizzazione dei corpi a contatto in un processo chimico che avviene direttamente tra i corpi a contatto o tra questi corpi e l'ambiente circostante. La questione se le reazioni chimiche possano produrre un'elettrizzazione delle sostanze reagenti o delle sostanze che si formano nella reazione è quindi di grandissimo interesse. Attualmente si può ritenere assodato che le reazioni chimiche non rappresentino di per sé una fonte di energia elettrica, vale a dire che non vi sono reazioni in cui le sostanze reagenti o i prodotti della reazione manifestano una elettrizzazione che deve essere attribuita alla reazione stessa. Ci sono, è vero, un gran numero di casi in cui l'elettrizzazione di uno dei corpi reagenti è facilmente dimostrata da un elettroscopio collegato a questo corpo; ma, se si studia più da vicino tale fenomeno, ecco le conclusioni a cui siamo condotti.

In alcuni casi l'attrito, che avviene durante la reazione tra i diversi corpi presenti, costituisce la vera sorgente di elettricità; tali sono le reazioni accompagnate da esplosioni. In altri casi si produce, durante la reazione, un contatto dei corpi, che costituisce anche, senza reazione marcata, una sorgente di elettricità; possiamo citare come esempio la dissoluzione dei metalli negli acidi, che è accompagnata da un'elettrizzazione negativa dell'acido. Ma un'identica elettrizzazione si osserva nel contatto dei metalli con acidi, soluzioni di sali e in genere con elettroliti, mentre non avviene alcuna reazione chimica visibile.

Infine, c'è un numero molto limitato di casi in cui è molto difficile dare un'indicazione della vera fonte dell'elettrizzazione. Tale è, ad esempio, la combustione del carbone su una piastra metallica in comunicazione con un elettroscopio; questo manifesta un'elettrizzazione negativa, mentre una piastra metallica posta sopra il carbone è elettrizzata positivamente. Siamo qui in presenza di un fenomeno molto complesso, contatto di metalli, carbonio e acido carbonico, e non si può affermare che il processo di ossidazione del carbonio sia la fonte essenziale dell'elettrificazione. F. Exner ha condotto tutta una serie di esperimenti, con i quali sperava di dimostrare che l'ossidazione dei metalli, ad esempio, è accompagnata dalla loro elettrizzazione; ma Schulze-Berge e altri hanno dimostrato che gli esperimenti di Exner non possono essere considerati conclusivi.

Si possono inoltre commettere fraintendimenti di altra natura, semplicemente chiedendo se le reazioni chimiche sono fonti di elettricità. Le sostanze reagenti possiedono una riserva di energia

che può assumere altre forme, energia termica, energia di movimento visibile, energia radiante e, in determinate circostanze, anche energia elettrica. Se un motore a vapore o a gas mette in moto una macchina di Holtz (vedi oltre) o una dinamo, una parte della riserva iniziale di energia chimica (combustibile, gas) viene infine trasformata in energia elettrica. Ma evidentemente nessuno penserà in questo caso di considerare l'energia chimica come la fonte dell'energia elettrica nel senso che attribuiamo, in questo capitolo, all'espressione fonte dell'elettricità. Partendo dal principio di conservazione dell'energia, si potrebbe dire che in generale qualsiasi forma di energia può servire come fonte di energia elettrica, anche se non direttamente, e che non può esserci altra fonte di quest'ultima.

In una catena chiusa (considereremo tale catena in seguito), appare l'energia elettrica della corrente, ma questo è vero solo con una riserva particolare, come l'equivalente delle reazioni chimiche che si verificano nell'elemento di pila generatore di corrente. Ma non ne consegue affatto che queste reazioni rappresentino la causa, che siano la fonte diretta dell'energia elettrica della corrente. Una catena chiusa ricorda una macchina piuttosto complessa, nel cui funzionamento viene trasformata in energia elettrica o tutta l'energia chimica o parte di essa, o non solo energia chimica, ma allo stesso tempo anche una parte di energia termica dei corpi dell'ambiente circostante. Nell'elemento ci sono ioni liberi in movimento e nuovi ioni si formano mentre altri scompaiono. Le reazioni chimiche e la comparsa dell'elettricità procedono qui in parallelo, e non si può considerare uno di questi fenomeni come la causa o la sorgente dell'altro. La vecchia teoria chimica doveva supporre che le reazioni chimiche fossero di per sé fonti di elettricità, perché spiegava con queste reazioni l'elettizzazione al contatto. Ma, come si è detto, nessun fatto è ancora giunto a dimostrare l'esattezza di questa ipotesi e bisogna dire che una reazione chimica non può di per sé servire come fonte diretta per la produzione di cariche elettriche. La presenza di ioni gioca un ruolo molto importante, forse anche il ruolo principale, nell'elettizzazione. La questione si complica se ci si chiede quale sia il ruolo degli ioni nelle reazioni chimiche. Si può supporre che gli spostamenti chimici e l'elettizzazione avvengano in parallelo in certe condizioni, come risultato della stessa causa fondamentale, che forse è da ricercare negli ioni liberi.

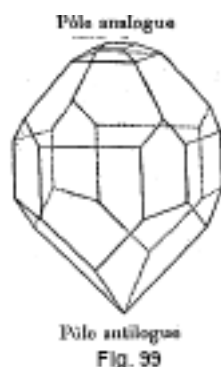
IV. TERMOELETTICITÀ. - Abbiamo visto che, in una sequenza di conduttori della prima classe collegati successivamente tra loro, ad esempio in una sequenza di metalli A, B, C, ..., M, A dove l'ultimo metallo è uguale al primo, la somma delle forze elettromotrici agenti è nulla, cioè che i metalli A posti agli estremi della catena sono allo stesso potenziale. Ma questo è vero solo nel caso in cui tutti i contatti o le saldature di metalli di diversa natura siano alla stessa temperatura. Quando queste temperature non sono le stesse, per esempio quando una o più saldature vengono riscaldate o raffreddate, i metalli estremi A sono a potenziali diversi. Ciò mostra che, a disuguale temperatura delle saldature, la somma delle forze elettromotrici agenti nella catena considerata non è nulla, che una variazione di temperatura delle saldature appare come causa del fenomeno o, analogamente, come la causa che produce nuove forze elettromotrici dette forze termoelettromotrici. I fenomeni corrispondenti a queste nuove forze sono detti termoelettrici. Ne consegue che deve esserci una stretta connessione tra fenomeni termoelettrici e fenomeni elettrici generalmente osservato al contatto di conduttori della prima classe. Uno studio più approfondito dei fenomeni termoelettrici verrà fatto più avanti, nel capitolo sulla corrente elettrica. Ci limiteremo per il momento ad accennare al fatto che questi fenomeni si manifestano sia alle superfici di contatto tra i metalli e gli elettroliti, sia tra gli elettroliti stessi.

V. PIROELETTICITÀ. - I cristalli, sottoposti a riscaldamento o raffreddamento, manifestano in determinati punti della loro superficie uno stato elettrico. I fenomeni corrispondenti sono detti *piroelettrici*. Furono osservati per la prima volta sulla tormalina, conosciuta in Europa dalla fine del XVI secolo. Si ricorda in un libro del 1707 che il medico militare polacco Daum riportò dall'isola di Ceylon una pietra che, messa nella cenere calda, prima attira quest'ultima, poi la respinge. Aepinus (la cui memoria originale fu stampata a San Pietroburgo nel 1762)

fu il primo a riconoscere il carattere elettrico di questo fenomeno e osservò che le due metà della tormalina possiedono elettrizzazioni di nomi opposti. Ulteriori ricerche sono dovute a Wilcke, Wilson, Muschenbroeck e Bergmann. Nel 1769 Canton fece l'importante scoperta che le elettricità di nomi opposti compaiono alle due estremità del cristallo, non perché sia portato a tale temperatura, ma perché la sua temperatura varia. È durante l'aumento della temperatura che compaiono alle due estremità elettrizzazioni di nome opposto; durante il raffreddamento si manifestano alle stesse estremità delle elettricità contrarie. L'intensità dell'elettrizzazione è tanto maggiore quanto più rapida è la variazione di temperatura. Se si riscalda dapprima una metà del cristallo, per poi raffreddarla, mentre l'altra viene riscaldata per conduzione, si ottengono temporaneamente alle due estremità elettrizzazioni dello stesso nome. Quando si rompe un cristallo prima riscaldato completamente e che è in fase di raffreddamento, si scopre che ogni pezzo ha le stesse proprietà dell'intero cristallo, vale a dire che le estremità di un pezzo possiedono tutte elettrizzazioni di nomi opposti. Una tormalina che si raffredda e ridotta in polvere, dà sfere di piccoli cristalli attaccati gli uni agli altri, che si staccano quando la temperatura della polvere comincia a cambiare.

L'estremità, che è elettrizzata positivamente nell'aumento di temperatura (temperatura e potenziale aumentano o diminuiscono contemporaneamente), è detta, secondo una proposizione di Rose, polo analogo, e l'estremità opposta polo antilogo.

Canton, Haüy, Brewster, Gauguin e altri ancora hanno trovato proprietà piroelettriche in misura minore su altri cristalli (topazio, boracite, titanite, quarzo, ecc.). Le ricerche più estese sulle proprietà piroelettriche dei cristalli si devono ad Hankel.



Haüy è stato il primo ad indicare che i cristalli piroelettrici presentano, rispetto alla loro forma esterna, una particolarità detta *emimorfismo*, dove la distribuzione delle sfaccettature alle due estremità di un certo asse cristallografico non è la stessa. Si può citare come esempio la calamina, il cui cristallo è rappresentato in figura 99; il polo analogo, essendo l'asse verticale, è definito dalla faccetta orizzontale superiore e il polo antilogo dalle facce dell'ottaedro rombico inferiore. Haüy ha scoperto che la boracite possiede quattro assi elettrici, ciascuno dei quali ha poli di nomi contrari, dove l'asimmetria, cioè l'emimorfismo si osservano su ognuno di questi assi. Kolenko e Hankel hanno trovato che il quarzo possiede tra assi elettrici, quindi sei poli, posti sui sei spigoli paralleli del prisma a sei piani; qui l'asimmetria si osserva nella distribuzione delle troncature triangolari e poligonali, come indicato nel volume II, nel capitolo sulla rotazione del piano di polarizzazione dei raggi luminosi.

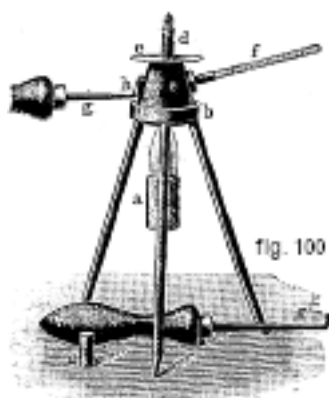
Altre volte si credeva che l'emimorfismo è una condizione necessaria per i fenomeni piroelettrici e che gli assi elettrici hanno sempre una polarità, cioè che le estremità di questi assi manifestano elettrizzazioni di nomi contrari. Hankel ha mostrato per primo che tutti i cristalli possiedono proprietà piroelettriche, se alcune circostanze esterne non vi si oppongono, come ad esempio una eccessiva conducibilità dello strato superficiale. La sola condizione che deve essere soddisfatta è l'esistenza di assi disuguali; ora, tali si trovano anche nei cristalli del sistema regolare, perché gli

assi tracciati nelle facce del cristallo non sono uguali a quelli che passano per gli spigoli. Questi assi elettrici non hanno però polarità, cioè alle due estremità dell'asse compaiono elettricità dello stesso segno; d'altra parte, gli stessi assi, ad esempio durante il raffreddamento, sono alternativamente positivi e negativi alle due estremità. Gli assi con polarità costituiscono quindi la stessa eccezione dell'emimorfismo. Titanite e boracite, secondo Hankel, offrono la particolarità che sia in riscaldamento che in raffreddamento, si ha un cambio di segno dell'elettrizzazione su alcuni poli della titanite e che anche un'elettrizzazione è sostituita due volte dall'elettrizzazione opposta nella boracite.

Nei cristalli emimorfi che possiedono uno o più assi con polarità si osserva anche un'elettrizzazione nel caso in cui la temperatura soggetta a variazione è la stessa in tutto il cristallo. Nei cristalli simmetrici con assi senza polarità, l'elettrizzazione si manifesta solo con un riscaldamento non uniforme, legato a forze elastiche interne al cristallo.

L'elettricità che appare ai poli di una tormalina può essere determinata coprendo le superfici terminali con un foglio di stagno messo a terra mediante uno strumento di misura. Le leggi del fenomeno sono state chiaramente stabilite dai delicatissimi esperimenti di Gaugain e si possono riassumere nel modo seguente. La carica elettrica che si produce su una bacchetta di tormalina riscaldata tra le temperature  $t_1$  e  $t_2$  è proporzionale alla sezione trasversale del cristallo, indipendentemente dalla sua lunghezza, e rimane la stessa qualunque sia il modo e la durata della variazione delle temperature. Una carica uguale e di segno opposto è prodotta dal raffreddamento da  $t_2$  a  $t_1$ , per cui se, rimanendo isolata la tormalina, la si fa passare attraverso un ciclo chiuso di temperature ritornando poi al punto di partenza, essa si ritrova nello stato iniziale.

Kundt ha indicato che una miscela di fiori di zolfo e minio è conveniente per la ricerca della distribuzione delle due elettricità sulla superficie del cristallo. Ha anche costruito uno strumento adatto allo studio dei cristalli. Un treppiede  $a$  (fig. 100) porta un anello  $b$ , sul quale è posto un vaso conico cavo  $c$ ; al centro di  $c$  c'è il serbatoio del termometro  $f$ ;  $e$  è un piatto di mica.



Nella parte superiore possono essere incastonati dei tubicini  $d$  di diversi calibri, nei quali vengono introdotti i cristalli da studiare. Raggiunta la temperatura richiesta, il recipiente  $c$  viene rimosso utilizzando il gancio  $g$  (mostrato due volte in figura) che si infila nell'anello  $h$ . La miscela di zolfo e minio viene cosparsa sul cristallo di raffreddamento.

Riecke ha richiamato l'attenzione sul fatto che la carica  $\eta$ , varia durante il raffreddamento, non solo come risultato della variazione della velocità del raffreddamento stesso, ma anche a causa della conduttività dello strato superficiale e ha cercato teoricamente come varia la grandezza  $\eta$  in funzione del tempo.

Quando l'aumento di temperatura è notevole, le proprietà piroelettriche scompaiono, probabilmente perché il cristallo diventa conduttore.

La teoria dei fenomeni piroelettrici è stata sviluppata da G. Wiedemann, W. Thomson (Lord Kelvin), Riecke, Lippmann, J. e P. Curie, Duhem E W. Voigt,

Applicando i due principi della termodinamica ai fenomeni piroelettrici, si stabilisce facilmente che il calore latente nella variazione del potenziale non ha valore nullo, cioè che, nell'elettrizzazione di un polo, deve esserci un riscaldamento o un raffreddamento del cristallo, a seconda che questa elettrizzazione avvenga durante il raffreddamento o il riscaldamento del cristallo. Straubel (1902) ha confermato questa proposizione per la prima volta con esperimenti sulla tormalina.

W. Thomson (1878) e Riecke (1885) hanno stabilito una teoria basata sull'ipotesi che le particelle di un cristallo hanno sempre una polarità elettrica, cioè siano analoghe alle cellule di un dielettrico polarizzato o, come noi vedremo più avanti, ad un magnete permanente. Ogni particella ha le sue cariche di nomi opposti, la cui azione però non si manifesta, perché mascherata dalle azioni delle cariche indotte nel mezzo ambiente. Durante una variazione di temperatura, l'equilibrio iniziale viene perturbato e si ristabilisce solo gradualmente. Riecke ha scoperto che la tormalina, riscaldata e poi lasciata raffreddare, conserva tracce di elettrizzazione per 30 ore, sebbene dopo un'ora la sua temperatura non superi più quella del mezzo ambiente di  $\frac{1}{2}$  di grado.

J. e P. Curie (1880), considerando il fenomeno in modo leggermente diverso, hanno assimilato ogni molecola o ciascuna delle parti di tormalina ad un coppia di Volta, ad esempio rame e zinco, in cui è presente una forza elettromotrice di contatto. Tutte queste parti, essendo separate da un dielettrico isotropo equivalente a uno strato d'aria, formerebbero una serie di condensatori sovrapposti.

Parleremo poco oltre della teoria di Voigt e, nel Capitolo successivo, della teoria di Lippmann.

VI. PIEZOELETTRICA. - Haüy aveva già notato nel 1817 che la calcite si elettrizza se compressa. J. e P. Curie scoprirono, per così dire, questo fenomeno di nuovo nel 1880 e lo studiarono attentamente su diversi cristalli. L'elettricità, che appare sotto uno sforzo, è chiamata *piezoelettricità*. Si osserva facilmente sulla tormalina, quando è sottoposta ad una compressione nella stessa direzione che abbiamo sopra chiamato asse elettrico. Si ottengono nella compressione le stesse elettrizzazioni nel raffreddamento; nell'estensione, ad esempio in compressione decrescente, così come nel riscaldamento. Variazioni di forma nella stessa direzione producono quindi elettrizzazioni della stessa natura, sia per cause termiche che per cause meccaniche. J. e P. Curie hanno trovato che le quantità di elettricità che compaiono sui cristalli sono proporzionali alla variazione di forza per unità di area, proporzionali alla dimensione della superficie perpendicolare all'asse del cristallo e indipendenti dalla lunghezza del cristallo. Ne consegue che una data variazione totale di sforzo produce la comparsa di due quantità di elettricità uguali, ma di segno opposto, assolutamente indipendenti dalle dimensioni del cristallo. Senza entrare in dettagli, diremo che una variazione di temperatura e una deformazione artificiale producono, negli stessi punti di un cristallo, elettrizzazioni che coincidono dal punto di vista del segno, quando la deformazione artificiale corrisponde a quella che si produce dalla corrispondente variazione di temperatura. La stretta relazione, che si manifesta tra fenomeni piroelettrici e fenomeni piezoelettrici, dovrebbe portare all'idea che i fenomeni piroelettrici siano essenzialmente fenomeni piezoelettrici, vale a dire che le elettrizzazioni nelle variazioni di temperatura abbiano come sorgente le deformazioni che accompagnano queste variazioni di temperatura. E infatti molti autori, W. Thomson, Curie, Röntgen, Riecke, Voigt e altri ancora, hanno cercato di spiegare i due tipi di fenomeni, partendo dalla stessa ipotesi fondamentale. Ci limiteremo ad indicare la teoria di Voigt, la quale suppone che lo stato elettrico di una molecola del cristallo dipenda dalla deformazione che essa subisce e vari contemporaneamente a questa deformazione. Siano  $\Pi_x, \Pi_y, \Pi_z$  le componenti della polarizzazione elettrica che si verifica per deformazione meccanica, le cui sei componenti sono in un punto  $e_1, e_2, e_3, g_1, g_2, g_3$  secondo le nostre precedenti notazioni (Volume I); si può ammettere che  $\Pi_x, \Pi_y, \Pi_z$  sono funzioni lineari delle sei componenti della deformazione, da cui risultano le



equazioni:

$$\begin{aligned}\Pi_x &= \varepsilon_{11}e_1 + \varepsilon_{12}e_2 + \varepsilon_{13}e_3 + \varepsilon_{14}g_1 + \varepsilon_{15}g_2 + \varepsilon_{16}g_3 \\ \Pi_y &= \varepsilon_{21}e_1 + \varepsilon_{22}e_2 + \varepsilon_{23}e_3 + \varepsilon_{24}g_1 + \varepsilon_{25}g_2 + \varepsilon_{26}g_3 \\ \Pi_z &= \varepsilon_{31}e_1 + \varepsilon_{32}e_2 + \varepsilon_{33}e_3 + \varepsilon_{34}g_1 + \varepsilon_{35}g_2 + \varepsilon_{36}g_3\end{aligned}$$

I coefficienti  $\varepsilon$  sono le costanti piezoelettriche. D'altra parte, le sei componenti  $N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3$  sono funzioni lineari delle sei componenti della deformazione, e possiamo quindi anche scrivere

$$\begin{aligned}\Pi_x &= \delta_{11}N_1 + \delta_{12}N_2 + \delta_{13}N_3 + \delta_{14}T_1 + \delta_{15}T_2 + \delta_{16}T_3 \\ \Pi_y &= \delta_{21}N_1 + \delta_{22}N_2 + \delta_{23}N_3 + \delta_{24}T_1 + \delta_{25}T_2 + \delta_{26}T_3 \\ \Pi_z &= \delta_{31}N_1 + \delta_{32}N_2 + \delta_{33}N_3 + \delta_{34}T_1 + \delta_{35}T_2 + \delta_{36}T_3\end{aligned}$$

i coefficienti  $\delta$ , o moduli piezoelettrici, sono direttamente accessibili all'esperimento. Le costanti  $\varepsilon$  si possono esprimere in funzione dei moduli  $\delta$ , se sono note le proprietà elastiche del mezzo. Nel caso generale, ci sono 21 coefficienti elastici, 18 costanti  $\varepsilon$  e 18 moduli  $\delta$ , ma la simmetria cristallina riduce notevolmente il numero di questi coefficienti. Ad esempio, la particolare simmetria del quarzo porta alle formule

$$\begin{aligned}\Pi_x &= \delta_{11}(N_1 - N_2) + \delta_{14}T_1 \\ \Pi_y &= -\delta_{14}T_2 - 2\delta_{11}T_3 \\ \Pi_z &= 0\end{aligned}$$

se si prende come asse  $z$  l'asse ternario del quarzo. La polarizzazione è quindi sempre normale all'asse ternario, poiché la componente  $\Pi_z$  è nulla, e il valore di  $N_2$  non interviene nel fenomeno; in altre parole, una compressione uniforme parallela all'asse ternario non produce elettrizzazione. Consideriamo un parallelepipedo rettangolo, i cui lati  $a, b, c$  sono rispettivamente paralleli agli assi coordinati. Se si esercita una pressione  $P = pbc$  sulle facce  $bc$ , si ha  $N_1 = -p$ ,  $N_2 = T_1 = T_2 = T_3 = 0$ , e  $\Pi_x = \delta_{11}N_1 = \delta_{11}p$ ; il cristallo si polarizza lungo l'asse  $x$ , parallelo alla pressione, e la carica elettrica delle facce è  $\Pi_x bc = \delta_{11}P$ ; questa quantità di elettricità è proporzionale alla pressione e indipendente dall'estensione della superficie. Infine, se la pressione  $P' = p'ac$  si esercita sulle facce  $ac$ , assunte parallele agli assi ternario e binario,  $N_2 = -p_1$ ,  $N_1 = T_1 = T_2 = T_3 = 0$ ; la polarizzazione avviene ancora lungo l'asse binario, ma in verso opposto al precedente, e la carica sulla stessa faccia  $bc$  è  $\Pi'_x bc = \delta_{11}\frac{b}{a}P'$ . I coefficienti coinvolti in queste due compressioni sono uguali e hanno segni opposti, conformemente all'esperienza. Secondo Riecke e Voigt, si avrebbe  $\delta_{11} = 6,45 \cdot 10^{-8}$ , valore molto vicino a quello ottenuto da J. e P. Curie. Lo spigolo  $c$  del parallelepipedo essendo sempre diretto lungo l'asse ternario, supponiamo che il lato  $a$  formi con l'asse binario l'angolo  $\varphi$ . Esercitando una pressione  $p$  per unità d'area sulle facce laterali  $bc$ , si avrà  $T_1 = T_2 = N_3 = 0$ ,  $-p = \frac{N_1}{\cos^2 \varphi} = \frac{T_3}{\sin \varphi \cos \varphi} = \frac{N_2}{\sin^2 \varphi}$ , e quindi  $\Pi_x = -\delta_{11}p \cos 2\varphi$ ,  $\Pi_y = \delta_{11}p \sin 2\varphi$ . La polarizzazione risultante  $\Pi$  e l'angolo  $\Phi$  che essa forma con l'asse  $x$  sono  $\Pi = \delta_{11}p$ ,  $\Phi = -2\varphi$ . Questa polarizzazione è indipendente dall'angolo  $\varphi$  e si trova sul lato dell'asse binario opposto alla compressione; questi risultati sono coerenti con gli esperimenti di Röntgen. Supponiamo ancora che, lo spigolo  $a$  parallelepipedo restando diretto lungo l'asse binario, il lato  $c$  formi l'angolo  $\varphi'$  con l'asse ternario; una pressione  $P = pab$  sulle facce  $ab$  dà allora  $\Pi_y = \Pi_z = 0$  e  $\Pi_x = p(\delta_{11} \sin^2 \varphi' - \delta_{14} \sin \varphi' \cos \varphi)$ . Qualsiasi compressione perpendicolare all'asse binario produce quindi una polarizzazione parallela a tale asse; la misura della carica elettrica sulle facce normali a tale asse permette così di determinare il secondo modulo  $\delta_{14}$  che si trova uguale a  $-45 \cdot 10^{-8}$ . La polarizzazione è nulla per  $\varphi'00$ , che avevamo già visto, e per la condizione  $\tan \varphi' = \frac{\delta_{14}}{\delta_{11}} = -\frac{1,45}{6,45}$ , che corrisponde alle direzioni  $\varphi' = -12,40^\circ$  e  $\varphi' = -12,40^\circ$ . La polarizzazione è massima per le due direzioni rettangolari determinate dall'equazione  $\tan 2\varphi' = \frac{\delta_{14}}{\delta_{11}}$ , che corrisponde alle direzioni  $\varphi' = 83,40^\circ$  e  $\varphi' = -6,20^\circ$ . Quindi il massimo effetto piezoelettrico non corrisponde esattamente a una pressione perpendicolare all'asse ottico e vi è un'altra direzione che questo asse per cui la polarizzazione si annulla.

La simmetria della tormalina corrisponde alle equazioni

$$\begin{aligned}\Pi_x &= \delta_{15}T_2 + 2\delta_{21}T_3 \\ \Pi_y &= \delta_{21}(N_1 - N_2) + \delta_{15}T_4 \\ \Pi_z &= \delta_{31}(N_1 + N_2) + \delta_{33}N_3\end{aligned}$$

quattro diversi moduli sono necessari per rappresentare i fenomeni piezoelettrici. Una compressione parallela all'asse ottico dà  $\Pi_x = \Pi_y = 0$ ,  $\Pi_z = -\delta_{22}p$ ; la polarizzazione avviene allora lungo l'asse ternario, come per la piroelettricità. Una compressione nella direzione dell'asse  $x$ , cioè perpendicolare ad uno dei piani di simmetria, produce una polarizzazione posta in tale piano i cui componenti sono  $\Pi'_z = \delta_{31}p'$  e  $\Pi'_y = \delta_{22}p'$ . Infine, una compressione parallela all'asse  $y$ , cioè nel piano di simmetria, dà ancora la stessa polarizzazione in questo piano. Possiamo facilmente dedurre l'effetto prodotto da qualsiasi compressione. Gli esperimenti di Voigt e Riecke portano ai seguenti valori dei moduli e delle costanti:

$$\begin{aligned}\delta_{33} &= +5,71 \cdot 10^{-8} & \varepsilon_{33} &= -0,49 \cdot 10^4 \\ \delta_{22} &= -0,67 \cdot 10^{-8} & \varepsilon_2 &= -0,49 \cdot 10^4 \\ \delta_{31} &= +0,88 \cdot 10^{-8} & \varepsilon_{31} &= +3,03 \cdot 10^4 \\ \delta_{15} &= +11,02 \cdot 10^{-8} & \varepsilon_{15} &= +7,28 \cdot 10^4\end{aligned}$$

Partendo dall'idea di J. e P. Curie che la piroelettricità sembra essere legata soprattutto alla deformazione lineare del cristallo e che la stessa variazione di temperatura sembra giocare solo un ruolo secondario, Voigt ha calcolato, utilizzando dei moduli piezoelettrici  $\varepsilon_{33}$  e  $\varepsilon_{31}$ , quale sarebbe la polarizzazione della tormalina per una deformazione meccanica corrispondente a quella prodotta nel cristallo da una variazione di temperatura di un grado. Il numero  $\Pi_z = 1,34$  così ottenuto è abbastanza vicino al valore 1,24 determinato direttamente da Riecke, almeno in modo approssimato, per la piroelettricità della tormalina.

Ma le successive ricerche del Voigt (1898) lo convinsero che nei cristalli che possiedono assi dotati di polarità e quindi anche di emimorfismo, esiste una vera e propria piroelettricità prodotta, direttamente dalla variazione di temperatura. Ha scoperto che, per la tormalina, l'80% della piroelettricità osservata era in realtà la piezoelettricità apparsa come risultato della deformazione prodotta dalla variazione di temperatura; il restante 20% costituiva la vera piroelettricità della tormalina. Il vero momento piroelettrico, cioè quello che non deriva dalla deformazione che accompagna il cambiamento di temperatura, ma ha un'origine puramente termica, può essere ricongiunto nel caso più generale, con una variazione di temperatura sufficientemente piccolo  $t$ , dalle formule

$$\Pi_x = r_1 t \quad \Pi_y = r_2 t \quad \Pi_z = r_3 t$$

Le costanti  $r$  si riducono a due nel gruppo cristallino monoclinico, e a una sola in tutti i gruppi emimorfi.

Il caso di induzione piezoelettrica più conveniente da osservare è quello prodotto dalla deformazione omogenea dovuta ad una pressione esercitata sulle estremità di un pezzo di cristallo prismatico. Per rendersi conto di come si comporta un cristallo dal punto di vista piezoelettrico, si possono dare a questa pressione, supposta di intensità costante, tutte le direzioni possibili e considerare la superficie il cui raggio vettore ha come modulo la polarizzazione  $\Pi$  e per direzione quella della corrispondente pressione. Questa superficie piezoelettrica è stata studiata per particolari gruppi cristallini (emiedrici emimorfi del sistema romboedrico e sistema regolare) da Riecke e Voigt (1891) e in generale da F. Bidlingmaier (1900).

Quest'ultimo ha mostrato che, nella maggior parte dei casi, essa appartiene a un particolare tipo di superficie di Steiner; è del 4° grado e ha 3 doppie rette, che hanno un punto in comune; giace interamente all'interno del tetraedro determinato dalle estremità di queste doppie rette. Nei sistemi tetraedrici ed esagonali, la superficie piezoelettrica degenera in un ellissoide di rivoluzione e anche in un disco circolare (quarzo).

Recenti ricerche sono state condotte da P. P. Koch (1906) sull'azione di una deformazione non omogenea prodotta da una corrente di aria calda, e su quella di una deformazione omogenea ottenuta dalla pressione idrostatica. Ha scoperto che in un centimetro cubo di tormalina, per una pressione idrostatica di una dyne, il momento elettrico è  $8,0 \cdot 10^{-8}$  unità CGS. Deformazioni disomogenee erano già state considerate da Voigt e da C. Somigliana (1892). Secondo le osservazioni di Röntgen, la torsione di un cristallo, ad esempio di una bacchetta cilindrica di quarzo, produce effettivamente un'elettrizzazione, che cambia segno quando la bacchetta viene torta.

Lord Kelvin (1893) ha costruito un modello di cristallo piezoelettrico formato da una serie di lastre di rame e zinco saldate insieme e separate da strati di una sostanza elastica; come abbiamo detto, J. e P. Curie (1882) avevano già proposto in precedenza un modello di questo tipo.

La questione dei fenomeni inversi della piezoelettricità, cioè le deformazioni prodotte dall'elettrizzazione, verranno trattate nel capitolo successivo.

VII. ENERGIA RADIANTE COME FONTE DI ENERGIA ELETTRICA. - In alcuni casi un'elettrizzazione è prodotta più o meno direttamente dall'energia radiante. Non vogliamo parlare dei fenomeni osservati nell'elemento fotoelettrico, che è composto da due lastre identiche, ad esempio da due placche di argento iodato in un liquido; quando una di queste lastre è illuminata, lasciando l'altra in ombra, si stabilisce tra loro una differenza di potenziale. L'intima natura di questo fenomeno, su cui si tornerà più avanti, risiede ovviamente in un'azione fotochimica a cui è sottoposta la lastra fotosensibile.

Esistono altri fenomeni in cui la produzione di elettricità per energia radiante è più immediata. Hankel ha scoperto che alcuni cristalli manifestano un'elettrizzazione quando sono illuminati dalla luce del sole, dall'arco elettrico o da una lampada a gas. Occorre distinguere i seguenti due casi.

Nell'illuminazione del cristallo di rocca incolore, una elettrizzazione appare sui sei spigoli del prisma; le elettricità sui due spigoli vicini hanno nomi opposti. L'elettrizzazione è identica in segno a quella che si manifesta nel raffreddamento del cristallo, il che dimostra che non può essere considerato un fenomeno piroelettrico. L'elettrizzazione massima viene raggiunta dopo circa 40 secondi; quando l'illuminazione viene interrotta, l'elettrizzazione scompare (anche dopo circa 40 secondi), senza aver cambiato segno. Hankel ha riconosciuto, variando la sorgente delle radiazioni e la loro composizione, che le radiazioni infrarosse erano le più attive. Chiamò questo fenomeno *actinoelettrico*.

Hankel ha osservato un fenomeno di tutt'altra natura sui cristalli colorati di fluorite, in particolare sui cristalli verdi. Essi si elettrizzano per illuminazione, ma la distribuzione delle elettricità su di essi è la stessa nel caso del riscaldamento. Quando l'illuminazione viene sospesa, l'elettrizzazione scompare lentamente, senza cambiare segno, come dovrebbe essere, se la sua causa risiede nel riscaldamento. Sono le radiazioni violette e ultraviolette che agiscono più fortemente. Si tratta evidentemente di un'azione chimica della radiazione, che può modificare la sostanza conferendo al cristallo il suo colore. Ciò è confermato dal fatto che dopo un lungo periodo di illuminazione, la sensibilità dei cristalli all'azione delle radiazioni diminuisce. Hankel ha chiamato tale fenomeno *fotoelettrico*.

Abbiamo parlato brevemente della perdita di elettricità negativa prodotta dalla radiazione ultravioletta. Hallwachs e Righi (1888) hanno scoperto quasi simultaneamente che certi metalli si elettrizzano positivamente se illuminati dalle radiazioni ultraviolette. Questo fenomeno è stato oltre a questi due fisici, studiato da Stolietoff, Borgmann, Bichat e Blondot, Elster e Geitel, Hoor e altri ancora. Bichat e Blondot hanno riscontrato che l'elettrizzazione aumenta se una forte corrente d'aria viene indirizzata sulla piastra metallica, la quale però non produce da sé elettrizzazione. Questa dipende dalla natura del metallo; è particolarmente forte sulle lastre di Zn e Al che, come hanno osservato Elster e Geitel, si elettrizzano anche sotto l'azione dei raggi

solari.

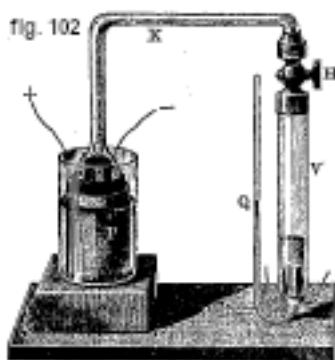
VIII. FLUSSO DI LIQUIDI ATTRAVERSO DIVISORI POROSI E TUBI STRETTI. - Quincke (1859) ha scoperto che quando un liquido attraversa sotto pressione un setto poroso, il liquido che è uscito dal setto, così come quello che non è ancora giunto, sono elettrizzati, il primo nella maggior parte dei casi positivamente, il secondo negativamente.

Due tubi di vetro A e B (fig. 101) sono separati da un setto poroso e riempiti d'acqua, che viene introdotta in pressione attraverso il tubo laterale D ed esce attraverso E. In A e B vi sono due lastre di platino, in comunicazione con fili saldati nelle pareti dei tubi. Collegando questi fili con un elettrometro, si può verificare la loro elettrizzazione.



La figura 102 mostra uno strumento, che può essere utilizzato anche per mostrare questo fenomeno. Su un vaso di argilla porosa, posto in un vaso di vetro, è collocato un imbuto G, il cui tubo G è piegato due volte, come mostrato in figura. L'acqua viene versata in vasi di vetro e argilla. All'interno di G così come all'esterno ci sono fogli di platino P arrotolati a forma di cilindro. Nel tubo V, mentre il rubinetto H è chiuso, l'acqua viene scomposta mediante corrente elettrica. La pressione del gas tonante prodotto viene misurata dal manometro chiuso Q. Aprendo il rubinetto H si produce una pressione sull'acqua che si trova nel vaso di terracotta. Tra i due fogli di platino appare quindi una differenza di potenziale, essendo il potenziale della lamina esterna il più alto.

La differenza di potenziale tra le piastre dipende dalla sostanza del setto divisorio; è proporzionale alla differenza tra le pressioni sui due lati di questa partizione, ma non dipende né dal suo spessore né dall'ampiezza della sua superficie. Per una differenza di pressione di un'atmosfera si ottengono le seguenti differenze di potenziale ( $D$  = forza elettromotrice dell'elemento Daniell).



Zolfo	9,77D	Amianto	0,22D
Sabbia quarzosa	6,20D	Porcellana	0,20D
Seta	1,25D	Avorio	0,03D
Terracotta	0,36D	Vescica	0,045D

Zöllker (1872) ha mostrato che un fenomeno simile ha luogo quando il setto poroso è sostituito da un tubo capillare. La differenza di potenziale è ancora proporzionale alla differenza di pressione e non dipende dalla lunghezza e dalla sezione, purché il tubo sia abbastanza lungo e stretto perché il flusso del liquido segua la legge di Poiseuille (Volume I). Ricerche sperimentali sono state

fatte su questo argomento da Haga, Elster, Clark, Dorn, Edlund e Gouré De Villemontée (1897). Una spiegazione teorica di questo fenomeno, che è strettamente correlato a quello dell'endosmosi elettrica che prenderemo in considerazione in seguito, è stata data da Helmholtz (1879). Egli suppose che tra la parete dei tubicini capillari che presentano i corpi porosi ed il liquido si stabilisca una differenza di potenziale e di conseguenza si formi un doppio strato elettrico, la cui faccia positiva è dalla parte del liquido. Quando il liquido si sposta, porta in parte con sé lo strato di elettricità positiva, che si deposita nel recipiente dove scorre il liquido. Il liquido che entra nei tubicini capillari incontra elettricità negativa sulle loro pareti, che induce elettricità positiva nel liquido, mentre elettricità negativa esce nel vaso da cui il liquido si dirige verso la parete porosa. Lo studio teorico di Helmholtz lo condusse alle leggi sopra menzionate.

Gouré De Villemontée (1897) scoprì che il flusso di un liquido conduttore (mercurio, soluzione salina) attraverso un tubo stretto o l'estremità di un tubo allungato non produce una differenza di potenziale

IX. ELETTRICITÀ DI ANIMALI E PIANTE. - Nei muscoli, nelle ghiandole e nei nervi degli animali agiscono forze elettromotrici, il cui studio rientra nell'ambito della fisiologia. Alcuni pesci (Torpedine narce, Torpedine galvanii, Narcine brasiliensis, Gymnotus electricus, Malepterurus electricus) possiedono organi particolari in grado di produrre notevoli differenze di potenziale, e quindi anche di quantità di elettricità che si scaricano attraverso corpi vicini. In alcuni dei pesci precedenti (Torpedine) questo organo è posto a lato della testa, in altri (Gymnotus) si trova nella coda. Nella Torpedine è costituito da un gran numero (da 400 a 1000) di colonnine cilindriche o prismatiche affiancate, formate da strati sottilissimi sovrapposti, separati tra loro da una sostanza viscosa. Le scariche di questo organo sono prodotte volontariamente a scopo di protezione o per attaccare una preda. Applicando al Gymnotus sulla testa e sulla coda, o alla Torpedine sul dorso e sul ventre, delle piastre metalliche ricurve, si può caricare un elettroscopio, ricevere forti scosse elettriche e persino ottenere scintille.

Le combinazioni e le scomposizioni che avvengono incessantemente all'interno delle piante, la reazione acida di alcune cellule mentre altre sono alcaline, infine i fenomeni di diffusione e di osmosi devono dar luogo a manifestazioni elettriche. Questi eventi sono ancora poco conosciute. Tutto ciò che si sa per certo è che l'interno del corpo delle piante terrestri, dei rami e delle foglie, ad esempio, è sempre elettronegativo rispetto alla sua superficie. La radice ha comunque la sua superficie elettronegativa, ma il suo strato superficiale è in realtà uno strato interno divenuto esterno per esfoliazione. La regola è quindi rispettata. Se esploriamo i diversi punti della lamina di una foglia, troviamo sempre, qualunque sia la foglia, che le nervature sono elettropositive rispetto al parenchima. Essendo le vene molto più marcate nelle Dicotiledoni che nelle Monocotiledoni, la forza elettromotrice vi è anche molto più considerevole. Il fenomeno sembra essere causato dal movimento dell'acqua nelle nervature, secondo le ricerche di Kunkel (1878) che furono fatte con l'elettrometro capillare di Lippmann.

X. CAMPO MAGNETICO VARIABILE, NUOVI RAGGI E SOSTANZE RADIOATTIVE. - Citeremo qui queste fonti di forza elettromotrice solo per essere completi nella nostra enumerazione delle fonti di elettricità. Li studieremo in dettaglio in seguito.

## 16. Macchine elettriche

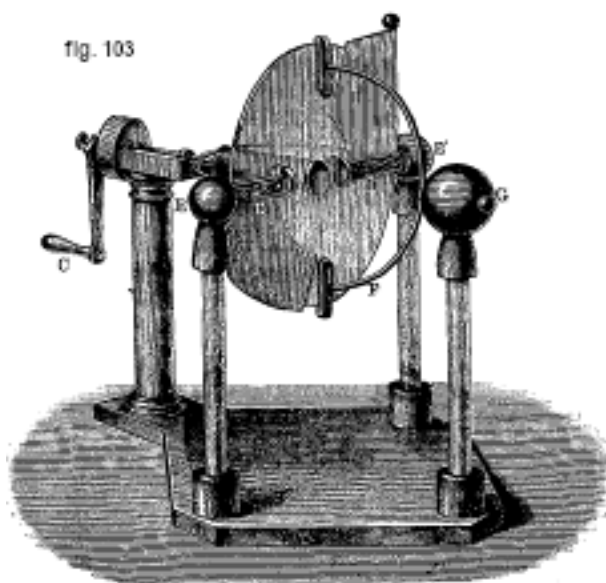
Prenderemo in considerazione alcuni dei dispositivi che oggi utilizziamo per ottenere velocemente e comodamente forti cariche elettriche. La denominazione di sorgenti di elettricità sarebbe più appropriata per questi strumenti, perché la vecchia denominazione di macchine elettriche è oggi troppo imprecisa; ma non crediamo, tuttavia, che sia necessario sostituire quest'ultima con un'altra. In senso stretto, lo scopo delle macchine elettriche è di mantenere una determinata differenza di potenziale su due dati conduttori; questi possono essere utilizzati come sorgenti

dirette di cariche elettriche, oppure generare scariche tra di loro o tra altri conduttori con i quali sono stati messi a contatto.

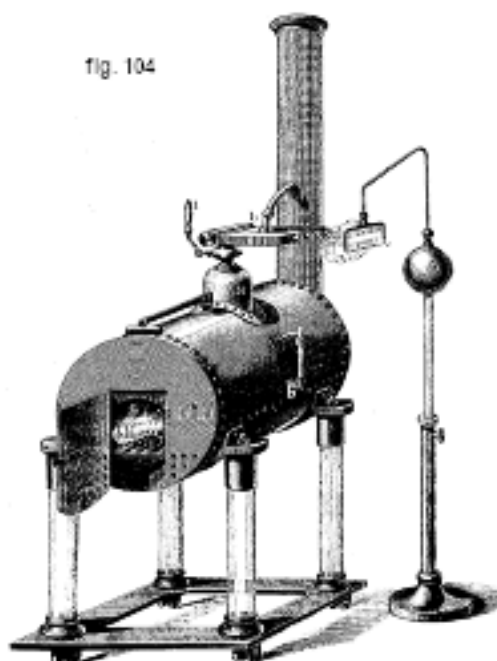
L'energia elettrica, in qualsiasi forma si presenti nel funzionamento della macchina, ha origine nel lavoro meccanico speso per la messa in moto (normalmente movimento rotatorio) delle parti mobili della macchina, per vincere le forze di attrazione o repulsione che si esercitano in ogni istante tra gli organi di lavoro carichi di elettricità di nomi opposti o con lo stesso nome. È facile trovare, caso per caso, da dove deriva il lavoro in questione; quindi non esamineremo questa domanda in modo più dettagliato.

Il numero di macchine elettriche costruite in tempi diversi è molto grande. Indicazioni in proposito si possono trovare nell'opera di John Gray, *Les machines à influence*, tradotta in francese da G. Pelissier, Parigi 1892, anche nell'opera di G. Wiedemann, *Die Lehre von der Elektrizität*, Volume I, pagine 925-982, 1893, e in altri. Di solito si fa una distinzione tra macchine elettriche ad attrito e macchine a influenza. Queste sono usate quasi esclusivamente oggi.

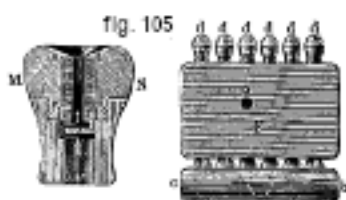
La figura 103 rappresenta una delle molte forme di macchina ad attrito. Il disco di vetro montato sull'asse A è messo in rotazione mediante la manovella C: la sua superficie viene sfregata da due coppie di cuscinetti o spazzole D e D', ricoperte di cuoio amalgamato. Il conduttore G è a contatto con due forcelle metalliche, abbraccianti il disco di vetro nella sua parte superiore e nella sua parte inferiore e provviste internamente, cioè verso il disco di vetro, di punte (non visibili in figura), donde il nome di pettini come di solito vengono chiamati.



Quando la superficie del vetro, positivamente elettrizzata dall'attrito contro i cuscinetti, giunge in prossimità dei pettini, produce, nel sistema metallico dei pettini, l'arco FF' e il conduttore G, elettricità indotta; l'elettricità positiva si raccoglie sul conduttore G, mentre l'elettricità negativa sfugge attraverso le punte dei pettini e passa sulla superficie del vetro, di cui neutralizza la carica positiva. Se si gira la manovella C nel senso di rotazione orario, il disco si elettrizza positivamente nel quadrante posto sotto D e in quello sopra D'. L'elettricità negativa dai cuscinetti va lungo l'arco orizzontale fino all'asse A che è messo a terra. Quando l'arco FF' viene ruotato in modo da portarlo in posizione orizzontale e in modo che i pettini tocchino le sfere E ed E', essendo l'altro arco posto verticalmente, l'elettricità negativa delle spazzole si raccoglie sul conduttore G, mentre l'elettricità positiva scorre verso terra.



Alle macchine elettriche a frizione appartiene anche il motore elettrico a vapore di Armstrong, rappresentato nella Fig. 104. Il suo funzionamento si basa sul fatto che il vapore supersaturo contenente goccioline d'acqua si elettrizza positivamente quando scorre sotto pressione attraverso tubi stretti. Lo strumento è costituito da una caldaia a vapore, sostenuta da piedini in vetro. Il vapore passa attraverso la cassa *b* e, dopo la sua uscita all'esterno, si dirige verso le punte del pettine *B* collegato al conduttore *A*. La disposizione interna della cassa e delle uscite è rappresentata dalla figura 105. Il vapore passa attraverso i tubi paralleli posti all'interno della cassa; la parete interna dei tubi è in legno. All'esterno i tubi sono circondati da una miccia o corda, che viene inumidito dall'acqua versata nella cassa; ciò comporta un leggero raffreddamento del vapore e la formazione di goccioline d'acqua in esso. Il vapore scorre invece attraverso un canale sinuoso (fig. 105, a sinistra), dove subisce un vigoroso attrito. Quando la macchina è in funzione, il conduttore *A* è carico positivamente, ma la caldaia, che è collegata a terra o ad altro conduttore, è caricata negativamente.

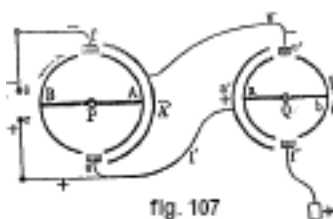


Le macchine di influenza (o induzione) si basano sulla produzione di elettricità per induzione (o per influenza). Si distingue talvolta tra loro un particolare gruppo di macchine, chiamate duplicatori; ma anche il funzionamento di quest'ultimo si basa sull'induzione. I duplicatori sono caratterizzati dal fatto che una data carica, più o meno costante, dà luogo ad un'induzione in un conduttore mobile e quindi una delle elettricità indotte viene trasportata dal movimento di questo conduttore mobile su un altro conduttore; questa operazione viene ripetuta un gran numero di volte. In altre macchine di influenza, la carica indotta originariamente aumenta gradualmente nel funzionamento della macchina. Se non ci fosse perdita di elettricità, la carica, ottenuta dal funzionamento della macchina, aumenterebbe per il duplicatore in progressione aritmetica, per le altre macchine di influenza in progressione geometrica, come ha mostrato Maxwell.

Il più semplice degli strumenti di questo tipo è l'elettroforo; è costituito da un panetto di resina solida *a* (fig. 106) o da una miscela solidificata di resina con certe altre sostanze (cera, colofonia, vernice, trementina, ecc.) versata in uno stampo metallico; la superficie del panetto di resina deve essere piatta e liscia. Oggi si utilizza molto spesso al suo posto, a causa della sua fragilità, una semplice lastra di ebanite levigata che, tolto lo stampo metallico, viene posta su un buon supporto conduttore o viene ricoperta di carta stagnola nella parte inferiore. Battendo la superficie della resina con una coda di volpe o con una pelle di gatto, questa viene elettrizzata negativamente.



Vi si deposita poi un disco metallico isolato *b*, che può essere sostituito da un disco di legno o da un cartone ricoperto da un foglio di stagno. L'elettricità, che si trova sulla superficie *a*, provoca un'induzione in *b*. Toccando con il dito la superficie del disco *b*, l'elettricità negativa scorre, mentre l'elettricità positiva si raccoglie sulla superficie inferiore di *b*; quest'ultima, che presenta sempre asperità, tocca la superficie di *a* solo in pochi punti. Se si toglie il disco *b*, esso porta con sé una carica positiva, che può essere trasportata su qualsiasi altro conduttore, o utilizzata ad esempio per caricare una bottiglia di Leida. Se si rimette il disco *b* su *a*, lo si tocca con il dito per poi toglierlo, si raccoglie una nuova carica. Questa operazione può essere ripetuta un gran numero di volte, l'elettricità negativa della resina rimane attaccata alla superficie di questo disco e non subisce altre perdite, tranne quelle dovute a difetti di isolamento. Macchine di influenza del tipo attualmente in uso, che danno grandi quantità di elettricità, furono costruite per la prima volta da A. Toepler (1865, allora a Riga), Holtz (1865) e Th. Schwedoff (1868).

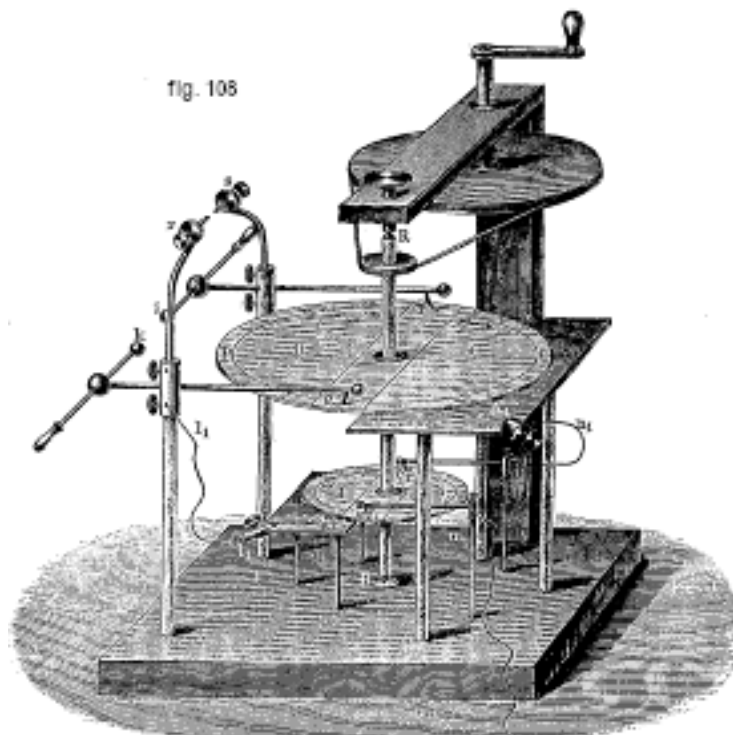


Il principio su cui si basava la costruzione della prima macchina del Toepler, è facilmente riconducibile alla figura schematica 107, nella quale, per chiarezza, i dischi piani sono stati sostituiti da semicilindri. Il disco fisso *A'* è elettrizzato negativamente. I due piatti *A* e *B* ruotano attorno all'asse *P*, sfregando sulle spazzole metalliche *f* e *c*. Quando il piatto *B* si sposta verso destra, (+) viene indotto su di esso mentre (-) scorre attraverso *f* sulla sfera *s*; quando *B* prende la posizione di *A*, la sua comunicazione con *f* e *s* cessa. Il piatto *B* viene quindi a contatto con la spazzola *e*, e, prima che occupi la posizione rappresentata in figura, tutta la sua carica passa da *e* alla sfera *r*. Gli stessi fenomeni si ripetono ad ogni giro completo del piatto *B*, così come del piatto *A*: una delle elettriche indotte va da *f* su *s*, l'altra, poco dopo, da *e* su *r*. Allo scopo non solo di mantenere, ma di aumentare la carica agente del disco *A*, si impiega una seconda parte dello strumento, che in fondo non è che una ripetizione della prima. L'induzione è qui prodotta dalla carica positiva del disco *a'*; i piatti *a* e *b* acquisiscono (-) fintanto che toccano la spazzola *f'*, (+) che va a terra. Poi cedono il loro (-) alla spazzola *e'*, non appena che sono

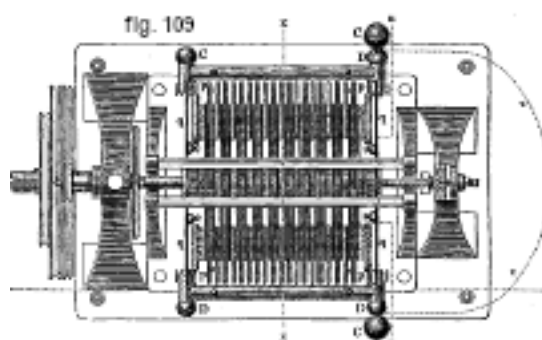


sul punto di raggiungere la posizione occupato da  $b$  nella figura. L'elettricità negativa passa da  $e'$  al piatto  $A'$ , aumentandone la carica. La carica positiva del piatto  $a'$  si ottiene con una derivazione dei conduttori  $er$ . È chiaro che le cariche su  $A'$  e  $a'$  si rafforzano a vicenda, fino a quando alla fine raggiungono  $r$  e  $s$  o eventuali conduttori ad essi collegati le massime tensioni elettriche possibili nelle date circostanze.

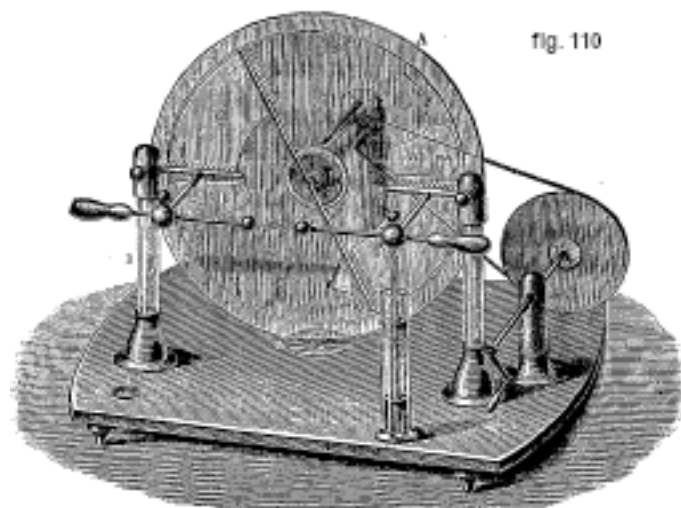
La veduta generale della macchina di Toepler è data dalla figura 108, in cui, per comodità, le diverse parti sono indicate con le stesse lettere della schematica figura 107. I due dischi di vetro, su cui sono incollati fogli di stagno  $A, B, a, b$ , sono mobili attorno all'asse comune  $RR$ ; i fogli di stagno  $A_1$  e  $a_1$  incollati sui dischi fissi di vetro, hanno le stesse dimensioni di  $a$  e  $A$ . I fili  $n_1n_1$  e  $l_1l_1$  servono a collegare  $e_1$  con  $A_1$  ed  $e$  con  $a_1$ ;  $f_1$  è a terra.



Lo strumento che abbiamo appena considerato è tipico; è il rappresentante di un numero molto elevato di macchine di influenza, totalmente diverse nella forma. Successivamente Toepler ha costruito macchine nelle quali sono montati su un asse comune un gran numero di dischi, la cui elettrizzazione è mantenuta simultaneamente da un comune generatore. I dischi fissi sono indicati con  $p$ , le spazzole con  $c$ ; dischi e spazzole sono disposti alternativamente negli intervalli che separano i dischi mobili; questi sono rappresentati da linee nere più corte. Non ci addentreremo in una descrizione più dettagliata di questa macchina e faremo riferimento alle indicazioni bibliografiche.



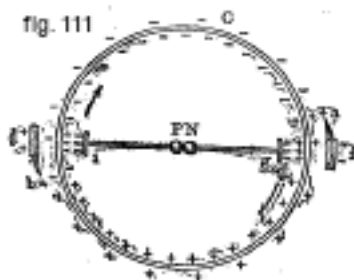
Passiamo ora alla descrizione della macchina a influenza Holtz attualmente molto diffusa; una delle sue forme è rappresentata dalla figura 110. Il piatto fisso in vetro A poggia su una lastra di ebanite  $z$  ed è tenuto in posizione verticale mediante spinotti di ebanite non rappresentati. Questo piatto è forato da due finestre  $a$  e  $b$  alle estremità dello stesso diametro, che a volte si estendono fino al bordo. Sul retro sono incollate strisce di carta  $d$  e  $f$ , anch'esse chiamate armature, che terminano ciascuna con una linguetta seghettata anch'essa in carta. Queste linguette sono piegate, in modo da attraversare le finestre e avvicinarsi alla faccia posteriore del disco di vetro mobile B, che non ha finestre ed è montato su un asse orizzontale, attorno al quale può ricevere un movimento rotatorio veloce. Di fronte alle armature, dall'altra parte di B, vi sono due pettini  $gg$  e  $ii$ , cioè due aste metalliche provviste di numerose punte; sono supportati dai piedini in vetro 1 e 2 e collegati a due conduttori terminati da sfere, che possono scorrere l'una verso l'altra. Sull'asse di B è fissato quello che viene chiamato il conduttore diametrale, le cui estremità  $t$  e  $v$  sono opposte alle estremità delle armature  $d$  e  $f$  sono anch'esse provviste di punte. Con i due precedenti conduttori mobili possono essere messi a contatto le armature interne di strette bottiglie di Leida, le cui armature esterne sono collegate da una striscia metallica posta al di sotto della base dello strumento; nella figura è mostrata solo una delle bottiglie.



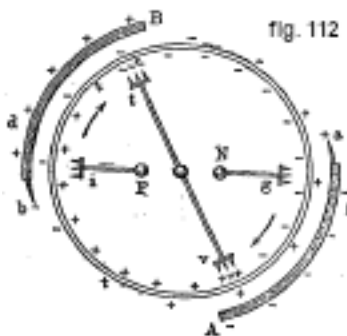
Per mettere in azione la macchina è necessario portare a contatto le sfere anteriori e mettere in moto il disco mobile, mentre contemporaneamente viene elettrizzata una delle strisce di carta, ad esempio  $d$ . Basta a questo scopo premere contro un piatto di gomma strofinato o il bottone di una piccola bottiglia di Leida carica. La rotazione di B deve essere diretta verso le dentellature delle linguette di carta, cioè lungo la freccia. Immediatamente dopo l'inizio della rotazione, la macchina si trova innescata e in grado di funzionare. Se le sfere vengono poi allontanate e la rotazione di B continua, si verifica una scarica continua tra di esse. Collegandole ad altri conduttori si può raccogliere a piacere, per utilizzarle, una o due delle elettricità che fluiscono senza interruzione verso i due conduttori mobili anteriori.

Per spiegare il gioco della macchina e rendere più chiare le figure, faremo ricorso ad una rappresentazione schematica, che si deve a Bertin. Il piatto anteriore mobile è rappresentato (fig. 111) dal cilindro mobile C, la cui superficie interna corrisponde alla faccia anteriore del piatto mobile o più esattamente alla parte anulare di questa superficie, che passa davanti ai pettini  $gg$ . Analogamente, la superficie esterna di C corrisponde alla faccia posteriore del piatto mobile. I pettini  $g$  e  $i$ , i cui denti sono perpendicolari alla faccia anteriore del piatto, sono rappresentati come sono realmente, cioè normali alla superficie interna del cilindro. Il sistema di conduttori e le sfere di scarica P e N sono mostrati in forma semplificata. Il piatto posteriore fisso, che ha il

solo compito di portare le armature, non è rappresentato; le armature sono mostrate in *d* e *f* e le loro linguette seghettate in *a* e *b*.



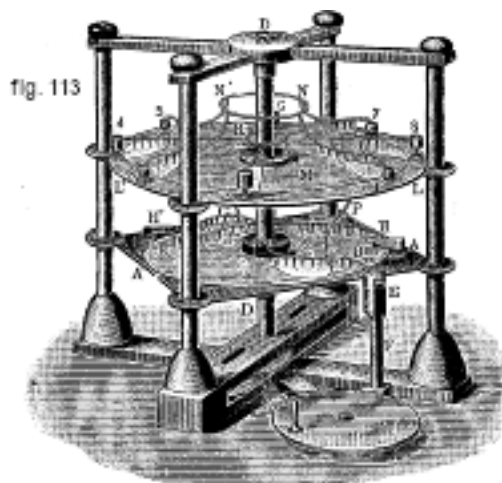
Supponiamo che le sfere di scarica siano, come si è detto sopra, avvicinate tra loro, in modo che da *g* a *i* vi sia, per così dire, un solo conduttore. Carichiamo negativamente la banda *f* e iniziamo a ruotare il cilindro nella direzione della freccia; (-) su *f* dà luogo nel sistema *gi* ad un'induzione, in virtù della quale (+) fluisce da *g* sulla superficie interna del vetro. Nella rotazione del cilindro, (+) viene trasportato in *db*, in modo che la striscia di carta *d* si carichi positivamente, mentre (-) sfugge in quantità relativamente piccole attraverso la punta *b* sul lato posteriore del disco (superficie esterna). Sotto l'influenza delle due bande *d* e *f* c'è un flusso più forte di (-) da *i* e di (+) da *g*. Passando davanti a *i*, la superficie del vetro si carica negativamente; (-), avvicinandosi a *f*, aumenterà la carica, (+) fuoriuscendo attraverso la punta *a* sul lato posteriore del disco. Gli stessi fenomeni continuano a ripetersi; (-) sulla metà superiore del disco e (+) sulla metà inferiore che aumenta rapidamente i carichi delle bande *f* e *d* al massimo possibile, il flusso massimo di (+) delle punte *g* e di (-) delle punte *i* raggiunte contemporaneamente. La carica del piatto è determinata in modo tale che, durante metà giro, le quantità di elettricità  $+2e$  e  $-2e$  scorrono da *g* e da *i*, designando con  $\pm e$  le quantità di elettricità che si trovano sul lato inferiore e le metà superiori del disco. Raggiunto il massimo della carica di *f* e di *d*, esso è mantenuto dalle cariche che si avvicinano alle punte *a* e *b*. Il flusso di elettricità da queste punte sul lato posteriore del disco è relativamente insignificante, non sembra svolgere alcun ruolo particolare e dipende dalla velocità con cui le bande *f* e *d* perdono le loro cariche. Nel sistema *iPNg* si ha induzione continua da parte delle strisce di carta *d* e *f*, (+) che scorrono verso *g*, (-) verso *i*. Quando, una volta caricata la macchina, le sfere vengono separate tra loro, l'induzione avviene separatamente nelle parti *iP* e *Ng*, in modo che (+) scorre senza soluzione di continuità verso *P* e (-) verso *N*, e le sfere oppure i conduttori possono servire come sorgenti di elettricità. Ma operando in questo modo si incontra il seguente inconveniente; se le sfere sono separate a una distanza tale che nessuna scarica può avvenire tra di loro, o se i conduttori collegati con le sfere non perdono sufficientemente le loro cariche, può accadere che qualsiasi (ulteriore) induzione diventi impossibile in *iP* o *gN*. Il flusso di elettricità attraverso le punte *i* e *g* allora cessa, cosicché la perdita di carica non è più compensata dalle strisce di carta *d* e *f*. La macchina smette di funzionare o si scarica, perché, ad esempio, (-) ritorna a *g* e scorre sulla superficie del piatto.



Per ovviare a questo inconveniente si fa uso del conduttore diametrale  $tv$  (fig. 112), di cui si è già parlato. Il modo di azione di questo conduttore è facilmente comprensibile con l'ausilio della schematica figura 112. Le strisce di carta sono qui molto più estese che nella figura 111; occupano quasi un intero quadrante e si vede che i pettini  $t$  e  $v$  devono essere di fronte alle loro estremità più larghe. Quando le sfere  $P$  e  $N$  si toccano, il conduttore diametrale non ha alcun ruolo; ma se queste sfere sono troppo distanti, o se per altri motivi le loro cariche non sono disperse, cosicché il flusso di elettricità attraverso le punte  $i$  e  $g$  cessa, allora il conduttore  $tv$  comincia ad agire esattamente come il sistema di conduttori  $iPNg$  della figura 111. Il cambiamento di carica del piatto avviene in  $t$  e  $v$ ; questo basta a mantenere l'elettrizzazione delle strisce  $d$  e  $f$ , e, di conseguenza, a preservare lo stato di carica della macchina, che riprende subito a funzionare come prima, non appena esaurite le cariche che scorrono verso  $N$  e verso  $P$  e quindi anche un flusso di elettricità attraverso i pettini  $i$  e  $g$ .

La carta delle bande non deve essere sostituita da un cattivo conduttore né, al contrario, da un perfetto conduttore. Nel primo caso, su di esso non potrebbe aver luogo un'induzione come quella sopra descritta; nel secondo, le cariche non persisterebbero durante un breve arresto della macchina e fuoriuscirebbero attraverso le punte sulla faccia posteriore del disco mobile. Questo è il motivo per cui questa macchina funziona male o addirittura per niente, non solo in aria umida, ma anche in aria troppo secca. Il ruolo della piastra fissa è triplice, come si vede: trasporta le bande di carta e si oppone alla perdita delle loro cariche; inoltre la sua faccia rivolta verso la piastra mobile viene man mano elettrizzata in modo opposto all'elettrizzazione di quest'ultima, cioè, facendo riferimento allo schema di figura 111, positivamente nella sua metà superiore e negativamente nella sua metà inferiore. La carica della piastra fissa, agendo sulla carica di quella mobile, si oppone alla perdita di quest'ultima, durante il tempo che trascorre per passare da un pettine all'altro.

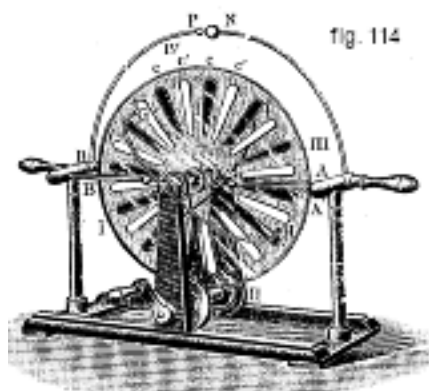
La macchina a influenza di Th. Schwédoff (1868) è rappresentata in figura 113. Le due lastre di vetro  $B$  e  $M$  sono montate su un asse comune  $DD$ . Al di sotto di  $B$  si trova una lastra  $A$  di gomma vulcanizzata, nella quale sono praticate simmetricamente due finestre, una delle quali, posta al di sotto del pettine  $C$ , è visibile in figura. Sotto  $M$  c'è un disco di vetro fisso  $L$ , sul cui lato superiore sono incollate otto strisce di carta oblunghe (1, 2, 3, ecc.). Le strisce dispari sono unite tra loro e con il conduttore  $P$ ; anche le strisce pari sono unite tra loro e con un corrispondente conduttore sull'altro lato. Sopra le bande dispari sono posti quattro pettini, che terminano nell'anello  $N$ , mentre le loro altre estremità sono isolate. Gli altri quattro pettini, posti sopra le bande pari, sono collegati con l'anello  $R$ . La lastra  $A$  e la lastra  $B$  sono circondate dai rami dei doppi pettini  $C$  e  $C'$ . Il ramo superiore  $C$ , a contatto con il conduttore  $P$ , si trova esattamente in linea con la finestra della lastra  $A$ . L'altro ramo, non visibile in figura, è sotto  $A$ ; corre prima lungo il bordo della lastra  $B$  e poi in direzione della metà destra di  $HH'$ ; la sua posizione è indicata da linee tratteggiate. Per caricare la macchina, si tiene sotto la finestra della piastra  $A$ , cioè sotto il pettine  $C$ , una piastra di gomma strofinata e si mette l'asse, visto dall'alto, in rotazione nel verso antiorario.



Sulla piastra B scorre poi (+) da C, mentre (-) passa per P sulle strisce di carta dispari e più avanti sul ramo inferiore del pettine C, di modo che dalla metà destra del pettine HHI (+) scorre sulla piastra B e (-) va verso l'estremità H'. Quando la piastra B con (+) si avvicina al pettine C, (-) scorre da questo su di essa, e (+) passa sopra le bande pari e più avanti sul ramo inferiore del pettine C', in modo che il flusso di (-) dalla metà sinistra del pettine H'H è rinforzato, e di conseguenza anche il flusso di (+) dalla metà destra. La piastra parte da sotto C e H' con una carica negativa, che diventa positiva passando sotto C e H. Sotto l'azione delle cariche delle strisce di carta, (+) fluisce, sul piatto M, dai quattro pettini del sistema N e (-), dai quattro pettini del sistema B, così che in ogni punto della superficie di M il segno dell'elettrizzazione cambia otto volte, in un giro completo di questa piastra. È evidente che verso l'anello N vi è un flusso continuo di (-) e verso l'anello R di (+). Questi due anelli fungono da conduttori in grado di fornire cariche elettriche di entrambi i segni. Questa macchina è visibilmente superiore a quella di Holtz, dal punto di vista della quantità di elettricità prodotta.

Per caricare le macchine di Holtz e Schwédoff, è necessario un corpo estraneo carico. Oggi si preferiscono macchine autoeccitanti, in cui una carica, che esiste all'inizio su una delle strisce di carta o di induttore metallico, aumenta rapidamente e produce sulle altre strisce le cariche necessarie. La carica iniziale, per quanto possa essere eccessivamente esigua, in realtà non è sempre presente. Tuttavia, molto spesso è prodotto da tracce di carica da precedenti operazioni della macchina, dall'attrito di alcune parti del dispositivo l'una contro l'altra (spazzole metalliche sulle superfici di vetro), dal contatto di corpi di diversa natura (contatto delle spazzole con la parte metallica), per induzione dovuta a corpi vicini fortuitamente elettrizzati, elettricità dell'aria, ecc.

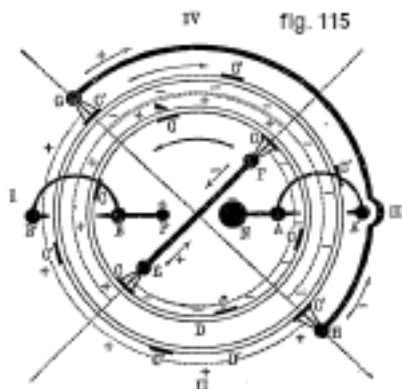
Alle macchine autoeccitanti si aggiungono le macchine della Toepler (di recente costruzione), di Voss, e in particolare della Holtz-Wimshurst. Quest'ultima è stata costruita per la prima volta da Holtz. Fu successivamente reinventata, in modo indipendente, da Wimshurst, di cui generalmente porta il nome, nonostante numerose rivendicazioni di priorità da parte di Holtz (ad esempio, in *Zeitschr. f. phys. und chem Unterricht* 17, p. 193, 1904); gli daremo il nome macchina di Holtz-Wimshurst.



È composta (fig. 114) da due lastre di vetro o di ebanite, ruotanti attorno ad un asse comune, ma in versi opposte. Sulle facce esterne di queste lastre sono incollate strisce di stagno  $c$  e  $c'$  disposte lungo i raggi. I doppi pettini orizzontali  $AA'$  e  $BB'$  abbracciano le due lastre; sono in comunicazione con le sfere di scarica  $N$  e  $P$ , che a loro volta possono essere avvicinate o allontanate tra loro mediante particolari maniglie isolate;  $GH$  e  $FE$  (nella figura manca la lettera  $E$ , perché si riferisce ad un punto nascosto dal supporto anteriore dell'asse di rotazione delle lastre) sono due conduttori rettangolari diametrali, formanti angoli di  $45^\circ$  con la direzione orizzontale  $AB$ . Alle estremità di questi due conduttori sono fissate delle piccole spazzole metalliche, che sfregano leggermente contro le strisce di stagno delle due lastre.

I conduttori  $GH$  e  $FE$  dividono il cerchio geometrico corrispondente alle due lastre prese insieme in quattro quadranti, designati con i numeri romani da I a IV.

Per comprendere il funzionamento di questa macchina si consideri la figura schematica 115. Come nella figura 111, le lastre circolari sono nuovamente sostituite dai cilindri concentrici  $D$  e  $D'$ , i cui sensi di rotazione sono indicati dalle frecce;  $CC...$  e  $C'C...$  rappresentano le bande di stagno. Il cilindro  $D'$  corrisponde alla lastra anteriore della figura 114, il cilindro  $D$  a quella posteriore. I conduttori diametrali con le loro spazzole sono rappresentati da una retta  $FE$  e dall'arco  $GH$ ;  $AA'$  e  $BB'$  sono i pettini che abbracciano, come abbiamo detto, le due lastre,  $P$  e  $N$  sono le sfere di scarica. In generale, le parti corrispondenti sono indicate con le stesse lettere nelle figure 114 e 115. Supponiamo che, in qualche modo, metà  $HB'G$  (I, II) della lastra  $D'$  sia stata elettrizzata positivamente e la metà  $GA'H$  (III, IV) negativamente. Sotto l'influenza di queste due elettrizzazioni, si produrrà un'induzione in  $EF$ ; da  $E$  fluirà  $(-)$  e da  $F$   $(+)$ , in modo che sulla metà  $EAF$  (II, III) del piatto rotante  $D$  tutte le bande  $C$  ricevano cariche negative, e sulla metà  $FBE$  (IV, I) cariche positive.



Queste cariche danno luogo a loro volta ad un'induzione nel conduttore  $GH$ . Da  $G$  fluisce  $(-)$ , da  $H$   $(+)$ , cosicché sulla metà  $GA'H$  (III, IV) del piatto rotante  $D'$  si rafforza l'elettrizzazione negativa, e sulla metà  $HB'G$  (I, II), l'elettrizzazione positiva. Ne risulta quindi un'induzione

rinforzata su EF, e di conseguenza anche un aumento della carica delle due metà della piastra D, ecc. È chiaro che le piastre rotanti rafforzano ciascuna, per una sorta di azione reciproca, la carica dell'altra, i conduttori diametrali che dividono queste piastre in due metà cariche di elettricità di segno opposto. Sui quadranti II e IV le elettrizzazioni delle piastre sono diverse, le cariche si attraggono reciprocamente, il che si oppone alla loro perdita. Sui quadranti I e III le elettrizzazioni delle lastre sono invece dello stesso segno e le cariche si respingono. Proprio nel mezzo di questi quadranti si trovano i doppi pettini AA' e BB'; si vede facilmente che sulla sfera P deve accumularsi elettricità positiva, e sulla sfera N, al contrario, elettricità negativa.

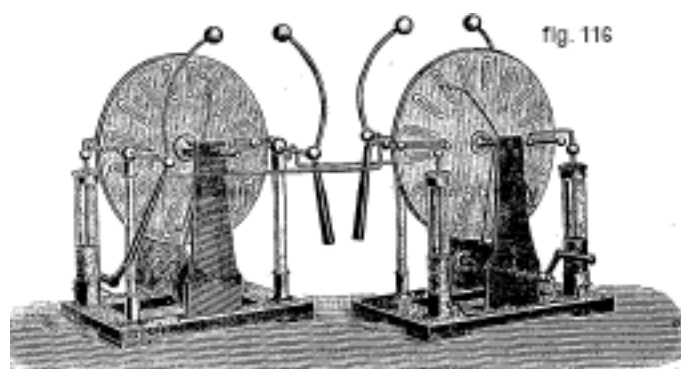
Non entreremo nella descrizione di altre macchine; citeremo solo qualcuna delle tipologie oggi particolarmente diffuse o che presentano disposizioni particolarmente interessanti.

Tra i duplicatori citeremo le macchine di Nicholson (1788), Belli (1831), Varley (1860), W. Thomson (1867), Righi (1872). Possiamo anche indicare la macchina elettrica per l'acqua di W. Thomson (1860), così come il suo integratore, che fa parte di certi dispositivi che studieremo più avanti; serve a mantenere su un dato corpo un certo grado di elettrizzazione.

La macchina di Holtz è stata modificata o dispositivi simili sono stati costruiti da Téploff, Poushikoff, Kundt (1868), Leyser (1873), Bleekrode (1871) e lo stesso Holtz (1867), che hanno introdotto una doppia macchina comprendente due piattaforme girevoli in direzioni opposte.

Da ricordare anche le macchine di Carré (1868), Kaiser (1869), Musäus (1872) e Wommelsdorf (1902). Recentemente si è riusciti a costruire macchine in cui il numero di dischi mobili arriva fino a 30 e anche oltre. Lo scopo di queste macchine è quello di fornire non solo grandi differenze di potenziale, ma anche notevoli quantità di elettricità.

Menzioniamo ancora in chiusura una circostanza notevole. Tra le varie macchine elettriche, alcune sono reversibili. Ciò significa che se, spendendo lavoro meccanico, le si mette in moto, diventano fonti di energia elettrica; ma viceversa, quando l'elettricità, o più esattamente l'energia elettrica, viene fatta fluire verso di loro, si mettono in movimento, vale a dire che, in queste macchine, un consumo di energia elettrica produce lavoro meccanico. Tali sono le macchine di Holtz, Holtz-Wimshurst, ecc. Quando due macchine Holtz-Wimshurst vengono unite tra loro, ad esempio, mediante due verghe o due fili, come mostrato in figura 116, e una di esse viene fatta ruotare, l'altra (che può trovarsi a una certa distanza dalla prima) inizia pure a muoversi. Queste due macchine consentono quindi di effettuare trasporti elettrici a distanza di lavoro. Mostriamo in seguito un metodo più conveniente per trasporti di questo tipo.







# 3. Azione del campo elettrico sui corpi che contiene

## 1. Introduzione

Quando si trasporta un qualsiasi corpo in un campo elettrico, si osservano certi fenomeni, il cui carattere dipende soprattutto dalla natura del corpo considerato. Si possono considerare questi fenomeni come il risultato dell'azione esercitata dal campo sul corpo. Il loro numero non è grande; è incomparabilmente minore del numero dei vari fenomeni che si osservano quando un corpo viene portato in un campo magnetico, il quale agisce, in modo manifesto, sulle proprietà della materia molto più profondamente del campo elettrico. È anche possibile che questa differenza sia solo apparente e che derivi dal fatto che le azioni del campo magnetico sono meglio studiate di quelle del campo elettrico. Il carattere dei fenomeni, ai quali dedichiamo questo capitolo, cambia a seconda che il corpo sia un conduttore o un dielettrico.

Abbiamo considerato, nel Capitolo 1, le proprietà del campo elettrico. Non si può, naturalmente, tracciare un limite preciso tra le proprietà del campo e le azioni che esso esercita sui corpi che contiene, perché ovviamente queste azioni o appaiono come proprietà del campo stesso, oppure derivano da queste proprietà come conseguenze necessarie. Non dovrebbe quindi sorprendere che alcune di queste azioni siano già state studiate in precedenza. Per completezza le riportiamo qui.

Le principali azioni del campo elettrico sui corpi in esso contenuti sono le seguenti:

1. Induzione elettrostatica, cioè la generazione di cariche elettriche sulla superficie dei conduttori.
2. La comparsa di forze ponderomorfiche che agiscono secondo la legge di Coulomb.
3. La polarizzazione dei dielettrici e il fenomeno, strettamente correlato a questa polarizzazione, della carica residua.
4. Elettrizzazione, cioè produzione di spostamenti (o sforzi) elastici nella sostanza dei corpi.
5. L'influenza del campo sulle proprietà ottiche dei corpi.
6. L'influenza del campo sull'elasticità e l'attrito interno dei corpi.
7. L'influenza del campo sulla temperatura dei corpi.

Abbiamo già studiato il primo dei fenomeni che abbiamo appena enumerato e abbiamo visto come la comparsa di cariche sulla superficie di conduttori posti in un campo elettrico, si presenti come una necessaria conseguenza delle proposizioni fondamentali delle due teorie che abbiamo indicato con le immagini A e B. Non è necessario tornare su questo fenomeno.

## 2. Legge di Coulomb

Se si porta in un campo elettrico un corpo già elettrizzato o che acquista una carica sotto l'azione del campo stesso, tale corpo è soggetto all'azione di un sistema di forze che si può, in generale, considerare come formata dall'insieme delle forze, agenti sugli elementi infinitamente piccoli in cui si suppone si scomponga la carica del corpo. Indichiamo con  $V$  la funzione potenziale del campo elettrico, con  $\eta'$  la carica su uno degli elementi infinitamente piccoli di volume o superficie del corpo; sulla carica  $\eta'$  agisce una forza uguale a, vedi (40),

$$f = -\eta' \frac{\partial V}{\partial n} \quad (3.0.1)$$

essendo  $n$  la normale alla superficie di livello del potenziale. Prendendo, per il potenziale  $V$  in un mezzo omogeneo, la formula (37,b),

$$V = \frac{1}{K} \int \frac{d\eta}{r} \quad (3.0.2)$$

dove  $K$  indica la costante dielettrica del mezzo, partiamo, nel calcolo delle azioni ponderomotrici del campo elettrico sui corpi che esso contiene, della legge di Coulomb, che è espressa dalla formula

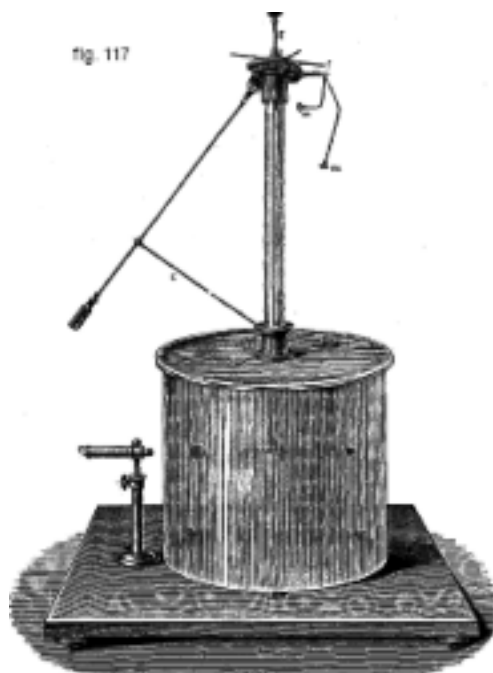
$$f = \frac{\eta\eta'}{Kr^2} \quad (3.0.3)$$

o nell'aria

$$f = \frac{\eta\eta'}{r^2} \quad (3.0.4)$$

L'azione reciproca di due quantità di elettricità è: 1. inversamente proporzionale al quadrato della distanza tra queste quantità, 2. direttamente proporzionale al loro prodotto. Da quanto precede risulta chiaramente che tale legge si riferisce al caso in cui  $\eta$  e  $\eta'$  sono, per così dire, concentrate in due punti, cioè al caso in cui le dimensioni delle superfici o dei volumi occupati dalle due quantità di elettricità sono molto piccoli rispetto alla distanza. È un fatto molto importante che la seconda parte della legge di Coulomb possa, come vedremo, essere verificata sperimentalmente, mentre per le forze magnetiche ciò non è possibile, poiché ciò che si chiama una quantità di magnetismo può essere definita solo come una quantità proporzionale alla forza magnetica che agisce su di essa nel campo magnetico considerato.

Vediamo ora come si può verificare sperimentalmente la legge di Coulomb. Si fa uso di quello della bilancia di torsione, che è stata impiegata dallo stesso Coulomb per scoprire la legge che porta il suo nome. Abbiamo fatto conoscere, nel Volume I, la disposizione e la teoria della bilancia di torsione unifilare. La figura 117 mostra una tale bilancia adatta per misure elettrostatiche. All'estremità inferiore del filo è appesa una piccola asta leggerissima di gommalacca, alle cui estremità sono incollate piccole canne di vetro. A una delle estremità (estremità destra) è fissata una pallina di sambuco dorato, all'altra un disco verticale di mica, che funge da contrappeso e nello stesso tempo da ammortizzatore per le oscillazioni dell'asta. Non descriveremo la parte superiore del dispositivo, perché tutti i dettagli necessari sono stati forniti su questo argomento nel Volume 1.



Questa parte superiore serve a portare l'asta nella posizione iniziale desiderata (la pallina di sambuco deve quindi trovarsi sotto la metà dell'apertura  $a$ ) e soprattutto per misurare l'angolo di rotazione  $\beta$  dell'estremità superiore del filo. Per misurare l'angolo di rotazione  $\alpha$  dell'asta, cioè dell'estremità inferiore del filo, si può utilizzare una scala incollata sulla superficie esterna della gabbia cilindrica di vetro, all'altezza dell'asta (tale scala è non mostrata in figura). Gli angoli  $\alpha$  e  $\beta$  si contano in senso contrario, a partire dalla posizione di riposo dove la sferetta non è elettrizzata, di modo che l'angolo di torsione  $\varphi$  del filo è

$$\varphi = \alpha + \beta \quad (3.0.5)$$

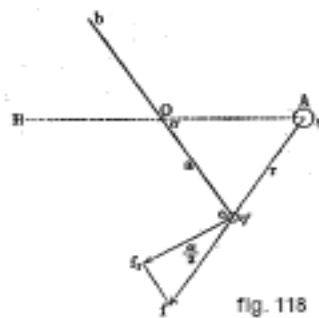
Quando si applica all'asta un momento di torsione  $M$ , si ha

$$M = C\varphi \quad (3.0.6)$$

La costante di torsione  $C$  del filo può essere determinata mediante la formula del Volume I

$$C = \frac{\pi^2 K}{T^2} \quad (3.0.7)$$

dove  $T$  indica la durata delle oscillazioni della torsione del bilanciere unifilare,  $K$  il momento d'inerzia del corpo sospeso all'estremità inferiore del filo. Si può quindi, se necessario, determinare il valore numerico della costante  $C$ .



Per verificare la legge dei quadrati, nel caso di forze repulsive, si procede come segue. Si introduce, attraverso l'apertura  $a$ , una bacchetta di vetro verticale, che reca all'estremità inferiore una sfera metallica elettrizzata A; la lunghezza di questa bacchetta deve essere tale che il centro della sfera metallica venga a trovarsi nella posizione precedentemente occupata dal centro della sfera di sambuco, che, dopo l'introduzione di A, viene prima applicata contro di essa, ma viene poi respinta. Indichiamo con  $\eta I$  la quantità di elettricità rimasta su A, con  $\eta'$  la quantità di elettricità passata sulla pallina di sambuco. Supponiamo, per generalità, di aver ruotato l'estremità superiore del filo di un certo angolo  $\beta$ , in modo che l'angolo di torsione  $\varphi$  sia diverso dall'angolo di rotazione  $\alpha$ , e sia, nella figura 118 situata in un piano orizzontale, A la sfera repulsiva, AB la posizione iniziale dell'asta, la quale, sotto l'influenza della forza repulsiva  $f$ , ha ruotato dell'angolo  $\alpha$  e si trova poi nella posizione  $cb$ . Sia  $f_1$  la componente perpendicolare a  $bc$  della forza  $f$ , sia inoltre  $OC = a$ ,  $Ac = r$ . Si ha

$$r = 2a \sin \frac{\alpha}{2} \quad f_1 = f \cos \frac{\alpha}{2} \quad \text{il}$$

momento di torsione  $M$  è, si veda la (5,a)

$$M = f_1 a = f a \cos \frac{\alpha}{2} = C\varphi \quad (3.0.8)$$

Dopo aver misurato gli angoli  $\alpha$  e  $\varphi$ , si fa ruotare l'estremità superiore del filo in un verso qualsiasi, in modo che  $\beta, \alpha, \varphi$  cambino; se si indicano i nuovi valori di questi angoli con  $\beta', \alpha', \varphi'$  e il nuovo valore della forza con  $f'$ , si ottiene, invece dell'equazione (6), la seguente

$$f'a \cos \frac{\alpha'}{2} C' \varphi' \quad (3.0.9)$$

Si ha così dall'esperienza il rapporto delle forze per due posizioni della pallina  $c$ :

$$\frac{f}{f'} = \frac{\varphi}{\varphi'} = \frac{\cos \frac{\alpha'}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} \quad (3.0.10)$$

Dalla legge di Coulomb, dobbiamo avere

$$\frac{f}{f'} = \left( \frac{r'}{r} \right)^2 = \left( \frac{2a \sin \frac{\alpha'}{2}}{2a \sin \frac{\alpha}{2}} \right)^2 = \frac{\sin^2 \frac{\alpha'}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} \quad (3.0.11)$$

Se la legge di Coulomb è esatta, il rapporto (7) tra le forze trovato sperimentalmente deve essere uguale al rapporto (7,a) calcolato teoricamente mediante questa legge. Uguagliando tra loro i due rapporti (7) e (7,a), si ottiene

$$\varphi \sin \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\alpha}{2} = \varphi' \sin \frac{\alpha'}{2} \tan \frac{\alpha'}{2} \quad (3.0.12)$$

Quando si fa ruotare di nuovo più volte l'estremità superiore del filo in una direzione o nell'altra, si ottengono i nuovi angoli  $\varphi'', \alpha'', \varphi''', \alpha'''$ , ecc. La formula (7,b) mostra che, che per qualsiasi variazione di questi angoli, cioè della distanza tra la pallina  $c$  e  $A$ , l'uguaglianza

$$\varphi \sin \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\alpha}{2} = B \quad (3.0.13)$$

deve sempre essere verificata, dove  $B$  è una costante. Se si sostituisce nella (6) il valore

$$f = \frac{\eta\eta'}{r^2} = \frac{\eta\eta'}{4a^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$$

si ottiene

$$\varphi \sin \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\eta\eta'}{4aC} = B \quad (3.0.14)$$

cioè un'espressione per la costante  $B$  che entra nella formula (8). Esperimenti accuratamente eseguiti hanno dimostrato che l'uguaglianza (8) è effettivamente soddisfatta dai diversi valori degli angoli  $\alpha$  e  $\varphi$ , ottenuti con il metodo di misura indicato. Ma bisogna osservare che per avere dei numeri che possano servire a verificare la legge di Coulomb, bisogna introdurre alcune correzioni, la più essenziale delle quali è la correzione relativa alla perdita di elettricità. La formula (8,a) mostra come varia il numero  $B$  in funzione della grandezza delle cariche  $\eta$  e  $\eta'$ . È chiaro che occorre determinare preventivamente la legge di variazione delle quantità  $\eta$  e  $\eta'$  col tempo, per le due sfere che si trovano all'interno della bilancia di torsione. È importante inoltre notare che introducendo questa correzione, si considera la seconda metà della legge di Coulomb come già dimostrata. Una seconda correzione va aggiunta, quando le dimensioni delle sfere  $A$  e  $c$  non sono molto piccole rispetto alla distanza  $r$ . In questo caso le cariche non si distribuiscono uniformemente sulla superficie delle due sfere; la correzione necessaria viene calcolata utilizzando le formule di Poisson relative alla distribuzione dell'elettricità su due conduttori sferici vicini. Un'altra correzione va fatta, quando l'involucro dell'apparecchio non è di vetro, ma di sostanza conduttrice; sulla superficie interna compare quindi dell'elettricità indotta, che agisce sulla sfera mobile.

Per verificare con l'esperienza la seconda metà della legge di Coulomb, indipendentemente dalla prima, si può procedere nel seguente modo. Dopo aver misurato gli angoli  $\alpha$  e  $\varphi$ , come sopra indicato, la sfera A viene tolta dallo strumento, viene toccata con un'altra sfera della sua stessa grandezza e poi rapidamente riportata alla sua iniziale posizione. Si diminuisce poi l'angolo  $\beta$ , fino ad ottenere la vecchia deviazione  $\alpha$  dell'asta, e, per arrivare ad una messa a punto più precisa, si utilizza un piccolo cannocchiale, rappresentato in figura 117. Abbiamo ora le formule

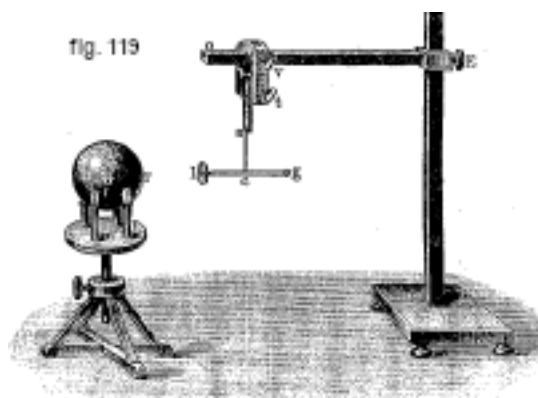
$$fa \cos \frac{\alpha}{2} = C\varphi \quad f'a \cos \frac{\alpha}{2} = C\varphi'$$

cioè  $f : f' = \varphi : \varphi'$ . Nella seconda misura, la carica di A è dimezzata; dobbiamo quindi avere  $f' = 0,5f$ , e quindi anche  $\varphi' = 0,5\varphi$ . L'ultima formula è pure confermata dall'esperienza, quando si applica una correzione relativa alla perdita dell'elettricità, che rende evidentemente il coefficiente inferiore a 0,5.

La verifica della legge dei quadrati, per mezzo della bilancia di torsione, presenta grandi difficoltà, nel caso di forze attrattive, perché la posizione di equilibrio della sfera mobile può facilmente risultare instabile. Senza soffermarci più in dettaglio su questo caso, ci limitiamo a ricordare che Coulomb ha effettuato questa verifica come segue. Posò su quattro gambe di vetro una sfera metallica G (fig. 119) carica positivamente e del diametro di 30 cm. A una certa distanza appese un filo di bozzolo un ago di gommalacca  $gl$ , all'estremità  $l$  del quale vi era un dischetto di carta dorata. Questo piccolo disco veniva messo a terra per un attimo, dopo di che conservava una carica negativa indotta. Coulomb determinò, per diversi valori della distanza  $d = Gl$ , le corrispondenti durate di oscillazione  $T$  dell'ago, che era spostato dalla sua posizione di equilibrio per rotazione attorno all'asse  $sc$  ed era attratto dalla sfera G. Le durate  $T$  le oscillazioni sono espresse dalla formula

$$T = \pi \sqrt{\frac{K}{fa}}$$

dove  $K$  è il momento d'inerzia dell'ago,  $a$  la lunghezza  $cl$  e  $f$  la forza che agisce sul disco  $l$ . Ma la forza  $f$  è inversamente proporzionale a  $d^2$ , e di conseguenza le durate  $T$  delle oscillazioni sono direttamente proporzionali alle distanze  $d$ , cosa confermata anche da esperimenti con sufficiente accuratezza.



Dopo Coulomb, Egen (18265), Harris (1832), Marié-Davy (1850), Riess e altri ancora cercarono il grado di accuratezza della legge da lui formulata. La legge, che ora porta il nome di Coulomb, fu scoperta, ma non pubblicata. 12 anni prima di Coulomb, intorno all'anno 1773, da Cavendish. I lavori di Cavendish divennero noti solo dal 1879, quando i suoi manoscritti, che erano conservati nel laboratorio di fisica dell'Università di Cambridge, furono pubblicati da Maxwell. Si riconobbe allora che Cavendish aveva svolto la sua ricerca, con un metodo molto più esatto di quello di Coulomb. Maxwell ha ripreso gli esperimenti di Cavendish in una forma leggermente modificata

e utilizzando un apparato più sensibile. Supponendo che l'azione reciproca di due quantità di elettricità è inversamente proporzionale a una certa potenza di  $n$  della loro distanza e inoltre che  $n = 2 \pm t$ , Maxwell ha potuto dedurre dalle sue osservazioni che  $t$  non supera  $1/21600$ . Se ne può concludere che la legge di Coulomb, che sarebbe più corretto chiamare la legge di Cavendish-Coulomb, è del tutto esatta.

Resta ora da considerare l'importantissima questione dell'azione reciproca tra conduttori elettrizzati immersi in un dielettrico. Siano  $\eta_1$  e  $\eta_2$  le cariche,  $V_1$  e  $V_2$  i potenziali dei conduttori in aria,  $K$  il potere induttore del dielettrico,  $f_0(\eta)$  la forza della mutua azione in aria,  $f_K(\eta)$  la stessa forza nel dielettrico. Ricordando le formule generali (1-11) e (1-37)

$$f = \frac{\eta\eta_1}{Kr^2} \quad (3.0.15)$$

$$V = \frac{\eta}{Kr} \quad (3.0.16)$$

La prima di queste formule mostra che, per cariche assegnate, si ha

$$f_K(\eta) = \frac{f_0(\eta)}{K} \quad (3.0.17)$$

Ma supponiamo che i conduttori siano collegati a sorgenti di elettricità, che li mantengono ai potenziali  $V_1$  e  $V_2$  costanti. La formula (10) mostra che l'introduzione in un dielettrico rende i potenziali  $K$  volte più piccoli; affinché non subiscano alcun cambiamento, è necessario aumentare la carica  $K$  volte, in modo che invece di  $\eta_1$  e  $\eta_2$  abbiamo le cariche  $K\eta_1$  e  $K\eta_2$ . Segue dalla formula (9) che la forza  $f$  deve in primo luogo diventare  $K^2$  volte maggiore, in secondo luogo  $K$  volte più piccola, cioè  $K$  volte più grande; si ha quindi, per dati potenziali,

$$f_K(V) = Kf_0(V) \quad (3.0.18)$$

Le formule (11) e (12) ci mostrano che l'azione reciproca dei conduttori elettrizzati è, per date cariche, inversamente proporzionale e, per dati potenziali, direttamente proporzionale alla costante dielettrica del mezzo ambiente.

### 3. Polarizzazione dei dielettrici e carica residua

Quando un dielettrico viene trasportato in un campo elettrico, si polarizza. Partendo dalle nozioni fondamentali dell'immagine A, abbiamo ammesso che, sotto l'azione del campo, l'induzione avvenga nelle piccolissime particelle del dielettrico alle quali è attribuita una conducibilità elettrica. Per misurare la polarizzazione  $\Pi$  in un dato punto del dielettrico, abbiamo preso il momento elettrico attorno a questo punto, riferito all'unità di volume, e abbiamo visto (1-33,d), che la quantità  $\Pi$  è numericamente uguale alla densità  $k'$  della carica su una superficie ortogonale alle linee di forza. La polarizzazione  $\Pi$  è proporzionale all'intensità  $F$  del campo, in modo che si può porre

$$\Pi = \gamma F \quad (3.0.19)$$

dove  $\gamma$  è la suscettibilità elettrica del dielettrico, la quale è legata alla costante  $K$ , che abbiamo chiamato permeabilità elettrica, dalla relazione

$$K = 1 + 4\pi\gamma \quad (3.0.20)$$

Se, in accordo con la teoria di Clausius e Mossotti, si indica con  $g$  il rapporto tra il volume occupato dalle particelle conduttrici e il volume totale del dielettrico, si trova che  $g$  e  $K$  sono legati dalla relazione

$$g = \frac{K - 1}{K + 2} \quad (3.0.21)$$

Infine, ricordiamo ancora la formula (1-34b), che mostra che la permeabilità elettrica è

$$K = \frac{F'}{F} \quad (3.0.22)$$

dove  $F'$  rappresenta l'intensità del campo nel dielettrico.

Quando un dielettrico viene portato in un campo elettrico, la forza che agisce su di esso è, a parità di tutte le altre condizioni, tanto maggiore quanto  $\Pi$  è maggiore, o quanto  $\gamma$  o  $K$  è maggiore.

Quando si avvicina un dielettrico a un conduttore carico, il potenziale del conduttore diminuisce e di conseguenza la sua capacità aumenta. La capacità di un condensatore è proporzionale al potere induttore  $K$  del dielettrico intermedio.

Abbiamo appena richiamato una serie di formule e fatti, che sono già stati considerati e spiegati in precedenza. Dobbiamo ora notare in particolare che tutte le nostre formule e tutti i nostri ragionamenti si riferivano ad un dielettrico perfetto, nel quale, in primo luogo, la polarizzazione si stabilisce istantaneamente e poi non varia più, e che, in secondo luogo, rappresentava un perfetto isolante, cioè un isolante che non conduce affatto elettricità. L'aria, per esempio, alla normale pressione atmosferica, è un tale dielettrico perfetto; Pellat (1881) mostrò che un condensatore ad aria si carica completamente in meno di 0,002 secondi.

I dielettrici solidi e liquidi hanno, in generale, proprietà che li differenziano più o meno dai dielettrici perfetti. In primo luogo la polarizzazione, dopo aver acquisito quasi istantaneamente un certo valore, subito dopo la comparsa del campo elettrico, continua poi ad aumentare lentamente, per un considerevole intervallo di tempo, cosicché  $K$  si trova dipendere dalla durata dell'azione del campo. In secondo luogo, i dielettrici solidi e liquidi hanno una certa conducibilità, anche se relativamente molto bassa. Quando la conducibilità non è molto piccola, può accadere che lo stato elettrico del dielettrico portato nel campo elettrico diventi uguale, dopo un certo tempo, allo stato elettrico di un conduttore trovato nelle stesse condizioni; il fenomeno è allora come se  $K$  assumesse col tempo un valore infinitamente grande. Tuttavia, la maggior parte dei dielettrici non acquisisce tale stato; la grandezza  $K$ , aumentando da un certo valore iniziale  $K_0$  raggiunto istantaneamente, si avvicina asintoticamente ad un certo massimo. Se ci si attiene all'immagine A, si deve dire che l'induzione nelle particelle conduttrici o semiconduttrici, non raggiunge immediatamente il suo massimo. Attenendoci all'immagine B, si può dire che i tubi d'induzione non penetrano immediatamente e completamente all'interno del dielettrico.

Il fenomeno richiama per la sua caratteristica l'elasticità residua; è stato studiato da Gaugain, Wüllner e altri. Wüllner avvicinò una lastra metallica orizzontale elettrizzata, collegata ad un elettrometro e posta sopra un dielettrico solido o liquido, fino ad una distanza di 2,93 mm dalla superficie di questo dielettrico. Il potenziale  $V$  della lastra diminuiva dapprima quasi istantaneamente, poi lentamente. Sia  $V_0$  il valore iniziale del potenziale della lastra e  $V/V_0 = b$ . Per l'acqua, si ottiene istantaneamente il valore  $b = 0,391$ , che non varia poi più; ma, per  $CS^2$  ad esempio, si ottenne, 40 secondi dopo l'abbassamento della lastra, il valore  $b = 0,828$ , e dopo 80 minuti  $b = 0,405$ ; per il petrolio, dopo 20 secondi si aveva  $b = 0,855$ , e dopo 80 minuti  $b = 0,597$ ; per l'ebanite (spessore 15,3 mm)  $b$  diminuiva dal valore iniziale  $b = 0,501$  fino a  $b = 0,394$ , ecc. Romich e Nowak non hanno trovato alcun effetto ritardato di questo genere nello zolfo puro. Si devono a Cohn e Arons ricerche molto interessanti (1886 e 1888), nelle quali riuscirono a separare l'una dall'altra la polarizzazione e la conducibilità di dielettrici liquidi e misurare contemporaneamente queste due grandezze.

La differenza considerata tra le proprietà dei dielettrici reali e quelle dei dielettrici perfetti è certamente legata al fenomeno della carica residua, che si è proposto di spiegare con tutta una serie di ipotesi diverse. Quest'ultimo fenomeno consiste in ciò: quando si carica un condensatore le cui armature metalliche sono a diretto contatto con il dielettrico intermedio, ad esempio una bottiglia di Leida, e che si scarica collegando le armature, si trova dopo un certo tempo che le

armature si ricarichino, in modo da ottenere una seconda scintilla di scarica, poi una terza dopo un altro intervallo di tempo, ecc. Nella prima scarica non è quindi scomparsa tutta la carica del condensatore; ne è rimasta una certa parte e questa carica residua passa poi alle armature, liberandosi per così dire a poco a poco, e rendendo così possibili scariche successive.

Il tempo è necessario per la formazione della carica residua. Se carichiamo per la prima volta una bottiglia di Leida, che non è in uso da molto tempo, e se la scarichiamo subito, non troviamo alcuna carica residua, o quasi: ne otteniamo una, invece, se la scarica viene effettuata solo un certo tempo dopo che la carica della bottiglia. La carica libera diminuisce gradualmente durante questo tempo, come ha dimostrato Kohlrausch (1854), collegando rapidamente la bottiglia carica ad un elettroscopio; le indicazioni di quest'ultimo diminuiscono gradualmente. Kohlrausch è stato in grado, introducendo una correzione relativa alla perdita delle due elettricità, di determinare la velocità di formazione della carica residua.

Nella bottiglia di Leida il fenomeno si complica, perché tra le armature e il vetro c'è uno strato di colla solidificata, che è un cattivo conduttore. Inoltre, parte dello stucco potrebbe passare sulla superficie del vetro non ricoperta di colla. Ma non sta qui la causa del fenomeno considerato, poiché si osserva anche quando le armature vengono sostituite dall'acqua, che tocca direttamente la superficie del vetro.

Faraday e altri hanno ammesso che le due elettricità, attirandosi reciprocamente, penetrano all'interno del dielettrico e, dopo una scarica, ritornano gradualmente all'esterno. Questa spiegazione non potrebbe tuttavia essere ammessa, perché rimarrebbe inspiegata la causa del movimento opposto delle cariche che si attraggono.

Da quanto precede, la formazione della carica residua può essere spiegata come segue. Abbiamo visto che la polarizzazione dielettrica non avviene all'improvviso, ma raggiunge solo gradualmente il suo massimo. Allo stesso modo, anche la polarizzazione non scompare istantaneamente, quando cessa l'azione delle forze elettriche esterne; in altre parole, dopo la scarica delle armature metalliche, il dielettrico rimane in una certa misura polarizzato. Questa polarizzazione produce (o trattiene) alcune cariche sulle armature, che vengono gradualmente rilasciate man mano che la polarizzazione del dielettrico scompare. La spiegazione che segue non differisce sostanzialmente dalla precedente: abbiamo visto che la superficie di un dielettrico polarizzato è ricoperta da una carica, la cui densità abbiamo indicato con  $k'$ ; la carica dell'armatura a contatto con il dielettrico passa in parte sulla superficie di quest'ultimo; se l'azione dura abbastanza a lungo, può succedere che questa carica e la carica  $k'$  si distruggano parzialmente a vicenda. Dopo la scarica, il dielettrico rimane di nuovo parzialmente polarizzato, il che provoca la comparsa di nuove cariche libere sull'armatura. Belli e Hopkinson (1872) trovarono che caricando una bottiglia di Leida, scaricandola dopo qualche tempo e ricaricandola subito con elettricità contraria, caricandola poi di nuovo come prima, ecc., appaiono poi a poco a poco, sulle armature, dopo l'ultima scarica, cariche di segno variabile che giungono, per così dire, una dopo l'altra all'esterno.

Bezold ha cercato di dimostrare la correttezza dell'ipotesi di Faraday secondo cui l'elettricità penetra semplicemente all'interno del dielettrico. Ma le ricerche di Wüllner, (1874 e 1877) m Giese, Dieterich, Hopkinson, Neyreneuf, Gaugain, ecc. sono a favore della teoria, che si basa su una polarizzazione residua del dielettrico.

Trouton e Russ (1907) hanno cercato sperimentalmente la legge secondo la quale la carica residua ricompare. Hanno scoperto che la quantità  $Q$  di elettricità, che viene rilasciata nel tempo  $t$ , può essere rappresentata da un'espressione della forma

$$Q = a \log(t + b)$$

Formule analoghe ricorrono nella teoria dell'elasticità.

Hopkinson (1876), Maxwell (*Treatise*, I) e Schweidler (1907) hanno fornito una teoria più approfondita della formazione della carica residua. il primo dei quali ha considerato questo fenomeno come un effetto di ritardo elettrico del tutto analogo all'elasticità residua. Una tale

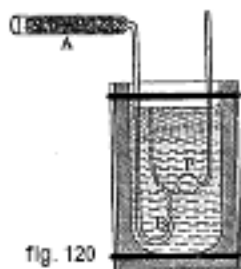


concezione porta a considerare lo stato elettrico del dielettrico come dipendente da tutta la sua precedente storia elettrica. Qualcosa di analogo esiste nella teoria dell'elasticità residua di Boltzmann.

Maxwell è giunto alla conclusione che una carica residua può formarsi solo se il dielettrico è eterogeneo. I risultati di esperimenti fatti con dielettrici omogenei, il più puri possibile, concordano con questa visione. Pertanto, Rowland e Nichols hanno trovato che buoni campioni di cristallo di rocca non danno quasi niente, e lo spato d'Islanda non ha alcuna carica residua. Muraoka ha inoltre osservato che anche la paraffina, l'olio di paraffina, il petrolio, la trementina e lo xilolo perfettamente puri non danno carica residua, mentre se ne forma in un dielettrico composto da diversi strati di queste sostanze. Anche Hertz ha ottenuto lo stesso risultato per la benzina e Arons per la paraffina.

È particolarmente interessante notare che uno scuotimento del dielettrico, quando si trova in un campo elettrico, ne favorisce la polarizzazione e conseguentemente ne aumenta la carica residua latente. Viceversa un urto dopo la scarica aumenta la velocità con cui la polarizzazione scompare e di conseguenza la velocità con cui la carica residua si raccoglie sulle armature.

Un aumento della temperatura agisce in modo analogo a uno scuotimento; maggiore è la temperatura, maggiore è la carica residua. I. Hopkinson e E. Wilson (1897) in particolare hanno studiato questa influenza.



Le forze, che agiscono su un dielettrico posto in un campo elettrico, producono generalmente un determinato movimento di questo dielettrico. Quando un isolante di costante dielettrica  $K_1$  si trova all'interno di un altro isolante indefinito, ad esempio all'interno di un isolante liquido ( $K_2$ ), è sottoposto, nel campo elettrico, alle stesse forze come se fosse nel vuoto e se la sua costante dielettrica fosse uguale a  $K_1 - K_2$ . Quando  $K_2 > K_1$ , le forze devono cambiare segno. Sappiamo, ad esempio, che un dielettrico è attratto da un corpo elettrizzato; risulta da quanto precede che questo dielettrico, posto in un mezzo più fortemente dielettrico, cioè in un mezzo con  $K$  maggiore, deve essere respinto dal corpo elettrizzato. Questa proposizione richiama il principio di Archimede. Puccianti (1904) ha eseguito la seguente esperienza, per evidenziare tale repulsione. In un recipiente pieno d'olio di vaselina si trovano un filo metallico che avvolge una sfera P (fig. 120) e un tubo di vetro AB (in A si trova dell'ovatta), nel quale vengono soffiate delle bolle d'aria; queste bolle sono respinte, quando la sfera P è elettrizzata; ma Seddig (1905) ha indicato che la conducibilità differente dell'aria e dell'olio deve svolgere un ruolo in questa esperienza. Chaudier (1908) ha ripreso la questione, a proposito delle sue ricerche sulle proprietà elettro-ottiche dei liquori misti, di cui parleremo più avanti. Applicando ai fenomeni di induzione elettrostatica la teoria dei fenomeni di induzione magnetica che spiegheremo in seguito, si dimostra che, in un campo uniforme, una sfera è in equilibrio in tutte le regioni del campo, qualunque sia il segno della differenza  $K_1 - K_2$ , essendo  $K_1$  la costante dielettrica del corpo sferico e  $K_2$  la costante dielettrica del mezzo ambiente. Se il campo non è uniforme, il dielettrico si sposta nel punto in cui la forza è massima quando  $K_1 - K_2$  è positivo, e verso il punto in cui la forza è minima quando  $K_1 - K_2$  è negativo. Per verificare sperimentalmente questi risultati nel caso in cui la costante dielettrica del mezzo sia la più alta, Chaudier ha costruito una livella a bolla d'aria, il cui liquido costituente è un isolante con una costante dielettrica bassa, ma

comunque superiore a quella dell'aria; questa livella è posta in un campo elettrico prodotto da una macchina di Wimshurst: 1. I due poli della macchina sono uniti alle due armature di un condensatore piano, tra le quali la livella a bolla d'aria occupa qualsiasi posizione rispetto alla direzione delle linee di forza del campo così creato; non si osserva alcuno spostamento della bolla gassosa quando la macchina viene messa in funzione. 2. I poli della macchina sono messi a contatto con due sfere metalliche tra le quali è posta, perpendicolarmente alla linea assiale, la livella a bolla d'aria; stabilito l'equilibrio della bolla, si osserva, non appena la macchina entra in funzione, che la bolla gassosa subisce una repulsione e si allontana dalla parte assiale del campo non uniforme che è stata stabilita; ritroviamo così l'azione repulsiva osservata da Puccianti, mediante un diverso dispositivo. Risultati particolarmente evidenti si ottengono con liquidi dotati di una costante dielettrica molto bassa (prossima a 2), come solfuro di carbonio, benzina, trementina, benzina e petrolio. Se la costante dielettrica del liquido costituente aumenta, il fenomeno perde la sua nitidezza e alla fine scompare. Pertanto, lo spostamento della bolla d'aria è appena osservabile con etere solforico di costante uguale a circa 4; diventa nullo con l'acetato di amile, che ha una costante dielettrica più alta e vicina a 5.

Quando invece di una sfera consideriamo un ellissoide isotropo in un campo uniforme, si può solo dimostrare che l'equilibrio di questo ellissoide è stabile quando l'asse maggiore è parallelo al campo. Questa proprietà sussiste, qualunque sia il segno della differenza  $K_1 - K_2$  delle costanti dielettriche dell'ellissoide e del mezzo ambiente. Se l'ellissoide è posto in un campo non uniforme, bisogna distinguere due casi: 1. quando  $K_1 - K_2 > 0$ , l'ellissoide è in equilibrio in un punto del campo dove la forza è massima; il suo asse maggiore è quindi tangente alla linea di forza passante per questo punto; 2. quando  $K_1 - K_2 < 0$ , l'ellissoide è in equilibrio in un punto del campo in cui la forza è minima, e il suo asse maggiore è quindi diretto lungo la normale in questo punto alla corrispondente linea di forza. Per verificare questi risultati teorici, già sottoposti a controllo sperimentale da Groetz e Fömm (1895) e da Beaulard (1906), Chaudier costruì cilindretti di piccola sezione in ebanite e in paraffina; ha impiegato anche tubi di paraffina molto sottili chiusi alle estremità e contenenti aria. Poiché era importante osservare solo l'orientazione dei dielettrici, questi cilindri erano sospesi per il loro baricentro a fili di seta tenuti verticali da un piccolo peso tensore, oppure poggiavano al loro centro su aghi verticali che formavano un perno; potevano così orientarsi su un piano orizzontale. Posti in un campo elettrico uniforme, questi cilindri erano orientati parallelamente al campo, qualunque fosse il valore relativo della costante dielettrica del mezzo. L'esperimento prova che non si possono impiegare liquidi di costante dielettrica superiore a 5, perché poi le correnti di convezione e la conducibilità del liquido impediscono ogni osservazione del fenomeno. Bouty (1892) ha dimostrato, infatti, che la conducibilità elettrolitica delle sostanze isolanti aumenta molto più rapidamente della costante dielettrica. In un campo elettrico non uniforme, i cilindri isolanti si orientano nettamente nella direzione delle linee di forza, quando la costante dielettrica del mezzo era più piccola di quella del cilindro; ma, in caso contrario, il fenomeno era confuso e la posizione di equilibrio dei cilindri era variabile, sebbene la tendenza generale di orientazione fosse piuttosto la direzione delle linee di forza che la direzione ad esse normale. Si possono anche attribuire questi risultati incerti alla conducibilità elettrolitica del liquido utilizzato.

Nei corpi anisotropi la grandezza  $K$ , e di conseguenza anche la polarizzazione, hanno valori diversi a seconda delle direzioni, come richiesto dalla legge di Maxwell  $K = n^2$ , dove  $n$  è l'indice di rifrazione di radiazioni di grande lunghezza d'onda. Un corpo anisotropo tende, in generale, ad assumere una posizione tale che la direzione di massima polarizzazione coincida con quella delle linee di forza. Le condizioni di equilibrio di un corpo anisotropo in un campo elettrico sono state studiate da Knoblauch (1851), Root (1876), Boltzmann (1874) e Righi (1897). Nel caso delle particelle cristalline dei liquidi misti attivi studiati da Chaudier, l'orientazione è indipendente dal valore relativo delle principali costanti dielettriche e dal valore delle costanti dielettriche del mezzo ambiente; queste particelle sono poste parallelamente alle linee di forza del campo.

Quincke (1896) ha scoperto che i dielettrici, posti all'interno di un liquido non conduttore tra le armature di un condensatore carico, subivano movimenti estremamente notevoli (rotazione, reciproca repulsione e attrazione, ecc.), e attribuirono questi movimenti all'azione del campo elettrico sul sottilissimo strato di aria aderente al dielettrico. Al contrario, Heydeweyler, Graetz e Schweidler hanno mostrato che questi movimenti trovano la loro spiegazione, quando si ammette che il liquido che circonda il dielettrico conduce parzialmente l'elettricità.

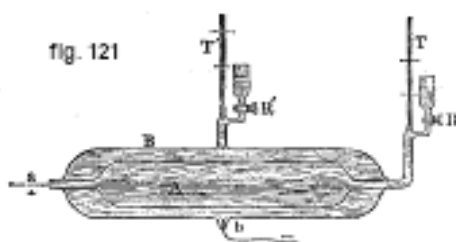
#### 4. Elettrostrizione. Il principio di conservazione dell'elettricità di G.Lippmann

Le forze elettriche che agiscono sulla carica di qualsiasi corpo, possono produrre uno spostamento di questa carica nel corpo o sulla sua superficie. In questo caso, le forze sono chiamate elettromotrici. Ma se un tale spostamento non è possibile, come ad esempio quando le forze agiscono normalmente sulla superficie del corpo elettrizzato, queste forze devono allora agire sul corpo stesso, cioè costituire forze ponderomotrici. Tale è anche il caso di un dielettrico posto in un campo elettrico: le forze esercitate sulle cariche delle particelle polarizzate sono equivalenti, come abbiamo visto, a forze di tensione lungo i tubi di induzione e a forze di pressione sulle superfici laterali di questi tubi. La grandezza  $P$  della forza di tensione, così come quella della forza di pressione, è determinata dalla formula

$$P = \frac{F^2 K}{8\pi} \quad (3.0.23)$$

Sotto l'azione di queste forze di trazione e di pressione, nel dielettrico devono manifestarsi forze meccaniche, che generalmente portano a deformazioni all'interno del corpo. I fenomeni di questo tipo sono chiamati fenomeni di elettrostrizione. Indicheremo innanzitutto i risultati ottenuti nello studio sperimentale di questi fenomeni.

Già Fontana (1831), Volpicelli (1856) e Govi (1866) avevano notato che il volume di una bottiglia di Leida o di uno strumento analogo aumenta nell'elettrizzazione. La prima ricerca precisa si deve a Duter (1878). Il suo strumento è rappresentato dalla figura 121; è costituito da una bottiglia di Leida di forma particolare, le cui armature sono sostituite da liquidi. Il vaso A, al quale è saldato un filo  $a$ , è provvisto di un tubo capillare T.



Si trova all'interno di un recipiente più largo B, al quale è saldato un filo  $b$  e che è provvisto anch'esso di un tubo capillare T'. Entrambi i contenitori sono pieni di acqua acidulata. Se carichiamo questa bottiglia di Leida, per esempio collegando uno dei fili con una fonte di elettricità e l'altro con la terra, il liquido scende in T, mentre sale in T'. Ne consegue che il volume di un condensatore aumenta nella carica. Quando si vuole semplicemente determinare la variazione del volume interno del condensatore, ci si può servire di un vaso a forma di termometro con un grande serbatoio, nel quale è saldato un filo di ferro; lo si riempie di acqua acidulata e lo si immerge in un altro vaso contenente la stessa acqua, dove termina l'estremità di un secondo filo. Duter ha trovato che la variazione di volume è direttamente proporzionale al quadrato della differenza di potenziale e inversamente proporzionale alla prima potenza dello spessore della

parete del vaso (A in Fig. 121): il secondo di questi risultati è stato poi riconosciuto impreciso. Quincke, in particolare, studiò dopo Duter la variazione di volume di un dielettrico nella sua elettrizzazione. Ha trovato che questa variazione è inversamente proporzionale al quadrato dello spessore della parete del vaso, un risultato che concorda con la ricerca teorica. Quincke ha trovato che la stessa legge era valida per i corpi cristallini: la verificò anche, così come Korteweg e Julis, per la gomma. Infine Wüllner e M. Wien (1902) hanno ripetuto gli esperimenti di Quincke, seguendo un metodo migliorato, che ha permesso loro di evitare molte fonti di errore. Hanno riconosciuto che la variazione di volume dei condensatori sferici e cilindrici in vetro è un po' più piccola di un'azione puramente meccanica.

Righi (1879), Röntgen (1880), Quincke (1880), Cantone (1881) e More (1900) hanno studiato la variazione di lunghezza di un dielettrico nella polarizzazione. Righi è stato il primo a dimostrare che un tubo di vetro si allunga quando un foglio di stagno viene incollato alle sue superfici interna ed esterna e il condensatore cilindrico così formato viene caricato. Röntgen ha ottenuto un notevole allungamento di una striscia di gomma, elettrizzando le due facce di questa striscia mediante due pettini metallici collegati ai poli di una macchina di Holtz. Quincke ha osservato in un bicchiere un allungamento residuo, dopo la cessazione dell'elettrizzazione.

Nel 1900 furono pubblicate ricerche molto accurate di More, il quale ha trovato che gli allungamenti e più in generale le deformazioni dei dielettrici sono prodotti esclusivamente da cariche libere, cioè da cariche la cui presenza in un dato luogo produce una variazione del flusso di induzione; esperimenti più recenti (1903) lo hanno portato allo stesso risultato. Una polarizzazione del dielettrico, che non produce alcuna variazione di flusso nel passaggio del mezzo ambiente in questo dielettrico e che è però accompagnata da certe sollecitazioni di tensione e pressione  $P$ , non agisce affatto secondo lui sulle dimensioni del dielettrico. Una lunga controversia sorse tra More e Sacerdote sull'argomento di questi esperimenti; M. Cantone (1904) da parte sua ha rilevato che il metodo di misura applicato da More non sembra sicuro; infine anche F. Ppckels (1906) ha contraddetto la conclusione di More. La questione rimane quindi aperta.

Quincke e Röntgen hanno studiato l'elettrostrizione nei liquidi, ma sono arrivati a risultati contraddittori. Il primo ha rilevato che il volume di alcuni liquidi aumenta in un campo elettrico e quello di altri diminuisce, mentre il secondo ha riscontrato un aumento di volume per tutti i liquidi.

I cristalli, che manifestano il fenomeno della piezoelettricità, cioè che vengono elettrizzati per compressione, estensione e più in generale sotto l'azione di forze meccaniche, presentano elettrostrizione. Si dimostra infatti facilmente, come vedremo in seguito applicando il principio di conservazione dell'elettricità formulato da G. Lippmann (1881), che tali cristalli devono invece subire una variazione delle loro dimensioni per elettrizzazione, dipendendo il segno di tale variazione (allungamento o accorciamento) dall'elettrizzazione. Gli esperimenti di J. e P. Curie (1881), di Röntgen e di Kundt hanno confermato questa previsione teorica. J. e P. CURIE ricoprivano le facce perpendicolari all'asse elettrico con un cristallo, una tormalina per esempio, con fogli di stagno ai quali davano elettrizzazioni opposte. Quando l'elettrizzazione era uguale a quella prodotta da una compressione del cristallo in direzione longitudinale, si osservava un allungamento. J. Curie e M.me Curie (1888) hanno costruito addirittura un elettrometro, di cui parleremo più avanti, basato sulla variazione delle dimensioni di una lamina di quarzo per elettrizzazione, con il quale hanno studiato la radioattività di tutte le sostanze radioattive conosciute.

La questione dell'elettrostrizione nei gas, cioè dell'influenza del campo elettrico sul volume o sulla tensione di una data quantità di gas, è di grande interesse. È anche facile prevedere che una tale influenza debba esistere. Consideriamo un condensatore carico, il cui dielettrico è formato da un gas qualsiasi. Se questo gas è rarefatto, il suo potere dielettrico  $K$  diminuisce; ne consegue che la capacità del condensatore diminuisce e il potenziale a cui è caricato aumenta. Senza ricorrere a ragionamenti più rigorosi, possiamo affidarci al principio di Le Chatelier-Braun

che si verifica nei fenomeni più diversi: ogni azione provoca una reazione, che tende a indebolire questa azione. Quando si elettrizza un condensatore, aumentandone il potenziale, deve avvenire una modifica nel gas, che favorisce la riduzione del potenziale, cioè un aumento della capacità del condensatore. La contrazione del gas rappresenta una tale modifica. Possiamo concludere da ciò che, *sotto l'azione del campo elettrico, deve verificarsi una contrazione del gas, cioè un aumento di tensione o una diminuzione di volume*. Possiamo anche giungere allo stesso risultato nel seguente modo teorico. Prendiamo come variabili indipendenti il potenziale  $V$  del condensatore e la pressione  $p$  del gas intermedio. Se si aggiunge la quantità di elettricità  $d\eta$ ,  $V$  e  $p$  variano; poniamo

$$d\eta = c dV + h dp \quad (3.0.24)$$

La grandezza  $h$  è positiva, perché, nella compressione del gas, ( $dp > 0$ ), la capacità aumenta e di conseguenza, per  $V = cost$ , si ha  $d\eta > 0$ . La carica  $\eta$  è una funzione delle grandezze  $V$  e  $p$ : la quantità  $d\eta$  è quindi il differenziale totale di questa funzione, e di conseguenza

$$\frac{\partial c}{\partial p} = \frac{\partial h}{\partial V} \quad (3.0.25)$$

Quando si aggiunge la carica  $d\eta$  e il volume  $v$  aumenta di  $dv$ , l'energia  $E$  del sistema aumenta della quantità

$$dE = V d\eta - p dv$$

o, per una modifica isoterma ( $pv = cost$ )

$$dE = V d\eta + v dp = cV dV + (hV + v) dp$$

Anche questa grandezza è un differenziale totale; si ha quindi

$$\begin{aligned} \frac{\partial (cV)}{\partial p} &= \frac{\partial (hV + v)}{\partial V} \\ V \frac{\partial c}{\partial p} &= V \frac{\partial h}{\partial V} + h + \frac{\partial v}{\partial V} \end{aligned}$$

Ne deriva, vedere la (15,a),

$$\frac{\partial v}{\partial V} = -h \quad (3.0.26)$$

Poiché si ha  $h > 0$ , questa formula mostra che il volume  $v$  del gas diminuisce, quando il potenziale  $V$  aumenta. Se si conosce come la costante dielettrica del gas e di conseguenza anche la capacità del condensatore dipendono dalla pressione  $p$ , è facile calcolare  $h$  e di conseguenza la variazione  $\Delta v$  del volume del gas sotto l'azione di un campo. Si ottiene infine la formula

$$\frac{\Delta v}{V} = -\frac{1}{8\pi} \frac{\partial K}{\partial p} F^2 \quad (3.0.27)$$

dove  $\Delta v$  è la variazione del volume  $v$ , quando compare il campo  $F$ , e  $K$  la costante dielettrica del gas. Quincke (1880), così come Warren de la Rue e Hugo Müller, non sono stati in grado di rivelare questa piccola variazione di volume  $\Delta v$  prevista teoricamente; è stata osservata e misurata per la prima volta da Mache (1898) e R. Gans (1903).

G. Lippmann ha introdotto una teoria generale dei fenomeni elettrici reversibili, che rappresenta per l'elettricità ciò che per la termodinamica è il calore; si applica in modo del tutto particolare ai fenomeni di elettrostrizione. Già si conosceva nell'elettricità un primo principio, quello dell'equivalenza; ma mancava un secondo principio del tipo del principio di Carnot. Questo secondo principio è il seguente.

Si consideri un sistema variabile, assolutamente non specificato, al quale affluiscono, per mezzo di un filo conduttore, quantità di elettricità, la cui somma algebrica è rappresentata dall'espressione  $\int dm$ . Lippmann ammette che, quando è chiuso il ciclo percorso dal corpo, si ha sempre

$$\int dm = 0$$

Se si trattasse solo di un sistema di corpi conduttori isolati, di semplici serbatoi elettrici, non ci sarebbe motivo di un postulato; l'equazione precedente esprimerebbe un fatto universalmente riconosciuto. Ma Lippmann ammette che l'equazione precedente si applica anche a sistemi che, durante le loro variazioni, si comportano come sorgenti di elettricità, per esempio a cristalli semiedrici che cedono elettricità per compressione. Si tratta di una proposizione che deve essere verificata, direttamente o attraverso le sue conseguenze.

Per applicare l'equazione  $\int dm = 0$  allo studio dei fenomeni reversibili, Lippmann osserva che essa implica che  $dm$  è un differenziale esatto. Se quindi si chiamano  $x$  e  $y$  le variabili indipendenti che determinano lo stato del sistema, e che si ha di conseguenza

$$dm = Xdx + Ydy$$

la condizione di integrabilità che esprime il principio di conservazione dell'elettricità è il seguente:

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} \quad (3.0.28)$$

Per tradurre, inoltre, in forma di equazione, il noto principio di conservazione dell'energia, Lippmann prende da Lord Kelvin e da Kirchhoff i loro artifici di analisi, e mostra che chiamando  $dE = Adx + Bdy$  una variazione infinitamente piccola dell'energia totale, si ha ugualmente la condizione di integrabilità

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x} \quad (3.0.29)$$

Le equazioni (16,b) e (16,c) sono sempre distinte, compatibili e costituiscono le due equazioni più generali alle derivate parziali che governano i fenomeni elettrici reversibili. Ogni volta che si scoprirà un fenomeno che può dar luogo a un ciclo chiuso, si potrà applicargli il precedente modo di analisi, e trarne anche nuove conseguenze. Ecco perché il principio di conservazione dell'elettricità ha lo stesso ruolo e la stessa generalità, in elettricità, del principio di Carnot in termodinamica.

La teoria dell'elettrostrizione nei gas che abbiamo descritto è del tutto conforme, come si vede, al metodo generale di Lippmann che abbiamo appena indicato. Applicheremo ancora il principio di conservazione dell'elettricità, unitamente al principio di equivalenza, al fenomeno dell'elettrostrizione nei solidi.

Sia  $l$  la lunghezza della bottiglia tubulare di Leyda usata da Righi nei suoi esperimenti. Quando il potenziale del tubo di vetro è  $x$  e il tubo è contemporaneamente sottoposto nel senso della sua lunghezza alla forza di trazione esercitata da un peso  $p$ , si possono prendere  $x$  e  $p$  come variabili indipendenti. Poniamo, essendo  $m$  la carica dell'armatura

$$dm = cdx + hdp$$

dove  $dm$  è la quantità di elettricità ricevuta dall'armatura interna,  $c$  la capacità del condensatore,  $h$  un coefficiente che può essere nullo. Il principio di conservazione dell'elettricità si esprime scrivendo che l'espressione di  $dm$  è un differenziale esatto; si ha quindi

$$\frac{\partial c}{\partial p} = \frac{\partial h}{\partial x} \quad (3.0.30)$$

Esprimiamo ora il principio di equivalenza. A tale scopo, osserviamo che se il tubo di vetro subisce un allungamento  $dl$ , mentre il peso tensore è uguale a  $p$ , il lavoro esterno prodotto da una serie di allungamenti e di accorciamenti è uguale a  $-\int p dl$ ; d'altra parte, se, mentre la carica del condensatore aumenta di  $dm$ , l'armatura isolata è a contatto con il serbatoio il cui potenziale è  $x$ , la quantità di energia elettrica persa dal sistema dei serbatoi successivamente impiegati è uguale a  $-\int x dm$ . Il principio di equivalenza richiede che, per un ciclo chiuso, queste due quantità siano uguali o che si abbia

$$\int p dl = \int x dm$$

in altre parole, bisogna porre

$$dE = -p dl + x dm$$

con  $dE$  un differenziale esatto. Per esprimere  $dE$ , poniamo

$$-dl = a dx + b dp$$

essendo  $a$  un coefficiente che misura l'allungamento osservato da Righi,  $b$  il coefficiente di elasticità del tubo, nelle condizioni sperimentali. Questi due coefficienti  $a, b$  non sono indipendenti tra loro. Assumeremo, infatti, che il tubo non subisca deformazioni permanenti; da allora, ogni volta che  $p$  e  $x$  riprendono lo stesso valore, anche  $l$  riprende anche il suo valore iniziale;  $l$  è quindi una funzione di  $x$  e  $p$ , l'espressione per  $dl$  è un differenziale esatto e si ha

$$\frac{\partial a}{\partial p} = \frac{\partial b}{\partial x} \quad (3.0.31)$$

Sostituendo  $dl$  con il suo valore, viene

$$dE = (ap + cx) dx + (bp + hx) dp$$

affinché  $dE$  sia un differenziale esatto, si deve avere

$$\frac{\partial (ap + cx)}{\partial p} = \frac{\partial (bp + hx)}{\partial x}$$

Sviluppando questa equazione e tenendo conto della (6,e), viene

$$a = x \left( \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial c}{\partial p} \right) + h$$

Questa equazione esprime il principio di equivalenza. Sommandovi l'equazione (16,d), essa si semplifica. Si ottiene così infine il sistema delle due equazioni distinte e compatibili

$$\frac{\partial c}{\partial p} = \frac{\partial h}{\partial x} \quad a = h \quad (3.0.32)$$

Essendo il coefficiente  $a$  positivo, dagli esperimenti di Duter e Righi, ne consegue che  $h$  è diverso da zero e positivo. Ora  $h$  è la derivata parziale di  $m$  rispetto a  $p$ ; l'interpretazione fisica di questo risultato è quindi la seguente: essendo la bottiglia tubolare caricata ad un potenziale  $x$ , è sufficiente aumentare il peso tensore  $p$  per produrre una diminuzione della quantità di elettricità libera, in altri termini per diminuire la capacità elettrica del condensatore. È quindi come se il potere dielettrico del tubo isolante diminuisse, quando è sottoposto ad una sollecitazione meccanica di tensione crescente. Secondo gli esperimenti di Duter e Righi, l'allungamento  $\Delta l$  dovuto al potenziale  $x$  è proporzionale a  $x^2$ ; si ha quindi

$$\Delta l = \frac{1}{2} k x^2 \quad (3.0.33)$$

essendo  $k$  una costante. Introduciamo questo risultato dell'esperienza nella nostra analisi. Si ricava dalla (16,f)

$$a = \frac{\partial l}{\partial x} = kx$$

e siccome  $h = a$ , si ha  $h = kx$ ; pertanto  $\frac{\partial h}{\partial x} = k$  e infine, in virtù della prima equazione ( $\alpha$ ),  $c = kp + c_0$ , dove  $c_0$  è il valore della capacità quando il peso tensore è nullo. Quindi, poiché l'allungamento osservato è proporzionale al quadrato del potenziale, si può concludere che la capacità elettrica varia proporzionalmente al peso tensore.

La dilatazione elettrica del vetro è dovuta alla variazione del coefficiente di elasticità di questa sostanza o ad un'azione diretta dell'elettrizzazione? Questa seconda spiegazione è quella corretta. Si è visto infatti che, secondo l'esperienza,  $a = kx$ , essendo  $k$  una costante; quindi  $\frac{\partial a}{\partial p}$  è identicamente nullo: pertanto, dall'equazione (16,e), lo stesso vale per  $\frac{\partial b}{\partial x}$ , cioè che il coefficiente di elasticità  $b$  è indipendente dall'elettrizzazione.

Consideriamo ora il fenomeno di P. e J. Curie. Supponiamo che le basi di un cristallo di tormalina siano provviste di armature metalliche, una delle quali B è messa a terra, mentre l'altra A può rimanere isolata o collegata a serbatoi di elettricità. Si può così variare la pressione  $p$  che si esercita sulla tormalina e il potenziale  $x$  dell'armatura A e far compiere a questa armatura un ciclo chiuso. Prendiamo  $p$  e  $x$  per variabili indipendenti. Sia  $dm$  la quantità di elettricità ricevuta attraverso l'armatura A quando  $x$  aumenta di  $dx$  e  $p$  di  $dp$ . Poniamo

$$dm = cdx + hdp$$

essendo  $c$  ciò che può essere chiamata la capacità di A a pressione costante, ed  $h$  un coefficiente negativo se, come supponiamo, l'armatura A è applicata a quella delle basi della tormalina che è positivamente elettrizzata dalla pressione. Il principio di conservazione dell'elettricità è espresso dall'equazione

$$\frac{\partial c}{\partial p} = \frac{\partial h}{\partial x}$$

Per esprimere il principio di equivalenza, chiamiamo  $l$  la lunghezza del cristallo e poniamo

$$dl = adx + bdp \quad (3.0.34)$$

essendo  $b$  il coefficiente di elasticità del cristallo e  $a$  un coefficiente che non supponiamo diverso da zero. Il resto del calcolo si svolge come nel caso della bottiglia di Righi, salvo un cambio di segno;  $p$  qui rappresenta una pressione, invece di rappresentare una tensione come in precedenza. Si trova facilmente che i due principi di conservazione e di equivalenza sono espressi dal sistema di equazioni

$$\frac{\partial c}{\partial p} = \frac{\partial h}{\partial x} \quad a = -h \quad (3.0.35)$$

Poiché  $h$  è diverso da zero e negativo, ne consegue che  $a$  è positivo, e quindi, facendo riferimento all'equazione (16,g), che  $l$  cresce con  $x$ . Quindi, se elettrizziamo una tormalina, caricando positivamente la sua base A, il cristallo si allunga. Il significato di questo fenomeno è da notare, poiché l'attrazione che si verifica tra le cariche contrarie accumulate sulle basi, tende a produrre un accorciamento: l'allungamento del cristallo è quindi un cambiamento di struttura prodotto dall'azione elettrica. La quantità di elettricità liberata dalla compressione di una tormalina è, secondo P. e J. Curie, proporzionale alla variazione della pressione  $p$  e inoltre indipendente dalle dimensioni del cristallo. Si ha quindi

$$-\frac{\partial m}{\partial p} = k \quad -h = k$$

essendo  $k$  una costante positiva. Si hanno due conseguenze: 1. Dalla ( $\beta$ ), si ha  $a = -h$ ; pertanto  $a = k$  e, siccome  $a$ , dalla (16,g), non è diverso da  $\frac{\partial l}{\partial x}$ , ne consegue che  $l = kx + l_0$ , dove  $l_0$  è la



lunghezza della tormalina non elettrizzata; l'elettrizzazione produce quindi un allungamento proporzionale al potenziale. 2. Poiché  $h$  è una costante, ne consegue che la derivata  $\frac{\partial h}{\partial x}$  è nulla; quindi, dalla  $(\beta)$  è così anche per la derivata  $\frac{\partial c}{\partial p}$ ; pertanto  $c$  è indipendente da  $p$ . La capacità di un condensatore a lamina di tormalina è quindi indipendente dalla compressione che si fa subire al cristallo.

In tutte le azioni elettriche o meccaniche appena considerate, si è supposto che la temperatura rimanga invariabile. Prenderemo in considerazione la teoria che Lippmann ha dato della piroelettricità. Abbiamo visto che quando una tormalina viene riscaldata, una delle sue basi, che chiameremo A e che presenta gli angoli solidi più acuti, si carica di elettricità positiva. Supponiamo di aver dotato le due basi della tormalina di armature metalliche, l'armatura A essendo isolata, l'altra armatura a terra. Prendiamo come variabili indipendenti il potenziale  $x$  e la temperatura assoluta  $T$ . Poniamo

$$dm = cdx + kdT$$

dove  $dm$  è la quantità di elettricità ricevuta da A, quando  $x$  aumenta di  $dx$  e  $T$  di  $dT$ , e  $c$  è la capacità elettrica dell'armatura A e  $h$  un coefficiente negativo:  $h$  è la quantità di elettricità rilasciata da un aumento di temperatura pari all'unità. Il principio di conservazione dell'elettricità è espresso dall'equazione:

$$\frac{\partial c}{\partial T} = \frac{\partial h}{\partial x} \quad (3.0.36)$$

Possiamo aggiungere a questa equazione quella che esprime il principio di equivalenza. Bisogna prima mostrare che qui va applicato; a questo scopo è sufficiente mostrare che si può usare un cristallo di tormalina per trasformare il calore in energia elettrica, facendo compiere al cristallo un ciclo chiuso. Aumentiamo la temperatura, l'armatura A rimanendo isolata e il suo potenziale  $x$  in crescita, e d'altra parte variamo la temperatura e manteniamo A in comunicazione con un serbatoio elettrico, in modo che il suo potenziale rimanga poi costante. Con tali operazioni si può costituire un ciclo chiuso, in cui l'elettricità prelevata da un serbatoio il cui potenziale è assegnato viene trasportata ad un altro serbatoio di potenziale pure assegnato, essendo l'energia elettrica prodotta tale solo a spese di una certa quantità di calore; si deve quindi avere

$$\mathcal{E} \int dQ = \int x dm$$

per un ciclo chiuso, il primo membro rappresenta la quantità di calore assorbita, espressa in unità di lavoro, e il secondo membro rappresenta l'energia elettrica prodotta;  $\mathcal{E}$  è l'equivalente meccanico del calore. Ponendo

$$dE = x dm - \mathcal{E} dQ$$

$dE$  deve essere un differenziale esatto. Sia

$$dQ = a dx + b dT$$

essendo  $b$  la capacità termica della lamina,  $a$  un coefficiente che può essere nullo. L'espressione di  $dE$  diviene, sostituendo i valori di  $dm$  e di  $dQ$ ,

$$dE = (cx - \mathcal{E}a) dx + (hx - \mathcal{E}b) dT$$

Affinché  $dE$  sia un differenziale esatto si deve avere

$$x \left( \frac{\partial c}{\partial T} - \frac{\partial h}{\partial x} \right) - \mathcal{E} \left( \frac{\partial a}{\partial T} - \frac{\partial b}{\partial x} \right) = h \quad (3.0.37)$$

Questa equazione esprime il principio di conservazione dell'energia. Può essere semplificata applicando il principio di Carnot.

Questo principio vale per qualsiasi ciclo reversibile e chiuso, in cui il calore si trasforma in lavoro meccanico. Qui il calore viene trasformato in energia elettrica; ma, notiamo che l'energia elettrica una volta prodotta può a sua volta essere completamente trasformata in lavoro meccanico e viceversa, così che aggiungendo un motore elettrico reversibile al sistema formato dalla tormalina e dai serbatoi, si costituisce un motore termico reversibile. Possiamo quindi applicare il principio di Carnot e ne consegue che  $\frac{dQ}{T}$  è un differenziale esatto. Quindi abbiamo la condizione di integrabilità

$$\frac{a}{T} = \frac{\partial a}{\partial T} - \frac{\partial b}{\partial x}$$

Sostituendo nella equazione (epsilon), viene

$$x \left( \frac{\partial c}{\partial T} - \frac{\partial h}{\partial x} \right) - \mathcal{E} \frac{a}{T} = h \quad (3.0.38)$$

che esprime il principio di conservazione dell'energia, tenendo conto del principio di Carnot.

Infine, se si tiene conto della (delta), si vede che il termine in  $x$  scompare nella ( $\varepsilon'$ ) e che questa si riduce a

$$\frac{\mathcal{E}a}{T} = -h \quad (3.0.39)$$

Poiché  $h$  è una quantità negativa, dall'equazione ( $\varepsilon''$ ) segue che  $a$  è una quantità positiva; ora  $a$  è la derivata parziale della quantità di calore  $Q$  rispetto al potenziale  $x$ . Se quindi, a temperatura costante, si elettrizza positivamente il polo A di una tormalina, del calore è assorbito oppure il cristallo si raffredda. Se si elettrizzasse allo stesso modo l'altro polo si produrrebbe l'effetto opposto.

Dagli esperimenti di Gauguin, la quantità di elettricità prodotta riscaldando o raffreddando una tormalina è semplicemente proporzionale alla variazione di temperatura; in altre parole, il valore di  $-h$  è un numero positivo e costante; ne consegue che si ha  $\frac{\partial h}{\partial x} = 0$ , e quindi, per l'equazione ( $\delta$ ), che  $\frac{\partial c}{\partial T} = 0$ . La capacità elettrica di un condensatore a lamina di tormalina è quindi indipendente dalla temperatura.

Maxwell, Helmholtz, Lorberg, Duhem, Kirchhoff, Pockels, Korteweg, Sacerdoce, Voigt, Schiller, Kapoustine e altri hanno contribuito allo studio teorico dei fenomeni di elettrostrizione nei corpi allo stato solido, liquido o gassoso. Alcuni di questi lavori si riferiscono al metodo generale di Lippmann che abbiamo appena spiegato. Gli altri, in particolare quelli dovuti a Korteweg, Lorberg e Kirchhoff, portarono ad una generalizzazione delle espressioni degli sforzi di Maxwell, dove si suppone l'etere non isotropo e le costanti dielettriche variabili con la deformazione meccanica.

È utile insistere qui sul significato che deve essere dato agli sforzi di Maxwell. Non si possono assumere sei funzioni qualsiasi di  $x, y, z$ , per rappresentare le componenti  $e_1, e_2, e_3, g_1, g_2, g_3$  della deformazione infinitamente piccola di un mezzo elastico. Sia  $(u, v, w)$  lo spostamento relativo a questa deformazione; si ha, con le notazioni adottate (Volumi I e II):

$$\begin{array}{lll} \frac{\partial u}{\partial x} = e_1 & \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{g_3}{2} + \tau_3 & \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{g_2}{2} - \tau_2 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{g_3}{2} - \tau_3 & \frac{\partial v}{\partial y} = e_2 & \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{g_1}{2} + \tau_1 \\ \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{g_2}{2} + \tau_2 & \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{g_1}{2} - \tau_1 & \frac{\partial w}{\partial z} = e_3 \end{array}$$

Le condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza della funzione  $u, v, w$  si ottengono scrivendo

$$\frac{\partial e_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{g_3}{2} - \tau_3 \right) \quad \frac{\partial e_1}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{g_2}{2} + \tau_2 \right) \quad \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{g_2}{2} - \tau_3 \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{g_2}{2} - \tau_2 \right)$$

e sei analoghe.

Le nove relazioni ottenute si risolvono immediatamente rispetto alle derivate parziali di  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$  e le condizioni necessarie e sufficienti dell'esistenza di  $u, v, w$  sono quelle che esprimono che il seguente sistema

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_1}{\partial x} &= \frac{1}{2} \frac{\partial g_2}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_3}{\partial z} & \frac{\partial \tau_2}{\partial x} &= \frac{1}{2} \frac{\partial e_1}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial \tau_3}{\partial x} &= \frac{1}{2} \frac{\partial g_3}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial e_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \tau_1}{\partial y} &= \frac{1}{2} \frac{\partial g_1}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial e_2}{\partial z} & \frac{\partial \tau_2}{\partial y} &= \frac{1}{2} \frac{\partial g_2}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial \tau_3}{\partial y} &= \frac{1}{2} \frac{\partial e_2}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_3}{\partial y} \\ \frac{\partial \tau_1}{\partial z} &= \frac{1}{2} \frac{\partial e_3}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_1}{\partial z} & \frac{\partial \tau_2}{\partial z} &= \frac{1}{2} \frac{\partial g_2}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial e_3}{\partial x} & \frac{\partial \tau_3}{\partial z} &= \frac{1}{2} \frac{\partial g_1}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_2}{\partial y} \end{aligned}$$

determinando le ausiliarie  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$  è compatibile. Otteniamo così sei condizioni

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 e_2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 e_3}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 g_1}{\partial y \partial z} &= 0 & 2 \frac{\partial^2 e_1}{\partial y \partial z} &= \left( -\frac{\partial g_1}{\partial x} - \frac{\partial g_2}{\partial y} - \frac{\partial g_3}{\partial z} \right) = 0 \\ \frac{\partial^2 e_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_1}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 g_2}{\partial z \partial x} &= 0 & 2 \frac{\partial^2 e_2}{\partial z \partial x} &= \left( -\frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial g_2}{\partial y} - \frac{\partial g_3}{\partial z} \right) = 0 \\ \frac{\partial^2 e_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 g_3}{\partial x \partial y} &= 0 & 2 \frac{\partial^2 e_3}{\partial x \partial y} &= \left( -\frac{\partial g_1}{\partial x} - \frac{\partial g_2}{\partial y} + \frac{\partial g_3}{\partial z} \right) = 0 \end{aligned}$$

alle quali devono soddisfare le sei componenti di deformazione  $e_1, e_2, e_3, g_1, g_2, g_3$ ; queste sei condizioni sono state stabilite per la prima volta da Barbé de Saint-Venant.

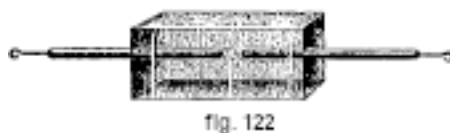
Quando le sei componenti dello sforzo  $p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}, p_{yz}, p_{xz}, p_{xy}$  sono, come nella teoria di Maxwell, forme quadratiche delle tre derivate parziali  $\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}$ , così come per le componenti della deformazione; ma sei funzioni tali che

$$\begin{aligned} e_i &= s_{i1} \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + s_{i2} \left( \frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + s_{i3} \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 + 2s_{i4} \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial z} + 2s_{i5} \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial x} + 2s_{i6} \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial y} \\ g_i &= t_{i1} \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + t_{i2} \left( \frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + t_{i3} \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 + 2t_{i4} \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial z} + 2t_{i5} \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial x} + 2t_{i6} \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial y} \end{aligned}$$

non possono soddisfare le condizioni di Barbé de Saint-Venant. Non si possono quindi identificare puramente e semplicemente le forze nell'etere che sono di natura elettrica con le forze meccaniche in un mezzo elastico. Ci siamo così trovati indotti, per stabilire un nesso teorico tra forze elettriche e forze meccaniche, da una parte ad ammettere che una forza elettrica si trasforma in una forza meccanica solo nei punti in cui è presente una carica libera di elettricità, che poi svolge un ruolo analogo all'entropia termica, dall'altra a generalizzare l'espressione delle forze elettriche supponendo che le costanti dielettriche varino con la deformazione meccanica, come d'altronde prevede il metodo di Lippmann.

## 5. Influenza del campo elettrico su proprietà ottiche, elasticità e attrito interno nei dielettrici

Un dielettrico isotropo posto in un campo elettrico diventa otticamente anisotropo, quindi birfrangente. È molto importante notare che questo fenomeno si osserva anche nei liquidi; l'anisotropia non può quindi essere spiegata unicamente con l'elettrostrizione, cioè con deformazioni meccaniche nella sostanza del dielettrico, e non può essere considerata identica, ad esempio, all'anisotropia del vetro compresso, espanso o raffreddato rapidamente. La doppia rifrazione, in un dielettrico solido che si trova in un campo elettrico, fu scoperta nel 1870 da Kerr. In un pezzo di vetro spesso sono forati due canali, come mostrato nella figura 122. In queste aperture sono inseriti grossi fili collegati con una bobina di Ruhmkorff. Il pezzo di vetro è posto tra due nicol incrociati (Volume II), i cui piani di polarizzazione formano angoli di  $45^\circ$  con la direzione dei canali; si osserva la parte del vetro che si trova tra le estremità dei canali. Quando la bobina di Ruhmkorff entra in funzione, il campo visivo, fino a quel momento scuro, diventa luminoso e non può più ridiventare scuro mediante la rotazione di uno dei nicols. Il pezzo di vetro agisce quindi, ad esempio, come una lamina di cristallo uniassiale tagliata parallelamente all'asse. Per determinare la caratteristica dell'anisotropia, Kerr lo ha confrontato con l'anisotropia del vetro soggetto a espansione lineare.



Interpose a tale scopo, sulla traiettoria dei raggi, una lamina di vetro che subì un'estensione o una compressione nella direzione delle linee di forza del campo, cioè nella direzione dei canali, fino al ritorno dell'oscurità; questo vetro svolge quindi la funzione di compensatore. Egli ha riconosciuto che è necessario sottoporre il vetro compensatore ad un allungamento, da cui risulta che il vetro posto in un campo elettrico acquisisce un'anisotropia della stessa natura di quella prodotta dalla compressione nella direzione delle linee di forza del campo. Röntgen, Brongersma e altri hanno confermato le osservazioni di Kerr.



Nel 1880, Kerr ha pubblicato risultati di osservazione simili su un gran numero di liquidi. Il liquido in esame viene posto in un recipiente a pareti piane parallele e vi si introducono due elettrodi, uno dei quali è collegato al conduttore di una macchina elettrica e l'altro è a terra. I raggi attraversano il liquido tra gli elettrodi perpendicolari alle linee di forza. Lo strumento molto semplice, rappresentato dalla figura 123, è abbastanza conveniente per queste osservazioni. Anche in questo caso Kerr ha utilizzato lamine di vetro come compensatori.

Notò che così come esistono due specie di cristalli uniassiali, positivi e negativi, a seconda che si propaghi più rapidamente il raggio ordinario o il raggio straordinario, così i liquidi si dividono in due classi relativamente al fenomeno elettro-ottico attualmente considerato. Kerr chiama positivi i liquidi in cui il raggio polarizzato normalmente alle linee di forza (cioè il raggio corrispondente al raggio straordinario) si propaga più lentamente, e negativi i liquidi in cui questo raggio si propaga più velocemente. I liquidi positivi agiscono come un cristallo positivo, il cui asse è parallelo alle linee di forza, o come il vetro che ha subito un'estensione nella direzione di queste linee.

Ai liquidi positivi appartengono il solfuro di carbonio, i corpi semplici Br, P e S allo stato liquido, oltre all'acqua, gli idrocarburi: pentano, esano, paraffina, naftalene e altri, alcuni acidi, ad esempio gli acidi acetico, formico, lattico e oleico, fenolo, acetone, cloralio, ecc. Ai liquidi negativi appartengono gli alcoli, ad eccezione dell'alcool metilico, dell'acido palmitico e stearico, degli eteri etilici e amilici, del glicole, della glicerina, dell'olio di cocco, del grasso di maiale, della cera, dell'anilina, del cloroformio, del bromoformio, dell'acqua di cloro, ecc.

Kerr (1885) ha mostrato, cosa fino ad allora dubbia, che i fenomeni appena descritti si verificano anche in un campo uniforme.

Occupiamoci ora dell'aspetto quantitativo del fenomeno Kerr. Si può scegliere, come misura dell'azione elettro-ottica, la differenza di cammino  $\delta$  tra due raggi polarizzati paralleli

e perpendicolari alle linee di forza. La grandezza  $\delta$  aumenta in proporzione allo spessore  $l$  dello strato di liquido polarizzato; Kerr ha inoltre scoperto che  $\delta$  aumenta in proporzione al quadrato dell'intensità del campo, cioè in proporzione a  $\left(\frac{V_1 - V_2}{d}\right)^2$  essendo  $V_1$  e  $V_2$  i potenziali degli elettrodi,  $d$  la loro distanza. La grandezza  $\delta$ , espressa in lunghezze d'onda  $\lambda$  del raggio corrispondente, è determinata dalla formula

$$\delta = cl \frac{(V_1 - V_2)^2}{d^2} \quad (3.0.40)$$

Quincke (1883), Lemoine (1896), W. Schmidt (1902) e altri ancora hanno determinato il valore numerico del coefficiente  $c$ . Quincke ha trovato i seguenti numeri, assumendo  $l$  e  $d$  espressi in centimetri,  $V_1 - V_2$  in unità el. st. C.G.S (ciascuna pari a 300 volt):

	Solfuro di carbonio	Benzolo	Essenza di terebentina	Etere
$c \cdot 10^8 =$	+32,8 $\lambda$	+3,84 $\lambda$	+0,109 $\lambda$	-6,4 $\lambda$

Lemoine ha trovato il valore di  $37\lambda$  per  $CS^2$ , Blackwell (1906) il valore  $35,7\lambda$  per la radiazione gialla di Na.

La dipendenza tra il coefficiente  $c$  e la lunghezza d'onda  $\lambda$  per  $CS^2$  è stata misurata per la prima volta da Blackwell, (1906) e poi da Hagenow (1908). Quest'ultimo ha trovato i seguenti valori:

$\lambda =$	430	500	550	600	650	700 $\mu\mu$
$\frac{c \cdot 10^8}{\lambda} =$	45,4	35,9	31,2	27,3	25,1	23,2
$c \cdot 10^8 =$	19520	17950	17160	16380	16320	16240

Per una lunghezza d'onda crescente, non è solo il ritardo relativo (in parti di lunghezza d'onda) che è minore, ma anche il ritardo assoluto misurato da  $c$ . Esiste quindi una dispersione nella doppia rifrazione elettrica, analoga a quella nei cristalli (Volume II). Questa dispersione è stata studiata teoricamente da Havelock (1909).

W. Schmidt (1902) ha osservato che la costante  $c$  diminuisce all'aumentare della temperatura. Ha inoltre trovato che essa dipende dalla lunghezza d'onda  $\lambda$  e che il suo valore, per le miscele, non è in alcuna semplice relazione con i valori della stessa grandezza per le parti componenti della miscela.

L'altissimo valore  $c \cdot 10^8 = 2200\lambda$  è stato ottenuto per il nitrobenzolo; è 60 volte maggiore del valore di  $c$  per  $CS^2$ , che fino ad allora era considerato il più forte.

De Metz (1902) ha osservato il fenomeno di Kerr in acqua pura e in soluzioni acquose di collodio (4%) e di gelatina (3%), ricoprendo gli elettrodi con uno strato di gomma indurita di spessore 0,5 mm.

Elmén (1905) ha trovato con  $CS^2$  che, per piccoli valori di  $V_1 - V_2$  (iniziando da 200 volt per 1 mm), la grandezza  $\delta$  diminuisce, quando la grandezza  $\frac{V_1 - V_2}{d}$  continua a diminuire, più lentamente di quanto indica la formula (17), di modo che  $c$  non è una costante per una sostanza data.

Chaudier (1908) ha studiato le proprietà elettro-ottiche dei liquidi che trattengono in sospensione particelle cristalline (liquori misti di Meslin) ed in particolare quelle di sospensioni di polveri fini di acido borico, gesso, mica, bicarbonato di sodio, citrato di potassio, ecc. nel solfuro di carbonio, anilina, benzolo, cloroformio, acetato di amile e cloruro di etile. Ha sottoposto queste sospensioni, tra le armature di un condensatore, all'azione di un campo elettrico. Ha osservato sia una birifrangenza che un dicroismo elettrico, cioè un diverso assorbimento dei raggi polarizzati perpendicolarmente o parallelamente alle linee di forza. Le polveri amorfe,

come il lycopodio, il tannino, l'amido e le sostanze che cristallizzano nel sistema cubico, come il sale marino, il clorato di sodio, non presentano mai dicroismo elettrico. Sembra quindi che la produzione del fenomeno sia legata ad una asimmetria della particella solida. Sotto l'azione delle forze elettriche, gli assi di simmetria delle particelle cristalline si orientano nella stessa direzione, e la luce che attraversa il mezzo misto, presentante nel suo insieme una struttura analoga a quella di un cristallo, subisce delle modificazioni che rivela il polariscopio. Dicroismo e birifrangenza sembrano prodursi, per lo stesso liquido, in proporzioni inverse, cosicché uno dei fenomeni è massimo quando l'altro è minimo, quando le polveri cristalline grossolane vengono gradualmente sostituite da granuli ultramicroscopici. Per una data polvere, il dicroismo è nullo quando l'indice di rifrazione del liquido è uguale all'indice medio della polvere, mentre la birifrangenza assume allora il suo valore massimo. I liquidi scarsamente conduttori sono gli unici in grado di formare gruppi attivi: con liquidi con una bassa costante dielettrica da circa 2 a 5, il fenomeno è chiaro e le misure precise; oltre 5 e fino a 7 l'osservazione è più difficile; da 7 a 9 il fenomeno diventa confuso e raro e, per qualsiasi valore superiore della costante dielettrica del liquido, il fenomeno non si manifesta più. Chaudier attribuisce le modificazioni che subisce la luce all'orientazione che assumono le lamine cristalline parallele alle linee elettriche di forza; spiega il dicroismo per riflessione, la birifrangenza per diffrazione su particelle così orientate.

Sono state proposte due spiegazioni teoriche del fenomeno di Kerr. La prima è dovuta a F. Pockels (1896), il quale suppone che la costante dielettrica di un mezzo isolante vari con l'intensità del campo elettrico esistente in tale mezzo; questa variazione è d'altra parte estremamente piccola e, per il solfuro di carbonio, è di  $1,2 \cdot 10^{-5}$ , dalle misure di Kerr che, per un percorso di 180 mm, danno un ritardo assoluto di  $5\lambda/4$ . La seconda teoria fu stabilita da W. Voigt (1899): essa consiste in una generalizzazione delle equazioni della teoria elettromagnetica della luce, dove si esprime che l'azione del campo dipende dalla presenza del mezzo ponderabile. Kerr aveva dedotto dalle sue osservazioni che il campo elettrico influenza la velocità di propagazione  $v$  solo quando la luce è polarizzata normalmente alle linee di forza. Ma le teorie di F. Pockels e W. Voigt portano al risultato che dobbiamo aspettarci anche un'azione, sebbene di altra grandezza, sui raggi polarizzati parallelamente alle linee di forza. Äckerlein (1906) ha studiato il nitrobenzolo e l'ortonitrotoluolo, con un metodo proposto da Mandelstam e ha trovato che  $v$  è effettivamente influenzato da un campo elettrico, sia quando la luce è polarizzata perpendicolarmente alle linee di forza sia quando è parallela; notò, nel primo caso, un ritardo, nel secondo un anticipo; nel nitrobenzolo il rapporto tra ritardo e avanzamento è di circa 2 a 1. Questo fatto contraddice le due teorie precedenti, secondo le quali l'effetto del campo deve avere la stessa direzione per i due casi di polarizzazione.

Blondlot (1888) fu il primo a cercare di determinare la rapidità con cui l'anisotropia ottica appare e scompare contemporaneamente al campo elettrico; ha trovato che il ritardo non raggiunge  $1/40000$  sec. Da allora Abraham e Lemoike (1899) hanno utilizzato un metodo ingegnoso da loro ideato per misurare intervalli di tempo molto piccoli, determinando lo spazio percorso dalla luce durante questo tempo. Scaricano un condensatore, tra le cui armature c'è del solfuro di carbonio. La luce della scintilla di scarica viene diretta attraverso questo liquido, dopo aver percorso, riflettendosi su più specchi, un percorso la cui lunghezza è facilmente misurabile. Si osserva che  $1/400000000$  sec dopo la soppressione del campo, la metà dell'anisotropia è già scomparsa che  $1/100000000$  sec dopo non rimane alcuna traccia. La teoria di questo metodo è stata resa più generale da J. James (1904).

Il quarzo diventa un cristallo biassiale quando viene posto in un campo elettrico le cui linee di forza sono perpendicolari all'asse del cristallo; Röntgen, Kundt, Czermak e Pockels hanno studiato questo fenomeno.

La questione dell'azione del campo elettrico sul potere emissivo dei corpi, ad esempio sullo spettro dei vapori incandescenti, cioè dell'azione analoga al fenomeno di Zeeman nel campo magnetico che considereremo in seguito, è di grande interesse. La teoria di W. Voigt di cui

abbiamo parlato prima dimostra che deve avvenire anche nel campo elettrico una scissione delle righe dello spettro, ma la distanza delle righe così separate rimane piccolissima; ad esempio, in un campo di  $300 \text{ volt/cm}$ , la distanza che misura la separazione delle righe non supera  $1 : 20000$  della distanza delle righe  $D_1$  e  $D_2$  del sodio.

Resta ancora da indicare alcune modificazioni delle proprietà dei dielettrici, prodotte dal campo elettrico. Quincke ha scoperto che i coefficienti di torsione di vetro e gomma diminuiscono, ma quelli di mica e della guttaperca aumentano.

Duff (1896) e Quincke (1897) hanno trovato che il campo elettrico aumenta l'attrito interno nei dielettrici solidi, e specialmente in una direzione normale alle linee di forza. König (1886) e G. Paschen, L. Finazzi (1900) così come Ercolini (1903) non riuscirono mai a rivelare una tale azione del campo, mentre Pochettino (1903) l'ha osservata sul benzolo, xilolo e il petrolio.

## 6. Riscaldamento dei dielettrici durante la loro polarizzazione

Quando un dielettrico è sottoposto all'azione di un campo elettrico pulsante (cioè che appare e scompare) o alternato (cioè che cambia direzione), si verifica un dispendio di lavoro, questo può provocare il riscaldamento del dielettrico. Siemens (1861) fu il primo ad osservare un riscaldamento del vetro in una bottiglia di Leida; successivamente Naccari e Bellati (1882) hanno osservato il riscaldamento di un dielettrico liquido (petrolio) in un campo elettrico alternato. Un ampio studio è stato fatto da J. Borgman (1886). Egli pose 30 tubi ricoperti di fogli di stagno incollati e riempiti di trucioli di rame nello stesso tubo in comunicazione con un manometro sensibile. Sottoponendo tutti i tubi a un'elettizzazione variabile, scoprì che si surriscaldavano. Trovò così che il riscaldamento è proporzionale alla differenza di potenziale alla quale vengono caricati i tubi. Questa legge è stata successivamente confermata da altri sperimentatori che si sono occupati di questa questione dal 1892.

Incontreremo, nello studio del campo magnetico, il fenomeno dell'isteresi, che consiste nel fatto che l'azione del campo (magnetico), per una data intensità dello stesso, varia a seconda che l'intensità aumenti o diminuisca prima di raggiungere il valore considerato. La velocità di variazione del campo non gioca alcun ruolo e non ha alcun effetto sul riscaldamento, che accompagna un magnetismo variabile quando c'è isteresi.

Steinmetz (1892) e Kleiner (1893) hanno attribuito il riscaldamento di un dielettrico, in un campo elettrico pulsante o variabile, in particolare all'isteresi elettrica.

Arno (1892), che ha sottoposto il dielettrico all'azione di un campo elettrico rotante (analogo al campo magnetico rotante che studieremo in seguito), per primo ha dimostrato che il riscaldamento dipende dalla velocità con cui avviene la variazione del campo; ha scartato di conseguenza l'idea di una isteresi elettrica analoga all'isteresi magnetica. Spiega il riscaldamento con il ritardo di polarizzazione del dielettrico sul campo, quando quest'ultimo varia rapidamente. Questo ritardo, tanto maggiore quanto più rapidamente cambia il campo, deve parimenti comportare una certa perdita di energia elettrica, che si trasforma in calore.

Hess (1893) ha sviluppato poi una teoria, secondo la quale il riscaldamento sarebbe dovuto all'alternanza di cariche e scariche delle particelle conduttive distribuite, come abbiamo visto, secondo alcuni scienziati, nella massa non conduttiva del dielettrico, e costituenti in qualche modo il supporto dalla polarizzazione.

I lavori più recenti di Porter e Morris (1895), Elster (1895), Schauffelebrger (1897), Pellat, e in particolare di Beaulard (1900), Maccarone (1901) e Corbino (1905) hanno dimostrato che non esiste isteresi elettrica e che il riscaldamento del dielettrico deriva solo dal ritardo nella polarizzazione indicato da Arno. Ciò che accade nelle sostanze dielettriche ricorda il fenomeno dell'attrito interno o della viscosità, e si può quindi affermare che i dielettrici presentano una isteresi viscosa.

In una lenta variazione del campo, la polarizzazione non dipende dalla direzione di questa variazione e non c'è isteresi viscosa; aumenta con la velocità di variazione del campo, di cui l'isteresi magnetica è indipendente. Abbiamo già accennato ad un'influenza di natura particolare dell'elettrizzazione sulla temperatura dei cristalli piroelettrici.

Una teoria completa degli esperimenti Arno è stata sviluppata da Lampa (1906). Le rotazioni osservate nel campo elettrico rotante si spiegano come teoria nel senso sopra indicato; né Lampa ammette l'esistenza di una isteresi elettrica analoga all'isteresi magnetica.



# 4. MISURE ELETTROSTATICHE

## 1. Introduzione

Abbiamo incontrato, nello studio del campo elettrico, grandezze elettriche o più esattamente grandezze elettrostatiche di vario genere. In questo capitolo considereremo i metodi per misurarle. Tutto ciò che abbiamo detto nel volume I, sull'arte di misurare, si applica naturalmente all'argomento del presente capitolo. Vi è un gran numero di opere dedicate in particolare alle misure elettriche; vi si troveranno i dettagli che qui non possiamo dare. Inoltre, si può acquisire una reale conoscenza dei metodi di misura solo mettendoli in pratica in un laboratorio di fisica.

Per la misura di alcune grandezze elettriche esistono strumenti che consentono di ottenere più o meno direttamente i valori numerici desiderati delle grandezze misurate. Altre grandezze possono essere misurate solo in via indiretta, utilizzando combinazioni di strumenti e osservazioni. Naturalmente non si può tracciare un limite preciso tra questi due tipi di metodi di misura. Alcuni strumenti e metodi di misurazione sono già stati descritti nei capitoli precedenti. Li citeremo ancora, per completare la nostra esposizione.

Per quanto riguarda il potenziale elettrico e la forza elettromotrice, ci limiteremo per il momento ad indicare i metodi di misura elettrostatica; altri metodi saranno presi in considerazione in seguito. Dovremo, nell'esaminare i metodi di misura della costante dielettrica  $K$ , menzionare fenomeni che studieremo solo nei capitoli successivi di questo lavoro. Ci è sembrato più conveniente riunire in un unico luogo i principali metodi per misurare questa quantità.

## 2. Sistema di unità elettrostatiche

Le unità di grandezza che abbiamo incontrato nel primo capitolo, svolgono un ruolo importante nella misura delle grandezze elettriche. Per comodità riportiamo un riassunto di queste grandezze, delle loro equazioni dimensionali e delle formule che servono a definirle. Si tratterà sempre qui di unità elettrostatiche (el.-st.); le el.-st. C.G.S. costituiscono un caso particolare del sistema generale. Abbiamo già detto che non si può considerare il potere induttore  $K$  come un numero puro e introdurlo, nelle equazioni dimensionali, come una grandezza fisica, le cui dimensioni non sono ancora stabilite; abbiamo, per esempio, scritto la formula (1-13,a) conservando la dimensione di  $K$ , che mettiamo nella forma  $[K]$ . Nel riassunto che segue, la dimensione della potere induttore è stata mantenuta per tutto il tempo. Tuttavia, non abbiamo mantenuto le parentesi, il che significa che con  $K$  intendiamo il simbolo dell'unità del potere induttore, così come  $L, M, T$  indicano simbolicamente le unità di lunghezza, massa e tempo. Il fattore  $K$  sarà separato da un punto, per far meglio risaltare le ordinarie equazioni dimensionali, che si ottengono quando si considera  $K$  come un numero puro. Passiamo ora all'elenco delle diverse unità. Riuniremo la definizione generale dell'unità el-st e la definizione particolare dell'unità el-st C.G.S.

1. *Quantità di elettricità*  $\eta$ ; si veda (1-11)

$$f = \frac{\eta\eta'}{Kr^2} \quad (4.0.1)$$

L'unità el.-st. (C.G.S.) di quantità di elettricità agisce su una quantità uguale, posta a una distanza uguale all'unità di lunghezza (1 cm), con una forza pari all'unità di forza (1 dyne).

L'equazione dimensionale è, vedesi (1-13,a)

$$[\eta] = K^{\frac{1}{2}} \cdot L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1} \quad (4.0.2)$$

$3 \cdot 10^{10}$  unità el. st CGS formano una unità el. m. (elettromagnetica)

$3 \cdot 10^9$  unità el. st CGS formano 1 *coulomb*

3000 unità el. st CGS formano 1 *μcolombo*.

2. *Densità superficiale h*; sia  $S$  l'area della superficie; si veda (1-2)

$$k = \frac{\eta}{S} \quad (4.0.3)$$

$$[k] = [\eta] : L^2 = K^{\frac{1}{2}} \cdot L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1} \quad (4.0.4)$$

3. *Intensità del campo elettrico* o semplicemente *campo F*; si veda (1-1)

$$F = \frac{f}{\eta} \quad (4.0.5)$$

L'unità el. st (CGS) del campo è il campo in cui sull'unità el. st. (CGS) di quantità di elettricità in un punto agisce l'unità di forza (1 *dyne*)

$$[F] = K^{\frac{1}{2}} \cdot L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$$

4. *Flusso di forza Φ*; si veda la (1-16)

$$\Phi = \iint F_d ds \quad (4.0.6)$$

Questa equazione dà un'espressione identica a quella di  $\left[\frac{\eta}{K}\right]$ , come deve essere dalla (1-18)

5. *Induzione B*; si veda la (1-28e)

$$B = KF \quad (4.0.7)$$

$$[B] = K \cdot [F] = K^{\frac{1}{2}} \cdot L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1} \quad (4.0.8)$$

6. *Flusso di induzione Ψ*; si veda la (1-16a)

$$\Psi = \iint K F_n ds \quad (4.0.9)$$

$$[\Psi] = [B] L^2 = K^{\frac{1}{2}} \cdot L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1} \quad (4.0.10)$$

Questa equazione è identica alla (1,a), come deve essere dalla (1-18a).

$$P = \frac{2\pi k^2}{K} \quad (4.0.11)$$

$$[P] = \frac{1}{K} [k]^1 = K^{\frac{1}{2}} \cdot L^{-1} M T^{-2} \quad (4.0.12)$$

$Ps$  è una certa forza, e infatti  $[P] = [Ps] L^2 = L M T^{-2}$  rappresenta bene le dimensioni di una forza.

8. *Spostamento elettrico ℰ*

$$\mathcal{D} = k \quad (4.0.13)$$

$$[\mathcal{D}] = K^{\frac{1}{2}} \cdot L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1} \quad (4.0.14)$$

Questa equazione è identica alla (5,a); si veda la formula (1-32i), dalla quale  $[\mathcal{D}] = [KF] = [B]$ .

9. Momento elettrico  $m$

$$m = \eta l \quad (4.0.15)$$

$$[m] = [\eta] L = K^{\frac{1}{2}} \cdot L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1} \quad (4.0.16)$$

10. *Polarizzazione di un dielettrico*  $\Pi$ ; si veda la (1-33d)

$$\Pi = \frac{m}{v} \quad (4.0.17)$$

$$[\Pi] = [m] L^{-2} = K^{\frac{1}{2}} \cdot L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1} \quad (4.0.18)$$

Questa equazione è identica alla (2,a) e alla (5,a) come deve essere dalla (1.32d).

$$V = \frac{\eta}{Kr} \quad (4.0.19)$$

$$[V] = [\eta] K^{-1} L^{-1} = K^{\frac{1}{2}} \cdot L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$$

o, si veda la (1-38), ( $R$  è un lavoro)

$$[V] = \frac{[R]}{[\eta]} = \frac{L^2 M T^{-2}}{K^{\frac{1}{2}} \cdot L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}} = K^{-\frac{1}{2}} \cdot L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$$

L'unità el. st (CGS) del potenziale è la differenza di potenziale tra due punti, tali che, nel passaggio dell'unità el. st. (CGS) di quantità di elettricità da uno all'altro punto, sia compiuta l'unità di lavoro (1 *erg* di lavoro).

$\frac{1}{300}$  unità el. st. CGS di potenziale forma 1 *volt*.

Il lavoro volt-coulomb è uguale a 1 *joule* = 0,102 *kgm* = 0,24 *cal/g*.

La potenza volt-coulomb per secondo è uguale a 1 *watt* ( $1/736$  cavalli).

12. *Capacità* (capacità elettrica)  $q$ ; si veda la (1-49a).

$$q = \frac{\eta}{V} \quad (4.0.20)$$

$$[q] = [\eta] : [V] = KL \quad (4.0.21)$$

L'unità el.-st. (C.G.S.) di capacità è la capacità di un conduttore, che è aumentata, da una unità el.-st. (C.G.S.) di quantità di elettricità, a una unità el.-st. (C.G.S.) di potenziale. È, ad esempio, la capacità di una sfera nell'aria, il cui raggio è uguale all'unità di lunghezza (1 *cm*).

$9 \cdot 10^{11}$  unità el.-st. C.G.S. di capacità formano un *farad*, che viene elevato da 1 coulomb a 1 volt.

900000 unità el.-st. C.G.S. di capacità formano 1 microfarad, che è elevato da 1 microcoulomb a 1 volt.

Raccomandiamo ai lettori di verificare l'omogeneità delle formule introdotte nel capitolo I, cioè di assicurarsi che in ciascuna formula i due membri abbiano effettivamente la stessa dimensione. Occorre, in certe formule, porre  $[K] = 1$ , cioè ammettere che  $K$  sia di dimensione nulla. Così, nella formula (1-34),  $K = 1 + 4\pi\gamma$ , il numero 1 è il potere induttore dell'aria preso uguale all'unità.

### 3. Elettrometri. Misura di quantità di elettricità e dei potenziali

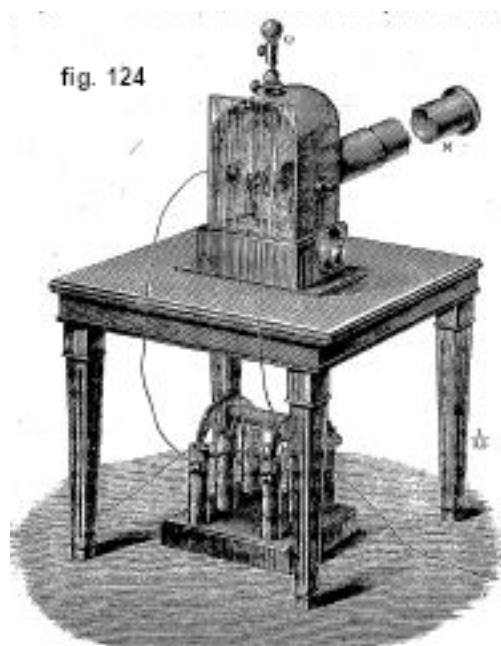
Gli strumenti che possono essere impiegati per la misura delle quantità di elettricità e dei potenziali si chiamano elettrometri. Gli elettroscopi di costruzione relativamente semplice possono fungere da elettrometri solo se sono dotati di una scala, lungo la quale si muovono le parti mobili, e se sono graduati, vale a dire se si è determinato, mediante ricerche precedenti, a

quale potenziale corrisponde ogni divisione della scala. Gli elettroscopi più importanti sono già stati descritti o citati. L'angolo  $\varphi$  di divergenza delle foglie dell'elettroscopio non può essere utilizzato direttamente, come talvolta si trova indicato, per la misura del potenziale  $V$  al quale le foglie sono portate. La repulsione reciproca  $f$  delle foglie è proporzionale al prodotto delle loro cariche, e ciascuna di esse sarà proporzionale al potenziale  $V$ , se la capacità  $q$  dell'intero strumento non variesse nella divergenza delle foglie; inoltre,  $f$  varia con  $\varphi$ . Le ricerche di Kolacek hanno mostrato che  $V$  e  $\varphi$ , quando  $\varphi$  è minore di  $18^\circ$ , sono legati da un'equazione della forma

$$V^2 = a\varphi + b\varphi^2 \quad (4.0.22)$$

dove  $a$  e  $b$  sono costanti, che si possono determinare una volta per tutte, per un dato elettroscopio. Tra gli elettrometri abbiamo già considerato in dettaglio la bilancia di torsione e l'elettrometro capillare; abbiamo descritto brevemente l'elettrometro a quadranti. Studieremo ora diversi elettrometri e mostreremo come vengono impiegati per la misura di quantità di elettricità e dei potenziali.

**I. ELETTROMETRO DI HANKEL.** - Questo elettrometro è rappresentato dalla figura 124. Consiste in una gabbia, la cui parete anteriore è di vetro; all'interno di essa pende verticalmente una foglia d'oro  $b$  tra due piastre metalliche isolate  $a$  e  $g$ ; queste ultime sono collegate ad una batteria di 100 – 200 elementi semplici, formati da Cu, Zn e acqua, associati in serie, e sono caricati con elettricità di nomi opposti. Tali batterie sono spesso impiegate; sono costituite da piccoli recipienti, ad esempio piccole provette, disposti su più file, in aperture circolari ricavate in una tavola orizzontale o in un pezzo di cartone spesso, ricoperto di paraffina. Questi recipienti vengono riempiti d'acqua e vi vengono immersi a due a due fili di Cu e Zn (Branly sostituisce Cu con Pt) saldati e piegati ad arco ( $\cap$ ). Uno strato di paraffina viene versato sull'acqua e, quando questo strato è solidificato, vengono versate sopra alcune gocce di olio di paraffina. Invece di questa batteria molto semplice, oggi si usa molto spesso una batteria di accumulatori (vedi in seguito) in serie, che ha una differenza di potenziale molto costante. Si collega il centro della batteria con la terra, e le estremità con i corpi che si vogliono mantenere a potenziali uguali e di segno opposto. Nel caso in esame, le piastre  $a$  e  $g$  sono collegate con le estremità della batteria. Si può, tramite una vite  $s$ , far variare la distanza di queste piastre dalla foglia d'oro  $b$ . I movimenti della foglia d'oro sono osservati attraverso un microscopio, il cui oculare è provvisto di una scala. Lo strumento deve essere graduato utilizzando elementi di pila, la cui forza elettromotrice è nota. Hankel ha utilizzato questo elettrometro nella sua ricerca sui cristalli piroelettrici.



II. BILANCIA DI TORSIONE. - Abbiamo già descritto questo strumento in precedenza; mostremo ora come si usa per la misura delle quantità di elettricità o dei potenziali  $V$ . Riprendiamo la formula (3-8,a), e scriviamola nella forma

$$\eta\eta' = 4aC\varphi \sin \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\alpha}{2} \quad (4.0.23)$$

dove  $\eta, \eta'$  sono le quantità di elettricità sulla sfera fissa e mobile,  $a$  la lunghezza dell'asta contata dal suo punto di sospensione fino al centro della sfera mobile,  $C$  la costante di torsione del filo che si può determinare mediante la formula (3-5b), osservando le oscillazioni di torsione della bilancia,  $\alpha$  l'angolo di rotazione dell'asta,  $\varphi = \alpha + \beta$  l'angolo di torsione del filo, essendo  $\beta$  l'angolo di rotazione della sua estremità superiore.

Consideriamo alcuni dei casi in cui le cariche e i potenziali si possono confrontare o misurare mediante la bilancia di torsione. Sia A la sfera fissa, B la sfera mobile.

1. Si tratta di confrontare due quantità di elettricità  $\eta$  e  $\eta_1$  che sono passate sulla sfera A, ad esempio, nel contatto con due punti diversi di un qualsiasi corpo elettrizzato. Sono possibili due casi:

a) La sfera B è già carica di elettricità dello stesso nome come  $\eta$  e  $\eta_1$ . Si ha ancora la formula

$$\eta_1\eta' = 4aC\varphi_1 \sin \frac{\alpha_1}{2} \tan \frac{\alpha_1}{2} \quad (4.0.24)$$

Se si divide la (14) per la (14,a), si ottiene il rapporto cercato  $\eta : \eta_1$ , espresso mediante le grandezze  $\alpha, \varphi, \alpha_1, \varphi_1$ . Ponendo  $\alpha_1 = \alpha$  viene

$$\eta : \eta_1 = \varphi : \varphi_1 \quad (4.0.25)$$

b) La sfera B è portata ogni volta a contatto con la sfera A. In questo caso, la carica  $\eta$  si divide in due frazioni  $k\eta$  e  $k'\eta$ , tali che  $k + k' = 1$ . La formula (14) assume ora la forma seguente:

$$kk'\eta^2 = 4aC\varphi \sin \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\alpha}{2} \quad (4.0.26)$$

Si ha allora, nella formula (14,a), a sinistra,  $kk'\eta_1^2$  e si ottiene di conseguenza il rapporto  $\eta^2 : \eta_1^2$ . Ponendo  $\alpha_1 = \alpha$  viene

$$\frac{\eta}{\eta_1} = \sqrt{\frac{\varphi}{\varphi_1}} \quad (4.0.27)$$

2. Si tratta di misurare, in unità assolute, la quantità di elettricità  $\eta$ , passata in circostanze date sulla sfera A. La sfera B si elettrizza per contatto con A. Se si suppongono note le dimensioni delle sfere A e B, si possono trovare, nelle tavole di Plana, i fattori  $k$  e  $k'$ . Determinata la costante di torsione  $C$ , si deduce  $\eta$  dalla (14,c) nella forma

$$\eta = \sqrt{\frac{4aC}{kk'}} \varphi \sin \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\alpha}{2} \quad (4.0.28)$$

In questa formula l'angolo  $\varphi$  deve essere espresso in unità angolari pari a  $57^\circ 17' 45'' \dots = 57^\circ, 296$ , come mostra la formula fondamentale  $M = C\varphi$ , vedi (3-5a). Quando nella formula (3-5,b), il tempo  $T$  è espresso in secondi e nel calcolo di  $K$  si scelgono come unità di lunghezza e massa il centimetro e il grammo, che infine  $a$ , si esprime anche o in centimetri nella (14,c), si ottiene  $\eta$  in unità el.-st. C.G.S.

Sono già state trattate le correzioni relative all'induzione reciproca di sfere e l'influenza dell'involucro che le circonda. Quando si effettuano tutte le misure con uno stesso angolo  $\alpha$  e quando si calcola una volta per tutte la grandezza

$$Q = \sqrt{\frac{4aC}{kk'}} \sin \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\alpha}{2}$$

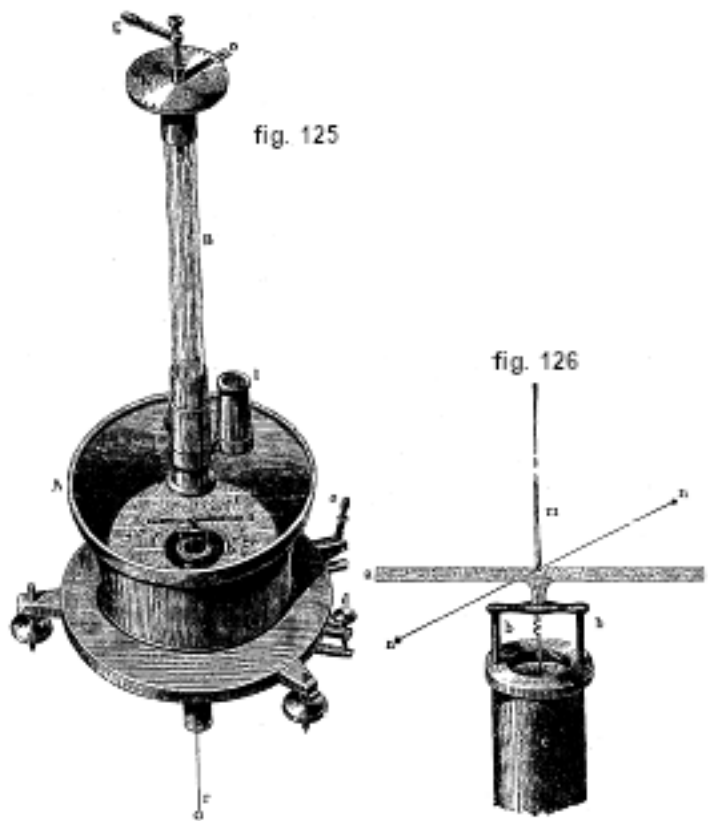
$\eta$  è dato dalla semplice formula

$$\eta = Q\sqrt{\varphi}$$

dove  $\varphi$  è espresso con l'unità di angolo scelta.

3. Determinato  $\eta$  e conoscendo il raggio  $R$  della sfera A, si può pure determinare il potenziale  $V$  di tale sfera mediante la formula  $V = \eta : R$ , e quindi il potenziale della sorgente di elettricità, se la sfera A è stata precedentemente collegata con essa da un filo sufficientemente lungo.

III. ELETTROMETRO DI KOHLRAUSCH. - Costituisce un perfezionamento dell'elettrometro di Dellmann, dove la sfera A della bilancia di torsione è stata per la prima volta sostituita da un disco disposto molto vicino all'asta oscillante. L'elettrometro di Kohlrausch è rappresentato dalla figura 125, e la sua parte principale separatamente in figura 126. È costituito dalla gabbia A a doppia parete, poggiante su tre viti di livellamento; il coperchio è formato da un disco di vetro a specchio con un'apertura al centro, attraverso la quale passa un filo disposto lungo l'asse del tubo B e la cui estremità superiore è fissata come il filo di una bilancia a torsione. L'impugnatura g e l'indice z, che si sposta sul cerchio graduato K dalla divisione zero, servono a misurare l'angolo di rotazione  $\beta$  dell'estremità superiore del filo. All'estremità inferiore del filo è attaccato il gambo di gomma-lacca  $m$  (fig. 126), e a questo il filo d'argento orizzontale  $nn$ , le cui estremità sono a forma di piccole sfere; quest'ultimo, nella posizione di riposo  $\beta = 0$ , tocca interamente da entrambi i lati la lamina d'argento  $aa$ , che è fissata al tubo  $c$ . Questo tubo può essere alzato o abbassato un po', agendo mediante la vite  $d$  su una leva particolare. Quando il tubo  $c$  viene sollevato,  $aa$  tocca l'ago  $nn$ . All'interno di  $c$  si trova un secondo tubo, lungo il cui asse scorre il filo  $r$ , che è attaccato ad esso da due placchette di gommalacca isolante. All'estremità inferiore di questo filo è sospeso il piccolo anello  $r$ ; l'estremità superiore del filo  $r$  è avvolta a spirale e non è a contatto con il ponte  $bb$ ; ma se il tubo interno viene sollevato per mezzo della leva, il filo tocca questo ponticello. Così, il filo  $r$ , la lamina  $aa$  e l'ago  $nn$  sono generalmente isolati tra loro, ma possono essere portati a contatto tramite le leve  $e$  e  $d$ .



All'interno di A si trova il cerchio orizzontale graduato  $K_1$ ; la lente  $l$  serve a leggere la posizione occupata dall'ago  $nn$ .

Lo strumento può essere impiegato per confrontare due quantità di elettricità  $\eta$  e  $\eta_1$ . A tale scopo, la leva  $g$  viene ruotata di  $90^\circ$ , in modo che l'ago  $nn$  sia posto perpendicolarmente ad  $aa$ . I due tubi vengono quindi sollevati e  $r$  è collegato alla sorgente di elettricità, che fa passare una certa quantità di elettricità  $\eta$  su  $aa$  e  $nn$ . Si abbassano quindi i due tubi e si gira la maniglia  $g$  finché l'ago  $nn$  forma con  $aa$  un certo angolo  $\alpha$ , l'indice  $z$  forma un certo angolo  $p$  con la posizione zero. La torsione del filo è  $\varphi = \alpha + \beta$ .

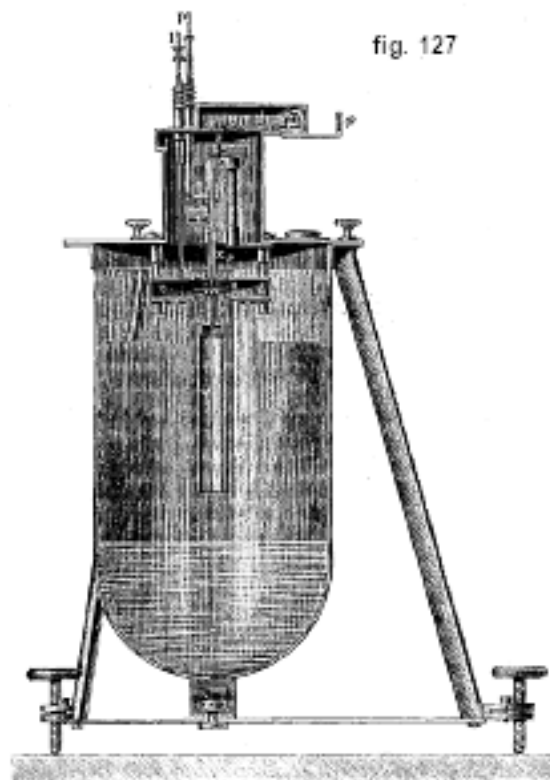
Ripetiamo l'osservazione, per la seconda delle sorgenti da confrontare, che fa passare la quantità di elettricità  $\eta_1$  su  $aa$  e  $nn$ ; l'angolo  $\alpha$  riceve lo stesso valore, ma, invece di  $\beta$ , si ha  $\beta_1$ , cosicché l'angolo di torsione è  $\varphi_1 = \alpha + \beta_1$ . Poiché la posizione relativa dei corpi  $aa$  e  $nn$  che si respingono è la stessa in entrambi i casi, il momento della coppia agente su  $nn$  è proporzionale al prodotto delle cariche su  $aa$  e  $nn$ ; queste cariche sono proporzionali a  $\eta$  e di conseguenza il momento della coppia è proporzionale a  $\eta^2$ . Si ha  $\eta^2 = b\varphi = b(\alpha + \beta)$ . Si trova per il rapporto cercato

$$\frac{\eta}{\eta_1} = \frac{V}{V_1} = \sqrt{\frac{\varphi}{\varphi_1}} = \sqrt{\frac{\alpha + \beta}{\alpha + \beta_1}} \quad (4.0.29)$$

$V$  e  $V_1$  sono i potenziali delle sorgenti, che sono proporzionali alle cariche  $\eta$  e  $\eta_1$ , a condizione che  $\alpha$  rimanga uguale, cioè che la capacità sia invariabile. Impiegando una batteria di elementi di forza elettromotrice nota, l'elettrometro può essere graduato, cioè può essere determinato il potenziale  $V$  per diversi valori di  $\alpha$  e  $\beta$ .

IV. ELETTROMETRO A QUADRANTI DI W. THOMSON (LORD KELVIN). - Abbiamo già presentato la descrizione generale di questo importante strumento; la figura 10 lo rappresenta in una delle sue forme semplici. Ricordiamo che le sue parti essenziali sono le seguenti; quattro quadranti, collegati a croce, e un grosso ago posto sopra o dentro di essi. Designeremo i potenziali delle due coppie di quadranti con  $V_1$  e  $V_2$ , quello dell'ago con  $V$ .

La figura 127 mostra la sezione trasversale di una forma meno semplice di questo elettrometro. Non si è qui raffigurato tutte le parti presenti in strumento molto più completi. Ci limiteremo a brevi indicazioni, dal momento che questi complicati dispositivi non sono quasi mai utilizzati nella pratica.



Per mantenere l'ago a un potenziale costante, W. Thomson ha dato allo strumento la forma di una bottiglia di Leida; si tratta di un vaso di vetro, ricoperto all'esterno da fogli di stagno incollato e contenente all'interno una certa quantità di acido solforico, che funge da armatura interna. I quadranti sono visibili in  $c$  e  $d$ ; dall'ago  $u$  sale un filo, al quale è fissato uno specchietto, che serve a misurare la rotazione dell'ago col metodo della deflessione dello specchio. Il filo con lo specchio e l'ago sono sospesi a un sottile filo di seta; la sospensione è talvolta bifilare. Dall'ago parte un filo  $w$ , alla cui estremità inferiore è sospesa un'asta di platino più spessa, che è immersa nell'acido solforico. L'ago prende così il potenziale  $V$  dell'acido solforico, che riceve la sua carica da un filo non mostrato in figura. Si può, con l'aiuto di una piccola macchina elettrica, anch'essa non mostrata, aumentare o diminuire il potenziale  $V$ . Per mantenere sempre lo stesso valore di  $V$ , si usa la piastra  $s$ , anch'essa collegata all'acido solforico. Questa piastra attrae il dischetto  $\alpha$ , che si trova sul braccio più corto di una leva; il braccio più lungo  $\delta$  di questa leva è provvisto all'estremità di un filo orizzontale, la cui posizione è osservata attraverso la lente  $\varphi$ . Agendo con la macchina elettrica, si porta sempre questo filo nella stessa posizione, in modo che l'ago sia sempre tenuto allo stesso potenziale  $V$ . Si impiega oggi quasi esclusivamente una batteria di celle o accumulatori, per mantenere l'ago o i quadranti ad un potenziale costante.

La necessità di elettrizzare l'ago porta a sospenderlo su un filo metallico o a collegarlo metallicamente con l'acido solforico. La sensibilità dello strumento viene quindi notevolmente ridotta. Nernst e Dolezalech (1901) hanno, per questo motivo, costruito uno strumento, in cui una piccola batteria a secco è collegata all'ago ed è sospesa contemporaneamente ad esso a un filo di quarzo. Questo elettrometro fornisce deviazioni di  $0,1\text{ mm}$  a  $3\text{ mm}$  di distanza della scala, quando la differenza di potenziale è di soli  $10^{-5}$  volt. Tuttavia, l'aumento di peso del sistema sospeso presenta un grave inconveniente. Himstedt ha proposto di impiegare un filo di quarzo argenteo, capace di condurre elettricità all'ago; ma l'inconveniente qui è la difficoltà di argentare un filo così sottile.

Nel 1901 Dolezalek ha costruito un elettrometro a quadranti estremamente semplice e molto comodo, esente dai difetti precedenti e allo stesso tempo molto sensibile. Questo elettrometro è attualmente molto diffuso. Un leggerissimo ago formato da due fogli di carta argentata (carta ricoperta da un sottile strato di stagno) è sospeso a un filo di quarzo, la cui superficie è stata resa conduttrice immergendolo in una soluzione di  $\text{CaCl}_2$ ,  $\text{MgCl}_2$ , acido fosforico o potassa caustica (si forma  $\text{K}_2\text{CO}_3$ , sotto l'azione di  $\text{CO}_2$  nell'aria). Le tracce della sostanza igroscopica rimaste sulla superficie del filo, dopo l'essiccazione, mantengono questa superficie costantemente umida, sufficiente a renderla conduttrice di elettricità. Nonostante l'enorme resistenza di un tale filo, che va da  $10^{10}$  a  $10^{11}$  ohm, l'ago si carica quasi istantaneamente, poiché la capacità dello strumento è in tutto di circa  $10^{-5}$  microfarad. Si può impiegare, per la carica dell'ago, una batteria di accumulatori o una piccola pila a secco. Quando l'ago è caricato a 110 volt, una differenza di potenziale di 0,001 volt applicata ai quadranti dà una deviazione di  $2,4\text{ mm}$  per una distanza dalla scala di  $2\text{ m}$  e per uno spessore del filo di  $0,009\text{ mm}$ . Le deviazioni sono strettamente proporzionali alle differenze di potenziale prodotte fino a deviazioni di  $200\text{ mm}$  (circa 0,08 volt). La sensibilità aumenta ancora considerevolmente, quando si prende un filo di quarzo più sottile (fino a  $0,004\text{ mm}$ ); la deviazione può essere aumentata a  $17\text{ mm}$  per 0,001 volt.

Modifiche di vario genere sono state apportate alla costruzione dell'elettrometro a quadrante da Angot, Branly, Mascart, G. Wiedemann (Il suo strumento è rappresentato nella Figura 10), Righi, Hallwachs, Curie, Guglielmo, Edelmann, Becquerel, Guinchant (1905, elettrometro a sestanti), Malcès (1907, sensibilità ridotta), ed altri ancora.

Le difficoltà che si incontrano, nell'elettrometro a quadranti, per caricare l'ago, pur conservando una grande mobilità e uno zero fisso, indussero Guinchant a provare un dispositivo che permettesse alle forze elettriche di agire, per sola influenza, sull'ago mobile. Questo può poi essere sospeso da un filo a bozzolo che lo isoli completamente, oppure da un filo di seta artificiale



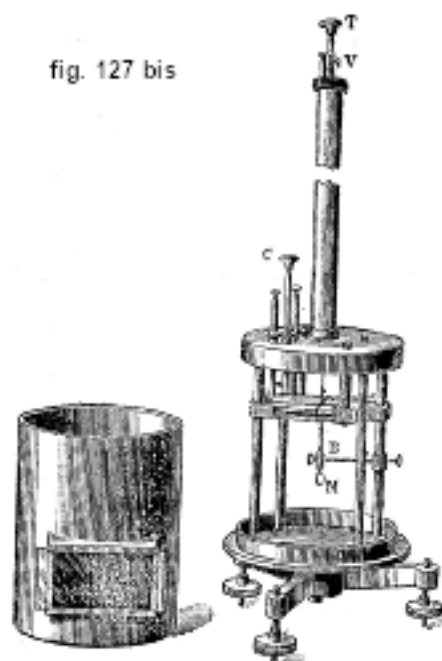
che lo mantenga al potenziale del gancio di sospensione. La coppia direttrice è data o da una sospensione bifilare, o meglio da una minuscola barretta magnetica, che permette di variare la sensibilità per mezzo di un magnete direttore. I settori collegati alle sorgenti di elettricità sono sei, posti sullo stesso piano al di sotto dell'ago; i settori opposti al vertice sono collegati tra loro. I due settori centrali, di ampia superficie, costituiscono una sorta di 8 svasati attorno al centro e coprono un angolo di circa  $80^\circ$ ; su entrambi i lati si trovano, a brevissima distanza, settori più piccoli, ognuno dei quali copre un angolo piccolo la metà. Al di sopra del piano dei settori si trova l'ago formato da una lamina di mica argentata, la cui rigidità è assicurata da quattro strette bande di mica incollate nel campo. Essa ricopre tutti i settori centrali e circa un terzo dei settori laterali. Le palette in mica producono lo smorzamento. La teoria di questo strumento è esattamente la stessa di quella dell'elettrometro a quadranti; porta alla stessa formula. Impiegando un numero sufficiente di elementi di carica, raddrizzando i settori e l'ago con precisione tale da ridurre la distanza a circa  $1\text{ mm}$ , si può ottenere una deviazione di  $1\text{ mm}$  per millivolt su una scala di  $1\text{ m}$ .

I vari tipi di elettrometri a quadranti attualmente in uso sono stabiliti per avere un'elevata sensibilità al potenziale o alla carica, ciò che consente, data l'estrema piccolezza delle coppie in gioco, di smorzare le oscillazioni per il solo attrito dell'ago e dell'aria all'interno dei quadranti ma, non appena si cessa di ricorrere a sospensioni leggerissime, questo metodo di smorzamento diventa sempre più difficile, perché le condizioni che richiede - ago molto piatto, traferro molto piccolo - diventano sempre meno fattibili in pratica. Malclès ha cercato di ottenere lo smorzamento tramite l'aria, per elettrometri di sensibilità ridotta, mediante l'utilizzo di un sistema di smorzamento indipendente dall'ago e di facile regolazione. L'ago è portato da un asse di alluminio all'estremità del quale è normalmente fissato un disco di mica, molto piatto e leggero, che può essere portato a una distanza desiderata da una piastra metallica orizzontale che può essere alzata e abbassata di quantità molto piccole. Quando lo spessore che separa le due superfici opposte è dell'ordine del millimetro, le reazioni sviluppate durante le oscillazioni dalla viscosità dell'aria sono sufficienti a smorzare una sospensione sensibile a  $1/50$  di volt, sensibilità circa 15 volte inferiore a quella di un elettrometro Curie montato con un filo d'argento di  $2/100$  di millimetro di diametro e un ago di alluminio spesso  $3/100$  di millimetro.

Nell'elettrometro di Curie appena citato, i quadranti sono di ottone e il filo d'argento o di platino, al quale è sospeso l'ago di alluminio, funge da conduttore per l'elettricità e fornisce la coppia antagonista che bilancia le azioni elettriche. Lo smorzamento dell'ago è effettuato dall'attrito dell'aria tra i settori. I quadranti sono ben isolati e i terminali di comunicazione sono sostenuti da aste isolanti, poste all'interno della gabbia e realizzate in ebanite o ambra, materiale formato dall'agglomerato di scorie di ambra che possiede il più alto grado di proprietà di isolamento anche in atmosfera umida. Se si desidera ottenere un isolamento molto perfetto, si può introdurre nella gabbia dello strumento un materiale essiccante. Curie ha realizzato con questo strumento lo studio della conducibilità dell'aria sotto l'azione di corpi radioattivi; per questo è necessario portare l'ago ad un potenziale di 50 o 100 volt (utilizzando ad esempio una batteria di piccoli accumulatori), mettere a terra una delle coppie di quadranti e mettere in comunicazione la seconda coppia di quadranti con la sorgente debole di elettricità da studiare, e con il quarzo piezoelettrico di P. e J. Curie che descriveremo in seguito. Con un filo di sospensione di  $50\text{ cm}$  di lunghezza e  $2\text{ mm}$  di diametro, un ago di  $6\text{ cm}$  di lunghezza, caricato al potenziale fisso di 50 volt, si ottiene, su una scala posta a  $1\text{ m}$ , una deviazione di  $30\text{ cm}$  per una differenza di potenziale  $v$  di 1 volt tra i quadranti. La durata dell'oscillazione dell'ago è quindi di  $16\text{ sec}$ , il coefficiente di smorzamento da 6 a 7. L'ago non deve essere caricato a un potenziale troppo alto, perché allora interviene una coppia direttrice elettrica che ne riduce la sensibilità. Quando si porta l'ago ad alto potenziale, essendo i quadranti collegati a terra, l'ago non deve deviare. Generalmente, tuttavia, si verifica qualche deviazione da difetti molto lievi nella simmetria dell'apparato. Si può, con una chiave di regolazione C (fig. 127 bis) che si introduce senza aprire

la gabbia, agire su uno dei quadranti in modo da correggere questi piccoli difetti, allontanando o avvicinando leggermente l'ago alla parete superiore di uno dei quadranti. Una volta effettuata la regolazione, la chiave viene rimossa.

Per trasportare lo strumento, l'ago viene tenuto fermo, con il filo di sospensione leggermente rilassato. La figura rappresenta lo strumento in caso di trasporto. A tale scopo, un braccio metallico B viene portato contro l'asta verticale che supporta l'ago e lo specchio M. L'asta è fissata tramite un morsetto posto all'estremità del braccio metallico. Quando si vuole installare lo strumento, si allenta la parte che rende libero l'ago e ci si allontana dal braccio metallico. È possibile regolare l'altezza dell'ago. L'asta metallica T, alla quale è fissato il filo di sospensione, scorre in un tubo metallico. Una vite di serraggio V permette di fissare il tappo nel tubo.



Curie ha costruito un elettrometro a filo di quarzo, utilizzato in ricerche dove è necessario avere maggiore sensibilità rispetto al dispositivo precedente; la sua manipolazione è molto più delicata. Assomiglia, nella sua struttura generale, all'elettrometro metallico: contiene lo stesso dispositivo di regolazione mediante la chiave V (fig. 127 ter), il metodo di smorzamento dell'ago è identico, l'isolamento è assicurato dall'uso dell'ambroide. Il filo di quarzo isolante, che sostiene l'ago di alluminio, ha un diametro che varia con la sensibilità che si vuole ottenere. Ad esempio, con un filo di 5 cm di lunghezza e da 7 a 8 cm di diametro, si ottiene una sensibilità di circa 2 m per volt, su una scala a 1 m, essendo il potenziale di carica dell'ago di 6 volt. Il tempo di ritorno dello spot alla sua posizione di equilibrio è di circa un minuto.

Il filo di quarzo è montato tra ganci o tra anelli. Per metterlo in posizione si aggancia da un'estremità ad un uncino portato da un'asta metallica T. Quest'ultima scorre con attrito in un tubo T' fissato ad un tappo metallico B. Si immobilizza il filo T. A questo punto basta innestare il filo nella brevissima colonnina del dispositivo C, e far scendere tutto il sistema fino a quando il tappo metallico non è arrivato al suo posto; si aggancia quindi l'ago A dopo il filo e si regola l'altezza di questo ago tramite l'asta T.

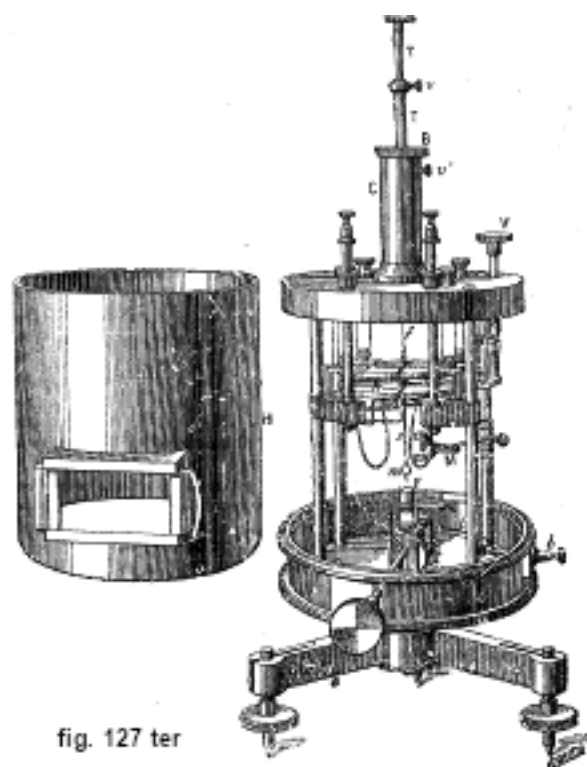


fig. 127 ter

Il tappo B porta un collare interno che può essere reso mobile o fissato alla colonna C mediante una vite  $v'$ ; tale collare consente di azionare per rotazione il tappo, in modo che, quando l'ago viene regolato in altezza, possa essere ruotato senza modificare la posizione del piano orizzontale in cui oscilla.

Usando il filo di quarzo come isolante, la carica elettrica viene portata all'ago nel modo seguente. Con l'ausilio di una camma  $c$ , azionata da un'asta orizzontale che viene mossa con l'ausilio di un chiavistello esterno quando la gabbia H dello strumento è chiusa, si solleva una coppetta di ferro F, isolata dall'elettrometro mediante un'asta d'ambroide  $a$ . Questa coppa contiene una goccia di mercurio; può essere messa, tramite un filo flessibile  $t$  e una lamina  $b$  isolata dalla gabbia, in comunicazione con uno dei poli di una batteria di accumulatori il cui altro polo è a terra. La coppa, guidata nel suo movimento verticale, viene montata fino a che il mercurio non viene a contatto con un sottilissimo filo di platino fissato all'estremità dell'asta e che sostiene l'ago e lo specchio  $m$ . Quando l'ago è caricato, si abbassa la coppetta e l'ago rimane isolato e carico.

Si opera quindi, con questo strumento, con una carica costante sull'ago. Essendo l'isolamento di quest'ultimo ottimo, questa carica si perde solo con estrema lentezza, e può sempre essere riportata al suo valore iniziale, mettendo per un attimo in comunicazione l'ago con la pila, alzando e poi abbassando il bicchiere con il mercurio. Questa operazione comporta generalmente un brusco movimento dell'ago, ma esso ritorna presto nella sua posizione di equilibrio e si possono quindi riprendere le misure.

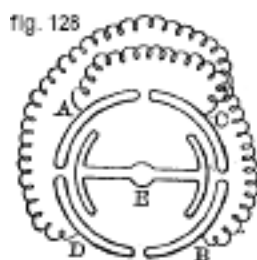


fig. 128

Il dispositivo M, che consente di immobilizzare l'ago per il trasporto, è lo stesso dell'elettrometro a filo di Curie; il terminale  $s$  viene utilizzato anche per mettere a terra la gabbia del dispositivo. Poiché il filo di quarzo può essere igroscopico, è necessario, per mantenerlo isolante, asciugare l'interno della gabbia del dispositivo.

Una particolare modifica dell'elettrometro a quadranti è rappresentata dall'elettrometro a quadranti cilindrici, tra i quali gira un ago provvisto alle estremità di due piastrine curvate anch'esse lungo cilindri. I quadranti A, B, C, D e l'ago E sono stati rappresentati schematicamente nella figura 128.

L'esatta teoria dell'elettrometro a quadranti è molto complicata. È stata sviluppata da Maxwell, Hallwachs (1886), Hopkinson, Hartwich (1888), Ayrton, Perry e Sumpner, Chauveau (1900), Ohrlieh (1903), Walker (1903), Scholl (1908) e altri. Ci limiteremo a stabilire la formula generalmente usata, con un percorso semplice e tutt'altro che rigoroso. Siano A, B e C, D le due coppie di quadranti, i cui potenziali sono  $V_1$  e  $V_2$ ; supponiamo di avere  $V_1 > V_2$  e che l'ago, il cui potenziale è  $V$ , abbia ruotato dell'angolo  $\alpha$ , dalla parte della coppia di quadranti il cui potenziale è  $V_2$ . In questo caso, il momento torcente  $M$  delle forze elettriche è  $M = C\varphi$  con sospensione monofilare e  $M = C \sin \varphi$  con sospensione bifilare. Per piccoli angoli di deviazione, si può sostituire il seno con l'angolo, e quindi generalmente porremo

$$M = C\varphi \quad (4.0.30)$$

La carica si distribuisce sulla superficie dell'ago in modo tale che la maggior parte di essa passa sulla superficie sopra i quadranti C, D. Siano  $S_1$  e  $S_2$  le parti della superficie dell'ago, che si trovano nei quadranti sopra A e B. Si ha, per tutte le posizioni dell'ago,

$$S_1 + S_2 = \text{cost} \quad (4.0.31)$$

Se si trascurano le regioni prossime ai bordi, si può ammettere che l'ago e i quadranti presi insieme formano due condensatori piani, le cui superfici sono  $S_1$  e  $S_2$ ; essi si trovano a differenze di potenziale  $V - V_1$  e  $V - V_2$ . Siano  $Q_1$  e  $Q_2$  le capacità di questi condensatori. Secondo la formula (1-65b), l'energia  $W$  dell'intero sistema è

$$W = \frac{1}{2}Q_1 (V - V_1)^2 + \frac{1}{2}Q_2 (V - V_2)^2 \quad (4.0.32)$$

Dalla formula (1-61), nella quale  $K = 1$ , si ha

$$Q_1 = \frac{S_1}{4\pi d} \quad Q_2 = \frac{S_2}{4\pi d}$$

essendo  $d$  la distanza dell'ago dai quadranti.

In realtà queste espressioni devono essere più complicate, soprattutto quando i quadranti circondano l'ago; ma saremo comunque vicini al vero, ammettendo che  $Q_1$  e  $Q_2$  sono proporzionali a  $S_1$  e a  $S_2$ . Porremo quindi

$$Q_1 = aS_1 \quad Q_2 = aS_2$$

essendo  $a$  un numero costante. Introducendo questi valori nella (16.b), viene

$$W = \frac{aS_1}{2} (V - V_1)^2 + \frac{aS_2}{2} (V - V_2)^2 \quad (4.0.33)$$

Abbiamo, per il momento di torsione  $M$ , la formula (1-81b)

$$M = -\frac{dW}{d\alpha} \quad (4.0.34)$$

Quando l'ago ruota dell'angolo infinitamente piccolo  $d\alpha$ , l'energia  $W$  varia della quantità

$$W = \frac{a}{2} (V - V_1)^2 dS_1 + \frac{a}{2} (V - V_2)^2 dS_2$$

Ma la (16,a) dà  $dS_1 + dS_2 = 0$ ; supponendo inoltre che il bordo dell'ago sia parallelo al cerchio che delimita i quadranti (si veda la fig. 128), si può considerare  $dS_1$  e  $dS_2$  come proporzionali a  $d\alpha$ , cioè porre  $dS_2 = cd\alpha$  e  $dS_1 = -cd\alpha$ .

Si ottiene così l'espressione per  $M$

$$M = -\frac{ac}{2} \left\{ (V - V_1)^2 - (V - V_2)^2 \right\}$$

o

$$M = ac (V_1 - V_2) \left( V - \frac{V_1 + V_2}{2} \right) \quad (4.0.35)$$

Se si confronta questa espressione con la (16) e se si indica  $ac : C$  con  $h$  si ha

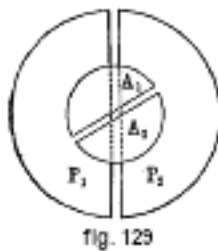
$$\alpha = h (V_1 - V_2) \left( V - \frac{V_1 + V_2}{2} \right) \quad (4.0.36)$$

$\alpha$  può essere sostituito da qualsiasi altra grandezza che misura la deflessione dell'ago e con sufficiente precisione, proporzionale all'angolo  $\alpha$ , ad esempio il numero  $s$  di divisioni della scala, quando si utilizza il metodo di misura soggettivo o oggettivo degli angoli mediante una scala; ovviamente, in questo caso il valore numerico del fattore  $h$  sarà molto diverso.

Sono state apportate varie correzioni alla formula (20). Così Hallwachs ha, tra l'altro, tenuto conto delle differenze di potenziale, che si devono produrre quando i quadranti e l'ago sono di sostanze diverse, quando tale e tal'altra parte dello strumento è messa a terra, ecc. Il caso di una sospensione bifilare è stato studiato da Hartwich, il quale ha mostrato che allora la formula (20) deve essere sostituita da un'altra più complicata. Gouy (1888) ha mostrato che se  $V_1$  e  $V_2$  sono grandi rispetto a  $V$ , la formula (20) cessa ancora di essere esatta e deve essere sostituita dalla seguente:

$$\alpha = \frac{ac (V_1 - V_2) \left( V - \frac{V_1 + V_2}{2} \right)}{C + b (V_1 - V_1)^2} \quad (4.0.37)$$

con  $b$  una costante molto piccola.



Blondlot e Curie (1889), basandosi sul lavoro di Gouy, hanno costruito un elettrometro astatico, che è rappresentato schematicamente dalla figura 129. La trasformazione introdotta nell'elettrometro a quadranti di W. Thomson è la seguente. L'ago, invece di essere a forma di S, è costituito da due semicerchi  $A_1$  e  $A_2$  sorretti da un pezzetto di ebanite; questi due semicerchi, uniti nel loro movimento, sono indipendenti dal punto di vista elettrico. I settori sono sostituiti da piastre fisse  $P_1$  e  $P_2$  anch'esse a forma di semicerchio.

Designando con  $V_1, V_2, V_3, V_4$  i rispettivi potenziali di  $A_1, A_2, P_1, P_2$  con  $\alpha$  l'angolo di deflessione dell'ago sotto l'azione delle forze elettriche bilanciate dalla torsione del filo di sospensione, si ha

$$\alpha = K (V_1 - V_2) (V_3 - V_4) \quad (4.0.38)$$

alla sola condizione che l'angolo delle due fessure diametrali non sia molto piccolo;  $K$  è una costante caratteristica uguale al doppio del quoziente della capacità dell'ago per l'unità angolare per la coppia della sospensione per l'unità angolare. Il vantaggio di questo strumento non sta nella sostituzione di semicerchi ai settori dell'elettrometro a quadranti, ma nel fatto che l'ago mobile è formato da un sistema di due conduttori a potenziali distinti, in tutti i punti simili al sistema di conduttori fissi: lo strumento è così reso più simmetrico, e questa simmetria si trova nella formula che dà le deviazioni dello strumento. Gouy ha mostrato che, nel comune elettrometro a quadranti, occorre tener conto di una coppia direttrice elettrica che, indipendentemente dal filo di torsione, tende a riportare l'ago nella posizione di equilibrio simmetrico; così, in certi casi, la formula ordinariamente impiegata per l'elettrometro non è più applicabile. Nello strumento di Blondlot e Curie non c'è coppia direttrice elettrica e la formula data sopra è rigorosamente vera. Lo strumento è stato costruito da Ducrete. L'ago, leggerissimo, è ricavato da un sottilissimo foglio di alluminio ( $\frac{1}{40} mm$ ) che riceve una rigidità piuttosto forte da una goffatura preliminare, conferendo una superficie ondulata analoga a quella dei tamburi aneroidi. La posizione di equilibrio dell'ago è determinata da due sottilissimi fili di platino, tesi sopra e sotto l'ago; questi due fili servono sia a bilanciare le azioni elettriche mediante la loro torsione sia a stabilire contatti elettriche rispettivamente con i due semicerchi metallici  $A_1, A_2$ . Le piastre fisse sono in numero di quattro, due sopra, due sotto l'ago. Quelle che si trovano una sopra l'altra sono generalmente rese solidali dal punto di vista elettrico. Queste piastre sono dei magneti secondo un'idea dovuta a Curie (1885), e le oscillazioni dell'ago sono smorzate dalle correnti di induzione che, come vedremo in seguito, nascono nella loro massa sotto gli influssi magnetici. Infine i piatti, sostenuti dalle pareti della gabbia che avvolge lo strumento, sono dotati di tutti i movimenti di regolazione.

Questo strumento può funzionare come un comune elettrometro dotato di pila di ricarica. È sufficiente, ad esempio, mettere a contatto i poli della pila di ricarica rispettivamente con ciascuno dei semicerchi dell'ago; gli scostamenti sono poi strettamente proporzionali alle differenze di potenziale stabilite tra le piastre. Può essere utilizzato, con metodo idiostatico, unendo rispettivamente le due coppie di piastre ai semicerchi dell'ago; allora si ha necessariamente  $V_1 = V_3, V_2 = V_4$ , e

$$\alpha = K (V_1 - V_2)^2 \quad (4.0.39)$$

Può essere utilizzato come wattmetro; dà infatti il prodotto di due differenze di potenziale. Si può prendere per uno di essi la forza elettromotrice ai capi tra i quali si vuole valutare il lavoro compiuto da una corrente elettrica. Si prenderà poi, per l'altra differenza di potenziale, quella che esiste alle estremità di un filo di resistenza nota (vedi dopo), posto nel circuito generale. Infine, lo strumento può essere utilizzato come elettrometro differenziale, sfruttando la possibilità di separare, dal punto di vista elettrico, le piastre superiori e le piastre inferiori.

Dolezalek (1908) ha perfezionato l'elettrometro di Curie e ha discusso in modo dettagliato la sua teoria e le sue applicazioni. Nel nuovo strumento da lui costruito, si possono misurare da pochi millivolt fino a 100 volt. L'ago e la gabbia hanno la forma di sfere concentriche, quindi l'ago non diventa indifferente anche ad alte tensioni.

Passiamo ora ai metodi che si impiegano con l'elettrometro a quadranti, per la misura, o più esattamente per il confronto di potenziali diversi o di differenze di potenziale. Questi metodi sono stati particolarmente studiati da Hallwachs; tre di loro devono essere distinti. Si noti che la formula (20) si semplifica in due casi. Quando  $V_1 = -V_2$ , si ha

$$\alpha = 2hVV_1 \quad (4.0.40)$$

Quando  $V$  è molto grande rispetto a  $V_1$  e  $V_2$ , si può porre

$$\alpha = h (V_1 - V_2) V \quad (4.0.41)$$

1. Usando una batteria, la cui metà è messa a terra, si fa  $V_1 = -V_2$ . Il corpo da studiare è connesso con l'ago, ad esempio il polo di un elemento (o di una batteria), con l'altro polo a terra. La formula (23) allora dà

$$V = h\alpha \quad (4.0.42)$$

dove si determina il valore numerico del coefficiente  $k$ , misurando  $\alpha$  mentre  $V$  è dato, uguale ad esempio alla forza elettromotrice di un elemento noto.

2. L'ago viene mantenuto ad un potenziale  $V$  costante, il più alto possibile utilizzando il metodo di W. Thomson (elettrometro a forma di bottiglia di Leida) o collegando l'ago al polo di una batteria di diverse centinaia di cellette. Si collegano i quadranti ai punti di cui si vuole misurare la differenza di potenziale ( $V_1 - V_2$ ). La formula (24) dà

$$V_1 - V_2 = k\alpha \quad (4.0.43)$$

3. Si collega una coppia di quadranti all'ago; si ha allora  $V = V_1$  e la formula (20) dà

$$\alpha = \frac{1}{2}h(V_1 - V_2)^2 \quad (4.0.44)$$

La differenza di potenziale cercata  $V_1 - V_2$  è data da un'espressione della forma

$$V_1 - V_2 = k\sqrt{\alpha} \quad (4.0.45)$$

Se si mette a terra l'altra coppia di quadranti, si ha  $V_2 = 0$  e il potenziale  $V$  è dato dalla formula

$$V = k\sqrt{\alpha} \quad (4.0.46)$$

Quest'ultimo metodo presenta evidentemente grandi vantaggi.

V. ELETTROMETRO ASSOLUTI DI W. THOMSON (LORD KELVIN). - Questo strumento permette di misurare i potenziali in el.-st. assolute. Si basa sulla misura dell'attrazione reciproca di due piastre piane parallele, che sono ai potenziali  $V$  e  $V_1$ . Abbiamo ottenuto per la grandezza di questa attrazione la formula (1-57), che per  $K = 1$  (aria), si scrive

$$f = \frac{(V - V_1)^2 S}{8\pi d^2} \quad (4.0.47)$$

essendo  $d$  la distanza delle piastre,  $S$  la parte della superficie delle piastre su cui agisce la forza  $f$ . La formula (30) si riferisce a piastre infinitamente grandi, perché è stata stabilita nell'ipotesi di una loro elettrizzazione uniforme. Ma è ugualmente applicabile a una piccola regione al centro delle piastre, poiché su di essa l'elettricità è distribuita molto approssimativamente in modo uniforme. La possibilità di un'applicazione pratica della formula (30) è già stata discussa: in una delle due piastre parallele, disposte orizzontalmente, è praticata un'apertura, che viene quasi interamente riempita da un disco sospeso a una molla o con qualsiasi altro mezzo; è a questo disco che si può applicare la formula (30), e la parte del piatto che lo circonda si chiama anello di guardia.

La figura 130 rappresenta schematicamente le parti principali dell'elettrometro assoluto: AA e BB sono due piastre parallele; BB può essere alzata o abbassata con la vite Q; HK è un disco mobile, le cui dimensioni rispetto a BB sono state notevolmente ingrandite in figura.

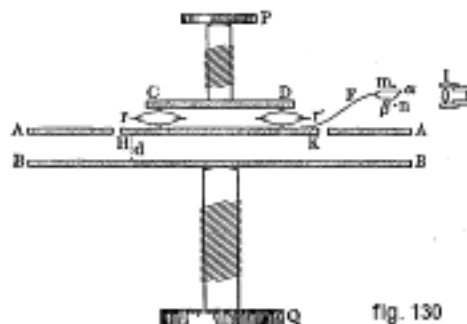


fig. 130

L'area di questo disco è  $S$ ; è sospeso mediante molle alla piastra CD, che può essere alzata o abbassata mediante la vite P. Per verificare se il disco HK è esattamente nel piano dell'anello di guardia AA, si attacca una forchetta con un pezzo di filo orizzontale  $\alpha\beta$  fissato ad essa; questo filo deve trovarsi esattamente nel mezzo tra due punti  $m$  e  $n$ ; si osserva la posizione del filo, utilizzando la lente  $l$ . Un piccolo peso  $p$  è posto sul disco HK; si abbassa il disco, e si determina l'angolo  $\varphi$  di cui si fa ruotare la vite P, per alzare di nuovo HK fino al piano dell'anello di guardia; la stessa operazione si ripete per tutta una serie di valori diversi di  $p$ . Si ottiene così una relazione empirica tra  $p$  e  $\varphi$ , nella forma di tabella o curva. Supponiamo che AHKA e BB siano rispettivamente ai potenziali  $V$  e  $V_1$ ; HK e BB si attraggono, HK si abbassa ed è necessario ruotare P di un certo angolo per riportare HK nella posizione originaria. Conoscendo  $\varphi$ , si ottiene, utilizzando la tabella o la curva, il corrispondente peso  $p$ , che è uguale alla forza di attrazione cercata tra HK e BB. La formula (30) dà allora

$$V - V_1 = d\sqrt{\frac{8\pi f}{S}} \quad (4.0.48)$$

Se si esprime  $f$  in dyne,  $d$  in centimetri e  $S$  in centimetri quadrati, si ha la differenza  $V - V_1$ , in unità el.-st. C.G.S.

Lo strumento di W. Thomson, rappresentato dalla figura 131, è costruito in modo tale che il sistema AHK si può mantenere a un certo potenziale costante  $V$ . A questo scopo l'intero dispositivo ha la forma di una bottiglia di Leida, come l'elettrometro a quadranti sopra descritto. Sul cilindro di vetro (fig. 131) sono incollati all'interno e all'esterno, fino all'altezza dei dischi A e B, fogli di stagno, non rappresentati nella figura. Il disco B può essere alzato o abbassato ruotando la vite inferiore WU; l'entità dello spostamento si legge su una scala  $r$  provvista di nonio; la lettura si fa con una lente. Il disco B è collegato da un filo con un'asta metallica isolata  $n$ , sorretta da una bacchetta di vetro  $p$ . All'interno dell'anello di guardia A c'è una piastra di alluminio, la cui area designeremo con  $S$ . È sospesa da tre molle, fissate ad un'asta verticale che può essere sollevata o abbassata ruotando una vite  $m$ ; questa vite è provvista di divisioni  $b$  per la misura dell'angolo  $\varphi$ . Il disco è collegato all'anello di guardia A da un filo sottilissimo avvolto a spirale. Al disco stesso è fissato un filo orizzontale ( $\alpha\beta$  in figura 130); la lente  $h$  dà un'immagine di questo filo nel punto in cui si trovano le punte  $k$  rivolte l'una verso l'altra. Si guarda attraverso la lente  $l$  e si fa ruotare la vite  $m$ , in modo che l'immagine del filo arrivi esattamente tra le punte  $k$ ; la piastra di alluminio si trova quindi nel piano dell'anello di guardia. Il piatto A è connesso all'armatura interna, al cui potenziale  $V$  si trova quindi anche il disco in mobile. Per variare il potenziale  $V$  in un verso o nell'altro, si usa il rigeneratore CC; viene portato sempre allo stesso potenziale mediante un dispositivo già considerato nella descrizione dell'elettrometro a quadranti. Si noti ancora che un'asta metallica sostiene il disco orizzontale F, che attrae una piccola piastra; la posizione di quest'ultima, o più esattamente la posizione del filo ad essa collegato, è osservata attraverso una lente posta a destra, sopra il coperchio dello strumento.



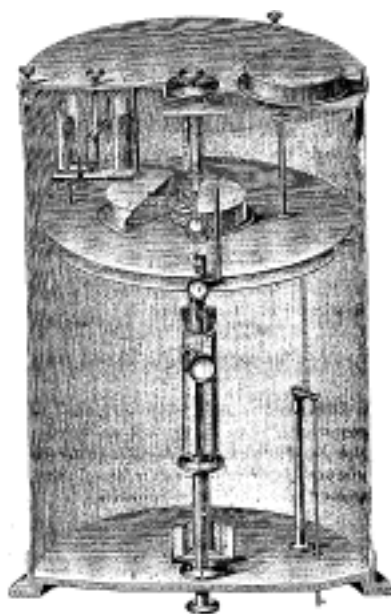


fig. 131

Ruotando in un senso o nell'altro la testa della vite del rigeneratore si aumenta o si diminuisce la carica, e di conseguenza anche il potenziale  $V$  all'interno dello strumento. Se si osserva contemporaneamente nella lente il suddetto filo, e lo si porta nella posizione voluta, si assegna così al potenziale  $V$  un determinato valore costante.

Si può usare questo elettrometro in un altro modo, per trovare il valore assoluto del potenziale di un qualsiasi corpo o della differenza di potenziale di due punti o di due corpi. Si noti che, nella formula (31),  $S$  è noto, e  $f$  si ottiene con il metodo spiegato sopra. Ma è abbastanza difficile determinare l'entità della distanza  $d$  tra le piastre A e B, ed è quindi necessario effettuare le misure in modo che la grandezza cercata sia data dalla differenza  $d_1 - d_2$  di due valori di  $d$ , cioè dalla quantità di cui il disco B si alza o si abbassa quando si effettuano le misure; questa quantità può essere letta in modo molto preciso sulla scala  $r$ .

Supponiamo che si tratti di misurare il potenziale  $V_1$  di una non specificata fonte di elettricità. Colleghiamo questa sorgente con la piastra B (mediante l'asta  $n$ ) e misuriamo la forza  $f$ . Allora abbiamo

$$V - V_1 = d_1 \sqrt{\frac{8\pi f}{S}} \quad (4.0.49)$$

Mettiamo poi a terra B e, senza toccare la vite  $m$ , cioè mantenendo il vecchio angolo  $\varphi$  e quindi  $f$ , spostiamo B fino a che il disco mobile si trova nuovamente nel piano dell'anello di guardia. È necessario, nella (31,a), sostituire  $V_1$  con zero e  $d_1$  con qualche altro valore  $d_2$ ; si ha quindi

$$V = d_2 \sqrt{\frac{8\pi f}{S}}$$

Portando questo valore nella (31,a), viene

$$V_1 = (d_2 - d_1) \sqrt{\frac{8\pi f}{S}} \quad (4.0.50)$$

Per trovare la differenza potenziale tra due punti, si collega dapprima uno dei punti e poi l'altro con l'asta  $n$  e si cercano due posizioni della piastra B, cioè i valori di  $d_1$  e  $d_2$ , tali che una stessa posizione della vite  $m$ , e quindi anche lo stesso valore della forza  $f$ , corrispondano ad essi. Abbiamo in questo caso l'equazione (31,a) e l'equazione

$$V - V_2 = d_2 \sqrt{\frac{8\pi f}{S}}$$

che danno

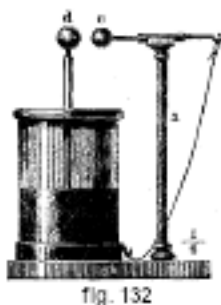
$$V_1 - V_2 = (d_2 - d_1) \sqrt{\frac{8\pi f}{S}} \quad (4.0.51)$$

Maxwell ha mostrato che le formule (32) e (32,a) sono più esatte, se si prende  $S$  uguale alla media aritmetica della superficie del disco mobile e di quella dell'apertura, in cui si trova questo disco.

Due modifiche dell'elettrometro appena descritto sono rappresentate da altri due strumenti, chiamati con W. Thomson elettrometro trasportabile ed elettrometro a lungo raggio.

VI. ELETTRIMETRO A CAPILLARE DI LIPPMANN. - Questo elettrometro è già stato descritto in precedenza

VII. BOTTIGLIA DI LANE. - Questo strumento può servire per la determinazione approssimativa del rapporto delle quantità di elettricità  $E$  che, in una serie di esperimenti eseguiti in successione, fluiscono da una sorgente di elettricità  $P$ , per esempio dal conduttore di una macchina elettrica, su un qualsiasi corpo  $Q$ , da caricare, su una bottiglia di Leida per esempio. La bottiglia è interposta tra  $P$  e  $Q$ , nel percorso della corrente elettrica. Permette di dividere la quantità di elettricità che scorre in parti circa uguali  $\eta$  e di determinare il numero di quelle parti che sono passate da  $P$  a  $Q$ . La bottiglia di Lane è rappresentata dalla figura 132. Si compone di una piccola bottiglia di Leida, il cui telaio esterno è collegato da un filo con un pomello  $c$ . Il manicotto, all'interno del quale scorre l'asta che porta il pomello  $c$ , è provvisto di una divisione in millimetri, sulla quale si può leggere la distanza tra le sfere  $c$  e  $d$ . Per misurare la quantità di elettricità  $E$  che è passata da  $P$  a  $Q$ , si collega la sorgente  $P$  con la sfera  $d$  e il pomello  $c$  con  $Q$ , dovendosi isolare la bottiglia, posta ad esempio su una lastra di vetro.



Dalla sorgente  $P$  fluisce elettricità verso  $d$ , e la bottiglia si carica; una quantità uguale di elettricità passa attraverso l'armatura esterna a  $Q$ . Quando una certa quantità di elettricità  $\eta$  si è accumulata nella bottiglia, quest'ultima si scarica e tra  $d$  e  $c$  si manifesta una scintilla; quando una quantità di elettricità  $\eta$  è nuovamente fluita da  $P$  a  $d$  e da  $c$  a  $Q$ , appare una seconda scintilla, e così via. Il numero di scintille che compaiono tra  $d$  e  $c$  fornisce il numero di quantità di elettricità  $\eta$  trasferite su  $Q$ , e può quindi essere utilizzato per misurare la quantità totale di elettricità  $E$ . Avvicinando  $c$  a  $d$ , si può diminuire la quantità di elettricità  $\eta$  che funge da unità di misura. Si tenga conto del fatto che nella bottiglia si forma una carica residua e quindi non si devono contare le prime scintille. Quando la terra svolge il ruolo di corpo  $Q$ , non è necessario isolare la bottiglia.

VIII. METODI DI IMMERSIONE E APPARECCHI PER LA MISURA DELLE GRANDEZZE  $\eta$  E  $V$ . - Vedremo, nel capitolo sulla scarica dell'elettricità, che la lunghezza  $\delta$  della scintilla dipende tra l'altro dalla differenza di potenziale  $V$  dei corpi, tra cui avviene la scarica. Se si determina una volta per tutte, per elettrodi di determinata forma e dimensione, la lunghezza  $\delta$  della scintilla in aria e la corrispondente differenza di potenziale  $V$ , si può viceversa, misurando  $\delta$ , determinare il corrispondente valore di  $V$ . Per dare un'idea dei valori numerici che si incontrano in questo metodo, si noti che per ottenere nell'aria una scintilla di  $1\text{ mm}$  tra sfere di raggio pari a  $2,5\text{ mm}$ ,

serve una differenza di potenziale  $V$  di circa 4700 volt, per  $\delta = 5\text{ mm}$  ci vogliono circa 15000 volt, e per  $\delta = 1\text{ cm}$  circa 20000 volt. La lunghezza  $\delta$  aumenta più rapidamente della differenza di potenziale  $V$ .

Tra gli elettrometri non ancora descritti, citeremo quanto i seguenti.

Lippmann (1886), per costituire un elettrometro assoluto di costruzione meno delicata e di forma più semplice, rispetto a quella dell'elettrometro di W. Thomson, ha preso una sfera metallica isolata nello spazio e divisa in due emisferi da un tratto di sega. Quando la sfera è elettrizzata, le sue due metà si respingono con una forza pari a  $F$ . Tra le forze  $F$  e il potenziale  $V$  a cui è stata portata la sfera e che è l'incognita del problema, si stabilisce la relazione  $F = V^2/8$ . Basta quindi misurare  $F$  per avere il valore assoluto di  $V$ . Si vede che non è necessario conoscere il raggio della sfera; questo raggio può essere arbitrario, non entra nell'equazione. Per misurare  $F$ , si potrebbe sospendere uno degli emisferi a una bilancia, l'altro essendo fisso e portato da un piede di vetro. Ma in questo caso sarebbe necessario disporre di un filo di sospensione sufficientemente lungo in modo che la vicinanza della bilancia non esercitasse un'influenza perturbatrice percettibile sullo strumento. Per questo Lippmann ha preferito misurare  $F$  mediante un piccolo dispositivo alloggiato interamente all'interno della sfera metallica, che è cava: si sa infatti che un corpo posto all'interno di un conduttore cavo non subisce alcuna azione dall'elettricità accumulata sulla superficie di questo conduttore. Lo strumento interno destinato alla misura di  $F$  può assumere la forma di una bilancia, di una cella di carico o di un dinamometro precedentemente graduato. Lippmann ha ottenuto con questo buoni risultati. Il piano di separazione dei due emisferi è verticale; uno di essi è fissato su un'asta isolante; l'altro, che è mobile, è portato da una sospensione che si può dire trifilare, cioè è sostenuta da un sistema di tre fili di canapa verticali, uguali e paralleli. Quando avviene la repulsione elettrica, i tre fili deviano di un angolo  $\alpha$ , pur rimanendo uguali e paralleli; l'emisfero mobile si sposta quindi parallelamente a se stesso, e rimane costantemente in equilibrio stabile. Se si chiama  $p$  il peso dell'emisfero mobile, si ha  $\tan \alpha = F/p$ . Si vede che la lunghezza del filo di sospensione può essere arbitraria; non entra nell'equazione. Il sistema trifilare è nascosto all'interno della sfera. Ma la deviazione  $\alpha$  si osserva con l'ausilio di uno specchio incollato a due dei fili e illuminato da una finestrella disposta nell'emisfero fisso. L'elettrometro sferico assoluto possiede il grado di sensibilità necessario per misurare i potenziali dati dalle comuni macchine elettriche; così, per una distanza esplosiva di un centimetro, la forza  $F$  è pari a 2,154 *gr*. Se è richiesta maggiore sensibilità, la sfera sopra descritta è circondata da un involucro sferico concentrico messo a terra; la sensibilità aumenta nella stesso rapporto del quadrato della capacità della sfera interna.

Harris aveva già costruito nel 1834 un elettrometro a peso, in cui veniva misurata l'attrazione di due dischi; questo strumento era un'anticipazione dell'elettrometro assoluto di W. Thomson.

Riess ha costruito nel 1855 un elettrometro di dei seni, che ricorda un po' l'elettrometro sopra descritto di Kohlrausch. La parte mobile era un ago magnetico; la repulsione elettrica era compensata dalla forza direttrice del magnetismo terrestre. Kohlrausch (1853) ha costruito uno strumento analogo.

Bichat e Blondlot (1886) hanno costruito un elettrometro assoluto che ha dato ottimi risultati. Si basa sull'azione reciproca di due cilindri, uno dei quali penetra parzialmente nell'altro. Questo dispositivo è abbastanza pratico per misurare differenze di potenziale tra valori corrispondenti a 1 *mm* e 2 – 3 centimetri di scintilla.

Wilson (1903) ha costruito un elettrometro a foglia d'oro molto sensibile, dove si osservano i movimenti della foglia d'oro mediante un microscopio dotato di scala micrometrica; 1 volt fornisce una deviazione di 200 divisioni da questa scala.

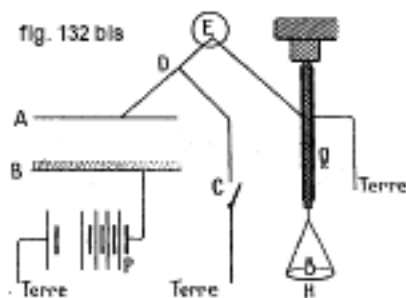
Wulf (1907) ha costruito un elettrometro la cui parte principale è costituita da due sottilissimi fili di quarzo, lunghi 6 *cm*, resi conduttori da un deposito di platino e sospesi molto vicini tra loro. Le loro estremità sono legate e caricate con un piccolo peso di stagno. Per elettrizzazione,

le parti centrali dei fili si separano e il peso dello stagno viene leggermente sollevato. Il divario che si verifica tra le parti centrali viene osservato attraverso un microscopio che ingrandisce da 70 a 100 volte. L'elettrometro fornisce indicazioni molto costanti, in modo da poter essere tarato con buona precisione; la sua capacità è estremamente ridotta.

Benoist (1907) ha descritto un elettrometro che chiamò elettrodensimetro. Ricorda l'elettroscopio di Kolbe (fig. 7), ma è predisposto in modo più preciso e può essere utilizzato per misure relative. La foglia mobile può essere scelta con diversi pesi, a seconda della sensibilità che si desidera.

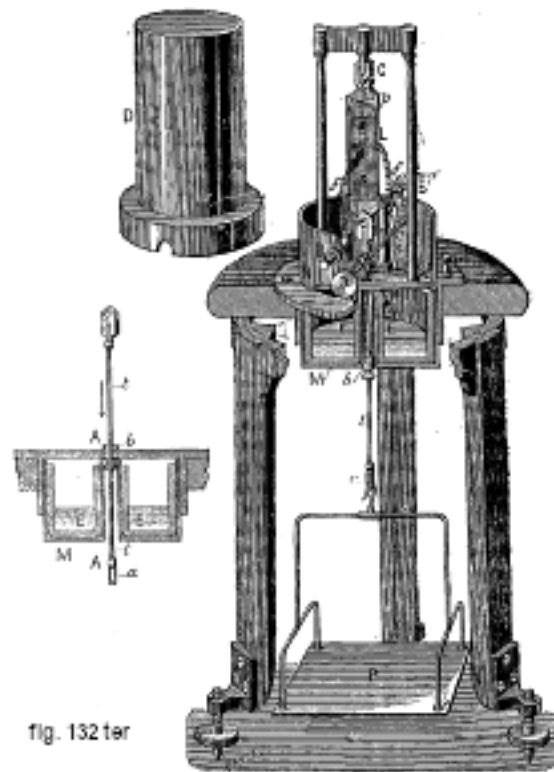
Uno strumento molto sensibile è l'elettrometro a corda di Lutz (1908). Consiste in un sottile filo di platino di Wollaston da 1 a  $2\mu$  di diametro teso verticalmente; su entrambi i lati di questo filo ci sono aste metalliche verticali, che premono con coltelli sul filo. Il movimento del filo viene osservato per mezzo di un microscopio. Come nell'elettrometro a quadranti, sono possibili cinque disposizioni molto diverse, con o senza carica ausiliaria, ad esempio, con contatto della corda con un coltello, ecc. È possibile misurare tensioni di 0,01 volt, se ai coltelli viene applicata una tensione ausiliaria di  $\pm 50$  volt.

P. Curie ha impiegato nelle sue ricerche sulla radioattività delle sostanze, un elettrometro che si basa sulle proprietà piezoelettriche del quarzo. Finora è stato utilizzato da Mme Curie e dai suoi studenti. La radioattività è misurata dalla conduttività acquisita dall'aria sotto l'azione della sostanza radioattiva. Il metodo adottato è il seguente. Un condensatore (fig. 132 bis) è costituito da due piastre A e B. La sostanza attiva finemente polverizzata viene spalmata sulla piastra B. Essa rende l'aria conduttrice di elettricità tra le piastre. Per misurare tale conducibilità, la piastra B viene portata ad alto potenziale collegandola ad uno dei poli di una batteria di piccoli accumulatori, mentre l'altro polo è a terra. La piastra A essendo mantenuta al potenziale di terra dal filo CD, si stabilisce una corrente elettrica tra le due piastre. Il potenziale della piastra A è indicato da un elettrometro a quadranti E di Curie. Se si interrompe in C il contatto con la terra, la piastra A si carica e questa carica fa deviare l'elettrometro. La velocità della deviazione è proporzionale all'intensità della corrente e può essere utilizzata per misurarla.



Ma è preferibile effettuare questa misura compensando la carica acquisita da A in modo tale da mantenere l'elettrometro a zero. Le cariche in gioco, essendo estremamente deboli, possono essere compensate per mezzo del quarzo piezoelettrico che descriveremo in seguito, essendo un'armatura di questo quarzo collegata ad A e l'altra a terra. La lama di quarzo è sottoposta ad una trazione nota prodotta da pesi posti in una piastra H. Tale trazione si instaura gradualmente ed ha l'effetto di rilasciare anche gradualmente una quantità nota di elettricità, per un tempo che viene misurato utilizzando un cronometro o un orologio a secondi. Il funzionamento può essere regolato in modo tale che vi sia ad ogni istante una compensazione tra la quantità di elettricità che attraversa il condensatore e quella di segno contrario che fornisce il quarzo. Si arriva molto facilmente a questo risultato sostenendo il peso con la mano e facendolo pesare solo gradualmente sul piatto H, in modo da mantenere l'elettrometro a zero e ciò fino al momento in cui lo si toglie. Con un po' di pratica, si acquisisce esattamente l'abilità necessaria per riuscire in questa operazione.

Descriveremo ora il dispositivo chiamato quarzo piezoelettrico, dovuto a P. e J. Curie. Può servire come campione per la quantità di elettricità, ma può essere utilizzato anche per misurare in valore assoluto correnti molto deboli, come quelle che nascono dalla conducibilità dell'aria sotto l'influenza di sostanze radioattive. Questo strumento è costituito in linea di massima da un lamina di quarzo lunga e sottile (fig. 132 ter), tagliata in direzione normale sia all'asse ottico che a quello elettrico: tale lamina è stuccata alle sue due estremità in parti metalliche  $p$ . Un'estremità è sospesa a un gancio fisso  $C$ . All'estremità inferiore si può agganciare un'asta  $t$  che supporta un piatto  $O$ : mediante un peso posto nel piatto, si esercita una trazione nel senso della normale all'asse. Questa azione meccanica provoca la liberazione di due quantità uguali di elettricità e di segno opposto sulle facce opposte della lamina di quarzo: queste cariche elettriche si raccolgono su armature di carta stagnata, che ricoprono le due facce della lamina e che sono isolate dalla parte metallica dello strumento mediante due scanalature  $s, s$ . In un primo modello, il contatto tra le armature e i dispositivi elettrici era stabilito mediante molle, che erano portate dai terminali isolati  $B, B$  e che venivano a premere sulle armature.



Nel modello attualmente in uso, alle facce della lama sono incollati dei piccoli telai metallici, che sono collegati tramite fili flessibili  $f, f$ , ai due terminali isolati  $B, B$  dello strumento (fig. 132 ter). La messa a terra di una delle lamelle di stagno viene effettuata tramite una camma  $c$  e una leva  $l$  all'interno del dispositivo. Il movimento della camma è comandato dall'esterno dallo sperimentatore, con l'ausilio di un'asta orizzontale  $n$ , la cui estremità reca una manopola zigrinata  $O$ . In generale, il terminale  $r$  comunica con la terra. Il quarzo piezoelettrico realizza un campione di quantità di elettricità perfettamente costante. La quantità di elettricità  $q$ , emessa dalla lamina di quarzo è proporzionale al peso tensore  $F$ . Si ha

$$q = 0,063 \frac{L}{e} F$$

$L$  è la lunghezza della parte della lamina ricoperta di stagno tra i tratti  $ss$ ,  $e$  è lo spessore della lamina che è sempre inciso su una delle parti di stuccatura  $p$ . La forza portante massima è di  $5\text{ kg}$ , per le dimensioni di lamine di uso comune, purché si evitino scosse improvvise. Il

fondo metallico M, montato a baionetta sulla scatola metallica N dello strumento, contiene un serbatoio in vetro di forma speciale E, per consentire il passaggio dell'asta  $t$  del dispositivo. In questo contenitore si mette acido solforico puro, con l'aggiunta di un po' di acido fumante di Nordhausen. Un'asciugatura eccellente è infatti necessaria per il corretto funzionamento del dispositivo.

Negli ultimi tempi sono stati costruiti tutta una serie di dispositivi, chiamati voltmetri elettrostatici, e utilizzati per misurare le correnti variabili o le correnti ad alta frequenza che si incontrano nella tecnologia. Tra i primi citeremo lo strumento di Hartmann e Braun; tra i secondi il voltmetro di Ebert e Hoffmann.

## 4. Misura delle capacità

La capacità  $q$  di un conduttore è legata alla carica  $\eta$  e al potenziale  $V$  dalla relazione

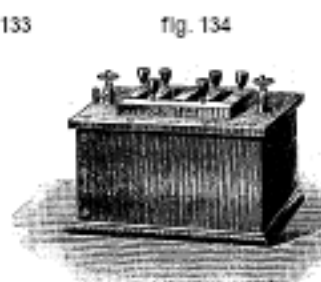
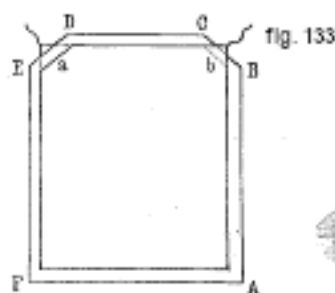
$$q = \frac{\eta}{V} \quad (4.0.52)$$

Può essere determinata dalle dimensioni del conduttore in modo talvolta molto semplice; così, in unità elettrostatiche CGS, la capacità di una sfera in aria è numericamente uguale al suo raggio; la capacità di un condensatore piano è, vedi (1-56a).

$$q = \frac{SK}{4\pi d} \quad (4.0.53)$$

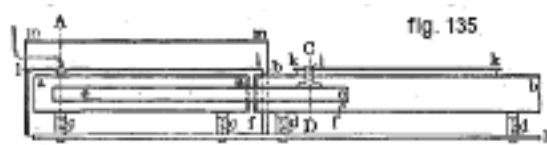
Un microfarad equivale a circa 900000 unità elettrostatiche CGS di capacità. Ne consegue che un microfarad è pari alla capacità in aria di una sfera di raggio pari a  $9\text{ km}$ . La capacità di un condensatore piano in aria ( $K = 1$ ), le cui armature circolari sono distanti  $1\text{ mm}$ , è uguale a un microfarad, quando il raggio delle armature è uguale a  $6\text{ m}$ .

In pratica si utilizzano campioni di capacità contenuti in una speciale cassetta. I campioni di capacità sono costituiti da fogli rettangolari di stagno, tra i quali sono interposti sottili fogli di mica ABCDEF (fig. 133). Gli angoli superiori di sinistra (a) e gli angoli superiori di destra b (vedi linea tratteggiata b) dei fogli di stagno sono tagliati alternativamente; ciò permette di riunire tra loro comodamente, da un lato tutti i fogli pari, dall'altro tutti i fogli dispari. La superficie totale di ciascuno di questi due gruppi di fogli forma una o due superfici molto vicine del condensatore. Un microfarad può quindi essere contenuto in una cassetta relativamente piccola. Bouty (1890) ha costruito campioni di capacità di dimensioni molto ridotte, utilizzando lastre di mica argentate, che offrono inoltre maggiori garanzie dal punto di vista della loro conservazione e dell'invariabilità della loro capacità. Per ottenere capacità meno costose, la mica viene sostituita dalla carta paraffinata. Una scatola di capacità contiene campioni di diverse capacità, scelti come i pesi in una cassetta di pesi, cioè pari a  $0,1 - 0,2 - 0,2 - 0,5$  - ecc. microfarad. Una delle piastrine costituite da questi campioni è solitamente collegata ad una comune banda metallica, che si trova sul coperchio della cassetta; le piastrine relative ad ogni campione sono collegate a bande isolate, tra le quali possono essere inseriti dei picchetti metallici. Ciò consente di combinare in vari modi le capacità racchiuse. La figura 134 rappresenta una cassa, che contiene cinque standard di capacità.



Le capacità date da una tale scatola possono ovviamente variare solo per salti, ad esempio di 0,01 microfarad. W. Thomson ha costruito un condensatore (condensatore cilindrico scorrevole) rappresentato dalla figura 135, che permette di ottenere una variazione continua della capacità. Le parti principali di questo condensatore sono due cilindri cavi molto vicini *aa* e *bb*, uno dei quali forma in qualche modo il prolungamento dell'altro. All'interno di questi cilindri un terzo cilindro si sposta nella direzione dell'asse comune. I cilindri *ll* e *mm* proteggono la parte sinistra del dispositivo da azioni esterne. La capacità del condensatore cilindrico, formato dai cilindri *bb* ed *ee*, è variabile. L'entità dello spostamento del cilindro *ee* si legge su una scala *kk*. Nernst ha pure costruito un condensatore a capacità variabile continua; costituisce parte dello strumento da lui utilizzato per la misura della costante dielettrica dei liquidi.

I metodi di misura della capacità possono essere divisi in due gruppi. In primo luogo, esistono metodi per la misura immediata in unità assolute di una capacità data. In secondo luogo, si possono confrontare due capacità tra loro; noto il valore assoluto di una si ottiene quello dell'altra; inoltre, in tutta una serie di casi, la capacità di un conduttore isolato o quella di un condensatore può essere calcolata con formule prestabilite quando se ne conoscono le dimensioni.



Esistono moltissimi metodi per determinare o confrontare le capacità. Poiché vogliamo trattare qui tutto ciò che riguarda la descrizione di questi metodi, dobbiamo parlare di fenomeni e strumenti che non abbiamo ancora studiato; ma questi ultimi sono quasi tutti considerati nella fisica elementare. Considereremo separatamente i metodi per il confronto tra due capacità da quelli per la misura del valore assoluto di una data capacità.

I. METODI PER IL CONFRONTO DI DUE CAPACITÀ. - Cavendish (1773) fu il primo a confrontare le capacità di diversi corpi; ma i suoi lavori su questo argomento furono pubblicati solo nel 1879 da Maxwell. Non ci fermeremo all'esame degli ingegnosi metodi di Cavendish e affronteremo immediatamente i nuovi metodi.

1. Consideriamo dapprima il metodo basato sull'uso di un elettrometro, le cui indicazioni possono essere utilizzate per misurare il potenziale a cui questo elettrometro è elevato, nonché l'eventuale conduttore che comunica con esso. Supponiamo di poter trascurare la capacità dell'elettrometro rispetto alle capacità  $q_1$  e  $q_2$  dei corpi A e B; si tratta di determinare il rapporto  $q_1 : q_2$ . Si collega il corpo A con l'elettrometro, e lo si elettrizza fino a quando l'elettrometro indica il potenziale  $V_1$ ; la carica  $\eta$  del corpo A è  $\eta = q_1 V_1$ . Si collega ora il corpo B con A; il loro potenziale comune diviene  $V_2$ . Si ha allora  $\eta = (q_1 + q_2) V_2$ . Queste due espressioni di  $\eta$  danno la relazione  $q_1 V_1 = (q_1 + q_2) V_2$ , da cui si ricava

$$q_2 = \frac{V_1 - V_2}{V_2} q_1 \quad (4.0.54)$$

2. Quando non si può trascurare la capacità  $q_c$  dell'elettrometro C, bisogna dapprima trovare il rapporto  $q_c : q_1$ . Si collega A con C, e li si porta entrambi al potenziale  $V$ . Su A si trova la quantità di elettricità  $\eta = q_1 V$ ; si scarica C e lo si ricollega ad A; C indica allora un potenziale  $V_1$  e si ha  $\eta = (q_1 + q_c) V_1$ ; l'uguaglianza  $q_1 V = (q_1 + q_c) V_1$  dà

$$q_c = \frac{V - V_1}{V_1} q_1 \quad (4.0.55)$$

Si aggiunge ora il corpo B e si ottiene il potenziale  $V_2$ ; si ha  $\eta = (q_1 + q_2 + q_c) V_2$ . Dall'uguaglianza  $(q_1 + q_c) V_1 = (q_1 + q_2 + q_c) V_2$  si deduce

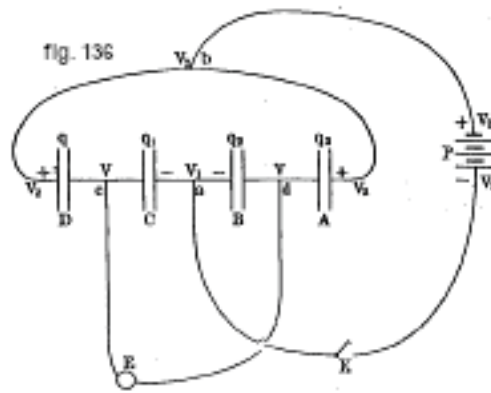
$$q_2 = \frac{V_1 - V_2}{V_2} (q_1 + q_c)$$

Portando nella (34,a) si ottiene

$$q_2 = \frac{V(V_1 - V_2)}{V_1 V_2} q_1 \quad (4.0.56)$$

Angot ha utilizzato un metodo di questo tipo per la misura delle capacità di diversi corpi, nonché per la verifica di varie formule teoriche, ad esempio formule che danno la capacità di sfere a contatto.

3. Per determinare la capacità  $q$  di un condensatore D (fig. 136), si collegano successivamente i quattro condensatori A, B, C, D; le capacità  $q_1, q_2, q_3$  dei primi tre sono note e una di esse può anche essere variata a piacere, ad esempio  $q_3$ . I punti  $a$  e  $b$  sono messi a contatto con i poli di una batteria P, provvista di un interruttore K; i punti  $c$  e  $d$  sono collegati con l'elettrometro E. Si sceglie poi la capacità  $q_3$  in modo che l'elettrometro E non manifesti alcuna elettrizzazione, quando si chiude K. In questo caso,  $c$  e  $d$  sono allo stesso potenziale che noi indicheremo con  $V$ , mentre chiameremo  $V_1$  e  $V_2$  i potenziali ai poli della batteria.



Le cariche dei condensatori A e B, così come quelle dei condensatori C e D devono ovviamente essere uguali tra loro, il che dà le seguenti due uguaglianze:

$$q_3(V_2 - V) = q_2(V_1 - V) \quad q(V_2 - V) = q_1(V_1 - V)$$

si ricava  $q : q_3 = q_1 : q_2$  e quindi

$$q = \frac{q_1 q_3}{q_2} \quad (4.0.57)$$

Le capacità dei quattro condensatori formano una progressione geometrica.

4. Quando un condensatore si scarica attraverso la bobina di un galvanometro, l'ago magnetico riceve un urto e si devia di un certo angolo  $\varphi$ , permettendo il calcolo della quantità di elettricità  $\eta$  che ha attraversato il galvanometro, cioè la carica del condensatore. La velocità angolare iniziale  $V_0$ , rilevata dall'ago nell'urto considerato, viene utilizzata per misurare  $\eta$ . Vedremo in seguito che le leggi del moto dell'ago magnetico sono del tutto analoghe alle leggi del moto di un pendolo. La quantità  $\sin \varphi/2$  serve a sua volta a misurare la velocità iniziale  $V_0$ , e si può porre  $V_0 = C \sin \varphi/2$ , essendo  $C$  un fattore di proporzionalità che, come vedremo, dipende tra l'altro anche dalla costruzione del galvanometro (con o senza smorzamento). Poiché  $\eta$  è proporzionale a  $V_0$ , si può porre  $\eta = A \sin \varphi/2$ , essendo  $A$  un altro fattore di proporzionalità.

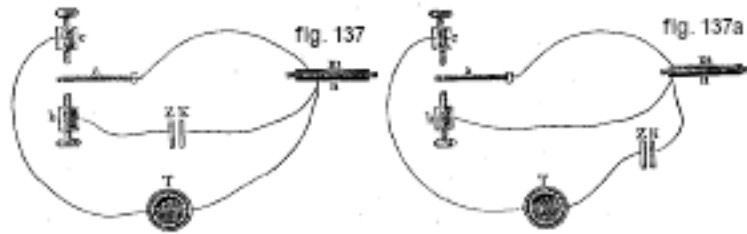
I condensatori da confrontare sono disposti in parallelo e sono portati ad un certo potenziale  $V$ ; le loro cariche sono quindi  $\eta_1 = q_1 V$  e  $\eta_2 = q_2 V$ . Si separano poi i condensatori e si scaricano l'uno dopo l'altro attraverso il galvanometro; indichiamo con  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  gli angoli di deviazione. Si ha  $\eta_1 = A \sin \frac{\varphi_1}{2}$  e  $\eta_2 = A \sin \frac{\varphi_2}{2}$ , pertanto

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{\sin \frac{\varphi_1}{2}}{\sin \frac{\varphi_2}{2}} \quad (4.0.58)$$



De Metz ha trovato con questo metodo che la capacità del corpo umano è approssimativamente pari a 0,0001 microfarad.

5. Siemens ha indicato il seguente metodo. Quando si carica e poi si scarica in modo molto rapido un condensatore e si inserisce nei circuiti di carica e scarica un galvanometro, l'ago subisce una deviazione costante  $\varphi$ , che permette di trovare, con un metodo dipendente dalla costruzione del galvanometro, una misura  $\alpha$  dell'intensità di corrente, cioè della quantità di elettricità  $\eta$  che ogni secondo attraversa il galvanometro. Pertanto, per la bussola delle tangenti,  $\tan \varphi$ , serve per tale misura. Le figure 137 e 187, a mostrano la disposizione dei dispositivi z ZK è la batteria utilizzata per caricare il condensatore mn; T è il galvanometro, b e c sono due viti di contatto, tra le quali oscilla rapidamente la lamella a. C'è un carico, in figura 137, quando a tocca la vite b; c'è una scarica attraverso il galvanometro T, quando a tocca c. Nella figura 187, a, c'è carica attraverso T al contatto di a con c, e scarica al contatto di a con b.



Se  $q$  indica la capacità del condensatore  $mn$ ,  $N$  il numero di cariche o scariche per secondo e  $V$  la forza elettromotrice della batteria, si ha  $\eta = NqV$ ; pertanto  $NqV = C\alpha$ , essendo  $C$  un fattore di proporzionalità. Per un altro condensatore, si ha  $N_1q_1V_1 = C\alpha_1$ ; se ne deduce

$$\frac{q}{q_1} = \frac{N_1V_1\alpha}{NV\alpha_1} \quad (4.0.59)$$

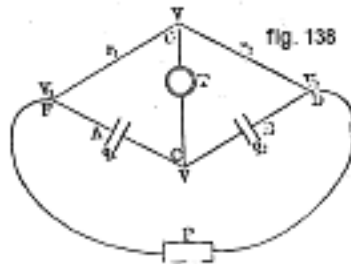
Se  $V_1 = V$ , si ha

$$\frac{q}{q_1} = \frac{N_1\alpha}{N\alpha_1} \quad (4.0.60)$$

Quando  $T$  è un galvanometro delle tangenti, si ha

$$\frac{q}{q_1} = \frac{N_1V_1 \tan \varphi}{NV \tan \varphi_1} \quad (4.0.61)$$

Fleming e Clinton (1903) perfezionarono questo metodo.



6. Parleremo più avanti del ponte di Wheatstone, la cui figura 138 ne è lo schema; P denota una bobina di induzione, A e B due condensatori, le cui capacità sono  $q_1$  e  $q_2$ ;  $r_1$  e  $r_2$  sono le resistenze dei due rami FG e GD; T è un telefono. Variando  $r_1$  e  $r_2$  si riesce ad annullare l'intensità della corrente nel ponte GC, di conseguenza a non sentire alcun suono nel telefono.

In questo caso, i punti G e C sono allo stesso potenziale  $V$ . Siano  $V_1$  e  $V_2$  i potenziali dei punti F e D. Nei rami FG e CD passa una stessa corrente e quindi abbiamo, dalla legge di Ohm

$$\frac{V_1 - V}{r_1} = \frac{V - V_2}{r_2}$$

Siccome non fluisce elettricità per GC, le cariche dei condensatori sono uguali e abbiamo

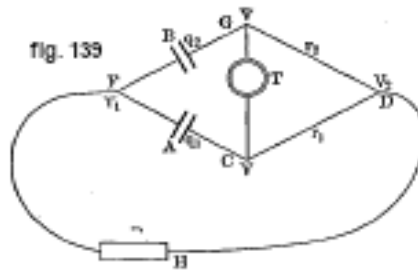
$$q_1 (V_1 - V) = q_2 (V - V_2)$$

Dividendo questa uguaglianza per la precedente, di ottiene  $r_1 q_1 = r_2 q_2$ , cioè

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{r_2}{r_1} \quad (4.0.62)$$

7. Si possono inserire anche i condensatori nei rami FC e FG, e le resistenze nei rami DC e DG (fig. 139); P è una bobina di induzione o una batteria, che può essere aperta o chiusa; durante l'apertura, F e H sono a terra. In assenza di corrente in GC, A e B hanno in ogni istante, durante la carica e la scarica, gli stessi potenziali. Ne segue che nel tempo  $dt$ , le cariche  $d\eta_1 = q_1 d(V - V_1)$  e  $d\eta_2 = q_2 d(V - V_1)$  fluiscono verso i condensatori. D'altra parte, si ha  $d\eta_1 = \frac{V_2 - V}{r_1} dt$  e  $d\eta_2 = \frac{V_2 - V}{r_2} dt$ . Le prime due uguaglianze danno  $d\eta_1 : d\eta_2 = q_1 : q_2$  le ultime due  $d\eta_1 : d\eta_2 = r_2 : r_1$ . Si ricava

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{r_2}{r_1} \quad (4.0.63)$$



8. W. Thomson ha indicato il seguente metodo, applicabile in particolare al caso in cui uno dei condensatori A o B (fig. 140) è un cavo telegrafico. Siano P una batteria, T un galvanometro,  $r_1$  e  $r_2$  due resistenze; i punti  $a$  e  $b$  sono messi a terra; 1, 2, 3, 4 e 5 sono interruttori. Si chiudono dapprima 1, 2 e 3; A e B si caricano e contemporaneamente passa una corrente attraverso  $cd$ . Indichiamo con  $V_1$  e  $V_2$  i potenziali di  $c$  e  $d$ ; poiché il potenziale in  $a$  è nullo, si ha

$$\frac{V_1 - 0}{r_1} = \frac{0 - V_2}{r_2}$$

o

$$\frac{r_1}{r_2} = -\frac{V_1}{V_2} \quad (4.0.64)$$

Le cariche  $\eta_1$  e  $\eta_2$  dei condensatori A e B sono

$$\eta_1 = V_1 q_1 \quad \eta_2 = -V_2 q_2$$

Si apre ora 1, 2 e 3 e si chiude 4, in modo che le cariche di nomi opposti  $\eta_1$  e  $\eta_2$  si annullino parzialmente. Si apre 4 e si chiude 5, e ciò fa sì che il resto della carica su A e B fluisce a terra

attraverso T e  $a$ . Si scelgono  $r_1$  e  $r_2$  in modo che questo resto di carica scompaia, cioè in modo che, nella chiusura di 5, il galvanometro T rimanga fermo. In questo caso si ha  $\eta_1 = \eta_2$

$$\frac{q_1}{q_2} = -\frac{V_2}{V_1}$$

Se si confronta questa uguaglianza alla (39), si ottiene

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{r_2}{r_1} \quad (4.0.65)$$

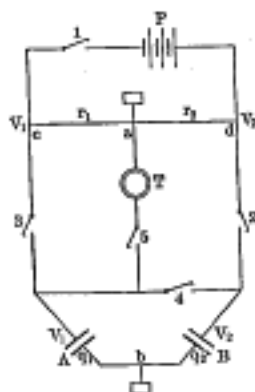


fig. 140

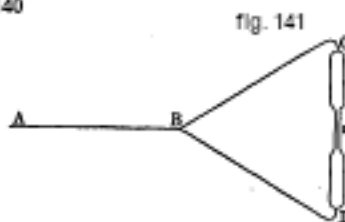


fig. 141

9. Borgmann ha fornito un metodo per il confronto di capacità molto piccole. Sia AB un filo che parte da uno dei poli di una bobina di induzione (fig. 140), BC e BD due resistenze uguali molto grandi, CD un tubo Geissler. Quando la bobina è in funzione, un nodo appare in  $a$ . Se si aggiungono in C e D eventuali conduttori di diversa capacità  $q_1$  e  $q_2$ , il nodo si sposta nel tubo; mantiene la sua posizione quando  $q_1 = q_2$ .

Quando si dispone di un corpo, la cui capacità  $q_1$  può variare a piacere, pur rimanendo costantemente nota, si può misurare la capacità  $q_2$  di un altro corpo. Questo metodo consente di misurare capacità molto piccole, ad esempio pochi el.-st. C.G.S. Afanacheff e Lopoukhine hanno misurato con questo metodo la capacità di un tubo Geissler luminoso e l'influenza del grado di rarefazione del tubo, del campo magnetico e di altre circostanze su questa capacità. Il massimo di capacità corrisponde ad una pressione del gas di circa 1 mm.

10. Altri metodi di confronto delle capacità sono stati proposti da Schiller, Gaugain, Cohn e Arons, J.-J. Thomson e altri.



fig. 142

## II. METODI DI MISURAZIONE ASSOLUTA DELLE CAPACITÀ.

1. Quando si ha un particolare corpo o condensatore, la cui capacità  $q$  può essere calcolata, si trova la grandezza assoluta di qualsiasi altra capacità, confrontandola con  $q$  mediante uno dei

metodi considerati sopra. Si può, ad esempio, scegliere per  $q$  la capacità di una sfera o quella di un condensatore sferico.

2. I metodi 3 e 4, che abbiamo esposto sopra, possono essere usati per determinare  $q$ , quando il potenziale  $V$  così come i fattori di proporzionalità  $A$  e  $C$  sono noti per il galvanometro utilizzato.

3. Il condensatore  $A$  (fig. 142) è caricato fino ad un certo potenziale  $V_0$  che si misura con l'elettrometro  $E$ ; il condensatore poi si scarica attraverso una grande resistenza  $R$ . Dopo  $t$  secondi, si apre il circuito di scarica e si misura il nuovo potenziale  $V_1$ . Sia  $V$  il potenziale variabile del condensatore,  $\eta = qV$  la sua carica. Nel tempo  $dt$ , la carica diminuisce di  $d\eta = qdV$ . L'intensità della corrente è uguale a  $\frac{V-0}{R} = \frac{V}{R}$ , e quindi  $d\eta = \frac{V}{R}dt$ . L'uguaglianza  $qdV = \frac{V}{R}dt$  dà

$$\frac{dV}{V} = \frac{dt}{qR}$$

Integrando rispetto a  $V$  da  $V_0$  a  $V_1$ , e rispetto a  $t$  da 0 a  $t$ , si ottiene

$$q = \frac{t}{R \ln \frac{V_0}{V_1}} \quad (4.0.66)$$

4. si carica il condensatore ( $q$ ) mediante una batteria, che lo porta al potenziale  $V$  e gli invia la carica  $\eta = qV$  attraverso un galvanometro, il quale mostra la deviazione  $\alpha$ . Si ha in questo caso  $\eta = qV = A \sin \frac{\alpha}{2}$  dove si può considerare  $A$  come noto per un dato galvanometro. Si chiude poi la stessa batteria per mezzo di una grande resistenza  $R$ , inserendo nel circuito lo stesso galvanometro. L'intensità della corrente è uguale a  $V/R$  se  $\beta$  è la deviazione del galvanometro, si può porre  $\frac{V}{R} = B\beta$ , dove anche  $B$  è noto. Si ha

$$V = \frac{A}{q} \sin \frac{\alpha}{2} = BR\beta$$

e se ne deduce

$$q = \frac{A \sin \frac{\alpha}{2}}{BR\beta} \quad (4.0.67)$$

I metodi per la misura dei coefficienti  $A$  e  $B$  saranno considerati nel capitolo sulla misura delle correnti istantanee e permanenti.

Wien, Maxwell, Waghorn, Klemencic, Rosa e Grover (1905), Boulgakow e Smirnow (1906) e altri ancora hanno indicato metodi per la misura assoluta delle capacità. Quello di Maxwell è da menzionare in modo speciale; è stato impiegato da molti fisici e in particolare, in tempi recenti, presso il *Physikalisch-technische Reichsanstalt* a Charlottenburg. Diesselhorst (1906) ha studiato in dettaglio questo metodo.

## 5. Misura delle costanti dielettriche dei corpi solidi

Abbiamo precedentemente dato diverse definizioni della costante dielettrica  $K$ , che abbiamo chiamato anche potere induttivo o permeabilità elettrica dei dielettrici. Tra queste definizioni ricordiamo le seguenti. Sia  $q_0$  la capacità di un condensatore in un mezzo dove  $K = 1$  (aria o vuoto),  $q$  la capacità dello stesso condensatore quando l'intero spazio tra le armature è riempito da un dielettrico; si ha, vedi (1-54)

$$K = \frac{q}{q_0} \quad (4.0.68)$$

Sia, in un mezzo in cui  $K = 1$ ,  $f_0(\eta)$  la forza dell'azione reciproca tra due conduttori aventi cariche determinate invariabili  $\eta_1$  e  $\eta_2$  e  $f_K(\eta)$  la stessa forza in un dielettrico; si ha, vedere (1-11),

$$K = \frac{f_0(\eta)}{f_K(\eta)} \quad (4.0.69)$$

Infine, indichiamo la forza reciproca tra due conduttori portati a potenziali determinati invariabili  $V_1$  e  $V_2$  con  $f_0(V)$  per  $K = 1$  e con  $f_K(V)$  per il dielettrico; si ha, vedere (1-12)

$$K = \frac{f_K(V)}{f_0(V)} \quad (4.0.70)$$

Abbiamo inoltre già ricordato più volte la formula

$$K = n^2$$

in cui  $n$  denota l'indice di rifrazione del dielettrico, per radiazioni la cui lunghezza d'onda è molto grande.

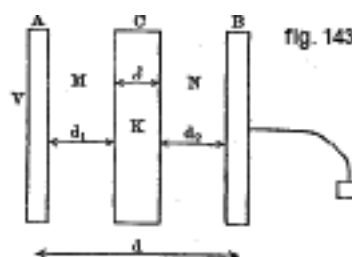
Esistono moltissimi metodi diversi per determinare la quantità  $K$ . La maggior parte (non tutti, tuttavia) si basano sulle formule appena menzionate. Alcuni metodi sono applicabili sia a dielettrici solidi che liquidi, altri solo ai dielettrici liquidi. Considereremo dapprima i metodi per determinare  $K$  per i dielettrici solidi isotropi.

Ulteriori dettagli si possono trovare nell'ottimo lavoro di Kossonogoff, *Sui dielettrici* (in russo), Kiev, 1901.

1. MISURE DI  $K$  FATTE PRIMA DEL 1873. Le prime misure del potere induttivo sono state effettuate da Cavendish intorno al 1773, per vetro, colofonia, cera e gommalacca; sono state pubblicate da Maxwell nel 1879. Il classico lavoro di Faraday sulle proprietà dei dielettrici è apparso nel 1838; è contenuto nella prima serie del suo *Experimental Researches*, §§ 1189-1294. Il metodo di ricerca di Faraday mediante due condensatori sferici è stato esposto in precedenza. Harris (1842), Matteucci (1849) e Belli (1858) si sono occupati poi di misurare la grandezza  $K$ . Nel 1857 sono state pubblicate le ricerche di W. Siemens, effettuate secondo il metodo di confronto delle capacità dei condensatori già esposto. L'intervallo tra le armature di un condensatore piano  $mn$  (figg. 137 e 137,a) è stato riempito con aria, zolfo liquido o solido e altri dielettrici; il rapporto delle capacità ha restituito la grandezza  $K$  dalla formula (42).

Tutti questi lavori contengono una fonte di errore derivante dal fatto che, toccando il dielettrico intermedio le superfici metalliche del condensatore, si formano cariche residue; la capacità apparente deve quindi dipendere dalla durata dell'elettrizzazione. La stessa causa di errore si presenta anche nelle ricerche di Bossetti, nonché in quelle di Gibson e Barclay (1873), che misurarono la capacità di un condensatore cilindrico, prima riempito d'aria e poi di paraffina, per mezzo del condensatore variabile di W. Thomson. Felici (1871) ha misurato, mediante la bilancia di torsione, l'induzione prodotta su una piastra metallica A da una sfera elettrizzata B, quando un dielettrico di forma cubica è posto tra A e B.

2. PRIMO METODO DI BOLTZMANN (1872-1874). Boltzmann è stato il primo ad apportare due miglioramenti essenziali ai metodi di misura di  $K$ . In primo luogo, ha tenuto conto con la massima cura della capacità dell'elettrometro a quadranti da lui utilizzato; in secondo luogo ha introdotto il dielettrico tra le armature del condensatore, sotto forma di uno strato di spessore  $\delta$  minore della distanza  $d$  tra le armature metalliche, in modo che queste ultime non fossero toccate dal dielettrico. La capacità  $q$  di un tale condensatore si determina facilmente. Siano A e B (fig. 143) le armature del condensatore, C lo strato di dielettrico,  $d_1$  e  $d_2$  gli spessori degli strati d'aria, di modo che  $d = d_1 + d_2 + \delta$ .



Supponendo le dimensioni delle armature A, B, C molto grandi rispetto a  $d$ , si può ammettere che, tranne nella regione vicina alle estremità delle armature, i tubi di induzione  $B = KF$ , dove  $F$  rappresenta l'intensità del campo, sono tubi rettilinei, di sezione costante, normali alle superfici delle armature e del dielettrico. Si vede pertanto che se  $F$  è l'intensità del campo negli spazi M e N, questa è uguale a  $F : K$  all'interno del dielettrico. Ne segue che il lavoro di trasporto dell'unità di quantità di elettricità da A in B, o la differenza di potenziale  $V$  tra le armature A e B è

$$V = Fd_1 + \frac{F}{K}\delta + Fd_2 = F(d_1 + d_2) + \frac{F}{K}\delta = F(d - \delta) + \frac{F}{K}\delta = F\left(d - \delta + \frac{\delta}{K}\right)$$

Sia  $\eta$  la carica del condensatore sulla superficie  $S$ ,  $k$  la densità di questa carica; si ha  $\eta = kS$ ; ma  $F = 4\pi k$ , quindi  $\eta = \frac{FS}{4\pi}$ ; se ne deduce  $F = \frac{4\pi\eta}{S}$  e

$$V = \frac{4\pi\eta}{S}\left(d - \delta + \frac{\delta}{K}\right) \quad (4.0.71)$$

Si ha quindi per la capacità cercata

$$q = \frac{\eta}{V} = \frac{S}{4\pi\left(d - \delta + \frac{\delta}{K}\right)} \quad (4.0.72)$$

Per  $K = 1$ , si ritrova la formula del condensatore piano contenente solo aria

$$q_0 = \frac{S}{4\pi d} \quad (4.0.73)$$

Vediamo che uno strato dielettrico di spessore  $\delta$  sostituisce in qualche modo uno strato d'aria di spessore  $\delta/k$ . L'introduzione di un tale strato equivale ad avvicinare le armature A e B oltre la quantità

$$d' = d - \left(d - \delta + \frac{\delta}{K}\right) = \delta\left(1 - \frac{1}{K}\right) \quad (4.0.74)$$

Boltzmann ha proceduto come segue. Caricò, mediante una batteria di elementi Daniell, un condensatore piano, di cui una delle armature poteva essere spostata parallelamente a se stessa, e misurò le capacità  $q$  e  $q_0$  con un elettrometro a quadranti. Una misura di  $K$  con le formule (46) e (46,a) non è tuttavia conveniente, poiché una misura accurata della grandezza  $d$  è difficile. È per questo che Boltzmann spostò una delle armature del condensatore fino alla nuova distanza  $d_1$  e misurò le capacità

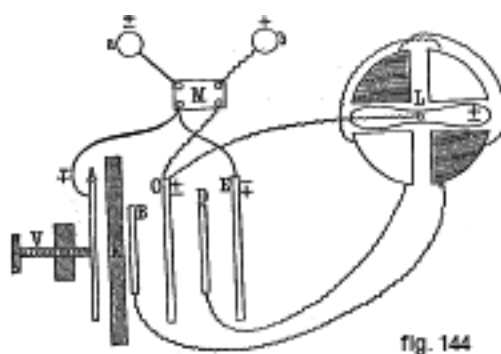
$$q' = \frac{S}{4\pi\left(d_1 - \delta + \frac{\delta}{K}\right)} \quad (4.0.75)$$

$$q'_0 = \frac{S}{4\pi d_1} \quad (4.0.76)$$

Dalle quattro formule (46), (46b,c,d), si deduce per  $K$  un'espressione, nella quale tra la differenza  $d_1 - d$ , che si può misurare molto precisamente. Se si indicano con  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  i valori inversi di  $q_0, q'_0, q, q'$ , si ottengono per  $K$  le due espressioni

$$K = \frac{\delta}{\frac{\lambda_4 - \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}(d_1 - d) + \delta} = \frac{\delta}{\frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}(d_1 - d) + \delta} \quad (4.0.77)$$

Ben dopo i lavori di Boltzmann, furono pubblicati quelli di Gordon (1879) e di Hopkinson (1881), che si sono serviti di metodi analoghi a quello appena descritto. Una particolarità del metodo di Gordon consiste nel fatto di sottoporre il condensatore a elettrizzazioni molto brevi e variabili, per mezzo di una bobina di induzione. Il suo strumento è rappresentato schematicamente dalla figura 144.



Cinque piastre metalliche A, B, C, D, E sono disposte parallelamente. La prima può essere spostata parallelamente a se stessa; l'entità  $d'$  di questo spostamento è misurata in modo molto preciso. Uno dei poli  $a$  della bobina di induzione è connesso con A ed E, l'altro polo  $b$  con C e con l'ago dell'elettrometro a quadrante L, le cui due coppie di quadranti sono in comunicazione con B e D. Quando c'è perfetta simmetria dello strumento, le capacità dei due condensatori AB e DE sono uguali, e l'ago dell'elettrometro rimane fermo; ma, non appena si interpone tra A e B il dielettrico  $K$ , il cui spessore è  $\delta$ , la capacità del condensatore AB aumenta e l'ago in L è deviato. Spostando A in direzione di B, per la quantità, vedere (46,b),

$$d' = \delta \left( 1 - \frac{1}{K} \right)$$

che può essere misurata esattamente, si ristabilisce l'equilibrio. L'ultima formula dà

$$K = \frac{\delta}{\delta - d'} \quad (4.0.78)$$

Diverse varianti dei metodi che abbiamo appena considerato sono state impiegate da Hopkinson, Wüllner, Elsas, Stankiewitch, Winkelmann, Donle, Schtschégliaieff, Blondlot (1891), Lecher (1891), Hasenhörl, Negreano, Palaz, Werrner e altri ancora.

Tutti i fisici di cui sopra hanno determinato  $K$  cercando in che modo la capacità di un condensatore dipende dallo strato dielettrico che contiene. Hopkinson ha richiamato l'attenzione sui difetti del metodo di Gordon; ha effettuato le sue misure finali con un metodo, che si avvicina di più a quello di Gibson e Barclay.

Winkelmann, invece di cinque piastre, ne ha prese solo tre, A, B, C (fig. 145). La piastra centrale C è collegata con uno dei poli  $a$  di una bobina di induzione, l'altra  $b$  è a terra. Le piastre A e B sono collegate con un telefono T, nel quale non si percepisce alcun suono quando vi è perfetta simmetria del dispositivo. Se si introduce tra A e C una piastra dielettrica, di spessore  $\delta$ , la simmetria viene distrutta e il telefono produce un suono, che scompare nuovamente, quando si allontana B da C di una certa quantità  $d'$ . Il valore cercato di  $K$  è determinato dalla formula (47).



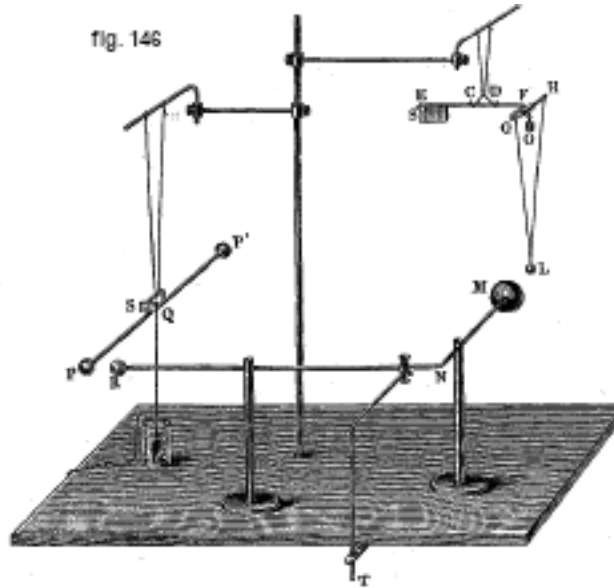
Donle e Lecher, invece di una sola piastra C, ne prese due; Donle ha sostituito il telefono con un elettrodinamometro, Lecher con un elettrometro. Schtschégliaieff, così come Hasenhörl, hanno usato anche il metodo di Winkelmann; ma questo metodo, come hanno mostrato Cohn (1892) e A. Sokoloff, i cui difetti vietano risultati soddisfacenti. È lo stesso con i metodi di Palaz,

Elsas, Werner e quelli di alcuni altri fisici, che sono analoghi al metodo di Winkelmann. Si troverà uno studio critico dettagliato di questi lavori nell'opera prima ricordata di Kossonogoff.

3. SECONDO METODO DI BOLTZMANN (1874). Abbiamo cercato la forza  $f$  che agisce su una sfera dielettrica posta in un campo elettrico uniforme, e abbiamo stabilito la formula (80)

$$f = \frac{K-1}{K+2} f_0 \quad (4.0.79)$$

$f_0$  designa la forza che si eserciterebbe sulla sfera, se fosse formata da una sostanza conduttrice. Boltzmann ha misurato il rapporto  $f : f_0$ , ciò che gli ha permesso di calcolare il valore di  $K$ . In prossimità di una sfera metallica elettrizzata M (fig. 146), c'è una sferetta L del dielettrico da studiare; questa sferetta è sospesa a una delle estremità della bilancia di torsione EF.



Lo specchietto  $S'$  serve a misurare la rotazione di EF, e di conseguenza anche l'entità dell'attrazione  $f$  tra M e L; O è un contrappeso. Sostituendo la sfera piccola con un'altra, ricoperta di carta stagnola e delle stesse dimensioni di L, si può misurare  $f_0$  e quindi trovare  $K$ . L'attrazione tra le sfere R e P serve a misurare la carica M. Si può rendere la durata di questa carica molto breve o mantenerla costante per un certo tempo. Romich e Nowak, poi Romich e Faidua, usarono lo stesso metodo. I metodi di Trouton e Lilly, Rosa, ecc., si basano anch'essi sulla misura delle forze ponderomotrici agenti sui dielettrici.

4. IL METODO DI LEFÈVRE. Questo metodo si basa sulla misura dell'azione reciproca di conduttori elettrizzati, tra i quali è presente uno strato dielettrico. Sia  $d$  la distanza tra le armature piane del condensatore,  $\delta$  lo spessore dello strato dielettrico posto tra di esse (vedi fig. 143). La formula (45,a), dà

$$V = 4\pi k \left( d - \delta + \frac{\delta}{K} \right)$$

dove  $k = \eta : S$ ;  $S$  indica la densità della carica. La forza  $P$  che agisce sull'unità d'area dell'armatura, è espressa dalla formula (1-25a)

$$P = 2\pi k^2$$

essendo questa superficie a contatto con l'aria. Introducendo il valore di  $k$ , viene

$$P = \frac{V^2}{8\pi \left( d - \delta + \frac{\delta}{K} \right)^2} \quad (4.0.80)$$



In assenza di dielettrico ( $K = 1$ ), si ottiene

$$P_0 = \frac{V^2}{8\pi d^2}$$

Se ne deduce

$$\frac{P}{P_0} = \frac{d^2}{\left(d - \delta + \frac{\delta}{K}\right)^2} \quad (4.0.81)$$

Lefèvre ha misurato l'attrazione reciproca di due lastre circolari orizzontali, prima in assenza del dielettrico, poi dopo interposizione di questo dielettrico ( $K, \delta$ ) tra le lastre. Ha trovato in questo modo  $P : P_0$  e poi il valore di  $K$  con la formula (49).

5. IL METODO DI SCHILLER. Nel 1874 apparve un'opera del professor Schiller, in cui la grandezza  $K$  veniva, per la prima volta, determinata mediante cariche la cui durata era inferiore a  $1/10000$  di secondi. Ha fatto uso di oscillazioni elettriche, che si verificano nell'avvolgimento secondario di una bobina di induzione, quando la corrente viene interrotta nel circuito primario. Oscillazioni di questa natura sono già state menzionate nel volume II; su questo torneremo più avanti. Ammetteremo per il momento, come dato di fatto, che un'estremità del circuito secondario essendo messo a terra, all'altra estremità compaiono una serie di elettrizzazioni alternate positive e negative. Il periodo  $T$  delle vibrazioni dipende, tra l'altro, dalla capacità  $q$  del circuito secondario e, in certe condizioni, si può assumere che  $T^2$  è proporzionale a  $q$ . Sia  $q_0$  la capacità del circuito secondario, quando non vi si aggiunge nessun'altra capacità estranea, e  $T_0$  è la durata delle vibrazioni. Se poi si collega l'estremità del circuito secondario con una delle armature di un condensatore piano ad aria di capacità  $q_1$ , la durata della vibrazione diventa  $T_1$  per esempio. Se si introduce un dielettrico, la capacità diviene  $q_2 = Kq_1$  e la durata della vibrazione assume un certo valore  $T_2$ . Si può porre  $q_0 = CT_0^2$ ,  $q_0 + q_1 = CT_2^2$ , essendo  $C$  un fattore di proporzionalità. Si deduce da ciò

$$K = \frac{q_2}{q_1} = \frac{T_2^2 - T_0^2}{T_1^2 - T_0^2} \quad (4.0.82)$$

Non considereremo qui il metodo ingegnoso con cui è stata determinata la durata della vibrazione  $T$ . Schiller ha inoltre determinato  $K$  con un metodo analogo a quello di Siemens; la durata delle elettrizzazioni era di circa 0,02 secondi. Parleremo un poco dopo dell'interessante risultato che è stato così trovato.

6. DETERMINAZIONE DI  $K$  MEDIANTE OSCILLAZIONI HERTZIANE. Le radiazioni elettriche scoperte da Hertz, sulle quali torneremo più dettagliatamente in seguito, hanno svolto a partire dal 1889 un ruolo sempre più importante nella determinazione della grandezza  $K$ . Oggi sono impiegate quasi esclusivamente nelle ricerche riguardanti questo argomento. Ricorderemo che la scintilla di scarica è generalmente accompagnata da una scarica oscillante, alquanto secondaria, il cui periodo  $T$  può essere tra l'altro considerato proporzionale a  $\sqrt{q}$ , essendo  $q$  la capacità dei corpi A e B tra i quali la scintilla lampeggia. Questa scarica oscillante costituisce la sorgente di una radiazione elettrica, che si propaga lungo i conduttori, fili ad esempio, collegati ai corpi A e B. La lunghezza d'onda  $\lambda$  di questa radiazione è proporzionale a  $T$ , per cui si può porre

$$\lambda = C\sqrt{q} \quad (4.0.83)$$

essendo  $C$  un fattore di proporzionalità. Sull'applicazione della formula (51) si basa un primo gruppo di metodi per la determinazione della capacità  $q$  e conseguentemente anche dei valori di  $K$ .

Un altro gruppo è basato sulla formula  $K = n^2$ , dove  $n$  è l'indice di rifrazione delle radiazioni di lunghezza d'onda molto lunga  $\lambda$ , più precisamente di radiazioni per le quali  $\lambda = \infty$ . Ammettiamo che, per le radiazioni utilizzate in pratica, nelle quali  $\lambda$  è uguale ad esempio a qualche centimetro

(per la radiazione gialla, si ha  $\lambda = 0,0006 \text{ mm}$ ), si può applicare la formula  $K = n^2$ , cioè si può trascurare la dispersione delle radiazioni elettriche tra questo valore di  $\lambda$  e  $\lambda = \infty$  e che il mezzo non ha una dispersione eccezionalmente anomala proprio in questo dominio di  $\lambda$ . Siccome  $n$  è inversamente proporzionale alla velocità di propagazione delle radiazioni e che tale velocità è proporzionale anche alla lunghezza d'onda  $\lambda$ ,  $K$  è inversamente proporzionale a  $\lambda^2$  e si può porre

$$K = \frac{C}{\lambda^2} \quad (4.0.84)$$

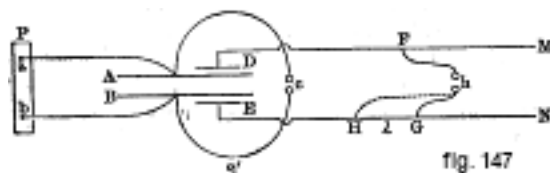
È molto importante notare che, per alcune determinate forme di conduttori tra i quali si produce una scarica oscillante, la durata della vibrazione  $T$  può essere calcolata in anticipo mediante formule su cui si tornerà più avanti (a proposito dell'autoinduzione). Sia  $V_0$  la velocità di propagazione delle radiazioni elettriche nell'aria; tale quantità è nota ed è uguale a  $3,10^{10} \text{ cm/s}$ . La velocità  $V$  nel dielettrico è uguale a  $\lambda : T$ ; si ha inoltre  $n = V_0 : V$ , di conseguenza

$$K = n^2 = V_0^2 : V^2$$

cioè

$$K = \frac{V_0^2 T^2}{\lambda^2} \quad (4.0.85)$$

J. J. Thomson (1889) ha per primo determinato  $K$  mediante oscillazioni hertziane. Un condensatore ad aria AB (fig. 147) è collegato con i poli  $a$  e  $b$  di una bobina di induzione  $P$  e con le sferette  $c$ , tra le quali si manifesta la scintilla. Oscillazioni elettriche si producono allora nel sistema ABC. Nelle vicinanze di A e di B si trovano le armature D ed E, da cui partono lungo i fili DM e DN. Le oscillazioni in A e B producono oscillazioni identiche in D ed E, che si propagano lungo i fili M e N. Per misurare la lunghezza d'onda, J.J. Thomson ha collegato una delle sferette  $h$  a un punto qualsiasi F del filo M e ha cercato, facendo scorrere, lungo N, il filo partente dall'altra sfera  $h$ , due posizioni hG e hH tali che la scarica in  $h$  scompaia. In questo caso le fasi delle vibrazioni nei punti F e G sono uguali tra loro; quindi  $GH = \lambda$ . La lunghezza d'onda  $\lambda$  è quindi nota.



La capacità  $q$  del condensatore ad aria AB è calcolata dalle sue dimensioni. La capacità  $q + q'$  dell'intero sistema ABC è determinata direttamente; è quindi nota anche la capacità  $q'$  del sistema di fili che uniscono il condensatore alle sfere  $c$ . Sia  $\lambda$  la lunghezza d'onda, nel caso in cui tra A e B vi sia aria,  $\lambda_1$  la lunghezza d'onda quando il dielettrico è posto tra A e B. Nel primo caso la capacità del sistema ABC è pari a  $q + q'$ , nel secondo uguale a  $Kq + q'$ . La formula (51) dà

$$\frac{\lambda}{\lambda_1} = \sqrt{\frac{q + q'}{Kq + q'}}$$

da cui si deduce il valore di  $K$ . La durata delle oscillazioni era di circa  $25 \cdot 10^{-6} \text{ s}$  negli esperimenti di J. J. Thomson, che studiò lo zolfo, il vetro e l'ebanite. Trovò che si ottengono per  $K$ , con oscillazioni rapide e quindi cariche di brevissima durata, valori minori che con oscillazioni lente; per il vetro, ha ottenuto  $K = 2,7$ .

Poco dopo, anche Lecher ha utilizzato le oscillazioni hertziane per determinare la quantità  $K$ . La scintilla di scarica di una macchina a influenza di Holtz si produce in F (fig. 148); le

oscillazioni avvengono nel sistema BFB'. Oscillazioni identiche vengono indotte nelle piastre A e A' e si propagano nei fili st e s't' collegati al condensatore C. Se si pone trasversalmente su questi fili un tubo di vetro saldato gg contenente azoto rarefatto (tube di Lecher), esso diventa luminoso. La luce scompare quando i fili st e s't' vengono messi in comunicazione da un filo *a* formando un ponte. Si può però trovare una posizione particolare del ponte *a*, per cui il tubo di Lecher ridiventa luminoso; in questo caso i sistemi Asas'A' e Ctat'C sono in risonanza, cosicché una vibrazione nel primo sistema ne produce una nel secondo. La posizione corrispondente del ponte *a* dipende dalla capacità del condensatore C.

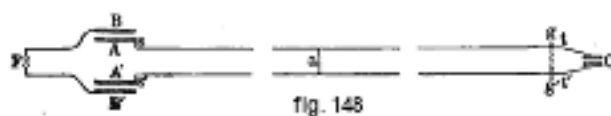


fig. 148

Lecher ha posizionato un dielettrico in C, ha cercato la nuova posizione del ponte e, dopo aver rimosso il dielettrico, ha spostato le armature del condensatore C di una quantità tale che il tubo gg si illumina per la stessa posizione del ponte. La capacità del condensatore C diventa quindi quella che era originariamente e *K* si determina facilmente dalla formula (47). Lecher ha trovato che, quando la durata dell'oscillazione diminuisce, si ottengono per *K* valori maggiori, risultato esattamente contrario a quello di J. J. Thomson. Per il vetro, Lecher ha ottenuto il valore  $K = 7,3$ .

Un terzo lavoro è dovuto a Blondlot. La scintilla di scarica avviene tra le sferette *a* e *b* (fig. 149)); B, A e CD e FE sono piastre metalliche, DH e FH due fili; in H sono rappresentate due punte di carbone molto vicine tra loro. Le oscillazioni producono nei conduttori AbaB due sistemi di oscillazioni identiche in CDH ed EFH. Quando c'è simmetria perfetta, in H non si produce alcuna scintilla. Posto il dielettrico allo studio (vetro) tra A e CD, Blondlot ha scelto una lastra di zolfo di spessore tale che la scintilla si spegne nuovamente in H, appena questa lastra viene introdotta tra A e FE. In questo caso, le capacità dei condensatori ACD e AFE sono uguali tra loro. Prendendo per lo zolfo  $K = 2,6$ , Blondlot ha ottenuto per il vetro il valore  $K = 2,8$ , che concorda con quello trovato da J. J. Thomson. In particolare Drude ha perfezionato il metodo delle onde elettriche.

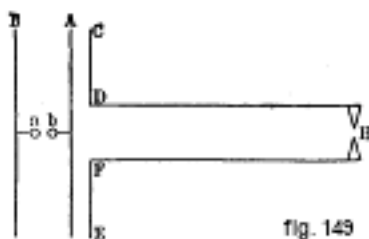


fig. 149

Se si ammette che la formula  $K = n^2$  è applicabile ai dielettrici scelti e alle radiazioni elettriche utilizzate, si può dire che tutti i fisici che hanno determinato gli indici di rifrazione relativi alle radiazioni elettriche, hanno contemporaneamente determinato il potere induttore dei relativi dielettrici. Limitandoci ai dielettrici solidi, diremo che Hertz ha trovato per la resina il valore  $n = 1,69$ , utilizzando un prisma di questa sostanza; inoltre Zeunder (1894) ottenuto per l'asfalto  $n = 1,93$ . Lébédéff ha utilizzato onde la cui lunghezza era di  $6\text{ mm}$  e ha trovato con un prisma di ebanite il valore  $n = 1,6$ . Il valore di  $n$  è stato nuovamente determinato per i dielettrici solidi da Mack, Lampa, Righi, Wiedeburg, Grätz e Fomm, Gutton, Ferry, ecc.; Gutton (1900) ha ottenuto per il ghiaccio il valore  $n = 1,76$  e conseguentemente  $K = n^2 = 3,1$ . Ferry ha determinato *K* per i corpi solidi, preparando una miscela di due liquidi tale che la capacità di

un condensatore, che conteneva questa miscela, non cambiava quando il corpo studiato vi era immerso; la grandezza  $K$  è stata determinata indipendentemente per la miscela.

7. POTERE INDUTTORE DEI CORPI ANISOTROPI. - Il potere induttore dei corpi anisotropi è stato determinato da Boltzmann (1874), Root, Bomich e Nowak, Braun, Curie, Borel, Lébédéff, Righi, Mack, Fellingner, W. Schmidt e altri ancora. Nei corpi anisotropi, il potere induttore varia con la direzione. Ciò risulta già dagli esperimenti di Knoblauch (1851), il quale ha osservato che un cilindro di vetro compresso trasversalmente e sospeso verticalmente si rivolge, dalla parte non compressa, verso un pezzo di cera strofinata. Nei cristalli la distribuzione dei valori di  $K$  corrisponde a quella dei valori dell'indice di rifrazione nelle diverse direzioni.

Boltzmann (1874) per primo ha misurato  $K$  per i cristalli ortorombici di zolfo con il metodo 3. Ha trovato per le tre direzioni principali

$$\begin{array}{lll} K = 4,773 & 3,970 & 3,811 \\ n^2 = 4,596 & 3,886 & 3,591 \end{array}$$

I valori precedenti degli indici di rifrazione sono calcolati dalla formula di Cauchy per  $\lambda = \infty$ ; abbiamo visto, nel volume II, che questa formula è inammissibile. Root ha misurato la durata delle oscillazioni di torsione di piastre e sfere con posizioni diverse, in un campo elettrico in cui la direzione cambiava fino a 6000 volte al secondo. Curie ha studiato cristalli uniassiali di berillo, longarone calcareo, tormalina e quarzo, e cristalli biassiali di topazio e gesso; ha separato, con mezzi particolari, la conducibilità dalla polarizzazione. Lébédéff ha determinato gli indici di rifrazione  $n_1$  e  $n_2$ , per la radiazione elettrica ( $\lambda = 6\text{ mm}$ ), in due prismi ricavati da cristalli di zolfo, il cui bordo rifrangente era per l'uno parallelo all'asse maggiore del dielettrico, per l'altro parallelo all'asse minore; ha trovato  $n_1 = 2,25$  e  $n_2 = 2,00$ . Righi e Mack hanno studiato il legno e hanno scoperto che la velocità di propagazione della radiazione elettrica non è la stessa nella direzione delle fibre e normalmente ad esse. Fellingner (1902) ha determinato i valori di  $K$  relativi a diversi cristalli uniassiali e biassiali; è notevole che, per la barite biassiale, il valore massimo di  $K$  si ottiene nella direzione normale agli assi ottici e non, come ci si potrebbe aspettare, nella direzione di una delle bisettrici degli angoli formati dagli assi; anche la differenza è molto grande: lungo le bisettrici si ha  $K = 6,9736$  e  $K = 6,9956$ , e lungo la normale  $K = 10,0877$ . W. Schmidt (1902) ha ottenuto lo stesso risultato nella barite e nella celestina. Gratz (1904) spiega questo fenomeno con una dispersione anomala di radiazioni di grande lunghezza d'onda; abbiamo già indicato nel Volume II un fenomeno analogo, quello in cui un piano degli assi è sostituito da un altro ad esso perpendicolare, e ciò nel dominio delle radiazioni visibili.

## 6. Misura delle costanti dielettriche di corpi allo stato liquido o allo stato gassoso

1. METODI UTILIZZATI PER LO STATO SOLIDO. - Alcuni dei metodi considerati nel paragrafo precedente sono applicabili ai corpi liquidi. Citiamo alcuni esempi. Ziloff (1876) e G. Weber hanno usato il metodo Siemens. Negreano ha usato il metodo di Gordon; le armature (fig. 144) erano disposte orizzontalmente. Hopkinson, Winkelmann, Donle, Schtschégliaieff, Lefèvre, i cui lavori sono già stati citati, hanno determinato il valore di  $K$  non solo per isolanti solidi, ma anche per quelli liquidi. Linde ha determinato  $K$ , con il metodo di Schiller, per i gas rarefatti.

2. METODO DI ZILOFF - Questo metodo si basa sulla formula (44), alla quale può essere data la seguente forma più semplice:

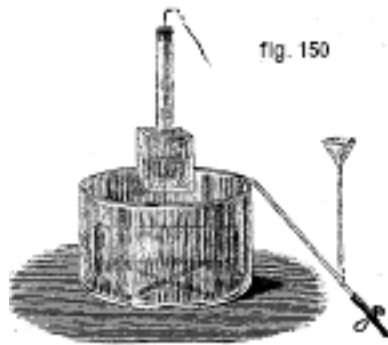
$$K = \frac{f}{f_0} \quad (4.0.86)$$

$f$  è la forza dell'azione reciproca di due conduttori elettrizzati fino a una differenza di potenziale  $V$  e circondati dal dielettrico;  $f_0$  è la stessa forza nell'aria. Ziloff (1870) ha determinato  $K$

applicando la formula (52). Ha costruito un semplicissimo elettrometro, costituito da un vaso di vetro (fig. 150), sulla cui parete interna sono incollati quattro fogli di stagno; questi sono collegati a croce da strisce di stagno isolate tra loro e incollate sul fondo del vaso. La parte mobile del dispositivo è un filo di platino orizzontale sospeso, alle cui estremità sono presenti lamine curve di platino. Una delle coppie di lamine è collegata a terra, l'altra comunica con uno dei poli di una grande batteria (Zn, Cu, acqua), l'altro polo è messo a terra. I poli possono cambiare ruolo; si assume che, in tutti gli esperimenti, il potenziale di una coppia di bande abbia lo stesso valore  $V$ . Si misurano gli angoli di deviazione  $\varphi$  e  $\varphi_0$  della parte mobile, quando il recipiente è pieno d'aria e quando contiene il liquido da studiare. Conoscendo  $\varphi$  e  $\varphi_0$  si può trovare il rapporto  $f : f_0$  e di conseguenza anche  $K$ .

Variazioni di questo metodo sono state impiegate da Tomaszewski, Cohn e Arons, Téreschine, Perot, Heerwagen, Rosa, Landolt e Jahn, Francke, Smale e altri.

Cohn e Arons (1888) hanno sostituito la pila a corrente continua con una bobina ad induzione e misurato, mediante uno speciale elettrometro a quadranti, i potenziali che possono essere variati da un esperimento all'altro. Questi due scienziati *furono i primi a scoprire, con questo metodo, l'esistenza di valori molto grandi delle costanti dielettriche; è così che hanno trovato per l'acqua  $K = 76$ , per l'alcol etilico  $K = 26,5$  e per l'alcol amilico  $K = 15$ .*



Anche Téreschine (1889) ha utilizzato due elettrometri, confrontando però con l'aria un unico liquido, l'alcool etilico. I due elettrometri vengono prima riempiti con lo stesso liquido, che permette di confrontare le loro indicazioni; uno è poi riempito con alcool etilico, mentre l'altro contiene aria; si trova così il valore  $K_0 = 27,0$  per l'alcool etilico. Si riempie quindi il secondo elettrometro con il liquido da studiare e si determina il rapporto  $K : K_0$ . Téreschine ha così ottenuto per l'acqua il valore  $K = 83,8$ .

Perot (1891) ha per primo impiegato un metodo differenziale, ponendo uno sopra l'altro due elettrometri a quadranti, i cui aghi sono invariabilmente collegati tra loro, in modo che il loro movimento dipende dalla differenza delle azioni a cui sono sottoposti separatamente. I quadranti superiori rimangono sempre in aria; quelli sul fondo sono nel liquido studiato. Heerwagen (1892) ha migliorato considerevolmente questo metodo; ha trovato per l'acqua  $K = 81,1$ .

3. IL METODO DI QUINCKE. Quincke ha misurato  $K$  con due metodi, il primo dei quali è solo una variante del metodo di Ziloff. Quincke ha misurato in primo luogo l'attrazione reciproca delle armature di un condensatore piano orizzontale, immerso nel liquido in esame. L'armatura inferiore è fissa, quella superiore è sospesa al giogo di una bilancia ed è sostenuta da tre viti, che passano davanti all'armatura inferiore. Quest'ultimo è collegato con l'elettrometro e una bottiglia di Leida; l'armatura superiore è a terra e in equilibrio sulla bilancia. La bottiglia di Leida è fortemente caricata e sul piatto della bilancia sono posti dei pesi  $p$ . La bottiglia viene poi scaricata molto lentamente e si annota l'indicazione dell'elettrometro nel momento in cui si stacca l'armatura superiore. Si determinano così il potenziale  $V$  del piatto inferiore e l'attrazione  $p$  dei piatti che gli corrispondono. Si ha, per la formula (57),

$$p = \frac{KSV^2}{8\pi d^2} \quad (4.0.87)$$

dove  $S$  è la superficie dell'armatura superiore; se ne può dedurre  $K$ . Un altro valore, che indicheremo con  $K_1$ , si ottiene nel modo seguente. Attraverso un'apertura nell'armatura superiore, una grossa bolla d'aria viene insufflata nello spazio compreso tra le armature; la pressione di quest'aria viene misurata con uno speciale manometro. Quando l'armatura inferiore viene portata al potenziale  $V$ , la pressione dell'aria aumenta e il manometro sale di una certa quantità  $h$ . Un calcolo effettuato da Kirchhoff mostra che in questo caso si ha

$$h\delta = \frac{(K_1 - 1) V^2}{8\pi d^2} \quad (4.0.88)$$

dove  $\delta$  indica il peso specifico del liquido del manometro. Il confronto tra le formule (53) e (53a) dà

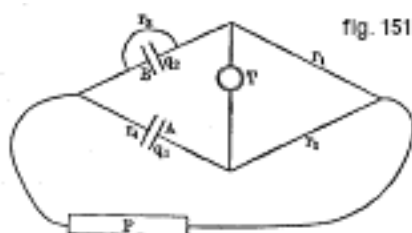
$$K_1 = 1 + \frac{h\delta KS}{p} \quad (4.0.89)$$

Quincke ha calcolato con questa formula il valore di  $K_1$  che differisce di poco da  $K$ .

4. METODO DI NERNST. - Questo metodo ha avuto un'estesa applicazione principalmente in Germania. Essa rappresenta una modifica del metodo 7 di confronto delle capacità descritto in precedenza. Abbiamo visto che il telefono T è silenzioso, quando si ha  $q_1 : q_2 = r_2 : r_1$  (vedere fig. 139). sia  $r_1 = r_2$ ; si ha in questo caso  $q_1 = q_2$ . Tuttavia, il telefono non cessa di risuonare, quando il liquido studiato, che riempie ad esempio il condensatore A, possiede anche una conducibilità estremamente piccola; ma, se si introduce in parallelo, con il condensatore di misura B, la resistenza  $r_3$ , il telefono è muto, quando per  $r_1 = r_2$  sono soddisfatte le seguenti equazioni di condizione

$$r_4 = r_3 \quad q_2 = q_1 \quad (4.0.90)$$

dove  $r_4$  indica la resistenza del condensatore A. Variando  $r_3$  e  $q_2$ , si riesce a ridurre il telefono al silenzio. L'uguaglianza  $q_1 = q_2$  permette poi di confrontare i valori di  $K$  per diversi liquidi che riempiono il condensatore A. Non entreremo in una descrizione dettagliata di questo metodo, che Nernst ha studiato nei minimi dettagli. Se ne troverà un'esposizione completa nell'opera di E. Wiedemann e Ebert, *Physikalisches Praktikum*, 5ª edizione, 1904, pagina 484. Linde, Silberstein, Abegg, Starke, Philipp e altri ancora hanno impiegato questo metodo; Philipp lo ha perfezionato di nuovo. Anche Röntgen ha utilizzato un metodo simile a quello di Nernst.



5. METODO DI BORGMANN. - Abbiamo in precedenza parlato del metodo di Borgmann per la misura delle capacità. Lo stesso metodo può ovviamente essere utilizzato anche per la misura dei valori di  $K$ . La signora M. Petroff (1904) ha misurato  $K$  in questo modo per diversi liquidi, tra cui aria liquida ( $K = 1,33$ ).

6. ALTRI METODI. Perot (1891), Bouty (1892), Cohn e Arons (1886), Cohn (1889), Veley (1906) e altri ancora impiegarono vari metodi che menzioneremo soltanto.

7. DETERMINAZIONE DI  $K$  MEDIANTE OSCILLAZIONI ELETTRICHE - Le formule (51), (51,a) e (51,b), ci hanno mostrato come  $K$  può essere determinato mediante oscillazioni elettriche. Alcuni dei metodi già considerati (per le sostanze allo stato solido) sono stati utilizzati anche per i liquidi. Così Lécher ha determinato il valore di  $K$  relativo al petrolio.

La lunghezza d'onda  $\lambda$  delle radiazioni elettriche, che si propagano all'interno del liquido studiato o, indirettamente, la velocità di propagazione di queste radiazioni, è stata determinata da J. Jj. Thomson, Waitz, Arons e Rubens, Cohn, Udney Yule, Thwing, Coolidge, Cole, Bose, Marx, Ferry, Kossonogoff e soprattutto da Drude.

Ci limiteremo ad indicare il principio di uno dei metodi impiegati, quello di Cohn (1892). Tra le armature A e B (fig. 152) vi è una scarica oscillante. I piatti  $PP_1$  paralleli ai precedenti sono collegati con i fili  $Pe$  e  $P_1e_1$ , che passano attraverso il contenitore di pietra M riempito d'acqua; questi fili sono uniti, sulla parete interna del canale, dal ponte  $a$ . Un altro ponte mobile  $b$  viene portato in posizione tale da ottenere nel sistema di fili  $ba$  le oscillazioni elettriche più intense possibili, che sono rese osservabili da un dispositivo molto sensibile (il bolometro), connesso con bottiglie di Leida mobili del sistema di Rubens.

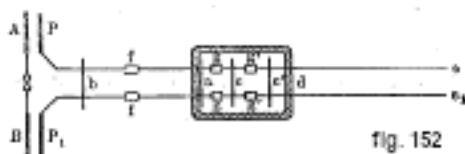


fig. 152

In questo caso i sistemi  $ba$  e  $PbP_1$  sono in consonanza. Cerchiamo poi le due posizioni  $c$  e  $c'$  di un terzo ponte, per cui si ottengono nei sistemi  $ac$  e  $a'c'$  le vibrazioni più forti;  $gg$  e  $g'g'$  sono quindi le posizioni delle bottiglie di Leida collegate al bolometro. I sistemi  $ac$  e  $ac'$  sono in consonanza con  $ba$ . Tralasciando alcune correzioni, si può concludere da quanto sopra che la lunghezza d'onda nell'aria sta alla lunghezza d'onda nell'acqua come  $ba$  sta a  $cc'$ . IL RAPPORTO CERCATO, UGUALE ALL'INDICE DI RIFRAZIONE  $n$  DELLA RADIAZIONE ELETTRICA IN ACQUA (A  $17^\circ$ ), È RISULTATA ESSERE 8,6. Questo risultato dimostra che *l'acqua possiede, nel campo delle radiazioni elettriche, una notevole dispersione anomala*. Si ottiene per  $K$  il valore  $K = n^2 = 73,5$ .

Ellinger (1892) ha misurato direttamente  $n$ , osservando la deviazione della radiazione elettrica attraverso un prisma di legno riempito d'acqua. Ha trovato  $n$  uguale a circa 9.

Cole (1896) ha misurato la riflessione delle radiazioni elettriche su una superficie d'acqua, nel caso in cui le vibrazioni sono normali e quello in cui sono parallele al piano di incidenza. Ha trovato con le formule di Fresnel  $n = 8,85$ .

Per finire con i liquidi, notiamo ancora una volta che sono state fatte misure di  $K$  per gas liquefatti da Linde ( $CO^2$ ,  $AZ^2O$ ,  $CI^2$ ,  $SO^2$ ), Goodwin ( $AzH^3$ ), Hasenhörl ( $Az^2O$ ,  $O^2$ ), Dewar e Fleming (Aria e  $O^2$ ), M.Ile Pétroff (aria) e da altri ancora.

8. DETERMINAZIONE DELLE COSTANTI DIELETTRICHE DEI GAS E DEI VAPORI. - La prima misura di  $K$  per un gas fu fatta da Boltzmann nel 1874. Due piastre metalliche A e B (fig. 153), accuratamente isolate e protette contro l'azione calorica, sono poste sotto una campana di metallo; la natura e la pressione del gas contenuto in questa campana possono essere modificate. La piastra A è collegata con una pila P di 300 elementi Daniell; B può essere messo a terra (T) o con un elettrometro E. Sia  $K_1$  la costante dielettrica del gas che si trova sotto il contenitore all'inizio dell'esperimento. Si collega P con A, in modo che A assuma un certo potenziale  $V$ ; B è messo a terra e collegato con l'elettrometro E; si interrompe poi il contatto di A con P e si cambia o il gas stesso o la sua pressione; sia  $K_2$  il nuovo valore di  $K$ .

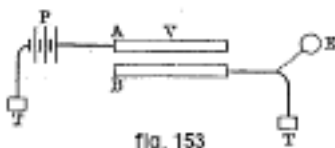


fig. 153

Il potenziale di A diventa quindi uguale a  $V \frac{K_1}{K_2}$ ; si collega nuovamente A con P, e il potenziale di A aumenta della quantità  $V \left(1 - \frac{K_1}{K_2}\right)$ . Questo aumento di potenziale produce, nell'elettrometro E, una deviazione  $\alpha$ , e si ha

$$V \left(1 - \frac{K_1}{K_2}\right) = C\alpha$$

dove  $C$  rappresenta un fattore di proporzionalità. Fatto questo, B è messo a terra, poi di nuovo in contatto con E, e si aggiunge un altro elemento a P. Il potenziale in A aumenta di  $\frac{V}{n}$ , dove  $n = 300$  (numero di elementi), e si verifica nell'elettrometro una deviazione  $\beta$ , tale che

$$\frac{V}{n} = C\beta$$

Dividendo tra loro le ultime due equazioni, si ottiene una relazione che dà il rapporto  $K_1 : K_2$ .

Se si pone  $K = 1 + bp$ , dove  $p$  è la pressione del gas,  $b$  un fattore costante, e si determina il rapporto

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{1 + bp_1}{1 + bp_2} \quad (4.0.91)$$

per le due pressioni  $p_1$  e  $p_2$ , si ottiene  $b$  e quindi anche il valore di  $K$  per la pressione  $p = 760 \text{ mm}$ . Boltzmann ha trovato in questo modo i seguenti valori (riferiti a  $0^\circ$  e a  $760 \text{ mm}$  di pressione)

Aria	$CO^2$	$H^2$	CO	AzO	$C^2H^4$	$CH^4$
$K = 1,000590$	$1,000946$	$1,000264$	$1,000690$	$1,000994$	$1,001312$	$1,000944$

Questi valori soddisfano molto bene la formula  $K = n^2$ .

Ayrton Perry (1877) e Klemencic (1885) hanno confrontato le capacità di due condensatori contenenti gas diversi e determinato così il rapporto  $K_1 : K_2$ .

Lébedeff (1891) ha determinato  $K$  per i vapori di diversi liquidi organici, confrontando le capacità di due condensatori cilindrici, uno dei quali rimane invariato, mentre l'altro si riempie prima di aria, poi di vapore del liquido studiato. Ha trovato, ad esempio, per il vapore di benzolo ( $100^\circ$ ) il valore  $K = 1,0027$ , per quello di alcool etilico ( $100^\circ$ ) il valore  $K = 1,0065$ , ecc.

Nel 1901 è stato pubblicato un lavoro molto ampio di Bodecker, che ha applicato il metodo di Nernst ai gas. Fu il primo a indagare su come i valori di  $K$  per i gas dipendano dalla temperatura e ha determinato, in particolare, i valori di  $K$  per  $AzH^3$ ,  $Az^2O^4$ , HCl e vapore acqueo. I condensatori utilizzati erano in nichel, e per lo studio di  $Az^2O^4$  in platino.

Occhialini (1905) ha determinato  $K$  per l'aria, a pressioni comprese tra 20 e 180 atmosfere; i valori estremi di  $K$  sono 1,0101 e 1,0845.

Tangl (1908) ha misurato  $K$  per idrogeno, azoto ( $20^\circ$ ) e aria ( $19^\circ$ ) a pressioni comprese tra 20 e 100 atmosfere. Ne daremo qui i valori estremi di  $K$ :

Pressione	Idrogeno	Azoto	Aria
$20 \text{ atm}$	$1,00500$	$1,01086$	$1,01080$
$100 \text{ atm}$	$1,02378$	$1,05498$	$1,05494$

La quantità  $(K - 1) : (K + 2) d$ , si veda la (1-35d), è costante fino a  $100 \text{ atm}$ . Ciò dà per la pressione di  $1 \text{ atm}$

	Idrogeno	Azoto	Aria
$1 \text{ atm}$	$1,000273$	$1,000571$	$1,000576$



Per una miscela di due gas, si ha la formula

$$K - 1 = (K_1 - 1) + (K_2 - 1)$$

dove  $K_1$  e  $K_2$  si riferiscono rispettivamente alle parti costituenti alle pressioni parziali corrispondenti.

Hochheim (1908) ha trovato per l'elio  $K = 1,000074$ , che concorda molto bene con il valore medio delle misure  $n^2$  eseguite finora.

#### 7. ALCUNI RISULTATI DI MISURE DI COSTANTI DIELETTRICHE.

- 1. Non abbiamo quasi indicato alcun valore numerico di  $K$ : rimandiamo su questo punto alle tabelle esistenti. Osserviamo solo che i valori trovati dai diversi sperimentatori per i corpi solidi, come il vetro, l'ebanite e sostanze simili, concordano in generale piuttosto male tra loro. Ciò si spiega facilmente con la grande influenza sul valore di  $K$  della composizione chimica e dello stato fisico della sostanza. Dewar e Fleming hanno trovato un valore molto grande di  $K = 272$ , per una soluzione solida di NaOH al 10% in acqua a  $-117^\circ$ . È molto probabile che  $K$  abbia anche, per i metalli, un determinato significato fisico e un valore numerico finito; E. Cohn (1903) si è occupato di questa questione.

2. La formula di Maxwell si trova approssimativamente soddisfatta solo quando si prende per  $n$  l'indice di rifrazione delle radiazioni visibili o quando si calcola  $n$  con la formula di Cauchy, per  $\lambda = \infty$ . Le radiazioni elettriche sono già state discusse in precedenza, e abbiamo visto che la misura di  $n$  per queste radiazioni costituisce oggi il metodo ordinariamente impiegato per la determinazione di  $K$ .

Il disaccordo tra i risultati degli esperimenti e la relazione  $K = n^2$  sembra essere dovuto al fatto che la misura dei poteri induttori e quella degli indici raramente venivano effettuate sullo stesso liquido. D'altra parte, la teoria elettromagnetica della luce si applica solo ai fenomeni oscillatori il cui periodo è paragonabile a quello delle vibrazioni luminose; nulla si può quindi concludere, da questo punto di vista, dei risultati pratici ottenuti nella maggior parte dei casi. Infine, i liquidi studiati spesso non erano puri; in questo caso il potere induttore varia con il campione e con la durata della carica; il potere induttore non è più una costante e il confronto di questo potere con il quadrato dell'indice non ha più senso.

3. L'intervallo di tempo durante il quale il dielettrico si trova nel campo elettrico ha una grandissima influenza sui risultati ottenuti nella misura di  $K$ . Abbiamo già accennato a questo fatto parlando degli esperimenti di J.-J. Thomson e di Lecher. Citeremo nuovamente i risultati delle misure di Schiller e Ferry. Indichiamo con  $\tau$  la durata dell'elettrizzazione; Schiller (1874) ha trovato per  $K$  i seguenti valori:

Sostanza	$\tau = 6 \cdot 10^{-5} \text{ sec}$	$\tau = 0,02 \text{ sec}$
Ebanite	2,21	2,76
Caucciù puro	2,12	2,34
Caucciù vulcanizzato	2,69	2,94
Paraffina trasparente	1,68	1,92
Paraffina bianca	1,85	2,47
Vetro semi bianco	3,31	4,12
Vetro bianco per specchio	5,83	6,34

E. S. Ferry (1897) ha dato i seguenti valori:

Sostanza	$\tau = 3 \cdot 10^{-8} \text{ sec}$	$\tau = 0,002 \text{ sec}$
Olio di ricino	4,49	4,65
Olio d'oliva	3,02	3,13
Olio di semi di cotone	3,00	3,09
Petrolio	1,99	2,05
Ebanite	2,32	2,55
Quarzo perpendicolare all'asse	4,04	4,46
Quarzo parallelo all'asse	4,27	4,38

Per valori più piccoli di  $\tau$  si ottengono in genere anche valori più piccoli di  $K$ . Dewar e Fleming hanno trovato per grandi valori di  $\tau$ , relativi al ghiaccio ( $0^\circ$ ), il valore  $K = 78$ ; per  $\tau$  molto piccolo (oscillazioni elettriche)  $K$  è approssimativamente uguale a 2.

Lo stesso fatto è stato rilevato da J. Curie (1889), il quale ha notato che l'azione del tempo di carica sul valore del potere induttore è molto variabile con le varie sostanze. La differenza deriva principalmente dall'inizio della curva di carica lenta, una parte della quale è presa contemporaneamente alla carica istantanea corrispondente al potere induttore. Con la tormalina, valori di 6 e 7, ottenuti per il tempo di un secondo, si scende a circa 5 per un brevissimo tempo di carica. Questa conclusione è stata confermata anche da recenti ricerche sui dielettrici liquidi dovute a Gouré de Villemontée (1906).

4. L'influenza della temperatura  $t$  sul valore di  $K$  è stata oggetto di molte ricerche. Consideriamo separatamente i corpi allo stato solido, liquido o gassoso.

Cassie (1889, 1891) ha studiato le sostanze solide. Si è riscontrato che, per temperature comprese tra  $15^\circ$  e  $16^\circ$ ,  $K$  aumenta con la temperatura per mica, ebanite, vetro e paraffina. L'incremento riferito a  $1^\circ$  ha i seguenti valori:

Mica	Ebanite	Vetro I	Vetro II	Paraffina
$\alpha = 0,0003$	0,0004	0,0012	0,0020	0,0023

Pellat e Sacerdote (1899) hanno riconosciuto che, per la paraffina,  $K$  diminuisce e per l'ebanite aumenta col riscaldamento. Dewar e Fleming hanno studiato  $K$  per il ghiaccio, così come per molte soluzioni, gas liquefatti e sostanze organiche a temperature molto basse. "Hanno trovato per il ghiaccio (1897):

$t_0$	$K$	$t_0$	$K$
-206,0	2,43	-106,2	13,09
-175,0	2,43	-89,4	27,06
-164,0	2,59	-72,4	41,8
-144,7	3,94	-49,0	57,2
-128,0	5,95	-27,2	59,2
-114,0	9,60	-21,0	61,3

Behn e Kiebitz (1904) hanno utilizzato il metodo di Drude e hanno trovato, per il ghiaccio a  $-190^\circ$ , valori di  $K$  compresi tra 1,76 e 1,88. Per la glicerina,  $K$  aumenta da 3,2 a 60, con un aumento della temperatura da  $-200^\circ$  a  $-40^\circ$ .

I corpi liquidi sono stati molto studiati. Negrand, Palaz e Cassie hanno scoperto che, per benzolo, toluolo, xilolo, glicerina,  $CS^2$ , ecc.,  $K$  diminuisce con l'aumentare della temperatura. Linde ha ottenuto lo stesso risultato per  $CO^2$ ,  $AzO$  e  $Cl^2$  liquefatto.

Heerwagen (1893) ha studiato l'acqua molto attentamente e ha scoperto che  $K$  può essere determinato tra  $4,7^\circ$  e  $20,75^\circ$  mediante la seguente formula:

$$K = 87,032 - 0,362t$$

questa formula dà  $K = 85.49$  per  $t = 4,7^\circ$  e  $K = 79,52$  per  $t = 20,75^\circ$ . Francke ha ottenuto  $K = 90,68$  a  $2,6^\circ$  e  $K = 80,12$  a  $20,1^\circ$ . Anche Cohn (1892) ha studiato l'acqua; i suoi valori concordano con la formula (1-35d), ciò che non si può dire dei valori di Heerwagen e di Francke. Le ultime misure di Ratz (1896) hanno dato valori fino a  $40^\circ$ , che concordano molto bene con la formula di Clausius-Mossotti. Infine, Vonwiller (1904) ha rilevato che per l'acqua i valori di  $K$  diminuiscono regolarmente, quando la temperatura aumenta da  $0^\circ$  a  $28^\circ$ ; a  $4^\circ$  il valore di  $K$  non mostra alcuna anomalia.

Altri liquidi sono stati studiati da Hasenhöhl (1896), Abegg, Tangl (1903), Eversheim, ecc. Il primo di questi fisici ha riconosciuto che i liquidi soddisfano, in generale, la formula (1-35d). Abegg (1897) ha scoperto che si può porre per i liquidi

$$K = Ce^{-\frac{\tau}{190}}$$

dove  $C$  è una costante,  $\tau$  la temperatura assoluta,  $e$  la base dei logaritmi naturali. Tangl (1903) ha notato che la formula di Clausius-Mossotti è verificata per lo xilolo solo tra  $0^\circ$  e  $130^\circ$ . Per benzolo, toluolo, cloroformio, etere e  $CS^2$  ci sono differenze. Per l'etere,  $K$  diminuisce rapidamente avvicinandosi al valore critico. Eversheim (1903) ha studiato i liquidi  $AzH^3$ ,  $SO^4$  e l'etere etilico; ha scoperto che  $K$  non mostra discontinuità quando attraversa lo stato critico.

Bädecker (1901) ha per primo ricercato come, per i gas, i valori di  $K$  dipendano dalla temperatura. Ha riconosciuto che  $K$  diminuisce con l'aumentare della temperatura per  $SO^2$ ,  $AzH^3$ ,  $HCl$ ,  $AzO^2$  e per i vapori di  $H^2O$ ,  $CS^2$ , alcool metilico ed alcool etilico.

5. Röntgen e Ratz hanno studiato l'influenza della pressione. Il primo ha rilevato che, per acqua e alcool,  $K$  non varia fino a pressioni di 500 atmosfere; Ratz ha riconosciuto che rispetto all'acqua  $K$  aumenta un poco, ma molto meno di quanto richiesto dalla formula (1-35d). Corbino ha notato che  $K$  diminuisce per il vetro, quando lo si sottopone ad un'estensione perpendicolarmente alle linee di forza. Dessau è giunto al risultato opposto.

6. Silberstein, Philipp e Lineberger hanno determinato i valori di  $K$  relativi a miscele di liquidi. Hanno scoperto che  $K$  è, in generale, maggiore del calcolo dato dalla semplice regola delle miscele. Boccara e Pandolfi hanno ottenuto  $K = 2,35$  per la paraffina pura,  $K = 14$  per una miscela di parti uguali di paraffina e limatura di ferro. Ehrenhaft (1902) ha studiato miscele di esano e acetone; ha scoperto che  $K$  e la densità  $\delta$  della miscela si discostano quasi ugualmente (in meno) dai valori calcolati dalla regola delle miscele, quindi  $K$  è una funzione lineare di  $\delta$ .

7. Il confronto dei valori di  $K$ , per una data sostanza allo stato liquido e allo stato gassoso, mostra che la formula (1-35d), è perfettamente confermata in alcuni casi, per  $CO^2$ ,  $CS^2$ , etere e benzolo, per esempio. Per altre sostanze, questa formula non risulta esatta.

8. Abbiamo già più volte indicato che  $K$  dipende anche da altre grandezze fisiche. Tuttavia, i tentativi di trovare una relazione tra  $K$  e il calore latente di vaporizzazione, il punto di ebollizione, il coefficiente di espansione (Obach), la densità (Tereshin), finora non hanno portato a nessun risultato chiaro.

9. Poco si sa sulla dipendenza che esiste tra  $K$  e le proprietà chimiche delle sostanze. Dobbiamo prima menzionare la seguente regola enunciata da Nernst; *più il potere dissociante di un liquido è grande, cioè maggiore è la sua facoltà di scomporre in ioni le sostanze che vi sono disciolte, maggiore è la sua costante dielettrica*. I gas ( $K = 1$ ), il benzolo (2.3), l'etere (4,1), l'alcool (25), l'acido formico (62), l'acqua (80) rappresentano una serie di corpi a potere dissociante crescente. Euler (1898) ha confermato questa regola di Nernst. Tereshine ha concluso dalle sue misure che: 1. nella serie omologa dei corpi grassi,  $K$  diminuisce, e viceversa (osservazioni di Tomaszewski), nella serie delle sostanze aromatiche, aumenta, all'aumentare del peso molecolare; e: 2. nei composti metameri si ottengono, in generale, diversi valori di  $K$ .

Thwing ha mostrato che, per molte sostanze,  $K$  si può calcolare con la formula seguente:

$$K = \frac{D}{M} (a_1 K_1 + a_2 K_2 + \dots)$$

dove  $D$  è la densità,  $M$  il peso molecolare del composto,  $K_1, K_2, \dots$  numeri caratteristici degli atomi o gruppi atomici che formano la molecola,  $a_1, a_2, \dots$  il numero di questi atomi o gruppi atomici. Si ha quindi  $K(H) = 2,6$ ; per altri atomi, in generale  $K_x = 2,6A_x$ , dove  $A_x$  è il peso atomico, ad esempio  $K(O) = 2,6 \times 16$ ; si ha inoltre

$$\begin{array}{llll} K(OH) = 1356 & K(CO) = 1520 & K(COH) = 970 & K(AzO^2) = 3090 \\ K(CH^2) = 41,6 & K(CH^3) = 46,8 & & \end{array}$$

per lo zolfo,  $K(S) = 2,6 \times 16$  e (e non  $2,6 \times 32$ ).

Come ha mostrato Drude, i risultati di Thwing si discostano però in parte, in modo molto marcato, da quelli di altri osservatori.

Lang ha scoperto che per i gas si ha

$$\frac{K - 1}{s} = 0,000123$$

dove  $s$  è la somma delle valenze degli atomi di cui è composta la molecola del gas, ad esempio per l'idrogeno  $s = 1 + 1 = 2$ , per l'acido carbonico  $s = 4 + 2 + 2 = 8$ , eccetera; ma questa formula non è stata confermata in molti casi.

10. La formula di Clausius-Mossotti (1-35d), è stata studiata da molti fisici, per esempio da Beaulard, Lébédéff, Millikan, Hlavati, ecc. Hlavati ha studiato gli unguenti al mercurio; l'accordo con la formula è generalmente soddisfacente.

Mathews (1905) ha messo insieme una bibliografia molto dettagliata del lavoro sulle costanti dielettriche.

# 5. ELETTRICITÀ ATMOSFERICA (TERRESTRE)

## 1. Introduzione

Diversi fenomeni elettrici si manifestano alla superficie della Terra; il loro studio ha lo scopo di costituire quella che può essere chiamata la teoria dell'elettricità atmosferica, o più esattamente la teoria dell'elettricità terrestre, per analogia con la denominazione a lungo usata, di teoria del magnetismo terrestre.

Lo studio dell'elettricità terrestre è solitamente annesso alla Meteorologia, ma non alla Fisica generale; inoltre manca in molti Trattati ed anche in opere speciali sull'Elettricità, mentre vi trova sempre posto il magnetismo terrestre. Ciò è dovuto a una causa puramente accidentale e del tutto secondaria; l'azione del magnetismo terrestre si fa sentire in numerosi apparati e deve quindi essere presa in considerazione in molte ricerche fisiche di carattere sperimentale, mentre l'influenza dell'elettricità terrestre appare molto raramente nel lavoro di laboratorio. I fenomeni dell'elettricità terrestre non sono però meno interessanti di quelli del magnetismo terrestre; pertanto, senza entrare nei dettagli, riteniamo necessario dedicare loro un breve capitolo. I fenomeni elettrici naturali, che si verificano sulla superficie della Terra, possono essere classificati in quattro gruppi:

1. Fenomeni osservati in un cielo sereno.
2. Fenomeni osservati in un cielo coperto, come quelli che accompagnano i temporali.
3. Fenomeni vari e rari, come il fuoco di Saint-Elme, la luminescenza di certi corpi nell'oscurità, ecc.
4. Illuminazioni polari.

Fin dall'inizio, dobbiamo dire che lo studio dell'elettricità terrestre, nonostante i molti lavori che gli sono stati dedicati, è uscito solo abbastanza recentemente dalla prima fase del suo sviluppo. Le leggi cui obbediscono questi fenomeni sono poco conosciute e le questioni relativamente più semplici, come ad esempio la variazione diurna, sono ancora dibattute. Lo stesso, del resto, con la spiegazione dei fatti, della natura e posizione delle masse elettriche attive, della loro origine, delle condizioni in cui si producono i fenomeni, della determinazione del loro meccanismo interno. Chaveau (1899) ha caratterizzato la situazione attuale di tutti questi problemi nel modo seguente: "Il numero di teorie relative all'elettricità atmosferica è considerevole. In una conferenza tenuta nel 1897 alla Royal Institution of Great Britain, il professor Schuster ricordò che, dieci anni prima, il Dr. Suchsland ne aveva contate venticinque; quattro erano nate solo nel 1884. Oggi ne troveremmo più di trenta; e qui si tratta solo delle teorie avanzate da uomini di vera scienza, molti dei quali sono illustri studiosi. Quanto alle fantasticherie più o meno bizzarre, nate dallo spettacolo di una tempesta e che hanno avuto l'onore della pubblicazione, se ne devono contare a centinaia. Se aggiungiamo alcune teorie notevoli che sono state proposte in tempi recenti, ci troviamo ora davanti a trentacinque teorie serie. Ciò mostra chiaramente l'assenza di qualsiasi dottrina che sia in qualche modo solidamente fondata e adottata con una certa generalità. Fortunatamente, la questione è cambiata abbastanza di recente; è sorta una nuova teoria, che si è rapidamente sviluppata e che promette di diventare la base certa della spiegazione definitiva dei vari fenomeni dell'elettricità terrestre.

Dei quattro tipi di fenomeni sopra menzionati, i primi, che si osservano in un cielo senza nuvole, sono di particolare interesse, in quanto sono i fenomeni più semplici e, per così dire, normali.

## 2. Metodi per l'esplorazione del campo elettrico dell'atmosfera terrestre

Nell'atmosfera che circonda la Terra agiscono costantemente forze elettriche; in altre parole, il potenziale elettrico  $V$  non ha lo stesso valore nei diversi punti dell'atmosfera, o ancora lo spazio occupato dagli strati dell'atmosfera, accessibili alla nostra osservazione rappresenta un campo elettrico. Lo studio di questo campo pone in primo piano la questione della disposizione delle superfici di livello del potenziale  $V$ , normalmente su cui agiscono le forze elettriche  $F$ . In secondo luogo, vi è la questione dell'entità di queste forze elettriche, in particolare nei diversi punti di una stessa verticale. Quest'ultima questione sembra particolarmente importante, perché rispondere significa chiudere la disputa tra due gruppi di ipotesi e risolvere il problema fondamentale di sapere se la quantità di elettricità sulla sfera terrestre è nulla oppure no.

Noteremo subito che in un luogo perfettamente pianeggiante e con tempo sereno, le superfici di livello sono generalmente dei piani (o se si vuole superfici sferiche) parallele all'orizzonte. Le forze  $F$  sono dirette verso la terra; in altre parole, il potenziale aumenta quando si sale nell'atmosfera. Se  $n$  è la direzione della normale a una superficie piana, si ha

$$-F = \frac{\partial V}{\partial n} \quad (5.0.1)$$

In pratica, si misura la differenza di potenziale  $\Delta V$  di due punti, che si trovano nella direzione  $n$  a una distanza  $\Delta n$  l'uno dall'altro. Designeremo con  $G$  il rapporto  $\Delta V : \Delta n$  e lo chiameremo *gradiente elettrico* in uno dei punti considerati; esprimeremo  $\Delta V$  in volt,  $\Delta n$  in metri, così che

$$G = \frac{\Delta V \text{ volt}}{\Delta n \text{ m}} \quad (5.0.2)$$

*Il gradiente elettrico è misurato dalla differenza di potenziale, espressa in volt, tra due punti posti sulla stessa normale ad una superficie piana e distanti un metro.*

Alle due questioni relative alla direzione e intensità della forza elettrica agente in un punto, se ne deve aggiungere una terza, non meno importante, quella del grado di ionizzazione dell'aria; quest'ultimo è misurato dal tasso di perdita di elettricità positiva e negativa. Considereremo questa questione in modo più dettagliato nell'ultimo paragrafo, e qui descriveremo semplicemente l'apparato che serve a misurare il tasso di perdita.

Ci asterremo da ogni indicazione storica delle opere che oggi hanno perso il loro valore, e passeremo subito all'esposizione dei metodi di esplorazione del campo elettrico dell'atmosfera terrestre.

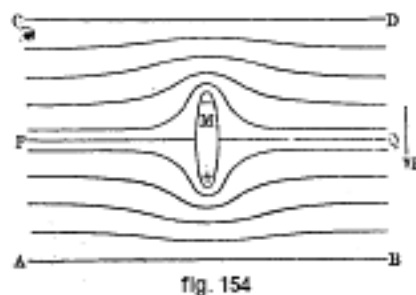
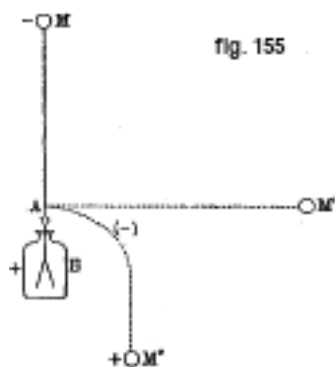


fig. 154

Supponiamo che le superfici di livello del potenziale  $V$  siano piani orizzontali AB, CD, ecc., (fig. 154). Trasportiamo in questo campo il conduttore M; si elettrizza e assume un potenziale

corrispondente ad una certa superficie piana PQ, alla quale appartiene anche la superficie stessa del corpo M. Le superfici piane vicine sono disposte più o meno come mostrato in figura. Su M appare in basso elettricità positiva, in alto elettricità negativa.

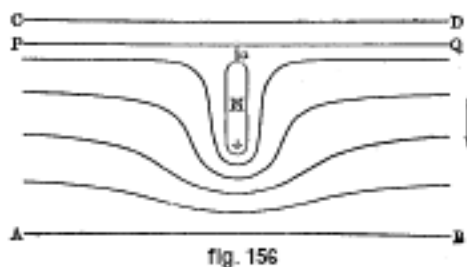
Quando, in un luogo aperto e sotto un cielo limpido, si collega un elettroscopio E (fig. 155), mediante un filo AM, con una sfera M posta più in alto dell'elettroscopio, quest'ultimo rileva quasi sempre la presenza di elettricità positiva. Quando il filo è disposto orizzontalmente (AM'), l'elettroscopio non è affatto elettrizzato. Infine, se la sfera M'' è più bassa dell'elettroscopio (filo in AM''), si manifesta la presenza di elettricità negativa.



Le indicazioni dell'elettroscopio si rafforzano notevolmente, quando la sfera M viene sostituita da un corpo sulla cui superficie non può esistere carica elettrica, cioè da un corpo che assume sempre il potenziale del punto nello spazio in cui si trova. Una punta può assolvere questo ruolo. Se portiamo, nel campo elettrico AB, CD (fig. 156), il corpo M provvisto di una punta *a*, questo assume un potenziale corrispondente alla superficie di livello PQ che passa per il punto *a*; sul corpo M compare una carica positiva, soprattutto nella sua parte inferiore; le altre superfici piane sono disposte più o meno come mostrato in figura 156.

A parte l'uso di una punta, la cui azione è tutt'altro che perfetta, si ricorse ancora, fino a poco tempo fa, ad altri tre processi, per uguagliare il potenziale di un corpo e quella di un dato punto nello spazio.

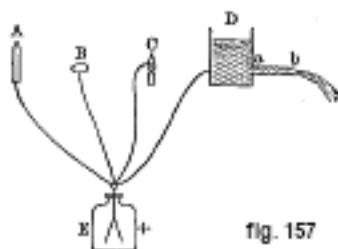
Questi vecchi metodi sono tutti rappresentati simbolicamente nella figura 157. In A è raffigurato il metodo della punta, in B quello della miccia o esca fiammeggiante, in C quello della fiamma, proposto per la prima volta da Bennett (1786), infine in D il metodo del collettore ad acqua (equalizzatore meccanico) immaginato da W. Thomson (Lord Kelvin).



Volta impiegava fiamme, stoppini impregnati di zolfo o alcol, esca, ecc.; sembra aver attribuito il bilanciamento di questo tipo di collettore al fumo che fuoriesce da esso e porta via la carica. Il fumo, secondo Moulin, sembra avere poca importanza nel fenomeno, perché un'esca di scarsa qualità che lascia una grande quantità di cenere, pur dando fumo in quantità maggiore rispetto ai migliori stoppini, è solo molto difficile da bilanciare e alla fine di un tempo considerevole. Lord Kelvin usava, con un elettrometro portatile, stoppini di carta impregnati di nitrato di

piombo. Pellat (1885) ha segnalato che gli stoppini di nitrato di piombo, bruciando in una stanza formante una gabbia di Faraday, e la cui aria non era elettrizzata, prendevano sempre un eccesso di potenziale di parecchi volt su quello delle pareti della stanza. G. Le Cadet (1898) ha ripreso lo studio di queste serrature in connessione con le sue misure in pallone. V. Conrad (1902) ha ritrovato i risultati di Pellat ottenendo per la stessa miccia indicazioni differenti di circa 9 volt a seconda che fosse coperto di cenere o ne fosse liberato da una corrente d'aria.

In presenza dei risultati fornitigli dagli stoppini, Pellat ha studiato al cilindro di Faraday una piccola fiamma di gas: la messa in equilibrio è rapida, la carica spontanea è nulla, all'interno delle differenze di potenziale; Enner, come vedremo in seguito, ha preferito la fiamma per il suo strumento portatile, poiché il suo grande debito elettrico compensa i difetti di isolamento che potrebbero prodursi. Ha impiegato dapprima una piccola candela dotata di un filo di platino immerso nella fiamma, poi una lampada metallica a petrolio a camino metallico. Elster e Geitel, e anche altri sperimentatori, hanno pure eseguito misure con le lampade. Ne esistono numerosi modelli, ma hanno l'inconveniente si spegnersi al vento. Le Cadet le sostituisce vantaggiosamente, da questo punto di vista, con piccole lampade ad acetilene. Lutz (1906) ha costruito un nuovo collettore a fiamme.



Il collettore ad acqua di W. Thomson è costituito da un recipiente metallico accuratamente isolato, riempito d'acqua che scorre liberamente attraverso l'apertura *b* del tubo laterale *ab* (fig. 157). L'acqua che scorre porta via la carica elettrica, cosicché il vaso D assume rapidamente il potenziale del punto nello spazio in cui si trova l'apertura *b*. In tutti i metodi precedenti si assume che l'elettroscopio, prima di effettuare l'osservazione, è stato messo a terra; indica quindi la differenza tra il potenziale della terra e quello del punto in cui si trova la punta, la miccia, la fiamma o l'apertura *b*; la posizione dell'elettroscopio quindi non ha alcun ruolo. D. Smirnof (1904) ha perfezionato il collettore ad acqua, dandogli la forma di uno spruzzatore; il funzionamento dello strumento risulta così notevolmente accelerato. Un collettore a gocce facilmente trasportabile è stato costruito da Conrad (1907); consuma solo 1,5 litri di acqua in sei ore, il suo tempo di ricarica è di 13 a 20 secondi ed è disposto in modo che il campo sia disturbato il meno possibile.

W. Thomson ha collegato il collettore ad acqua con l'elettrometro a quadranti. Il collettore isolato viene posizionato su un davanzale o su una tavola spinta fuori dalla finestra. Il tubo di scorrimento dell'acqua è telescopico (come un cannocchiale) e può essere allungato o accorciato. I quadranti dell'elettrometro sono mantenuti a una differenza di potenziale costante per mezzo di una batteria di piccoli elementi (Zn, Cu, acqua), la cui metà è collegata a terra. Si può anche collegare uno dei poli della batteria con una coppia di quadranti, e mettere a terra l'altro polo e l'altra coppia di quadranti. Il collettore è collegato con l'ago dell'elettrometro che, prima dell'inizio delle osservazioni, cioè prima che inizi il flusso dell'acqua, deve essere un attimo messo a terra. Si può mettere a contatto la batteria con l'ago, il collettore con una coppia di quadranti. La deflessione dell'ago misura la differenza di potenziale *V* tra la terra e il punto nello spazio in cui si trova l'apertura del tubo. Mascart ha costruito sullo stesso principio un elettrografo che registra tutte le variazioni del potenziale *V*. A tale scopo, un raggio luminoso emesso da una piccola lampada viene riflesso da un piccolo specchio fissato all'ago dell'elettrometro e cade su



una striscia di carta fotosensibile, che ricopre la superficie di un cilindro orizzontale che ruota lentamente intorno al proprio asse; dopo lo sviluppo e il fissaggio, si ottiene sulla carta una linea che rappresenta le variazioni della quantità  $V$  in funzione del tempo.

Ai quattro metodi che abbiamo appena considerati, se ne è aggiunto recentemente un quinto. Henning (1902) ha mostrato che si può usare come collettore una sostanza radioattiva; tale sostanza produce, come dimostreremo dettagliatamente in seguito, una rapida perdita di elettricità. Henning ha utilizzato 0,1 grammi di cloruro di bario radifero di attività 240 incollato, o con zucchero o con gommalacca, all'estremità di un cilindretto di ottone inserito all'estremità di un'asta di ebanite; questo cilindro era disposto verticalmente e collegato con un elettroscopio; ha confrontato l'effetto del sale radioattivo a una piccola lampada ad alcool delle stesse dimensioni del cilindro e ad una lampada di Elster e Geitel, in un campo creato tra due lastre di rete metallica di  $4m^2$  di superficie. Il potenziale teorico in ogni punto era calcolato assumendo il campo uniforme. La distanza tra le piastre variava tra 50 e 70 *cm*, la differenza di potenziale totale era di 202 *volt*. In un campo orizzontale, la fiamma indicava il potenziale teorico; in un campo verticale invece indicava il potenziale di una regione situata al di sopra di esso, l'errore essendo mediamente di cinquanta volt e rimanendo costante per i diversi punti del campo. I sali di radio davano sempre il potenziale di una regione situata troppo vicino alla lamina verso la quale il sale era rivolto, con un errore medio e costante di circa una ventina di volt; davano il potenziale teorico quando la superficie del sale era parallela alle linee di forza. Con l'obiettivo di effettuare ricerche in mongolfiera, Linke (1903) ha ripetuto esperimenti comparativi tra flusso d'acqua, fiamme e sali di radio; ne concluse che i collettori al radio danno, secondo la loro forma, risultati del tutto diversi che dipendono in gran parte dalla direzione e dalla velocità del vento, e che il collettore ad acqua è preferibile. Moureaux (1903) ha effettuato presso l'osservatorio Parc Saint-Maur prove di acquisizioni di potenziale al radio preparato e prestato da Curie. Il sale veniva posto in una cavità ricavata in un disco di rame e ricoperta da una sottile striscia di ebanite sigillata, in modo da mantenere il tutto una scatola a tenuta stagna. Una capsula così formata e contenente 0,1 *gr* di cloruro di radio con un'attività di 3000 ha dato risultati del tutto paragonabili a quelli ottenuti dal flusso dell'acqua. Armet de Lilse sta attualmente costruendo acquisitori di potenziali sotto forma di dischi di 6 *cm* di diametro sui quali vengono incollati, mediante un sottile strato di vernice speciale molto resistente e poco assorbente, 5 *mg* di solfato di attività 20000; queste catture sono più attive di quelle del Parc Saint-Maur.

Moulin (1907), da cui prendiamo questi dettagli, paragona l'azione dei sali di radio, delle fiamme e delle micce a quella dei collettori ad acqua. Ha studiato un campo artificiale, costituito da una batteria di accumulatori, prima in laboratorio e poi sotto l'azione del vento, sulla seconda piattaforma della torre Eiffel, ed è stato in grado di determinare in quali condizioni questi tre tipi di collettori danno buoni risultati. L'intensità del vento e la sua direzione (orizzontale o inclinata) sembravano avere una grande influenza.

Ebert ha utilizzato, per le osservazioni in pallone, una lastra di zinco da poco amalgamata, che, in aria perfettamente diurna, manifesta un'azione attinoelettrica, cioè una perdita di elettricità, anche in luce diurna diffusa.

Exner ha costruito un dispositivo portatile molto comodo, che consiste in un collettore e un elettroscopio che può essere utilizzato come elettrometro. Il collettore è costituito da una piccola lanterna metallica con una candela, nella cui fiamma è immersa l'estremità di un filo di platino collegato all'elettrometro mediante un filo di rame. L'elettrometro (fig.158) è formato da un involucro cilindrico di metallo disposto orizzontalmente, le cui facce anteriore e posteriore sono chiuse da lastre di vetro. Un'asta di rame isolata  $D$  in  $C$  è provvista di una vite di serraggio  $E$ , per ricevere il filo proveniente dal collettore. All'estremità inferiore di  $D$  è saldata una striscia di rame  $c$  (larga 9 *mm*) e sono fissati dei fogli di alluminio  $bb$ , che si appoggiano a  $c$  quando non sono elettrizzati.

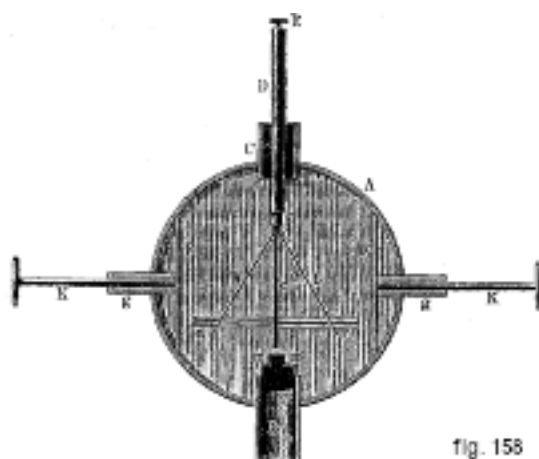


fig. 158

Attraverso i tubicini laterali  $g$  passano le aste  $K$ , alle quali sono fissate due piastre  $F$  che possono essere messe a contatto con  $c$ . Lo strumento può quindi essere collocato in una posizione qualsiasi, in vista del suo trasporto, senza dover temere danni ai fogli di alluminio. Sulla faccia frontale del vetro è incollata una scala millimetrica  $nn$ ; il tubo corto  $B$  serve per fissare lo strumento all'estremità superiore di un'asta, che può essere conficcata direttamente nel terreno. Il collettore è fissato su un bastone mobile, in modo che la sua altezza possa essere variata. Una batteria di 200 celle (Pt-Zn-acqua) viene utilizzata per calibrare l'elettrometro; la forza elettromotrice di ciascun elemento è di 1,06 volt. Si prendono 25, 50, 75, ... elementi, si collega un polo con la terra, l'altro con  $E$  e si annota, sulla scala  $nn$ , il numero di millimetri di separazione delle foglie  $bb$ . Per determinare il segno della carica si impiega un bastoncino di ebanite levigata o meglio ancora una pila a secco (di Zamboni).

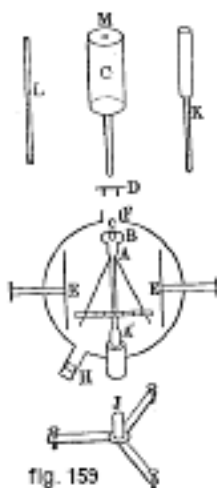


fig. 159

Dellmann porta una piccola sfera conduttrice di raggio  $R$  in un punto dello spazio dove regna il potenziale  $V$  e la mette per un istante a terra. Sulla sfera appare quindi una carica, che è determinata dall'uguaglianza

$$V + \frac{\eta}{R} = 0$$

perché il potenziale della sfera è nullo, ma la sua capacità è pari a  $R$ . Si trasporta allora la sfera contro l'elettrometro la cui capacità è  $q$ ; se  $V'$  è il potenziale indicato dall'elettrometro, si ha

$$V' = \frac{\eta}{R + q}$$

Le ultime due uguaglianze danno per il potenziale cercato l'espressione

$$V = -\frac{R+q}{R}V' \quad (5.0.3)$$

Weber mette a terra una punta, che si trova in un punto M dello spazio studiato, tramite un galvanometro sensibile. La variazione di potenziale del punto M produce delle correnti, che si osservano con il galvanometro. Elster e Geitel hanno costruito uno strumento utilizzato per misurare il tasso di perdita di elettricità. Rappresenta un elettroscopio di Exner modificato (fig. 159). La piastra mediana AA' termina inferiormente in un cilindro di ebanite, mediante il quale l'elettroscopio è montato sull'asta J di un treppiede; in alto, la lastra AA' termina con una sferetta, nella quale è ricavata una cavità conica *c*. Si toglie il coperchietto D per eseguire gli esperimenti, e si introduce in *c* l'estremità inferiore di un'asta, che forma un tutt'uno con il cilindro cavo annerito G. Dopo aver caricato questo cilindro con l'ausilio di una batteria a secco, si osserva la velocità con cui cadono le foglie dell'elettroscopio. Supponiamo, ad esempio, che il potenziale scenda, nell'intervallo di tempo *t*, da *V*<sub>0</sub> a *V* volt. Si estrae quindi il cilindro G e si introduce l'asta K dotata di manico isolante; si carica l'elettroscopio, si toglie l'asta K e si osserva nuovamente la velocità di perdita per il solo elettroscopio (senza il cilindro G). Il potenziale scende, durante il tempo *t'*, da *V*'<sub>0</sub> a *V'* volt, per esempio. L'asta di ebanite L viene quindi avvitata nell'apertura M del cilindro G, che di fianco si introduce in *c*, dopo che l'elettroscopio è stato nuovamente elettrizzato. Il rapporto del numero di volt, indicato dall'elettroscopio prima e dopo l'introduzione del cilindro G, dà il rapporto *n* delle capacità dell'elettroscopio con e senza il cilindro. La grandezza

$$E = \frac{1}{t} \log \frac{V_0}{V} - \frac{n}{t'} \log \frac{V'_0}{V'}$$

misura la perdita di elettricità di un dato segno, nelle condizioni sperimentali.

Esiste tutta una serie di elettrometri autoregistranti dello stato elettrico dell'atmosfera. Benndorf (1906), ad esempio, ha costruito uno strumento di questo tipo.

### 3. Alcuni risultati di ricerche sul campo elettrico dell'atmosfera terrestre

Nonostante il gran numero di osservazioni fatte, finora è stato ottenuto solo un piccolo insieme di fatti solidamente accertati e scientificamente indiscutibili. Di seguito riportiamo i risultati più importanti.

In un cielo senza nuvole e con tempo calmo, l'elettroscopio mostra quasi sempre una carica positiva; il potenziale aumenta quando si sale e il gradiente elettrico è positivo. Denza ha fatto osservazioni per 12 anni, al ritmo di sei al giorno, e non ha mai osservato un cambio di segno a cielo sereno; a Kiev, su 15.170 osservazioni, è stata ottenuta solo 655 volte una carica negativa.

L'entità del gradiente nei cieli sereni dipende dalla località e dalla stagione; oscilla approssimativamente tra 50 e 800 volt/m: il gradiente medio in prossimità della superficie terrestre è di circa 300 volt. Gradienti superiori a 1000 volt sono raramente osservati in circostanze normali.

Il gradiente in un dato punto varia quasi continuamente. Ci sono variazioni diurne e annuali, e anche variazioni irregolari, che hanno la caratteristica di perturbazioni. Rispetto alla variazione diurna, molti osservatori hanno riscontrato che il gradiente presenta, durante 11 ore, due minimi e due massimi. Alcuni hanno indicato che uno dei minimi si verifica in estate intorno alle 3, in inverno intorno all'una del pomeriggio, l'altro intorno alle 2 di notte e che i massimi si verificano in estate verso le 8 del mattino e intorno alle 9 di sera, in inverno intorno alle 10 del mattino e intorno alle 6 di sera. Ma questi orari, dedotti da un gran numero di osservazioni, non coincidono con quelli trovati da altri osservatori. Chauveau (1899) ha trovato che, alle medie latitudini, vi sono effettivamente in estate due minimi, intorno a mezzogiorno e intorno alle 3 del mattino, e due massimi, intorno alle 8 del mattino e intorno alle 8 di sera. Durante l'inverno la minima

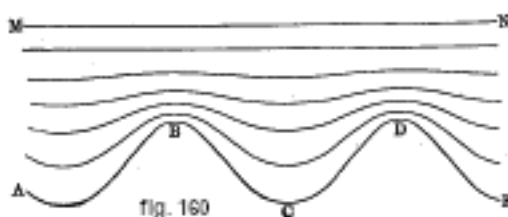
pomeridiana diminuisce o scompare, mentre la minima notturna si fa più profonda; nel suo complesso l'oscillazione appare semplice, con un massimo diurno intorno alle 6 di sera e un minimo la cui ora è molto simile a quella del secondo minimo estivo, cioè alle 4 del mattino. Quando ci si solleva in estate sopra la superficie della Terra, anche il minimo del giorno si attenua; in cima alla torre Eiffel, l'oscillazione estiva offre la massima analogia con la variazione invernale al livello del suolo: lì si osserva solo un massimo e un minimo. Non c'è ovviamente alcuna forma della variazione diurna del gradiente elettrico che abbia una generalità. Hann e Neumayer hanno indicato una possibile coincidenza tra questa variazione e quella diurna della pressione atmosferica.

La variazione annuale si traduce nel fatto che il gradiente è molto maggiore nei mesi invernali che in estate. In Europa il massimo invernale è circa 13 volte maggiore di quello estivo; in Nord America, è 5 volte.

Le variazioni diurne e annuali quasi scompaiono sulle cime delle alte montagne; questo fatto, che è di grandissima importanza, come vedremo in seguito, è stato dimostrato dalle osservazioni sul Sonnblick (3000 *m*) in Austria e sul Dodabetta nelle Indie meridionali. Concorda con la suddetta semplificazione della forma dell'oscillazione del gradiente sulla Torre Eiffel.

Il fatto seguente non è meno importante. Quando si confrontano le variazioni simultanee del gradiente in punti diversi, si trova che queste variazioni non hanno un andamento parallelo, quando la distanza orizzontale dei punti supera i 100 *m*. Ciò indica chiaramente il carattere locale delle cause che producono queste variazioni.

Il problema della direzione del gradiente, o che è la stessa cosa della rispettiva posizione delle superfici di livello del potenziale, comporta una soluzione relativamente semplice: la superficie della Terra e di tutti gli oggetti che comunicano con essa rappresentano una di queste superfici di livello; le superfici successive presentano forme di passaggio tra questa prima superficie e quelle che, quando sono sufficientemente distanti tra loro, possono essere considerate come piani orizzontali o più esattamente come superfici sferiche. Così, anche sulla superficie di montagne, edifici, alberi, ecc., la forza elettrica è normale; vicino alla parete di un muro, di un tronco d'albero, ecc., essendo le superfici piane verticali, la forza elettrica è orizzontale; sul pendio delle montagne, è inclinata sull'orizzonte. Da ciò segue la dipendenza tra l'entità del gradiente e la forma della superficie terrestre o degli oggetti su di essa. Sia ABCDE (fig. 160) una sezione verticale della superficie terrestre; B e D sono cime montuose, C una valle; ABCDE, così come il piano MN, sono superfici piane, tra le quali si estendono, come mostrato in figura, le superfici intermedie. In B e D queste superfici sono molto vicine, in C si allargano; è chiaro che il gradiente e di conseguenza anche la forza sono maggiori che sopra un piano in B e D, minori in C. Quindi, a parità di tutte le altre condizioni, il gradiente deve essere relativamente ampia in cima alle montagne, al contrario relativamente piccola nelle valli; in un piccolo cortile circondato da edifici alti, il gradiente dovrebbe essere molto piccola. Le osservazioni confermano quanto appena detto circa l'ampiezza e la direzione del gradiente. Erman (1803) ha osservato per primo che attorno al tronco di un albero isolato, la forza elettrica è orizzontale.



Dobbiamo ancora parlare di una questione molto importante. Se si potesse trovare una risposta, il conflitto tra i due principali gruppi di teorie relative all'elettricità atmosferica finirebbe e si risolverebbe il problema fondamentale già menzionato sopra, cioè se la quantità

totale di elettricità sulla Terra sia zero o meno. Vedremo nel § 5, quale importanza abbia qui la questione della dipendenza tra il gradiente elettrico e l'altezza sopra la superficie piana della Terra, con tempo calmo e cielo sereno. Le osservazioni per risolvere questa domanda possono essere fatte solo da un pallone. Exner (1886) ha dedotto per primo da osservazioni di questa natura che il gradiente aumenta contemporaneamente all'altezza, e TUMA (1892) ha trovato lo stesso risultato. Tuttavia tutta una serie di osservazioni più recenti portano ad una conclusione esattamente opposta, ad esempio le osservazioni di Börnstein, Baschin, André e altri ancora, effettuate negli anni 1893 e 1894. Infine, Le Cadet (1897) ha ottenuto i seguenti valori del gradiente  $G$  relativi alle varie altezze  $h$  in metri:

$h =$	1429	2370	3150	4015 $m$
$G =$	36,5	22,1	19,7	13,4 $V$

Börnstein (1897) ha sottolineato che un pallone, originariamente a contatto con la Terra, può influenzare con la sua carica le indicazioni dello strumento utilizzato per misurare il gradiente. Riunendo quanto oggi si sa sulla presente questione, siamo portati a ritenere probabile che, nelle condizioni precedenti, il gradiente diminuisce contemporaneamente all'altezza.

Finora abbiamo ipotizzato un tempo calmo e cieli sereni. Quando ci sono nuvole molto piccole nel cielo, e a maggior ragione in caso di pioggia, neve, nebbia, ecc., il quadro cambia completamente. Particolarmente caratteristiche in questo caso sono le notevoli, quasi ininterrotte variazioni del gradiente, non solo in grandezza, ma anche in segno. Queste variazioni avvengono in pochi minuti, a volte anche in pochi secondi, quasi per salti, e possono raggiungere i 1.000 volt e oltre. Elster e Geitel hanno osservato, quando apparivano in cielo deboli cirri, rapide variazioni del gradiente tra +1800 e -1200 volt. I valori assoluti del gradiente sono spesso anche anormalmente alti. Dispositivi installati non distanti tra loro indicano valori assoluti e variazioni di gradiente completamente differenti.

Le gocce di pioggia e i fiocchi di neve sono generalmente elettrizzati, potendo differire il loro segno; tuttavia predomina il segno negativo.

Lenard ha osservato che l'aria si elettrizza negativamente quando una goccia d'acqua cade su una superficie bagnata; questo fenomeno deve svolgere un ruolo nella caduta della pioggia.

La presenza di polvere o fumo nell'atmosfera ha una grande influenza sul suo stato elettrico; Héséhous si è occupato, in particolare, di tale questione.

## 4. Fenomeni di scarica elettrica nell'atmosfera

Uno studio dettagliato dei fenomeni che si osservano quando si produce una scarica elettrica nell'atmosfera non può trovare posto in questo lavoro. Ci limiteremo ad indicare brevemente alcuni fatti che hanno un interesse più o meno immediato per la fisica generale.

1. Il fuoco di Sant'Elmo, che appare sotto forma di fiamme sugli alberi delle navi, e fenomeni analoghi che si osservano molto spesso in alta montagna. Ricordano i pennacchi luminosi, che accompagnano il flusso di elettricità da conduttori carichi ad altissimi potenziali.

2. I fulmini, che si osservano in un particolare tipo di nube temporalesca, designate oggi con il nome di cumulo-nembo. Legato ai fulmini è uno dei fenomeni più enigmatici osservati nell'atmosfera terrestre, quello che viene chiamato fulmine globulare. Appare sotto forma di una sfera di fuoco, che si muove relativamente molto lentamente, a volte scompare silenziosamente, ma a volte si scarica anche con un rombo di tuono. Planté ha realizzato un fenomeno, che ricorda in qualche modo il fulmine globulare, immergendo l'elettrodo negativo di una potente batteria nell'acqua o in una soluzione salina, e toccando con il polo positivo la superficie dell'acqua. Quando quest'ultimo polo era sollevato un po', se ne staccò una piccola sfera brillante, che scivolò sulla superficie dell'acqua. Ma nessun significato può essere attribuito a questa somiglianza

accidentale tra i due fenomeni, né alcuna spiegazione del fulmine globulare può basarsi su questa esperienza. Di importanza molto maggiore è il fenomeno scoperto da Righi. Quando una resistenza molto grande sotto forma di una lunga colonna d'acqua viene interposta nel circuito di scarica di una bottiglia di Leida di grande capacità, la scarica, specialmente in aria un po' rarefatta, appare tra i due elettrodi (sfere) sotto forma di una piccola sfera che si muove molto lentamente.

Hésélhous pensa che il fulmine globulare sia formato da azoto, che brucia sotto l'azione di scariche oscillanti molto intense. Egli ha immerso nell'acqua uno dei poli di un trasformatore, che dava una corrente alternata di 1000 volt, e ha collegato l'altro polo con una lastra di rame orizzontale sollevata da 2 a 4 cm sopra l'acqua. Si osserva una scarica sulla lastra, che ha tra l'altro la forma di uno sferoide incandescente che si muove in un verso o nell'altro sotto l'azione della corrente d'aria, la più leggera. Quando questo sferoide è ricoperto da una campana di vetro, si possono vedere i vapori marroni dei prodotti di ossidazione dell'azoto.

Santer (1890, 1892) ha fornito una panoramica dei diversi tentativi di spiegare i fulmini globulari e ha raccolto più di duecento osservazioni di questo fenomeno.

Riecke ha cercato di determinare la quantità di elettricità che si scarica in un lampo; ha trovato da 50 a 100 coulomb.

Pockels ha valutato l'intensità massima della corrente nel fulmine, secondo l'intensità del magnetismo residuo prodotto in una bacchetta di basalto vicino a un parafulmine; ha riconosciuto, in diversi casi, che l'intensità della corrente raggiungeva gli 8600, 11000 e 20000 ampère.

Non entreremo in maggiori dettagli riguardo a temporali, aurore boreali, fuoco di Sant'Elmo, ecc. Non considereremo nemmeno la costruzione di parafulmini; si possono consultare su questo argomento le opere speciali di Melsens, Smirnoff, Goloff, Lindner, Binischke, ecc.

A. S. Popoff, il vero inventore della telegrafia senza fili, fu il primo a costruire un importante strumento, che registra le scariche elettriche che si verificano in una grande estensione dello spazio circostante. Questo registratore di temporali è costituito da una batteria di elementi, nel cui circuito è presente un coherer Branly e un elettromagnete la cui armatura mobile è dotata di una penna. Questa penna tocca la superficie di un cilindro ricoperto da un righello di carta; il cilindro ruota attorno al proprio asse per mezzo di un meccanismo a orologeria. Il coherer generalmente non lascia passare la corrente, ma diventa conduttore quando le radiazioni elettriche prodotte da una eventuale scarica oscillante lo raggiungono. Quando le radiazioni elettriche prodotte dalle scariche in atmosfera raggiungono il coherer e lo rendono conduttore, la corrente si chiude, agendo sull'armatura dell'elettromagnete, e la penna lascia una traccia sulla striscia di carta. Il primo strumento di questo tipo è stato installato nel luglio 1895 presso la Scuola Forestale vicino a San Pietroburgo e ha dato risultati molto interessanti: registra non solo tempeste ravvicinate o meno, ma anche altre scariche elettriche che compaiono nell'atmosfera.

Non si può parlare qui delle relazioni esistenti tra le tempeste e i cicloni, così come tra le aurore boreali, le tempeste magnetiche, le correnti terrestri, le macchie solari e lo scintillio delle stelle.

## 5. Stato attuale delle teorie relative all'elettricità terrestre

Abbiamo dato al § 1 un'idea generale dello stato di queste teorie; noi ovviamente, dobbiamo rinunciare a esporre tutte le teorie esistenti. Ci limiteremo a studiare la controversa questione della quantità totale di elettricità terrestre, ed esporremo la teoria più recente, nonché alcuni fenomeni che sembrano destinati ad acquistare in futuro una certa importanza per la fisica generale. Tutte le teorie relative all'elettricità terrestre possono essere raggruppate in due gruppi.

1. TEORIE CHE AMMETTONO CHE LA QUANTITÀ TOTALE DI ENERGIA ELETTRICA SULLA TERRA NON SIA NULLA. - Queste teorie presuppongono che la Terra abbia una sua particolare carica, cioè che rappresenti un corpo elettrizzato, assolutamente isolato (elettricamente) nello

spazio. La carica  $E$  potrebbe essersi originata quando l'anello, a cui la Terra deve la sua origine, si è separato dal Sole, oppure quando la Terra si è formata da questo anello; questa carica  $E$  ha potuto, di conseguenza, avere la sua origine nell'attrito che deve aver accompagnato questo processo di formazione della Terra. Se davvero la carica  $E$  non è nulla, deve essere negativa, perché la forza elettrica nell'atmosfera è, in circostanze normali, diretta verso la superficie della Terra. Tutti i fenomeni elettrici terrestri devono essere spiegati dagli spostamenti della carica  $E$  e dalle azioni di induzione che essa produce nei conduttori. Alle cariche positive nuovamente formate devono corrispondere cariche negative uguali, che aumentano dalla carica fondamentale costante  $E$ . Supponiamo che in qualche modo una parte della carica negativa  $E$  passi nell'atmosfera. Abbiamo quindi, in prossimità della superficie della Terra, una carica negativa sotto e sopra. Quanto più alto è un punto sopra la Terra, tanto maggiore è la carica che si trova al di sotto di esso e tanto minore è quella che rimane al di sopra di esso. Ne consegue chiaramente che il gradiente deve aumentare salendo al di sopra della superficie terrestre, fino a raggiungere un massimo, per poi diminuire al di sopra degli strati d'aria dove si propaga la carica.

II. TEORIE CHE AMMETTONO CHE LA CARICA TOTALE  $E$  DELLA SFERA TERRESTRE SIA NULLA. - Supponiamo che la Terra non possieda una carica propria, in modo che teoricamente possa venire un tempo in cui non ci sarà più alcuna carica elettrica naturale di alcun tipo su tutta la Terra. Sotto l'influenza di qualsiasi causa, si producono elettrificazioni e compaiono quantità uguali di elettricità positiva e negativa. Poiché in circostanze normali, cioè con cielo sereno, la forza elettrica è diretta verso la superficie della Terra, bisogna qui ammettere che la sfera terrestre possiede una carica negativa. Sono possibili due ipotesi sulla posizione della corrispondente carica positiva uguale:

1. La carica positiva, che corrisponde alla carica negativa della sfera terrestre, si trova negli strati superiori dell'atmosfera. In questo caso, l'atmosfera assomiglierà al mezzo intermedio di un condensatore carico, e il gradiente dipenderà solo in minima parte dall'altezza. Una tale distribuzione del gradiente è stata accettata da W. Thomson (Lord Kelvin).

2. La carica positiva è distribuita in tutta l'atmosfera e specialmente nei suoi strati inferiori. Sotto l'influenza di una causa qualsiasi, si verificano elettrificazioni e (-) passa sulla superficie della Terra, (+) rimane nell'atmosfera. La stessa causa o altre analoghe producono perturbazioni locali, cioè cambiamenti importanti e rapidi nella distribuzione delle cariche atmosferiche e terrestri, nonché la comparsa di nuove cariche e la scomparsa di cariche già esistenti. Le cause di queste perturbazioni devono essere legate alla formazione delle nubi. Il gradiente deve diminuire salendo al di sopra della superficie terrestre e avvicinandosi allo zero abbastanza rapidamente, perché nei punti sopra le due cariche la forza elettrica deve essere molto piccola. Le variazioni diurne e annuali, così come le variazioni irregolari, devono diminuire man mano che ci si allontana dalla superficie della Terra, cioè dagli strati inferiori dell'atmosfera in cui avvengono le variazioni e gli spostamenti delle cariche.

Se si confronta quanto appena detto sui due gruppi di teorie, si vede quanto sia importante la questione della variazione del dislivello con l'altezza, prima di tutto la questione dell'andamento delle variazioni diurne e annuali e in particolare della le variazioni irregolari alle diverse altezze. La soluzione del problema fondamentale della quantità di elettricità  $E$  può anche non essere priva di interesse per la fisica generale.

Passiamo ora allo studio di alcune teorie raggruppate nei due gruppi precedenti, in particolare di quelle che sono state proposte per ultime.

1. TEORIE CHE AMMETTONO  $E$  NON NULLO. - Ehman (1803) ha per primo avanzato l'idea che la Terra possieda una propria carica negativa e che i fenomeni osservati negli elettroscopi connessi con una punta o con una fiamma siano dovuti all'induzione prodotta dalla carica terrestre. Questa idea è stata sviluppata da Peltier, Pellat e in particolare da Exner. Se si ammette che in condizioni di tempo sereno la forza elettrica sulla superficie della Terra è prodotta

solo dalla carica  $E$ , si può calcolare l'intensità di questa carica utilizzando la formula

$$\frac{\partial V}{\partial n} = -4\pi k$$

nella quale  $k$  indica la densità superficiale della carica. Poniamo  $\frac{\partial V}{\partial n}$  uguale al gradiente  $G$  e quest'ultimo uguale a  $275 \text{ volt}/m$ . Esprimiamo tutte le grandezze in unità el. st. CGS; 1 volt è uguale a  $1/300$  unità el. St CGS; pertanto

$$\frac{\partial V}{\partial n} = G = \frac{275 \text{ volt}}{1 m} = \frac{2,75 \text{ volt}}{1 cm} = \frac{2,75}{300} \text{ unità el.st CGS di gradiente}$$

Se ne deduce per la densità

$$k = -\frac{2,75}{4\pi \cdot 300} = -0,00082 \text{ unità el.st CGS} \quad (5.0.4)$$

questa densità è estremamente piccola. La carica è  $E = 4\pi R^2 k$ , dove  $R$  è il raggio della Terra in centimetri; se si prende  $2\pi R = 4 \cdot 10^9 \text{ cm}$ , si ha

$$E = -4 \cdot 10^{15} \text{ unità el.st CGS} \quad (5.0.5)$$

o  $1,3 \cdot 10^6$  coulomb, poiché  $1 \text{ coulomb} = 3 \cdot 10^9 \text{ unità el.st CGS}$  di quantità di elettricità. Si ottiene quindi per  $E$  un poco più di un milione di coulomb di elettricità negativa. Il potenziale  $V$  della sfera terrestre è uguale a  $E : R$ , o  $4\pi Rk$ , dove

$$V = -6,4 \cdot 10^6 \text{ unità el.st CGS} = -19 \cdot 10^8 \text{ volt} \quad (5.0.6)$$

La tensione superficiale è  $P = 2\pi k^2$ , pertanto

$$P = 4 \cdot 10^{-6} \frac{\text{dyne}}{\text{cm}^2} \quad (5.0.7)$$

è con una forza piccola quanto  $1 \text{ cm}^2$  dello strato superficiale della Terra supposto mobile si allontanerebbe da esso.

Dopo aver ammesso l'esistenza di una carica  $E$ , resta ancora da spiegare perché parte di questa carica passi nell'aria. Exner vede la causa di questo passaggio nell'evaporazione dell'acqua da oceani, mari, laghi, fiumi, ecc. Il vapore porta meccanicamente con sé parte della carica  $E$  che si trova sulla superficie dell'acqua. Il vapore contenuto nell'aria rappresenta, in questo modo di vedere, il supporto delle cariche negative. Maggiore è la quantità di vapore nell'aria, minore dovrebbe essere il gradiente. Exner trova che il gradiente  $G$  e l'umidità assoluta  $p$  sono correlati dalla formula

$$G = \frac{A}{1 + ap}$$

dove  $A$  e  $a$  sono due coefficienti costanti.

La teoria di Exner ha dato origine a una grande quantità di ricerche sul fatto che il vapore di un liquido elettrizzato porti o meno con sé parte della carica del liquido. Peltier (prima di Exner, 1842), Black (1883), Lecher (1888), Schwalbe (1900), Henderson (1900) e Beggerow (1902) arrivarono a un risultato negativo; hanno scoperto che il vapore acqueo e quello di altri liquidi (etere, per esempio) non portano con sé la carica del liquido, Pellat (1899) è arrivato al risultato opposto, per l'elettrizzazione molto piccola, simile a quella trovata con il calcolo per la superficie della Terra. Gli esperimenti di Pellat si sono concentrati su una superficie d'acqua elettrizzata con una carica pari a otto o dieci volte la carica media del suolo. Gli esperimenti sono stati incrociati, perché è solo così che si può vedere la perdita di elettricità per evaporazione. È assolutamente indispensabile che tutti gli isolamenti siano realizzati mediante paraffina, l'unica



sostanza che isola perfettamente le varie parti dell'elettrometro così come le altre. È per il mancato impiego di queste indispensabili precauzioni che alcuni sperimentatori sono giunti, secondo Pellat, a risultati negativi; secondo le condizioni, la perdita per vaporizzazione, nello spazio di un'ora, a temperatura ordinaria, variava nei suoi esperimenti da 0,46 a 0,78 della carica iniziale della superficie dell'acqua. Questi risultati lasciano quindi aperta la questione posta dalla teoria Exner.

Arrhénius (1888) ha sviluppato una teoria basata sull'ipotesi che la carica negativa della Terra si disperda nell'aria sotto l'influenza della radiazione ultravioletta contenuta nella luce solare; questa teoria spiega in modo soddisfacente la variazione annuale di cui sopra. Successivamente, Ekholm e Arrhénius ha cercato di dimostrare che la Terra e la Luna sono elettrizzate negativamente e che esiste una relazione tra la dimensione del gradiente e il valore della distanza zenitale della Luna.

Liebenow, Elster e Geitel, Chree e altri si sono pronunciati contro le teorie precedenti, che presumono che  $E$  non sia nullo. Si è invocato tra l'altro che la carica  $E$  debba passare negli strati superiori dell'atmosfera, l'aria non potendo essere considerata come un isolante assoluto dell'elettricità. A queste teorie si oppongono anche i due fatti di cui abbiamo parlato in precedenza: la diminuzione di tutte le variazioni del gradiente nei punti più alti della superficie terrestre e la quasi certa diminuzione del gradiente stesso, man mano che si sale al di sopra di questa presunta superficie regolarmente piana.

II. TEORIE CHE ASSUMONO  $E = 0$ . - Tale è anzitutto la teoria di Volta, il quale ammise che l'evaporazione dell'acqua è la prima causa delle elettrizzazione della Terra e dell'atmosfera, e che, nell'evaporazione, il vapore si elettrizza positivamente, l'acqua negativamente. Questa teoria è stata fortemente sostenuta anche da Palmieri. È stato però inconfutabilmente dimostrato, da tutta una serie di lavori di diversi fisici, che l'evaporazione dell'acqua non costituisce una sorgente di energia elettrica; solo l'attrito nel vapore umido può esserlo.

Sohncke (1885) e Luvini (1889) si appoggiavano sul fatto che, nell'attrito tra ghiaccio e acqua, il ghiaccio si elettrizza positivamente, l'acqua, al contrario, negativamente. Gli strati superiori dell'atmosfera, che contengono cristalli di ghiaccio, scivolano sugli strati inferiori, nei quali l'acqua si trova sotto forma di goccioline finissime (nuvole di cotone), e l'attrito del ghiaccio sull'acqua appare così come la sorgente primitiva delle elettrizzazioni osservate.

Edlund pensa che la Terra, come un magnete rotante, produca nell'atmosfera le forze elettromotrici che incontreremo nello studio dell'induzione unipolare. Questa teoria ha sollevato numerose e importanti obiezioni. Liebenow (1900) vede la sorgente dell'elettricità terrestre nelle forze elettromotrici agenti, nell'atmosfera, tra gli strati inferiori caldi e gli strati superiori freddi. La differenza di temperatura deve produrre un movimento dell'elettricità negativa verso la superficie terrestre e un movimento di quella positiva nella direzione opposta. Liebenow ha studiato in dettaglio le forze elettriche che si generano, a causa delle differenze di temperatura, attorno ad ogni goccia d'acqua che si forma o che cade. Brillouin (1900) ha trovato che il ghiaccio elettrizzato negativamente perde rapidamente la sua carica sotto l'influenza della radiazione ultravioletta, ciò che non si osserva quando il ghiaccio viene sostituito dall'acqua. Ha basato la seguente teoria su questo fenomeno. Se esiste in qualsiasi momento nell'atmosfera un campo elettrico, gli aghi di ghiaccio dei cirri saranno elettrizzati dall'influenza positiva da un lato, negativa dall'altro. Se accade che l'estremità negativa degli aghi di ghiaccio riceva la radiazione solare ultravioletta, gli aghi di ghiaccio così illuminati perderanno tutta la loro carica negativa e rimarranno positivamente elettrizzati. Brillouin ipotizza che l'elettricità negativa persa dagli aghi di ghiaccio si depositi nell'aria circostante. L'insieme della nube appare quindi come positivo, quando gli aghi si separano dall'aria circostante. Nella formazione dei cirri per mescolamento sono frequenti i movimenti indipendenti delle masse d'aria vicine, alcune nuvolose, altre limpide. L'aria negativa si separerà quindi dai cirri positivi. Se la massa d'aria negativa scende, e se, sempre negativa (perché l'elettricità non può dissiparsi), raggiunge il suolo coltivato,

le innumerevoli spighe d'erba o foglie faciliteranno lo scambio di elettricità tra suolo e l'aria. Il suolo continentale è quindi caricato negativamente dallo scambio con l'aria. Sulla superficie dei mari non accade nulla di simile: l'aria rimane negativa; si carica di vapori; ma quando, per espansione, questo vapore si condensa in goccioline sottili, queste, come punte sottili, prendono la loro carica dall'aria. I cumuli delle regioni oceaniche sono di conseguenza negativi. A livello del suolo non si avverte alcuna azione diretta delle radiazioni ultraviolette, perché queste radiazioni difficilmente vi arrivano e perché l'acqua non è sensibile ad esse.

Dobbiamo ancora dire alcune parole delle nuove teorie, sorte dopo l'anno 1899 e che sono basate principalmente sul fatto della ionizzazione dell'aria. I principali fondatori di queste teorie sono Elster e Geitel, così come Ebert. Indicheremo prima una serie di fatti.

Linss (1883) ha fatto per primo ricerche sistematiche sulla perdita delle due elettricità in aria libera. Ha trovato una serie di risultati già interessanti; ha osservato che i due tipi di elettricità generalmente non si perdono con la stessa rapidità e che il tasso di perdita dipende dallo stato dell'aria, dall'ora del giorno, dalla stagione e da altre cause. Le sue opere, tuttavia, non hanno attirato l'attenzione che meritavano. Elster e Geitel si sono nuovamente occupati, 17 anni dopo, dello studio del tasso di perdita mostrando quanto fosse importante l'osservazione della perdita di elettricità per caratterizzare lo stato elettrico dell'atmosfera.

Le esperienze di Elster e Geitel e di C. T. R. Wilson hanno mostrato che l'aria atmosferica contiene sempre un certo numero di ioni di entrambi i segni, analogo a quelli prodotti dai raggi Röntgen o di Becquerel, cioè piccoli ioni, di mobilità prossima a  $1,5 \text{ cm/s}$ , in un campo di un volt per centimetro. P. Langevin e M. Moulin, negli esperimenti che portano avanti dal 1905 alla Torre Eiffel, hanno riconosciuto l'esistenza costante nell'aria di ioni molto meno mobili dei precedenti, da mille a tremila volte, grandi ioni vere e proprie particelle o goccioline dell'ordine del centesimo di micron di diametro e contenenti almeno un milione di molecole analoghe agli ioni osservati da Townsend nei gas recentemente preparati e da E. Bloch nell'aria a contatto con il fosforo. Gli ioni ordinari sono invece molto più piccoli, dell'ordine delle dimensioni molecolari; contengono un massimo di dieci o venti molecole raggruppate per attrazione elettrostatica attorno a un centro elettrizzato. È notevole che l'esperimento abbia dimostrato l'assenza di centri intermedi tra gli ioni piccoli e grandi. Esistono quindi categorie distinte di particelle elettrizzate nell'aria e i ruoli che svolgono sono nettamente diversi.

Grazie alla presenza di ioni, l'aria ha un certo grado di conducibilità, che produce anche una perdita di cariche elettriche; la conducibilità dell'aria è dovuta per la maggior parte agli ioni piccoli, perché se le densità volumetriche possono essere cinquanta volte maggiori per gli ioni grandi che per i piccoli, le loro mobilità sono circa duemila volte inferiori, cosicché la conducibilità dovuta agli ioni grandi è poco più del quarantesimo di quello dovuto ai piccoli. Va notato che gli ioni negativi hanno una maggiore mobilità rispetto agli ioni positivi; inoltre la facoltà posseduta dagli ioni di condensazione del vapore acqueo, che è stata dimostrata da Wilson, è maggiore negli ioni negativi che in quelli positivi.

I grossi ioni sono tanto più numerosi perché l'atmosfera contiene un maggior numero di particelle in sospensione, e il loro numero deve aumentare in proporzione al numero di queste particelle. Occorre infatti stabilire un equilibrio tra le varie categorie di particelle cariche e scariche, presenti contemporaneamente nell'atmosfera, gli ioni grandi essendosi formati per diffusione degli ioni ordinari verso le particelle neutre e distruggendosi per restituire la particella neutra per ricombinazione con piccoli ioni di segno opposto. I grandi ioni e le particelle neutre di cui essi implicano la presenza svolgono il ruolo essenziale nella formazione degli strati inferiori delle nubi (strati e cumuli tra i 1000 e 2000 metri di altitudine). Queste particelle, infatti, condensano il vapore acqueo appena sovrassaturo e quando una massa di aria umida sale e si raffredda per espansione adiabatica, è su di esse che si formano prima di tutto le gocce. Quando queste gocce sono abbastanza grandi in modo che il loro composto cada con la velocità di ascensione dell'aria le lasci stazionarie, la massa d'aria che continua a salire non può più

formare gocce se non per condensazione sugli ioni ordinari che richiedono un considerevole supersaturazione (una pressione di vapore da 6 a 8 volte maggiore della pressione massima), cosicché bisogna salire ad una quota molto più alta, per ottenere quel secondo strato di nubi formatosi sui piccoli ioni, presumibilmente fino all'altezza dei cirri, spesso situati a 10 o 12 chilometri.

Dall'equilibrio sopra indicato tra gli ioni e le particelle in sospensione nell'aria, deriva che il numero degli ioni grandi deve variare in senso inverso a quello dei piccoli, poiché la ricombinazione tra le due specie deve, per la gran parte, equilibrare la produzione di ioni da parte delle varie radiazioni. L'esperimento infatti mostrò a P. Langevin e M. Moulin variazioni opposte delle due categorie di ioni, nonché variazioni del campo elettrico terrestre opposte a quelle degli ioni piccoli e parallele a quelle dei grandi.

Il tasso di dispersione dell'aria può essere utilizzato per misurare la sua ionizzazione. Lo strumento impiegato da Elster e Geitel per questa misura è mostrato in Fig. 159. Ebert (1901), Gerdien (1905) e Langevin e Moulin (1907) hanno costruito dispositivi di aspirazione di ioni, che vengono utilizzati per determinare il contenuto di ioni nell'aria in un determinato luogo. Il metodo di Ebert consiste nel far passare attraverso il campo elettrico di un condensatore cilindrico una corrente d'aria sufficientemente lenta in modo che tutti gli ioni di un segno (si tratta unicamente dei piccoli negli esperimenti di Ebert) possono essere raccolti dall'armatura interna, collegata a un elettroscopio. È il metodo di Ebert utilizzato per la prima volta da Langevin e Moulin nelle loro esperienze della Torre Eiffel. Essi li hanno condotti a scoprire la presenza di grandi ioni nell'aria, e a notare nello stesso tempo variazioni molto improvvise nei risultati ottenuti in istanti molto ravvicinati. In queste condizioni, le osservazioni isolate non sono sufficienti, ed essi hanno adottato un metodo di registrazione fotografica, che si presta altrettanto bene alla registrazione di piccoli ioni come pure di grandi ioni. L'enorme differenza nella mobilità di questi centri rende facile separarli e richiede un condensatore di capacità diversa per ogni specie di ione.

Lo studio della dispersione dell'elettricità nell'aria ha portato ai seguenti risultati:

1. La perdita è particolarmente elevata con tempo sereno; diminuisce con tempo scuro e diventa molto debole con la nebbia.

2. Sulla superficie terrestre, l'elettricità negativa viene generalmente persa più velocemente di quella positiva. Ne consegue che negli strati inferiori dell'atmosfera c'è un eccesso di ioni positivi.

3. La Terra ha evidentemente una carica negativa, la cui intensità è particolarmente elevata sulle cime delle montagne. Qui l'eccesso di ioni positivi è massimo e di conseguenza anche la differenza tra le velocità di dispersione.

4. Quando ci si innalza al di sopra della superficie terrestre (in un pallone), si osserva un rapido aumento della ionizzazione; ad un'altezza di 3000 m, la perdita è 30 volte maggiore che alla superficie della Terra; ma qui il tasso di dispersione è lo stesso per entrambe le elettricità.

5. In estate, la dispersione è maggiore che in inverno, quando la superficie terrestre è ricoperta di neve e ghiaccio.

6. Esiste certamente una relazione tra la variazione diurna dell'elettrizzazione dell'aria e quella della pressione atmosferica.

7. Elster e Geitel hanno scoperto che l'aria delle caverne, nei cunicoli sotterranei, nei pozzi, ecc. è sempre fortemente ionizzata. Si è anche constatato che l'aria del suolo, cioè l'aria che viene estratta con qualsiasi processo dal terreno, è in particolare altamente ionizzata.

8. L'aria contiene certamente tracce di sostanze radioattive o delle loro emanazioni. L'acqua del suolo e l'aria del suolo sono altamente radioattive. L'aria, attraversata da tale acqua, è ionizzata (J. J. Thomson).

Ci limiteremo a questa sintesi dei fatti. Sono serviti come base per costruire un'intera serie di nuove teorie sull'elettricità terrestre. Queste teorie devono rispondere alle seguenti tre domande:

I. Da dove proviene la ionizzazione dell'aria?

II. Da dove proviene la differenza degli stati elettrici della sfera terrestre e dell'atmosfera che la circonda, e perché tale differenza è mantenuta?

III. Come si spiegano i fatti di osservazione precedenti?

Elster e Geitel dapprima hanno supposto che la ionizzazione dell'aria fosse prodotta dalle radiazioni ultraviolette del Sole; una teoria analoga fu poi sviluppata da Rudolph. Elster e Geitel hanno spiegato l'elettrizzazione negativa della sfera terrestre e l'eccesso di ioni positivi negli strati inferiori dell'atmosfera con la maggiore mobilità degli ioni negativi, che cedono più rapidamente le loro cariche alla sfera terrestre. Sembrava, per un certo tempo, che questa teoria soddisfacesse tutti i requisiti e rispondesse completamente a tutte le domande precedenti. Ma gli esperimenti di Simpson (1903), che hanno dimostrato che un metallo isolato non è elettrizzato dall'aria ionizzata, hanno scosso questa teoria. Ebert (1904) ne ha poi proposta una nuova, basata sul fatto che quasi tutte le parti costitutive della crosta terrestre possiedono una certa radioattività, anche se molto debole. Di conseguenza, l'aria nel terreno è fortemente ionizzata e possiede anche radioattività, che deve essere particolarmente evidente in grotte, cunicoli, ecc. L'aria del suolo, quando affiora all'esterno attraverso fessure capillari, cede soprattutto cariche negative alle pareti di queste fessure; deve essere così secondo i risultati degli esperimenti di Zeleny, Villari, Simpson e Townsend. L'aria del suolo, uscendo all'esterno, deve quindi possedere un eccesso di ioni positivi; Questo spiega una serie di fatti: l'elettrizzazione negativa della sfera terrestre e positiva degli strati inferiori dell'atmosfera; la diminuzione della ionizzazione in inverno, dove è impedito il deflusso dell'aria dal suolo; l'influenza della pressione atmosferica, la cui diminuzione dovrebbe favorire la fuoriuscita di aria dal suolo, ecc. Ebert ha dimostrato che l'intensità della radioattività della crosta terrestre è perfettamente sufficiente a spiegare anche, dal punto di vista quantitativo, i fenomeni elettrici osservati nell'atmosfera in condizioni normali. Simpson (1900) e Gerdien (1905) si sono espressi contro la teoria Ebert. Kurz (1907) ha cercato fino a quale punto le sostanze radioattive contenute nell'atmosfera influenzano i risultati delle misure dell'elettricità atmosferica.

Non discuteremo le teorie dei fenomeni temporaleschi, né quelle dell'aurora boreale. Di grande interesse sono le teorie più recenti, in cui un ruolo importante è assegnato ai raggi catodici, che si formano negli strati superiori dell'atmosfera sotto l'influenza dei raggi solari o addirittura vengono emessi direttamente dal sole.

Per quanto riguarda i fenomeni temporaleschi, indicheremo semplicemente come possano manifestarsi all'improvviso questi enormi potenziali, che danno origine alle gigantesche scariche che conosciamo (fulmini). Supponiamo che  $n^3$  goccioline d'acqua finissime, il cui potenziale è uguale a  $v$ , si uniscano in un'unica goccia; sia  $r$  il raggio,  $s$  l'area,  $e$  la carica,  $k$  la densità di carica di una goccia, così che  $k = e : s$ ,  $v = e : r$ . Siano  $R$  il raggio,  $V$  il potenziale,  $E$  la carica,  $K$  la densità elettrica e  $S$  la superficie della grossa goccia formata; in questo caso si ha  $R = nr$ ,  $S = n^2s$ ;  $E = n^3e$ , e di conseguenza

$$K = \frac{E}{S} = \frac{n^3e}{n^2s} = n \frac{e}{s} = nk$$

$$V = \frac{E}{R} = \frac{n^3e}{nr} = n^2 \frac{e}{r} = nv$$

Se si tratta della formazione di una goccia di pioggia, per condensazione di una nebbia,  $n$  può essere un numero molto grande. Una debole elettrizzazione delle goccioline di nebbia può quindi dare alti potenziali alle gocce di pioggia, e per estensione scariche sotto forma di fulmini. Che un'improvvisa e abbondante formazione di gocce di pioggia possa essere accompagnata da un fulmine è confermato dal fatto ben noto del raddoppio della pioggia in un temporale, pochi secondi dopo la comparsa del fulmine in prossimità dello zenit.

Schuster (1907) ha cercato di trovare una relazione tra i fenomeni elettrici nell'atmosfera e l'attività del Sole. La variazione diurna del campo magnetico terrestre deve essere causata da correnti elettriche nell'atmosfera, dipendenti dalla variazione diurna della pressione atmosferica. La conduttività dell'aria dipende dall'angolo sotto il quale i raggi solari cadono sugli strati atmosferici orizzontali. Negli strati superiori dell'atmosfera, una fortissima ionizzazione deve essere causata dal Sole e quindi deve essere anche la causa predominante della conducibilità. Durante il massimo delle macchie solari, questa azione del Sole raggiunge la sua massima intensità.



## **Campo Magnetico Costante**





## 6. Proprietà del campo magnetico costante

### 1. Fatti fondamentali

Abbiamo studiato, nel libro I, il campo elettrico costante, le sue proprietà e le circostanze in cui si produce. La proprietà più caratteristica di un tale campo consiste nella comparsa, in ciascuno dei suoi punti, di una forza di natura particolare, che abbiamo designato con il nome di forza elettrica. Questa forza agisce solo sui corpi elettrizzati, ma non indifferente che la carica sia reale o fittizia. Esiste una carica reale sui conduttori, così come sui non conduttori, che si elettrizzano per attrito, per esempio; si suppone che una carica fittizia sia distribuita sulla superficie dei dielettrici che si trovano in un campo elettrico e sono ivi soggetti alla polarizzazione del dielettrico. Il campo stesso, inoltre, esiste solo dove sono presenti cariche reali di elettricità; per parlare più esattamente, non abbiamo ancora incontrato altri casi in cui questo campo si manifesta.

È possibile produrre, in una data parte dello spazio, forze di altra natura, chiamate *forze magnetiche*; chiamiamo un tale spazio un *campo magnetico* e si dice che è *costante*, quando le forze che agiscono in ciascuno dei suoi punti non variano nel tempo. Si potrebbe chiamare un tale campo *magnetostatico*; lo chiameremo semplicemente, in questo secondo Libro, campo magnetico. Un campo magnetico si dice uniforme quando la forza magnetica ha la stessa intensità o la stessa direzione in tutti i suoi punti; una di queste due condizioni è la necessaria conseguenza dell'altra.

Per evidenziare un campo magnetico, si può utilizzare un ago magnetico, la cui costruzione e le cui proprietà fondamentali assumeremo essere ben note a tutti. Ha due poli, un polo nord e un polo sud. Quando si pone, in un campo magnetico uniforme, un ago magnetico, sui suoi due poli agiscono forze uguali in intensità, ma in versi opposti; lo stesso si ha quando si porta, nello stesso punto di un campo non uniforme, prima uno dei poli dell'ago, poi l'altro. La direzione della forza che agisce sul polo nord di un magnete è considerata la direzione della forza che agisce nel campo magnetico.

Prima di considerare più approfonditamente le circostanze in cui si produce un campo magnetico e le sue proprietà, faremo un breve accenno ad alcuni fatti fondamentali, ben noti in Fisica elementare.

Esistono due sorgenti principali del campo magnetico: i magneti e le correnti elettriche. I magneti sono sia permanenti, realizzati principalmente in acciaio, sia temporanei, ad esempio pezzi di ferro dolce posti in un campo magnetico. Poiché i magneti temporanei possono sorgere solo in presenza di un campo magnetico, è chiaro che non possono essere strettamente classificati tra le sorgenti del campo magnetico, o almeno tra le sorgenti primarie. I magneti temporanei, che si formano nel campo magnetico di una corrente elettrica, sono chiamati elettromagneti.

I. I magneti permanenti in acciaio possono essere costruiti solo in un campo magnetico preesistente. Ma, quando c'è la scomparsa della sorgente di questo campo, il campo stesso non è completamente soppresso. Una parte rimane, legata, per così dire, al magnete d'acciaio e si muove contemporaneamente ad esso, cosicché tale magnete può già essere considerato come una sorgente indipendente di campo magnetico. I magneti attraggono ferro, acciaio, nichel, cobalto e poche altre sostanze; questi metalli aderiscono alla superficie dei magneti. Si distinguono,

in ogni magnete, una parte nord e una parte sud, le cui superfici sono separate da una zona indifferente, lungo e in prossimità della quale l'attrazione è nulla o impercettibile. Esiste, in ciascuna delle due parti, un punto che si chiama polo; ai poli vengono dati i rispettivi nomi di polo nord e polo sud.

Si può ammettere che sui punti molto distanti dal magnete agiscano solo due forze risultanti dai poli. Viceversa, quando un magnete si trova in un campo magnetico uniforme, su di esso agisce una coppia, come vedremo, e i poli fungono da punti di applicazione delle forze di questa coppia. Nei normali magneti a barra, così come negli aghi magnetici, i poli sono vicini alle estremità del magnete. La retta che unisce i due poli si chiama asse del magnete.

Una delle proprietà più caratteristiche dei magneti, sia permanenti che temporanei, è che, se un magnete viene rotto o frammentato, ciascuna delle sue parti manifesta ancora tutte le proprietà di un magnete: su di esso si trovano una parte nord e una sud, due poli, ecc. Quando si avvicina una calamita ad un'altra calamita molto mobile, si nota che i poli di nomi opposti si attraggono, i poli di nome uguale si respingono. Abbiamo già spiegato in precedenza cosa dobbiamo intendere con queste espressioni.

Un magnete molto mobile, posto in un campo magnetico già esistente a causa di altri magneti o correnti elettriche, tende ad assumere una posizione in cui il suo asse ha la stessa direzione delle forze magnetiche. Questa definizione non è del tutto esatta, ma possiamo mantenerla provvisoriamente, in particolare nel caso di un piccolo magnete. È completamente esatto quando il campo è uniforme.

Lo spazio, che circonda la sfera terrestre, è un campo magnetico; lo studio di tutti i fenomeni magnetici che avvengono in questo campo costituisce la teoria del magnetismo terrestre. La direzione della forza magnetica in un dato punto di questo campo ossia la direzione della forza del magnetismo terrestre forma con il piano orizzontale un angolo che si chiama inclinazione magnetica. L'asse di un magnete perfettamente mobile prende la direzione di questa forza. L'inclinazione è nord in quasi tutti i punti dell'emisfero settentrionale; in altre parole, la metà nord di un magnete perfettamente mobile punta verso il basso. Il piano verticale che passa per questa direzione è chiamato meridiano magnetico. L'angolo che il meridiano magnetico forma con il meridiano geografico si chiama declinazione magnetica; per Parigi, questo angolo è attualmente (1912), circa  $13^{\circ}50'$  verso ovest. Un ruolo molto importante è svolto dalla componente orizzontale della forza magnetica terrestre, che è uguale alla forza magnetica, agente in un dato punto, moltiplicato per il coseno dell'angolo di inclinazione. L'asse di un magnete, libero di ruotare attorno ad un asse verticale (ago magnetico della bussola), è posto nel meridiano magnetico, cioè nella direzione della componente orizzontale della forza magnetica terrestre. L'asse di tale magnete forma un angolo con il meridiano geografico pari alla declinazione magnetica. Quando la declinazione è piccola, possiamo dire che l'ago magnetico indica il nord con la sua estremità nord, il sud con la sua estremità sud.

II. La *corrente elettrica* è un fenomeno il cui carattere fondamentale può attualmente considerarsi noto a tutti. Può essere prodotto in molti modi diversi, che esploreremo in dettaglio in seguito. In pratica, la si ottiene più spesso in conduttori metallici, a forma di fili. *Lo spazio che circonda la corrente elettrica o i conduttori in cui passa è un campo magnetico.* Quando tutte le proprietà della corrente rimangono invariate per un certo tempo, anche le proprietà di questo campo magnetico non variano; lo spazio, che circonda una corrente elettrica costante, è un campo magnetico costante. Una corrente costante deve essere chiusa, cioè l'insieme dei conduttori attraverso i quali passa deve formare un circuito chiuso.

La corrente elettrica o, più esattamente, il conduttore percorso dalla corrente elettrica è sottoposto, quando è posto in un campo magnetico già esistente, dovuto ad eventuali magneti o ad altre correnti elettriche, all'azione di determinate forze, che si possono considerare come applicate al conduttore stesso, in quanto tendono a muoverlo; abbiamo chiamato tali forze forze ponderomotrici. Se poi si aggiunge che esistono nello spazio circondante la corrente forze

agenti sui magneti, ci si trova naturalmente portati ad introdurre la nozione di azioni reciproche, prima tra corrente e magnete, e poi tra corrente e corrente. L'espressione mutua azione indica semplicemente, come sempre, il fatto che ciascuno dei due corpi (un conduttore percorso da una corrente e un magnete o due conduttori percorsi da correnti) è sottoposto, in presenza dell'altro, a determinate forze ponderomotrici. Vedremo in seguito quali sono le direzioni di queste forze nei diversi casi.

Quando si studia semplicemente una parte di un campo magnetico e non ci sono in questa parte del campo né magneti né correnti elettriche, non si può sapere se il campo è dovuto alla presenza di magneti o a quella di correnti elettriche, in altre parti del lo stesso campo inaccessibili all'osservazione. *Le proprietà dei rispettivi campi magnetici di un magnete e di una corrente sono assolutamente identiche.* Tuttavia, ciò cessa di essere esatto quando si studiano parti del campo che si trovano nelle immediate vicinanze delle sorgenti, vale a dire di magneti o conduttori attraversati da correnti. Queste due sorgenti si distinguono poi essenzialmente l'una dall'altra, ad esempio per il modo di distribuzione delle forze; c'è anche un'altra differenza, di cui parleremo più avanti.

Se lo stesso campo magnetico può essere prodotto sia dalla presenza di magneti che da quella di correnti, ne consegue che *i magneti e le correnti sono equivalenti*, vale a dire che i magneti possono essere sostituiti da correnti e viceversa le correnti da magneti, senza che il campo magnetico venga modificato in nessun punto di una parte dello spazio che non contiene né magneti né correnti. Se c'è un'equivalenza, essa deve esprimersi con due regole determinate e quantitative, che forniscono la posizione e le proprietà dei magneti equivalenti alle correnti date o delle correnti equivalenti ai magneti dati. Entrambe queste regole esistono. La prima regola indica come può un magnete, nel caso più semplice, essere sostituito con un solenoide e, nel caso generale, con un sistema di correnti più complesso, conforme alla teoria proposta da Ampère. La seconda regola determina come una corrente può essere sostituita da un doppio strato magnetico. Sarebbe prematuro entrare più nel dettaglio qui; faremo, nel seguito, un ampio studio di queste due regole.

## 2. Confronto delle proprietà del campo magnetico costante e quelli del campo elettrico costante

Passiamo alla questione molto importante dell'analogia che può esistere tra le proprietà del campo magnetico e quelle del campo elettrico che abbiamo precedentemente studiato. In che cosa consistono, d'altronde, i caratteri distintivi più eclatanti di questi due campi, a parte naturalmente la differenza fondamentale che nell'uno agiscono forze elettriche, nell'altro forze magnetiche, vale a dire che in uno dei corpi elettrizzati, negli altri magneti e conduttori attraversati da correnti sono soggetti a forze ponderometriche?

La risposta a queste due domande ha una grande importanza pratica, perché può, se esistono proprietà analoghe nei due campi, permetterci di utilizzare alcuni dei risultati già ottenuti nello studio del campo elettrico. Non siamo certo in grado di darlo in modo completo ed esaurire questo argomento, ma possiamo far conoscere le analogie più evidenti tra il campo magnetico e il campo elettrico e le proprietà per cui il primo differisce essenzialmente dal secondo.

### A. PROPRIETÀ DEL CAMPO MAGNETICO ANALOGHE A QUELLE DEL CAMPO ELETTRICO.

I. L'azione, in un dato punto, dei magneti, e di conseguenza anche delle correnti, può essere sostituita da quella di due sostanze fittizie, analoghe alle due elettricità. Chiameremo queste sostanze magnetismi nord e sud liberi o semplicemente magnetismi; parleremo anche di *masse magnetiche* aventi tale e tal'altra distribuzione. Masse magnetiche con lo stesso nome si respingono mutuamente; masse di nomi contrari si attraggono.

II. La forza  $f$  dell'azione reciproca esercitata l'una sull'altra dalle masse magnetiche  $m$  ed  $m'$  situate in un mezzo omogeneo è data dalla formula di Coulomb

$$f = \frac{Cmm'}{\mu r^2} \quad (6.0.1)$$

dove  $C$  è un fattore di proporzionalità,  $r$  la distanza tra le masse,  $\mu$  una grandezza che dipende dal mezzo in cui si trovano  $m$  ed  $m'$ ; quest'ultima grandezza si chiama la *permeabilità magnetica* della sostanza che costituisce il mezzo ed è del tutto analoga alla costante dielettrica  $K$ , che abbiamo chiamato anche permeabilità elettrica. Nel vuoto, cioè nell'etere libero, si ha  $\mu = 1$ . L'identità della formula (1) e della formula di Coulomb relativa alle masse elettriche, mostra che tutte le proprietà geometriche ed analitiche del campo elettrico stabilite nel primo Libro, ad esempio quelle delle linee di forza, ecc., corrispondono ad analoghe proprietà del campo magnetico. Possiamo quindi, senza ripetere le dimostrazioni, utilizzare i risultati e le formule già ottenute, sostituendo le masse elettriche  $\mu$  con le masse magnetiche  $m$ , la grandezza  $K$  con la grandezza  $\mu$  e le linee di forza del campo elettrico con le linee di forza magnetiche del campo magnetico.

III. I corpi magnetici, cioè i corpi che, posti in un campo magnetico, acquistano le proprietà dei magneti, sono per molti aspetti del tutto analoghi ai dielettrici, di cui abbiamo studiato le proprietà nel primo libro. Quanto stabilito per i dielettrici può essere applicato anche ai corpi magnetici.

B. PROPRIETÀ DEL CAMPO MAGNETICO DIVERSE DA QUELLE DEL CAMPO ELETTRICO. 1. Non ci sono conduttori di magnetismo analoghi ai conduttori di elettricità; quindi le formule e le dimostrazioni che si riferiscono ai conduttori (distribuzione di carica, potenziale di un conduttore, condensatori, ecc.) non hanno alcuna applicazione nello studio del magnetismo. Tutti i corpi possiedono manifestamente proprietà magnetiche; in altre parole, tutti i corpi possiedono rispetto al magnetismo proprietà simili a quelle dei dielettrici rispetto all'elettricità. Ma queste proprietà appaiono chiaramente solo in un numero molto piccolo di sostanze, come ferro, acciaio, nichel, cobalto e alcuni minerali o leghe. Le proprietà magnetiche di altre sostanze sono molto poco osservabili; in altre parole, la loro permeabilità magnetica differisce di pochissimo dal valore  $\mu = 1$ , che si riferisce al vuoto, cioè allo spazio libero.

*Un magnete è analogo a un dielettrico polarizzato*; si può considerare formato da piccolissimi elementi polarizzati, dotati ciascuno di due poli, nei quali sono concentrate masse magnetiche quantitativamente uguali ma di nomi opposti. Chiameremo queste parti elementari magneti molecolari. Quando si ammette che, in un magnete, i magneti molecolari hanno un orientamento dominante, il polo nord da un lato, il polo sud dall'altro, si capisce facilmente perché, quando rompiamo un magnete, tutti i suoi frammenti rappresentano magneti completi, vale a dire hanno tutte le proprietà manifestate dal magnete originario prima della rottura. Supponendo infatti che tutte le proprietà di un magnete derivino dal dall'orientazione più o meno regolare dei magneti molecolari, è chiaro che ogni parte separata di un insieme deve presentare tutte le proprietà di un magnete, perché è composto, come l'intero magnete, da magneti molecolari associati parallelamente.

II. Esistono due tipi di corpi magnetici: i corpi *paramagnetici*, per i quali si ha  $\mu > 1$ , e i corpi *diamagnetici*, per i quali abbiamo  $\mu < 1$ ; i corpi diamagnetici possiedono una permeabilità magnetica inferiore a quella dell'etere libero. In tutti i dielettrici si ha  $K > 1$ , quindi sono tutti analoghi ai corpi paramagnetici. Abbiamo introdotto la formula  $K = 1 + 4\pi\gamma$  dove  $\gamma$  indica la suscettibilità elettrica. Incontreremo, nello studio del magnetismo, una formula analoga  $\mu = 1 + 4\pi\chi$ , dove  $\chi$  è detta *suscettività magnetica*. *La suscettività elettrica è sempre* (per tutti i dielettrici) *una grandezza positiva, mentre la suscettività magnetica può essere o positiva* (per i paramagnetici), *oppure negativa* (per diamagnetici).

Come abbiamo visto, le linee di induzione elettrica tendono a passare attraverso le sostanze che hanno la massima costante dielettrica  $K$  o la massima suscettibilità elettrica  $\gamma$ . Quando un

dielettrico viene introdotto in un campo elettrico, le linee di induzione subiscono un cambiamento; si condensano, per così dire, all'interno del dielettrico. Quando una sfera paramagnetica viene introdotta in un campo magnetico uniforme, per esempio, dove le linee di induzione sono rette parallele, queste linee sono disposte come mostrato nella figura 71. Con una sfera diamagnetica, si ottiene una distribuzione delle linee come quello mostrato in figura 70. Per i dielettrici posti nel vuoto, non è possibile un caso analogo a quello di quest'ultima figura; ma si ottiene portando, in un mezzo dielettrico, un dielettrico sferico, la cui permeabilità  $K$  è inferiore a quella del mezzo. Si può anche esprimere in altro modo quanto appena detto: il vuoto, cioè *l'etere libero*, possiede la più bassa permeabilità elettrica, ma non la più bassa permeabilità magnetica; è nel bismuto che ciò si osserva; la suscettibilità  $\chi$  assume, in questa sostanza, il suo massimo valore negativo.

III. Non esiste un magnetismo reale, cioè analogo alle cariche di elettricità che possono essere prodotte su conduttori e non conduttori in uno dei tanti modi considerati nella parte I. Il magnetismo libero, di cui abbiamo parlato sopra, è analogo all'elettricità fittizia dei dielettrici polarizzati. L'elettricità reale si trova all'inizio e alla fine delle linee di forza che vanno in tutte le direzioni da una superficie elettrizzata o che conduce ad essa. Le linee di forza magnetica non hanno né inizio né fine; sono linee chiuse. Quando subiscono una rifrazione, passando da un mezzo magnetico all'altro, possiamo sostituire la non omogeneità dei mezzi con uno strato di magnetismo libero sulla loro superficie di separazione. La parte nord di un magnete è la parte delimitata dalla superficie da cui partono le linee di forza; queste linee ritornano al magnete dalla superficie della parte sud. Si suppone che il magnete sia circondato da un mezzo la cui permeabilità magnetica  $\mu_1$  è minore della permeabilità magnetica  $\mu_2$  della sostanza del magnete. Se invece si avesse  $\mu_2 < \mu_1$ , il magnetismo nord si troverebbe sulla superficie da cui emergono le linee di forza.

Quando un pezzo di ferro viene portato in un campo magnetico, le linee di forza lo attraversano; è in questo che consiste la magnetizzazione del ferro, e ciò si manifesta con l'apparizione in esso delle parti nord e sud. Da nessuna parte, nel ferro, si trovano estremità delle linee di forza e, di conseguenza, da nessuna parte c'è magnetismo reale. Se si prende l'acciaio invece del ferro, una parte delle linee di forza magnetiche che lo attraversano persistono, come legate, per così dire, alla sostanza, dopo che la sorgente del campo magnetico è scomparsa. Esse sono disposte in parte all'interno, in parte all'esterno del pezzo di acciaio considerato e formano un sistema di linee chiuse. Pertanto, il magnetismo permanente presente nell'acciaio è essenzialmente indistinguibile dal magnetismo temporaneo, che si manifesta nel ferro dolce posto in un campo magnetico. Ne consegue ovviamente che i magneti permanenti non possiedono un magnetismo reale.

IV. LE LINEE DI FORZA DEL CAMPO MAGNETICO HANNO, PER DUE MOTIVI, UN CARATTERE POCO DIVERSO DA QUELLO DELLE LINEE DI FORZA DEL CAMPO ELETTRICO. Questi motivi sono l'inesistenza del magnetismo reale, nonché alcune proprietà particolari, puramente geometriche, delle linee di forza magnetiche del campo delle correnti elettriche. Da ciò derivano le seguenti proprietà speciali delle linee di forza magnetiche:

1. Le linee di forza magnetiche sono sempre chiuse; esse attraversano i corpi magnetizzati.
2. Le linee di forza magnetica di una corrente elettrica, che percorre un conduttore qualsiasi, non attraversano questo conduttore, ma solo lo avvolgono. Costituiscono un insieme di linee chiuse, interamente situate nell'ambiente esterno al conduttore. Un lungo filo rettilineo, percorso da una corrente elettrica, è circondato da linee di forza magnetica, che hanno la forma di cerchi, i cui piani sono perpendicolari al filo e i cui centri sono disposti sul suo asse. Le linee di forza hanno ancora la stessa forma, nelle immediate vicinanze del filo, anche quando non è rettilineo.
3. L'insieme delle linee di forza che circondano una corrente elettrica richiama il vortice dell'idrodinamica, il cui asse sarebbe nella direzione della corrente. Vedremo che ci sono, in ogni campo magnetico, parti dello spazio piene di vortici magnetici; potremmo chiamarli spazi vorticosi. Teoricamente un campo elettrostatico può contenere anche, in determinate condizioni,

spazi vorticosi; ma, il campo che è relativo alla presenza di cariche elettriche e di dielettrici polarizzati, non contiene tali spazi.

### 3. Formule relative a campo magnetico qualsiasi

L'analogia, indicata nel paragrafo precedente, tra le proprietà del campo magnetico e quelle del campo elettrico, permette di utilizzare certe dimostrazioni già presentate e di scrivere subito un gran numero di formule applicabili al campo magnetico. Ma, a causa delle differenze tra le proprietà dei due campi, diverse proposizioni precedentemente stabilite non possono essere estese al campo magnetico (conduttori, condensatori) e, in secondo luogo, si possono ottenere, per quest'ultimo, certe formule speciali, che non hanno significato per il campo elettrico. Esistono anche formule particolari per il campo di un magnete e altre per quello di una corrente. Considereremo, in questo paragrafo, le formule e le proposizioni applicabili a ogni campo magnetico.

L'azione esterna di un magnete può essere considerata come l'azione di masse magnetiche fittizie, distribuite in parte sulla superficie, in parte all'interno del magnete, oppure, secondo la teoria dell'equipollenza delle masse elettriche, semplicemente sulla superficie del magnete. L'azione esterna delle correnti si può esprimere anche, come vedremo, con l'azione di masse magnetiche disposte in un determinato modo. Due masse magnetiche  $m$  ed  $m'$  agiscono l'una sull'altra con una forza  $f$ , che considereremo positiva quando  $m$  e  $m'$  si respingono. Abbiamo già accennato alla formula

$$f = \frac{Cmm'}{\mu r^2}$$

$C$  rappresenta un fattore di proporzionalità,  $\mu$  la permeabilità magnetica del mezzo supposto omogeneo in cui si trovano  $m$  e  $m'$ , ed infine  $r$  la distanza tra loro. Considereremo anche le masse magnetiche del nord come quantità positive e quelle del sud come negative. Nel vuoto, e forse anche in certe sostanze, si ha  $\mu = 1$ . Trattandosi di corpi fortemente magnetici, si può assumere che  $\mu = 1$  in aria. Ponendo  $C = 1$ , si ottiene

$$f = \frac{mm'}{\mu r^2} \quad (6.0.2)$$

Nel vuoto si ha

$$f = \frac{mm'}{r^2} \quad (6.0.3)$$

Ponendo  $C = 1$  nella (1), si introduce l'unità di massa magnetica; si chiama unità elettromagnetica (el. mag.) Per  $m = m' = 1$  e  $r = 1$ , si ha  $f = 1$ . L'unità elettromagnetica di massa magnetica, agisce, nel vuoto, sulla stessa unità posta all'unità di distanza con una forza pari all'unità di forza. L'unità elettromagnetica C.G.S. di massa magnetica agisce, nel vuoto, sulla stessa unità posta a distanza l'una dall'altra con una forza pari a una dyne. Tutte le unità che incontreremo in seguito sono unità elettromagnetiche; ecco perché ometteremo, nella maggior parte dei casi, parlando di queste unità, la designazione el. mag. La formula (2) fornisce, per analogia con la (1-13,a), l'equazione dimensionale

$$[m] = [\mu]^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1} \quad (6.0.4)$$

Considerando  $\mu$  come un valore astratto, si ha

$$[m] = M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1} \quad (6.0.5)$$

Quando una massa magnetica è uniformemente distribuita su una superficie di area  $s$ , si dice che questa distribuzione ha una densità superficiale  $k$ , che è pari a  $k = m : s$ ; quando la

distribuzione non è uniforme, la densità superficiale in un dato punto è definita dalla relazione differenziale

$$dm = kds \quad (6.0.6)$$

Supponiamo che in un punto dato di un campo magnetico agisca, sulla massa  $m$ , la forza  $f$ ; il vettore

$$H = \frac{f}{m} \quad (6.0.7)$$

si chiama l'*intensità del campo magnetico* in questo punto. Invece di intensità, a volte si dice forza del campo magnetico, che è meno corretto. *Di solito si indicano con  $\alpha, \beta, \gamma$  le componenti dell'intensità  $H$  lungo gli assi delle coordinate.*

Sia  $ds$  l'area di un elemento di superficie,  $H_n$  la componente dell'intensità (forza)  $H$  lungo la normale alla superficie; il flusso di forza  $\Phi$  e il flusso di induzione  $\Psi$  attraverso la superficie sono dati dalle seguenti formule:

$$\Phi = \iint H_n ds \quad (6.0.8)$$

$$\Psi = \iint \mu H_n ds \quad (6.0.9)$$

In un mezzo omogeneo, si ha

$$\Psi = \mu\Phi \quad (6.0.10)$$

Ciascuno di questi flussi è la somma algebrica dei flussi risultanti delle varie particelle, isolate o meno, di magnetismo libero, ma sempre fittizio come abbiamo visto. Supponiamo che in un punto A ci sia la quantità di magnetismo  $m$ . Se il punto A si trova all'interno di una superficie chiusa  $s$ , si ha, per un mezzo omogeneo,

$$\Phi = \frac{4\pi m}{\mu} \quad (6.0.11)$$

$$\Psi = 4\pi m \quad (6.0.12)$$

essendo la normale tracciata verso l'esterno alla superficie  $s$ , considerando cioè i flussi come dall'interno verso l'esterno. Quando il punto A si trova sulla superficie  $s$  stessa, si ha, in un mezzo omogeneo,

$$\Phi = \frac{2\pi m}{\mu} \quad (6.0.13)$$

$$\Psi = 2\pi m \quad (6.0.14)$$

Infine, quando il punto A è esterno alla superficie  $s$ , si ha, in un mezzo omogeneo,

$$\Phi = \Psi = 0 \quad (6.0.15)$$

Le formule (7), (7a,b,c,d) restano applicabili, se  $m$  rappresenta masse magnetiche qualsiasi isolate o meno, ma situate solo all'interno, o solo sulla superficie  $s$ , o infine solo all'esterno di questa superficie. Nel caso generale in cui esistono rispettivamente le masse  $m_i, \bar{m}, m_c$  all'interno, in superficie e all'esterno, si hanno, in un mezzo omogeneo, le espressioni

$$\Phi = \iint H_n ds = \frac{4\pi m_i}{\mu} + \frac{2\pi \bar{m}}{\mu} \quad (6.0.16)$$

$$\Psi = \iint \mu H_n ds = 4\pi m_i + 2\pi \bar{m} \quad (6.0.17)$$

essendo la normale alla superficie  $s$  tracciata verso l'esterno di questa superficie, cioè considerando il flusso come dall'interno verso l'esterno. Il flusso di induzione è indipendente dalla natura del

mezzo omogeneo ambientale. Ammetteremo che non dipende affatto dalle proprietà del mezzo circostante, quando non è omogeneo, cioè il flusso di induzione è espresso anche, per un mezzo non omogeneo, dalla formula (8,b).

Indichiamo con  $\rho$  la densità di volume del magnetismo; si ha, in ogni punto del campo

$$\frac{\partial(\mu\alpha)}{\partial x} + \frac{\partial(\mu\beta)}{\partial y} + \frac{\partial(\mu\gamma)}{\partial z} = 4\pi\rho \quad (6.0.18)$$

essendo  $\alpha, \beta, \gamma$  le componenti dell'intensità  $H$ . In un mezzo omogeneo, si ha

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\gamma}{\partial z} = \frac{4\pi\rho}{\mu} \quad (6.0.19)$$

Nel vuoto e approssimativamente in aria, si ha

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\gamma}{\partial z} = 4\pi\rho \quad (6.0.20)$$

In tutti i punti dello spazio in cui  $\rho = 0$ , si ha

$$\frac{\partial(\mu\alpha)}{\partial x} + \frac{\partial(\mu\beta)}{\partial y} + \frac{\partial(\mu\gamma)}{\partial z} = 0 \quad (6.0.21)$$

In un mezzo omogeneo, si ha, per  $\rho = 0$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\gamma}{\partial z} = 0 \quad (6.0.22)$$

Supponiamo che una superficie  $s$  sia ricoperta di magnetismo e che la densità superficiale in un dato punto sia  $k$ ; indichiamo con  $n$  la direzione della normale esterna. Siano  $H_{1,n}$  e  $H_{2,n}$  le componenti normali dell'intensità del campo su entrambi i lati e vicino alla superficie,  $H_n$  la componente per un punto sulla superficie stessa. Supponendo che la permeabilità  $\mu$  sia la stessa su entrambi i lati di  $s$ , si ha

$$H_{1,n} - H_{2,n} = \frac{4\pi}{\mu}k \quad (6.0.23)$$

nel vuoto, si ha semplicemente

$$H_{1,n} - H_{2,n} = 4\pi k \quad (6.0.24)$$

inoltre,

$$H_{1,n} - H_n = H_n - H_{2,n} = \frac{2\pi}{\mu}k \quad (6.0.25)$$

e nel vuoto

$$H_{1,n} - H_n = H_n - H_{2,n} = 2\pi k \quad (6.0.26)$$

La superficie laterale di un tubo a pressione può essere fatta passare attraverso il contorno di un piccolo elemento di una superficie qualsiasi. Sia  $\sigma$  l'area di una sezione trasversale di questo tubo,  $\mu$  la permeabilità magnetica del mezzo nel punto in cui si trova l'elemento di di questa sezione.

L'integrale

$$\psi = \iint \mu H d\sigma \quad (6.0.27)$$

esteso all'area della sezione trasversale del tubo, si chiama *flusso di induzione magnetica nella sezione  $\sigma$  del tubo*. Si dimostra facilmente che il flusso di induzione rimane invariato lungo un tubo di induzione, in modo che si ha, per ogni due sezioni  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ ,

$$\iint \mu_1 H_1 d\sigma_1 = \iint \mu_2 H_2 d\sigma_2 \quad (6.0.28)$$



Se esistesse un magnetismo reale, analogo a ciò che abbiamo chiamato elettricità libera, e se, tra le sezioni  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  ci fosse una quantità  $m$  di questo magnetismo, la differenza  $\psi_2 - \psi_1$  dei flussi di induzione in queste le sezioni sarebbe uguale a

$$\psi_2 - \psi_1 = \iint \mu_2 H_2 d\sigma_2 - \iint \mu_1 H_1 d\sigma_1 = 4\pi m \quad (6.0.29)$$

ma non esiste magnetismo reale e quindi il flusso di induzione è lo stesso in tutte le sezioni di un tubo chiuso.

Occupiamoci ora delle proprietà di un tubo di forza magnetico in un mezzo omogeneo. Abbiamo dapprima la relazione

$$H_1 : H_2 : \sigma_2 : \sigma_1 \quad (6.0.30)$$

L'intensità del campo è inversamente proporzionale all'area della sezione trasversale del tubo. Possiamo introdurre la nozione di numero di linee di forza, come in precedenza. Sia  $N'$  questo numero, che si riferisce all'area unitaria normale alle linee di forza. Si dimostra facilmente che, in un mezzo omogeneo, si ha, per due sezioni qualunque di tubo di forza

$$N'_1 : N'_2 = H_1 : H_2 \quad (6.0.31)$$

Quando, in un mezzo omogeneo, si fa passare per ogni elemento  $ds$  di una superficie qualsiasi  $s$ , ovunque normale alle linee di forza,  $H'ds$  linee di forza, dove  $H'$  è l'intensità del campo sull'elemento  $ds$ , si ha, per tutti i punti del mezzo, l'uguaglianza

$$N' = H' \quad (6.0.32)$$

Invece di linee di forza si potrebbero considerare  $H'ds$  tubi di forza, la cui somma delle sezioni trasversali sarebbe uguale a  $ds$ . *Il numero di linee di forza o tubi di forza tracciati, come sopra indicato, in un mezzo omogeneo, a partire da una superficie qualsiasi  $s$  ovunque ortogonale a queste linee o tubi di forza, è, in tutti i punti di questo mezzo, uguale all'intensità del campo.*

Il flusso totale di forza  $\Phi$ , che attraversa una superficie qualsiasi  $s$ , è uguale al numero totale di linee di forza che intersecano questa superficie. Indicando questo numero con  $N$ , si ha

$$\Phi = \iint H_n ds = N \quad (6.0.33)$$

La grandezza

$$B = \mu H \quad (6.0.34)$$

si chiama induzione magnetica o semplicemente induzione in un dato punto del mezzo magnetico; è uguale al flusso di induzione magnetica, riferito all'unità di area normale alle linee di forza. Per un tubo di induzione molto sottile, si può scrivere l'uguaglianza (11.a) nella forma  $\mu_1 H_1 \sigma_1 = \mu_2 H_2 \sigma_2$  o  $B_1 \sigma_1 = B_2 \sigma_2$ , da cui

$$B_1 : B_2 = \sigma_2 : \sigma_1 \quad (6.0.35)$$

*Questa uguaglianza rimane vera; qualunque siano le due sezioni del tubo, situate anche in mezzi diversi, che si considerano, mentre la formula (12) si riferisce solo ad un mezzo omogeneo.* Conduciamo ora, per ogni elemento  $ds$  di qualsiasi superficie ovunque ortogonale ai tubi di induzione,  $B'ds$  tubi di induzione, dove  $B'$  rappresenta il valore dell'induzione per l'elemento  $ds$ . Si ha allora, in tutte le parti del campo magnetico, l'uguaglianza

$$N' = B' \quad (6.0.36)$$

dove  $N'$  indica il numero di tubi di induzione, riferito all'unità di area normale ai tubi. Il flusso di induzione  $\psi$  in ciascuno dei tubi di induzione così costruiti è uguale all'unità; se infatti

consideriamo solo uno di questi tubi di sezione  $\sigma$ , si ha  $\psi = \mu H' \sigma = N' \sigma$ ; essendo  $N' \sigma$  il numero di tubi che attraversano la sezione  $\sigma$ , si ha  $N' \sigma = 1$ , da cui  $\psi = 1$ . Chiameremo tali tubi di induzione unitaria. Si ha, in ciascuno di essi,

$$H' = \frac{1}{\mu \sigma} \quad (6.0.37)$$

$$B' = H' \mu = \frac{1}{\sigma} \quad (6.0.38)$$

Da una quantità  $m$  di magnetismo (fittizio) emana un numero

$$\nu = 4\pi m \quad (6.0.39)$$

tubi di induzione, e dall'unità di magnetismo il numero

$$\nu_1 = 4\pi \quad (6.0.40)$$

Ammetteremo che lungo un tubo di induzione unitario esiste una certa tensione  $p$ , uguale a

$$p = \frac{H'}{8\pi} = \frac{1}{8\pi \mu \sigma} \quad (6.0.41)$$

La tensione  $P$  per unità d'area normale ai tubi di induzione è

$$P = \frac{p}{\sigma} = \frac{H'}{8\pi \sigma} = \frac{\mu H'^2}{8\pi} = \frac{B' H'}{8\pi} = \frac{1}{8\pi \mu \sigma^2} \quad (6.0.42)$$

poiché in un tubo unitario il flusso uguale a  $\mu H' \sigma = B' \sigma = 1$ . Maxwell ha stabilito, con considerazioni analoghe a quelle già indicate, che è necessario, per l'equilibrio dei tubi di induzione, che la loro superficie laterale supporti una pressione pari a  $P$  (per unità di area).

Nel passaggio da un mezzo ( $\mu_1$ ) ad un altro ( $\mu_2$ ), i tubi di induzione subiscono una rifrazione. Se  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  sono gli angoli formati dall'asse di un tubo e dalla normale alla superficie di separazione dei due mezzi, si ha

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} = \text{cost} \quad (6.0.43)$$

La componente normale dell'induzione non subisce cambiamenti.

Quando esiste, in un mezzo la cui permeabilità è  $\mu_1$ , un corpo di permeabilità  $\mu_2$ , si ha, per ogni tubo di induzione, la relazione  $\psi = \mu_1 H_1 \sigma_1 = \mu_2 H_2 \sigma_2$  o  $\psi = B_1 \sigma_1 = B_2 \sigma_2$ . *Si può sostituire il corpo ( $\mu_2$ ) con uno strato di magnetismo fittizio, opportunamente distribuito sulla superficie di questo corpo, senza alcuna variazione del campo magnetico da questa sostituzione nel mezzo esterno.* La densità  $k$  di questo strato è determinata dalle formule

$$k\sigma = -\frac{\mu_2 - \mu_1}{4\pi \mu_2} \psi = -\frac{\mu_2 - \mu_1}{4\pi \mu_2} \mu_1 H_1 \sigma_1 = -\frac{\mu_2 - \mu_1}{4\pi} H_2 \sigma_2 \quad (6.0.44)$$

dove  $\sigma$  rappresenta un elemento di superficie del corpo. Quando il corpo si trova in un mezzo non magnetico ( $\mu_1 = 1$ ), si ha, ponendo  $\mu_2 = \mu$

$$k\sigma = -\frac{\mu - 1}{4\pi \mu} \psi = -\frac{\mu - 1}{4\pi \mu} H_1 \sigma_1 = -\frac{\mu - 1}{4\pi} H_2 \sigma_2 \quad (6.0.45)$$

ma  $\sigma_2 : \sigma = \cos \alpha$ , con  $\alpha$  l'angolo formato dalle linee di forza all'interno del corpo magnetico con la normale alla superficie di questo corpo; si ottiene così

$$k = -\frac{\mu - 1}{4\pi} H_2 \cos \alpha \quad (6.0.46)$$

La determinazione sperimentale della densità  $k$  presenta grandi difficoltà, poiché essa dipende dall'intensità del campo  $H_1$ , che a sua volta è in parte dovuta ad uno strato di magnetismo fittizio, cioè dipende da  $k$ . Il problema dello stato elettrico di una sfera dielettrica posta in un campo elettrico uniforme può essere preso come esempio per il problema da risolvere. Considereremo nel seguito un problema simile relativo al campo magnetico.

Un corpo, in cui  $\mu$  è maggiore del mezzo circostante, produce quindi in questo mezzo le stesse forze di uno strato di magnetismo libero che ricopre la superficie del corpo. Questo strato fittizio sembra esistere realmente e agire direttamente in tutti i punti del mezzo esterno. Questa azione è particolarmente intensa sulla superficie stessa del corpo, dove le attrazioni e le repulsioni sono particolarmente sensibili. Nello stabilire la formula (19), abbiamo supposto che le linee di induzione passino dal primo mezzo ( $\mu_1$ ) nel secondo ( $\mu_2$ ), cioè penetrino nel mezzo considerato. È chiaro che *la parte della superficie del corpo, attraverso la quale le linee o tubi di induzione entrano nel corpo, è ricoperta di magnetismo negativo, cioè sud ( $k < 0$ ), e la parte attraverso la quale escono dal corpo, di magnetismo positivo, cioè nord, se  $\mu_2 > \mu_1$ . Quando invece  $\mu_2 < \mu_1$  all'entrata dei tubi di induzione si trova magnetismo nord, all'uscita magnetismo sud.*

Supponiamo ora di avere  $\mu_1 = 1$  nel mezzo circostante; designiamo la permeabilità del corpo dato con  $\mu$  e l'intensità del campo magnetico all'interno di questo corpo con  $H$ . Immaginiamo di ritagliare un piccolissimo parallelepipedo retto di base  $s$ , di lunghezza  $l$  e di volume  $v = Is$ . Se effettivamente si separa questo parallelepipedo dal corpo, senza modificare i tubi induttori che lo attraversano e formano l'angolo  $\alpha$  con la normale alla base  $s$ , gli strati fittizi di magnetismo presentano sulle basi una densità, il cui valore assoluto è uguale a

$$k'_1 = \frac{\mu - 1}{4\pi} H \cos \alpha \quad (6.0.47)$$

Quando la lunghezza  $l$  è nella direzione delle linee di forza ( $\alpha = 0$ ), la densità sulle basi è uguale a

$$k' = \frac{\mu - 1}{4\pi} H \quad (6.0.48)$$

da cui

$$k'_1 = k' \cos \alpha \quad (6.0.49)$$

La quantità di magnetismo  $m$  su ciascuna delle basi è (per  $\alpha = 0$ ) uguale a

$$m = k' s \quad (6.0.50)$$

Il prodotto

$$M = ml \quad (6.0.51)$$

si chiama il *momento magnetico* dell'elemento che si è isolato mentalmente nel corpo. Il rapporto

$$I = \frac{M}{v} \quad (6.0.52)$$

cioè il *momento magnetico riferito all'unità di volume*, si chiama grado o intensità di magnetizzazione nel volume  $v$ . Ponendo  $M = ml = k'sl$  e  $v = sl$ , si trova

$$I = k' \quad (6.0.53)$$

Il grado di magnetizzazione è misurato dalla densità del magnetismo fittizio su un'area normale ai tubi di induzione. Quando la magnetizzazione non è uniforme, si può considerare un volume infinitamente piccolo  $\Delta v$  e scrivere  $\Delta M$  invece di  $M$ ; in questo caso, *il grado di magnetizzazione in un dato punto* è uguale a

$$I = \lim \frac{\Delta M}{\Delta v} = \frac{dM}{dv} \quad (6.0.54)$$

Il grado di magnetizzazione dipende dall'intensità del campo  $H$ ; quando si pone

$$I = \alpha H \quad (6.0.55)$$

$\alpha$  è detta *la suscettibilità magnetica della sostanza*. Le formule (23,a) e (20,a) danno

$$\frac{\mu - 1}{4\pi} H = \alpha H$$

da cui

$$\mu = 1 + 4\pi\chi \quad (6.0.56)$$

questa importante formula collega la permeabilità magnetica  $\mu$  e la suscettività magnetica  $\chi$ . Nel vuoto, si ha  $\mu = 1$ ,  $\chi = 0$ .

Consideriamo, all'interno di un corpo posto in un campo magnetico uniforme di intensità  $H$ , uno spazio vuoto delimitato da due piani paralleli infinitamente vicini, perpendicolari alle linee di forza del campo, e sia  $H'$  l'intensità del campo all'interno di questo vuoto. I piani saranno quindi ricoperti da strati di magnetismo fittizio, la cui densità è

$$k' = I = \chi H$$

Si ha, nel caso considerato

$$\mu = \frac{H'}{H} \quad (6.0.57)$$

e siccome  $\mu H = B$ , si veda la (13), segue che

$$B = H' \quad (6.0.58)$$

*La permeabilità magnetica di una sostanza è uguale al rapporto tra l'intensità del campo all'interno di questa sostanza (in una fenditura infinitamente stretta immaginata in questa sostanza) e l'intensità del campo esterno, per il quale  $\mu = 1$ .*

*L'induzione  $B$  è numericamente uguale all'intensità del campo nella fenditura infinitamente stretta immaginata all'interno della sostanza magnetica.*

Per finire con le proposizioni fondamentali della teoria delle linee di forza e delle linee di induzione nel campo magnetico, menzioneremo anche i metodi noti che sono indicati nella fisica elementare, per la ricerca pratica della forma delle linee di forza magnetica.

Uno di questi metodi si basa sul fatto che l'asse di un piccolo ago magnetico, molto mobile, posto nel campo magnetico, assume la direzione delle linee di forza. Notando la direzione dell'asse di tale ago nei diversi punti del campo magnetico, si può studiare completamente la distribuzione delle linee di forza in questo campo.

Un altro metodo consiste nello spruzzare limatura di ferro su un foglio di carta o un pezzo di vetro, posto orizzontalmente in un campo magnetico. Le particelle di limatura sono magnetizzate, aderiscono l'una all'altra per i loro poli di nome opposto e si raggruppano in file, lungo le linee di forza magnetica, disegnando quelli che vengono chiamati spettri magnetici. Diversi processi per fissare questi spettri sono stati proposti da Meunier, Faraday, Gerland, Ebert, Lindeck, Mach, Kowalski e altri, ma non ci fermeremo qui.

## 4. Potenziale magnetico

Abbiamo definito nel § 6 del capitolo I quello che si chiama potenziale elettrico  $V$ , in un campo elettrico costante dovuto a cariche di elettricità reale su conduttori o dielettrici. Una delle proprietà più importanti del potenziale elettrico consiste nel fatto che esso rappresenta, nelle circostanze indicate, una funzione del punto uniforme e continua. Abbiamo incontrato la nozione di discontinuità (salto) del potenziale solo introducendo l'idea del doppio strato elettrico.

Nella teoria del campo magnetico, una grandezza del tutto analoga, il potenziale magnetico, che indicheremo anch'esso con la lettera  $V$ , gioca un ruolo altrettanto preponderante. Tuttavia, l'analogia non è completa; presto incontreremo casi in cui il potenziale magnetico non è una funzione del punto uniforme e dove si può, partendo da un dato punto per tornare ad esso, ritrovare il valore iniziale del potenziale magnetico o un nuovo valore, secondo il percorso seguito.

Tuttavia, l'analogia tra il potenziale magnetico e il potenziale elettrico è completamente verificata, quando ci limitiamo, come faremo, al caso particolare in cui il campo magnetico è dovuto semplicemente ai magneti e si produce in un mezzo omogeneo ( $\mu = \text{cost}$ ). Supporremo quindi di non avere a che fare con correnti elettriche, ma solo con magneti permanenti distribuiti in qualche modo nello spazio ( $\mu$ ) e con corpi paramagnetici o diamagnetici. Le forze, che si manifestano nel campo magnetico al di fuori di questi magneti e di questi corpi non cambiano, supponendo che siano generati da masse magnetiche distribuite in modo determinato sulle superfici dei magneti e dei corpi magnetici. La densità superficiale  $k$  di questa distribuzione è data dalla formula (19), nella quale bisogna porre  $\mu_1 = \mu$ . Supporremo pertanto, per generalizzare, che oltre a questa distribuzione superficiale, esistano ancora masse magnetiche aventi una densità di volume  $\rho$ . Sia  $m$  o  $dm$  un elemento di magnetismo che genera il campo esterno,  $m'$  una massa posta in qualsiasi punto di questo campo.

L'energia potenziale  $W$  di due masse magnetiche  $m$  e  $m'$  distanti  $r$  è uguale a

$$W = \frac{mm'}{\mu r} \quad (6.0.59)$$

L'espressione generale del potenziale  $V$  in un punto qualunque A del campo magnetico è

$$V = \frac{1}{\mu} \int \frac{dm}{r} = \frac{1}{\mu} \iint \frac{k ds}{r} + \frac{1}{\mu} \iiint \frac{\rho dv}{r} \quad (6.0.60)$$

essendo  $ds$  e  $dv$  rispettivamente elementi di area e di volume.

Il lavoro  $R$  delle forze magnetiche, nello spostamento della massa magnetica  $m'$  dal punto A ( $V_1$ ) al punto B ( $V_2$ ), o il lavoro delle forze esterne che trasportano  $m'$  da B ad A, è dato dalla seguente espressione:

$$R = m' (V_1 - V_2) \quad (6.0.61)$$

Se si pone  $m' = 1$ ,  $V_1 = V$  e se si suppone B all'infinito, si ottiene  $R = V$ . *Il potenziale magnetico in un punto è uguale al lavoro svolto dalle forze magnetiche nel trasportare l'unità di massa magnetica ( $m = 1$ ), lungo un qualsiasi cammino, dal punto considerato all'infinito, o al lavoro di forze esterne, nel trasporto della massa  $m = 1$  dall'infinito a questo punto.* Il potenziale  $V$  è, in questo caso, una funzione uniforme e continua delle coordinate  $x, y, z$  del punto. Le superfici

$$V = \varphi(x, y, z) = \text{cost} \quad (6.0.62)$$

sono dette *superfici di livello* del potenziale magnetico. L'intensità  $H$  del campo è uguale a

$$H = -\frac{\partial V}{\partial n} \quad (6.0.63)$$

dove  $n$  è la direzione della normale alla superficie di livello; anche il vettore  $H$  ha la direzione di questa normale. Si hanno le formule

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial l} &= \frac{\partial V}{\partial n} \cos(n, l) \\ \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)^2 &= \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 \\ \frac{\partial V}{\partial l} &= \frac{\partial V}{\partial x} \cos(l, x) + \frac{\partial V}{\partial y} \cos(l, y) + \frac{\partial V}{\partial z} \cos(l, z) \end{cases} \quad (6.0.64)$$

La componente  $H_l$  dell'intensità lungo la direzione  $l$  è uguale a

$$H_l = -\frac{\partial V}{\partial l} \quad (6.0.65)$$

Indicheremo le componenti dell'intensità  $H$  lungo gli assi coordinati con  $\alpha, \beta, \gamma$ , di modo che  $\alpha = H \cos(H, \alpha)$ , ecc. e

$$H = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \quad (6.0.66)$$

Si ha allora

$$\alpha = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad \beta = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad \gamma = -\frac{\partial V}{\partial z} \quad (6.0.67)$$

e

$$\begin{cases} \frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{\partial \beta}{\partial x} \\ \frac{\partial \beta}{\partial z} = \frac{\partial \gamma}{\partial y} \\ \frac{\partial \gamma}{\partial x} = \frac{\partial \alpha}{\partial z} \end{cases} \quad (6.0.68)$$

Per la forza  $f$ , che agisce in un punto dato del campo magnetico sulla massa magnetica  $m'$ , si hanno le espressioni

$$\begin{cases} f = -m' \frac{\partial V}{\partial n} \\ f_l = -m' \frac{\partial V}{\partial l} \end{cases} \quad (6.0.69)$$

e, nel caso particolare in cui  $m' = 1$ ,

$$f_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad f_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad f_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

*Le linee di forza magnetiche sono (in quest'ultimo caso) le traiettorie ortogonali delle superfici di livello del potenziale.* La formula (8,a) dà

$$\iint \frac{\partial V}{\partial n} ds = -\frac{4\pi m_i}{\mu} - \frac{2\pi \bar{m}}{\mu} \quad (6.0.70)$$

essendo l'integrazione estesa ad ogni superficie chiusa  $s$ , essendo  $n$  la direzione della normale esterna all'elemento  $ds$  di tale superficie,  $m_i$  la somma delle masse poste all'interno,  $\bar{m}$  la somma di quelle poste sulla superficie stessa,  $V$  il potenziale non solo delle masse  $m_i$  e  $\bar{m}$ , ma anche delle masse arbitrarie  $m_e$  all'esterno della superficie  $s$ . All'interno delle masse magnetiche che possiedono una densità di volume (se ce ne sono), si ha,

$$\frac{\partial \left( \mu \frac{\partial V}{\partial x} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left( \mu \frac{\partial V}{\partial y} \right)}{\partial y} + \frac{\partial \left( \mu \frac{\partial V}{\partial z} \right)}{\partial z} = -4\pi \rho \quad (6.0.71)$$

dove  $\rho$  è la densità di volume. Al di fuori di tali masse, si ha  $\rho = 0$ . In un campo uniforme ( $\mu = \text{cost}$ ) e all'esterno delle masse magnetiche che hanno una densità di volume, si ha l'equazione

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (6.0.72)$$

Quando c'è una distribuzione superficiale del magnetismo, su una superficie su entrambi i lati della quale la permeabilità è rispettivamente  $\mu_1$  e  $\mu_2$ , e il potenziale  $V_1$  e  $V_2$ , si ha

$$\mu_1 \frac{\partial V_1}{\partial n} - \mu_2 \frac{\partial V_2}{\partial n} = -4\pi k \quad (6.0.73)$$

essendo  $n$  la direzione della normale dal lato  $\mu_1$ . In un mezzo omogeneo

$$\frac{\partial V_1}{\partial n} - \frac{\partial V_2}{\partial n} = -\frac{4\pi k}{\mu} \quad (6.0.74)$$

L'equazione dimensionale dell'unità di potenziale magnetico è

$$[V] = \frac{[m]}{[\mu] L} = \frac{[\mu]^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1}}{[\mu] L} = [\mu]^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1} \quad (6.0.75)$$

dove  $[\mu]$  è la dimensione della permeabilità magnetica. Se si considera  $\mu$  come un numero puro, si ha

$$[V] = M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1} \quad (6.0.76)$$

Chiameremo la quantità  $1 : \mu$ : la resistenza magnetica del mezzo, o ancora più semplicemente, con gli autori inglesi, la *riluttanza* del mezzo. Come abbiamo visto, il flusso di induzione magnetica  $\psi$  è una grandezza costante in tutte le sezioni di uno stesso tubo di induzione, per cui si ha, per un tubo molto sottile,

$$\psi = \mu H \sigma = \text{cost} \quad (6.0.77)$$

dove  $\sigma$  indica l'area della sezione trasversale del tubo. Sia  $dl$  la lunghezza di una parte infinitamente piccola del tubo; chiameremo riluttanza di questa parte l'espressione  $\frac{dl}{\mu\sigma}$  e riluttanza di una parte finita qualsiasi del tubo l'integrale

$$r = \int \frac{dl}{\mu\sigma} \quad (6.0.78)$$

La formula (36) dà

$$\psi \frac{dl}{\mu\sigma} = H dl$$

Se si integra lungo il tubo tra due qualunque delle sue sezioni trasversali e se si tiene conto che  $\psi$  è una costante, si ottiene

$$\psi \int \frac{dl}{\mu\sigma} = \int H dl$$

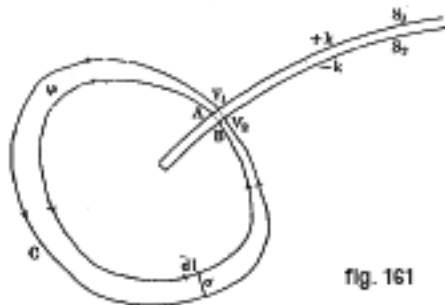
da cui, si veda la (37)

$$\psi = \frac{\int H dl}{\int \frac{dl}{\mu\sigma}} = \frac{\int H dl}{r} \quad (6.0.79)$$

Diremo che la grandezza  $\int H dl$  è la *forza magnetomotrice* che agisce nella parte di tubo considerata. La formula (38) mostra che il *flusso di induzione magnetica*  $\psi$  è, in ogni tubo di induzione, *proporzionale alla forza magnetomotrice agente su una qualsiasi parte di questo tubo e inversamente proporzionale alla riluttanza*. L'analogia tra questa legge e la legge di Ohm, che studieremo in seguito, è ancora più completa se si considera la grandezza  $\psi$  come l'intensità di una corrente magnetica nel tubo considerato. Quando ci si limita ad una porzione di questo tubo, in cui il potenziale magnetico è una funzione uniforme, si può scrivere la (38) nella forma seguente:

$$\psi = \frac{\int H dl}{r} = - \frac{\int \frac{\partial V}{\partial l} dl}{r} = \frac{V_1 - V_2}{r} \quad (6.0.80)$$

Il doppio strato magnetico è del tutto analogo al doppio strato elettrico; due superfici parallele  $S_1$  e  $S_2$  (fig. 161), distanti tra loro  $\delta$ , sono coperte rispettivamente di magnetismi nord e sud, di cui indicheremo le densità superficiali con  $+k$  e  $-k$ .



La grandezza

$$\omega = k\delta \quad (6.0.81)$$

è il momento del doppio strato; è evidente che, per  $k$  costante, il momento del doppio strato è uguale al momento di una parte dello strato la cui area è uguale all'unità. Siano  $V_1$  e  $V_2$  i potenziali in due punti A e B posti su una stessa normale alle superfici  $S_1$  e  $S_2$ . Si ha

$$V_1 - V_2 = \frac{4\pi\omega}{\mu_0} \quad (6.0.82)$$

dove  $\mu_0$  indica la permeabilità magnetica del mezzo che circonda il doppio strato. Questa equazione mostra che il potenziale magnetico fa un salto passando attraverso il doppio strato magnetico e che *la grandezza  $V_1 - V_2$  del salto di potenziale è la stessa in tutti i punti dello strato.*

Tutte le linee di forza, di conseguenza anche tutti i tubi di induzione, escono dalla superficie  $S_1$  per entrare nel doppio strato attraverso la superficie  $S_2$ . Sia ACB uno dei tubi di induzione. La formula (38,a) dà, per l'intensità  $\psi$  della corrente magnetica in questo tubo, l'espressione

$$\psi = \frac{4\pi\omega}{\mu_0 r} = \frac{4\pi\omega}{\mu_0 \int \frac{dl}{\mu\sigma}} \quad (6.0.83)$$

*La forza magnetomotrice è la stessa per tutti i tubi; è uguale a , con  $\omega$  il momento del doppio strato magnetico.* La formula (40,a) mostra inoltre che tutti i tubi, che hanno lo stesso flusso di induzione magnetica (o la stessa intensità di corrente magnetica), ad esempio tutti i tubi dell'unità di induzione, hanno la stessa riluttanza  $r$ . Sia

$$r_0 = \int \frac{dl}{\sigma}$$

la riluttanza di un tubo in un mezzo non magnetico ( $\mu = 1$ ) e supponiamo che il doppio strato sia circondato dal mezzo omogeneo ( $\mu = \mu_0 = cost$ ), dove si trovano anche tutti i tubi. In questo caso, la formula (40,a) diventa

$$\psi = \frac{4\pi\omega}{r_0} \quad (6.0.84)$$

Questa formula mostra che *il flusso di induzione magnetica di un doppio strato magnetico dato è indipendente dalle proprietà magnetiche del mezzo omogeneo circostante.* Si noti che si tratta di un doppio strato, per cui  $k$ , e conseguentemente anche  $\omega$ , è una grandezza data indipendente dal mezzo circostante.

Per l'energia potenziale  $W$  di qualsiasi massa magnetica, in un mezzo omogeneo, la cui permeabilità è  $\mu$ , si ha l'espressione, vedi (26),

$$W = \frac{1}{2\mu} \sum \sum \frac{mm'}{r} \quad (6.0.85)$$

Le due sommatorie si estendono a tutte le masse elementari, di modo che ogni coppia  $m, m'$  ritorna due volte. Daremo alla formula (42) l'espressione seguente

$$W = \frac{1}{2} \sum m \sum \frac{m'}{\mu r}$$

poiché la sommatoria  $\sum \frac{m'}{\mu r}$  è il potenziale  $V$  nel punto in cui si trova la massa  $m$ , si può scrivere

$$W = \frac{1}{2} \sum mV \quad (6.0.86)$$



e qui la sommatoria si estende di nuovo a tutte le masse magnetiche elementari.

Nella formula (42,a), la quantità  $V$  è il potenziale delle masse magnetiche  $m$ . Molto più importante è il caso in cui le masse magnetiche si trovano in un campo magnetico già esistente, di potenziale  $V'$ . È evidente allora che l'energia potenziale  $W$ , corrispondente solo all'azione del campo esterno, ma non alle forze interne tra le masse elementari  $m$ , è uguale a

$$W = \sum mV' \quad (6.0.87)$$

## 5. Formula di Stokes

Nello studio di varie questioni teoriche, è molto utile trasformare un integrale curvilineo preso lungo un contorno chiuso in un integrale esteso ad una superficie delimitata da questo contorno. Questa è formula di Stokes; era già nota ad Ampère che, almeno in un caso particolare, la utilizzò, in altra forma, nell'elettromagnetismo.

Dapprima è importante ben definire il verso nel quale si prende un integrale curvilineo lungo un contorno chiuso. Sia (fig. 162) una superficie qualunque  $S$  limitata dal contorno  $s$ ,  $n$  la normale all'elemento  $dS$  di questa superficie; a ogni elemento  $dS$  corrisponde una direzione della normale, lungo il lato della superficie  $S$  considerato; sceglieremo quindi nel seguito una parte determinata di questa superficie. Si può percorrere il contorno  $s$  in due versi; converremo di chiamare verso positivo quello che, per un osservatore posto sulla normale  $n$ , avente il piede in  $dS$  e la testa nella direzione di questa normale, che gli appare opposta al verso di movimento antiorario; questa direzione positiva è indicata nella figura da frecce. È del tutto evidente che se si assegnasse alla normale  $n$  la direzione opposta a quella prescelta, verrebbe modificato anche il verso positivo di percorrenza del contorno.

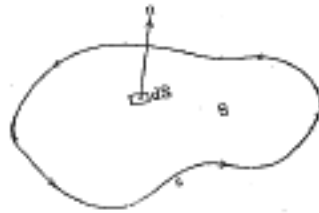


fig. 162

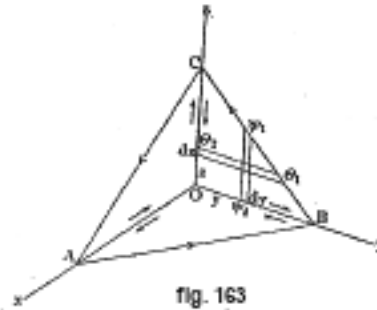


fig. 163

Consideriamo ora tre assi di coordinate  $Ox, Oy, Oz$  (fig. 163), che non disporremo come di consueto, ma in modo che l'asse  $y$  positivo arrivi sull'asse  $z$  positivo, in una rotazione positiva (antiorario) attorno all'asse  $x$  positivo; analoghe rotazioni attorno a  $Oy$  e  $Oz$  portano  $Oz$  su a  $Ox$ ,  $Ox$  su  $Oy$ .

Siano  $\varphi, \psi, \theta$  tre funzioni finite, continue e uniformi di  $x, y, z$ . La formula Stokes è la seguente

$$\begin{aligned} \int_s \varphi dx + \psi dy + \theta dz = \\ = \iint_s \left( \frac{\partial \theta}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) dydz + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) dzdx + \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) dxdy \end{aligned} \quad (6.0.88)$$

si può evidentemente scrivere questa uguaglianza sotto la forma

$$\begin{aligned} \int_s \left( \varphi \frac{dx}{ds} + \psi \frac{dy}{ds} + \theta \frac{dz}{ds} \right) = \\ = \iint_s \left\{ \left( \frac{\partial \theta}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \cos(n, x) + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \cos(n, y) + \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \cos(n, z) \right\} dS \end{aligned} \quad (6.0.89)$$

Dimostreremo dapprima questa formula per un triangolo ABC (fig. 163). Poiché le espressioni che compaiono sotto i segni di integrazione della formula (43) hanno un significato indipendente

dalla scelta degli assi, è chiaro che i due integrali non cambiano di valore, al variare della posizione degli assi coordinati. Disegnamoli in modo che passino per i vertici A, B, C del triangolo ABC. Si vede facilmente che l'integrale curvilineo lungo il contorno chiuso ABCA del triangolo è uguale alla somma dei tre integrali curvilinei lungo i contorni OBCO, OCAO e OABO; come mostrano le frecce, le traiettorie OA, OB e OC vengono infatti percorse due volte in direzioni opposte. Sul contorno OBCO, si ha  $dx = 0$ ; su OCAO, si ha  $dy = 0$ ; su OABO, si ha  $dz = 0$ ; di conseguenza

$$\begin{aligned} \int_{ABCA} \varphi dx + \psi dy + \theta dz &= \\ &= \int_{OBCO} \psi dy + \theta dz + \int_{OCAO} \theta dz + \varphi dx + \int_{OABO} \varphi dx + \psi dy \end{aligned} \quad (6.0.90)$$

Ciò posto consideriamo l'integrale

$$\omega_1 = \iint \frac{\partial \theta}{\partial y} dy dz$$

esteso all'area del triangolo OBC. Integrando dapprima rispetto a  $y$ , cioè lasciando  $z$  costante, si ha

$$\omega_1 = \int dz \int \frac{\partial \theta}{\partial y} dy = \int (\theta_1 - \theta_2) dz$$

dove  $\theta_1$  e  $\theta_2$  si riferiscono ai lati BC e OC. L'integrazione è effettuata nel verso BCO e si deve pertanto considerare  $dz$  come negativo, quando si va da C verso O. Su OB,  $dz = 0$ ; quindi

$$\omega_1 = \iint \frac{\partial \theta}{\partial y} dy dz = \int_{OBCO} \theta dz \quad (6.0.91)$$

Si trova in modo analogo, per l'integrale

$$\omega_2 = \iint \frac{\partial \psi}{\partial z} dy dz$$

esteso all'area dello stesso triangolo OBC

$$\omega_2 = \int dy \int \frac{\partial \psi}{\partial z} dz = \int (\psi_1 - \psi_2) dy$$

dove  $\psi_1$  si riferisce a BC,  $\psi_2$  a OB. Quando si va nel verso OBCO, si deve considerare  $dy$  come negativo su BC. Su CO, si ha  $dy = 0$ ; pertanto

$$\omega_2 = \iint \frac{\partial \psi}{\partial z} dy dz = - \int_{OBCO} \psi dy \quad (6.0.92)$$

Le formule (43,c) e (43,d) danno

$$\int_{OBCO} \psi dy + \theta dz = \iint_{OBC} \left( \frac{\partial \theta}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dy dz$$

Si trovano due risultati analoghi per i triangoli OCAO e OABO. Sommando, si ottiene, si veda la (43,b)

$$\begin{aligned} \int_{ABCA} \varphi dx + \psi dy + \theta dz &= \\ &= \int_{OBC} \left( \frac{\partial \theta}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dy dz + \int_{OCA} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) dz dx + \int_{OAB} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) dx dy \end{aligned} \quad (6.0.93)$$

Supponiamo ora il tetraedro OABC infinitamente piccolo. Si possono, in questo caso, considerare le differenze  $\frac{\partial \theta}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial z}$ , ecc. come grandezze costanti, di modo che si può scrivere, ad esempio,

$$\iint_{OBC} \left( \frac{\partial \theta}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) dy dz = \left( \frac{\partial \theta}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \iint_{OBC} dy dz = \left( \frac{\partial \theta}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \times \text{area } OBC \quad (6.0.94)$$

Sia  $n$  la direzione della normale al triangolo ABC; poiché l'integrazione è stata effettuata nella direzione ABCA,  $n$  è diretto dall'origine O verso l'osservatore. Denotando con  $dS$  l'area del triangolo ABC, l'area di OBC è  $dS \cos(n, x)$ ; se si introduce questo valore nella (43,f) e se si trasformano in modo analogo gli altri due integrali nella (43,e), si ottiene, per l'integrale curvilineo lungo il contorno del triangolino ABC, l'espressione

$$\int_{ABCA} \varphi dx + \psi dy + \theta dz = \left\{ \left( \frac{\partial \theta}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \cos(n, x) + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \cos(n, y) + \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \cos(n, z) \right\} dS \quad (6.0.95)$$

Ora è facile passare al caso generale in cui la superficie  $S$  e il suo contorno  $s$  sono arbitrari. Innanzitutto possiamo si può ridurre il contorno  $s$  a un poligono, dato che basterebbe aumentare all'infinito il numero dei lati del poligono per avere una qualsiasi curva. È quindi possibile attraverso questo contorno poligonale far passare una superficie poliedrica a facce triangolari. Applicando la formula (44) a ciascuno di questi triangoli e, sommando i risultati ottenuti, si avrà la formula desiderata (43) o (43,a). Infatti, i lati dei triangoli appaiono ciascuno due volte, tranne quelli che fanno parte del contorno poligonale; percorrendoli in versi opposti rimangono solo gli integrali curvilinei relativi agli elementi  $ds$  del contorno stesso.

## 6. Lavoro delle forze magnetiche

Quando un polo magnetico, dove si suppone concentrata la quantità di magnetismo  $m'$ , si muove in un campo magnetico, le forze magnetiche svolgono in generale un certo lavoro, che indicheremo con  $R$ . Sia  $m' = 1$ ; diremo che, in questo caso, c'è spostamento di un polo unitario.

Supponiamo innanzitutto di avere a che fare con un campo magnetico di magneti e consideriamo solo la parte di spazio che è esterna a questi magneti. Il potenziale  $V$  è allora una funzione del punto continua e uniforme, che si esprime con la formula generale (27). Il lavoro  $R$ , per  $m' = 1$ , è uguale a, si veda la (28)

$$R = V_1 - V_2 \quad (6.0.96)$$

ed è indipendente dal percorso attraverso il quale il polo unitario è passato da un certo punto A (di potenziale  $V_1$ ) a un altro punto B (di potenziale  $V_2$ ). Si ha, per ogni cammino chiuso,

$$R = 0 \quad (6.0.97)$$

È molto importante notare che la (45) e la (46) si riferiscono al caso in cui lo spostamento avviene lungo traiettorie interamente esterne allo spazio occupato dai magneti.

Stabiliremo ancora un'altra espressione per  $R$ . Supponiamo che un polo magnetico si muova da A a B lungo una certa curva  $s$ , il cui elemento  $ds$  ha componenti  $dx, dy, dz$  lungo le direzioni degli assi coordinati. Sia  $H_s$  la componente dell'intensità magnetica  $H$  nella direzione della tangente alla curva  $s$ . È evidente che, per  $m' = 1$ , si ha

$$R = \int_A^B H_s ds \quad (6.0.98)$$

dove sono indicati simbolicamente i limiti dell'integrazione curvilinea (dal punto A al punto B). Indichiamo, come sopra, con  $\alpha, \beta, \gamma$  le componenti della forza  $H$  lungo gli assi coordinati. Si ha allora

$$H_s = \alpha \cos(s, x) + \beta \cos(s, y) + \gamma \cos(s, z)$$

e quindi

$$R = \int_A^B \{ \alpha \cos(s, x) + \beta \cos(s, y) + \gamma \cos(s, z) \} ds$$

Poiché  $ds \cos(s, x) = dx$ ,  $ds \cos(s, y) = dy$ ,  $ds \cos(s, z) = dz$ ; si può scrivere

$$R = \int_A^B \alpha dx + \beta dy + \gamma dz \quad (6.0.99)$$

E portando nella (47), il valore

$$H_s = -\frac{\partial V}{\partial s} \quad (6.0.100)$$

si veda la (29,b), si ottiene la formula (45).

Occupiamoci ora del caso in cui la curva  $s$  è chiusa. Dal teorema di Stokes, si può dare l'espressione (48) nella forma seguente

$$R = \int_S \alpha dx + \beta dy + \gamma dz = \iint_S \left\{ \left( \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z} \right) \cos(n, x) + \left( \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right) \cos(n, y) + \left( \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right) \cos(n, z) \right\} dS \quad (6.0.101)$$

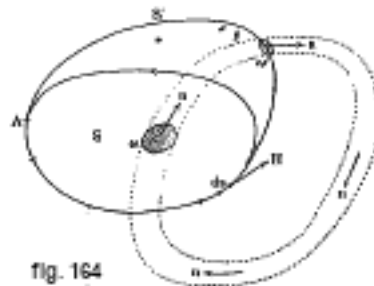
il doppio integrale è esteso a tutti gli elementi di qualsiasi superficie  $S$ , che passa per la curva  $s$ . Qualunque sia la posizione della curva  $s$  (all'esterno dei magneti), si può sempre condurre la superficie  $S$  in modo tale che si trovi anch'essa interamente al di fuori dei magneti dati. Ma, in questa parte dello spazio; le forze magnetiche hanno ovviamente un potenziale, e di conseguenza le componenti  $\alpha, \beta, \gamma$  soddisfano le condizioni di integrabilità (30), che annullano l'integrale doppio del secondo membro della (50). Si conferma così che si ha  $R = 0$ , in accordo con la (46).

Passiamo al caso in cui le linee di forza sono chiuse e situate interamente in un mezzo omogeneo. Sia  $s$  (fig. 164) una di queste linee di forza; il suo verso è indicato da una freccia. Poiché la forza  $H$  ha, in tutti i punti di questa linea, la direzione dell'elemento  $ds$ , è chiaro che il lavoro  $R$ , nello spostamento di un polo unitario, ad esempio partendo da  $A$  lungo la linea  $s$ , per ritornare nuovamente ad  $A$ , cioè

$$R = \int_S H ds = \int_s \alpha dx + \beta dy + \gamma dz$$

non è nullo, ma ha un valore positivo o negativo lungo il verso dello spostamento del polo unitario. Tracciamo dal contorno  $s$  una qualsiasi superficie  $S$  e applichiamo la formula (50). Poiché  $R$  non è nullo, è chiaro che le condizioni di integrabilità (30) non possono essere soddisfatte per tutti gli elementi  $dS$  della superficie  $S$ . Supponiamo che  $\omega$  sia, in  $S$ , il dominio in cui le condizioni (30) non sono soddisfatte. Poiché queste condizioni di integrabilità sono una conseguenza necessaria dell'esistenza di un potenziale  $V$  delle forze magnetiche, è necessario che nel dominio  $\omega$  le forze magnetiche non abbiano potenziale.

modificato anche il verso positivo di percorrenza del contorno.



Si può condurre dalla linea di forza  $s$  un'infinità di diverse superfici  $S$  e su ciascuna di esse ci sarà necessariamente un dominio, per il quale non saranno soddisfatte le condizioni (30), cioè per il quale le espressioni  $\frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z}$ ,  $\frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y}$  non saranno nulle. Si ottiene così,

ad esempio sulla superficie  $S'$ , il dominio  $\omega'$ , ecc. Si capisce facilmente che il luogo di tutti questi domini deve occupare uno spazio anulare chiuso. In tutti i punti di questo spazio, le forze magnetiche non hanno potenziale. Questo è lo spazio del vortice, che abbiamo già menzionato sopra. Così, uno spazio vorticoso e una linea di forza chiusa devono intrecciarsi come due anelli successivi di una stessa catena. Le condizioni (30) essendo soddisfatte in tutti i punti delle superfici  $S, S'$ , ecc., ad eccezione di quelli situati all'interno dello spazio vorticoso, si può, nella formula (50), sostituire l'integrale di superficie con un integrale che si estende solo alla porzione  $\omega$  della superficie  $S$ . Sia  $\sigma$  la seguente espressione

$$\sigma = \iint_{\omega} \left\{ \left( \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z} \right) \cos(n, x) + \left( \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right) \cos(n, y) + \left( \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right) \cos(n, z) \right\} dS$$

Si vede che il lavoro  $R$  compiuto dalle forze magnetiche, quando un polo magnetico unitario gira attorno alla linea di forza chiusa  $s$  è uguale a

$$R = \sigma \quad (6.0.102)$$

Da questa uguaglianza scaturisce una serie di conseguenze molto importanti. Se prendiamo, invece della superficie  $S$ , una qualunque altra superficie  $S'$ , avente per contorno la stessa linea di forza  $s$ , si ottiene, invece della (51), un analogo integrale  $\sigma'$  esteso ad un'altra sezione  $\omega'$  dello stesso spazio vorticoso; si ha allora  $R = \sigma'$  e di conseguenza  $\sigma' = \sigma$ .

*L'integrale doppio  $\sigma$  della forma (51) ha lo stesso valore per tutte le sezioni dello spazio vorticoso a cui danno origine eventuali superfici.* Ciò può essere considerata una proprietà caratteristica dello spazio vorticoso considerato.

Sia dato uno spazio vorticoso. È chiaro che *tutte le linee di forza devono intrecciare questo spazio e che, per tutte le linee di forza, il lavoro  $R$  è lo stesso e uguale a  $\sigma$ .* È anche facile vedere che tutto ciò che è stato esposto in precedenza sussiste, quando le superfici  $S, S'$ , ecc., intersecano più volte lo spazio vorticoso; il numero delle sezioni è ovviamente sempre dispari.

Poiché il lavoro  $R$  è sempre espresso dalla formula (48), si ha, non solo per le linee di forza, ma per ogni curva chiusa che intreccia lo spazio vorticoso, lo stesso valore del lavoro  $R = \pm \sigma$ .

Abbiamo visto che fuori dallo spazio vorticoso le forze magnetiche  $H(\alpha, \beta, \gamma)$  hanno certamente un potenziale  $V$ . Il lavoro  $R$  che esse compiono, vedi (47), è pari a

$$R = \int_A^B H_s ds = - \int_A^B \frac{dV}{ds} = - \int_A^B dV \quad (6.0.103)$$

Per una curva chiusa, che non abbraccia lo spazio vorticoso, si ha sempre  $R = 0$ ; ma, se, partendo da un qualsiasi punto  $A$  del campo magnetico, si percorre una curva che abbraccia lo spazio vorticoso, per ritornare allo stesso punto, allora il lavoro è uguale, come abbiamo visto, a

$$R = - \int dV = \pm \sigma \quad (6.0.104)$$

Quest'ultima equazione mostra che il potenziale magnetico non è una funzione uniforme, quando esiste uno spazio vorticoso nel campo magnetico. Se  $V_0$  è uno qualunque dei valori del potenziale, gli altri valori sono

$$V = V_0 - p\sigma \quad (6.0.105)$$

essendo  $p$  un numero intero arbitrario, positivo o negativo. Quando si sceglie, per il polo del punto  $A$ , un determinato valore  $V_0$  e si ritorna in  $A$  dopo aver percorso una curva chiusa, si trova in  $A$  il valore iniziale  $V_0$ , purché la curva non intrecci uno spazio vorticoso. Si trova, invece, un altro valore  $V = V_0 - p\sigma$ , se la curva ha compiuto  $p$  volte il giro dello spazio del vortice.

Vediamo da cosa dipende il segno del numero  $p$ . Nell'espressione di  $\sigma$  compare la direzione  $n$  della normale alle superfici  $S, S'$ , ecc. e si è visto che il verso di questa normale è interamente determinato da quello delle linee di forza. Esiste quindi, in ogni spazio vorticoso, un verso determinato  $n$  (vedi fig. 164), che chiameremo verso positivo o verso della corrente e che ha una relazione molto semplice con il verso positivo delle linee di forza. Il verso delle linee di forza, così come quello della corrente nello spazio vorticoso, si deducono l'uno dall'altro con la stessa regola: se, percorrendo la linea di forza  $s$  (fig. 164), si passa attraverso lo spazio anulare del vortice, il verso della corrente si presenta antiorario; se, camminando lungo lo spazio vorticoso, nel verso della corrente, si attraversa una linea di forza, il verso positivo sulla linea di forza è pure antiorario. Si può formulare diversamente la relazione tra il verso positivo sulle linee di forza, come su qualsiasi altra linea chiusa che racchiude la corrente, e quello positivo all'interno del vortice dello spazio anulare, cioè quello della corrente stessa, utilizzando la cosiddetta regola del cavatappi. Si sa che, per inserire un cavatappi, è necessario ruotare la sua impugnatura nel verso del moto orario e che poi la vite del cavatappi compie un movimento traslatorio che la allontana dall'operatore.

Se si fa ruotare la testa di una vite nel senso della corrente, la vite si muove nel senso positivo della linea di forza che attraversa il circuito della corrente; se la testa della vite viene fatta ruotare nel verso positivo della linea di forza, la vite avanza nel verso della corrente che attraversa la linea di forza. Ci si può facilmente convincere dell'esattezza di questa regola, considerando la figura 164.

È ora chiaro che, nella formula (54), il numero  $p$  è positivo, quando un qualsiasi percorso chiuso intreccia lo spazio vorticoso  $p$  volte nel verso positivo (verso positivo delle linee di forza);  $p$  è negativo, quando l'intreccio avviene nel verso opposto.

Abbiamo considerato separatamente due casi di campo magnetico: quello del campo esterno ai magneti, con le sue linee di forza non chiuse, e quello di uno spazio omogeneo, in cui esistono linee di forza chiuse. Nel primo caso possiamo considerare il potenziale come uniforme; nel secondo devono esistere spazi vorticosi e il potenziale  $V$  è una funzione non uniforme. Tuttavia, la differenza tra questi due casi scompare, quando si considera non solo lo spazio esterno ai magneti, ma anche lo spazio interno, vale a dire se si guardano sempre le linee di forza come linee chiuse. È ovvio che queste linee devono, in ogni circostanza, intrecciare spazi vorticosi e che il potenziale  $V$  non può quindi essere considerato in generale come una funzione uniforme.

Abbiamo visto che il potenziale di un doppio strato magnetico infinitamente sottile subisce un salto uguale a

$$V_1 - V_2 = \frac{4\pi\omega}{\mu_0} \quad (6.0.106)$$

si veda la (40). Se si considerano solo i valori del potenziale  $V$  nello spazio e se non si tiene conto dell'esistenza del doppio strato MN (fig. 165), che si confonde in qualche modo con la superficie  $S$ , si può ammettere che i punti A e B, situati su entrambi i lati dello strato, coincidono. In questo caso, il potenziale del doppio strato è una funzione del punto non uniforme e si ha l'espressione

$$V = V_0 - p \frac{4\pi\omega}{\mu_0} \quad (6.0.107)$$

analogo alla formula (54). Quando la linea chiusa  $s$  parte da un qualsiasi punto C, dove uno dei valori del potenziale è  $V_0$ , e non attraversa il contorno del doppio strato, si ritrova nuovamente il valore  $V_0$ , tornando a C; ma se la linea  $s$  intreccia  $p$  volte questo contorno, si ottiene in C un valore determinato dalla formula (56);  $p$  è qui positivo, quando  $s$  attraversa lo strato dalla faccia sud (−) a quella nord (+).

Si osserverà l'analogia tra il potenziale di un doppio strato magnetico e il potenziale nello spazio in cui è presente uno spazio vorticoso anulare, disposto lungo il contorno del doppio strato. Alla grandezza  $\frac{4\pi\omega}{\mu_0}$  nell'espressione della prima, corrisponde la grandezza  $\sigma$  in quella della

seconda; si ha, si veda la (39),  $\omega = k\delta$  per il momento o la potenza dello strato;  $\sigma$  è data dalla formula (51). Il verso della corrente, nello spazio vorticoso, quando si guarda il contorno dello strato dal lato nord di quello strato, è antiorario. Come vedremo più avanti, questa analogia continua molto oltre.







# 7. Sorgenti del campo magnetico. Magneti

## 1. Magneti temporanei e magneti permanenti

Abbiamo considerato, nel capitolo precedente, le proprietà del campo magnetico, indipendentemente dalle sorgenti, magneti o correnti, che lo originano. Passiamo ora ad uno studio più approfondito di queste sorgenti, prima fra tutte i magneti. Come abbiamo già visto, esistono magneti temporanei e permanenti. Forse sarebbe più esatto dire che c'è un magnetismo temporaneo e un magnetismo permanente. In ogni caso, solo i magneti permanenti possono fungere da sorgenti indipendenti del campo magnetico; ma i magneti temporanei, il cui magnetismo è dovuto a un campo magnetico già esistente, modificano tale campo a tal punto che si può, senza assimilazione forzata, annoverarli tra le sorgenti del campo magnetico. Inoltre il magnetismo residuo appare quasi sempre proprio come un residuo del magnetismo prodotto da un campo magnetico, per questo motivo non bisogna separare lo studio dei magneti permanenti da quello dei magneti temporanei.

Sono state proposte varie immagini meccaniche della magnetizzazione, a cui sono sottoposte nel campo magnetico le sostanze magnetiche, ad esempio il ferro. Tale è l'ipotesi ormai abbandonata di due agenti o fluidi magnetici particolari. Si suppone che nelle particelle più piccole del corpo sia contenuta una miscela neutra dei due fluidi, che non esercita alcuna azione esterna. Sotto l'azione del campo magnetico, questa mescolanza si scompone in ogni particella, il fluido nord che si raccoglie da un lato della particella, il fluido sud dall'altro. Ogni particella diventa così un magnete molecolare. Maggiore è l'intensità del campo, più forte è la magnetizzazione della particella. Non c'è passaggio di fluido da una particella all'altra. Quando il campo esterno scompare, i fluidi si riuniscono di nuovo. Se questa riunione non è completa, abbiamo il caso del magnetismo residuo.

Un'altra ipotesi è di grande interesse; è quella dei magneti molecolari che possono subire una rotazione. Si presume che, nel ferro ad esempio, le molecole abbiano già le proprietà dei magneti, cioè costituiscano magneti molecolari.

Nel ferro non magnetizzato, gli assi di questi magneti sono orientati in modo uniformemente disordinato. Il pezzo di ferro più piccolo contiene un numero molto elevato di magneti molecolari, la cui azione risultante nello spazio esterno è nulla, poiché i poli nord e sud dei diversi magneti molecolari sono orientati in numero uguale in tutte le direzioni. Ma se il ferro si trova in un campo magnetico, i magneti molecolari iniziano a ruotare, perché sui loro poli nord agisce una forza in una direzione e sui loro poli sud un'altra forza nella direzione opposta. L'asse di un magnete molecolare tende quindi a prendere la direzione della forza magnetica che si esercita nel luogo in cui si trova questo magnete. Certe forze, la cui origine può essere oggetto di varie ipotesi, si oppongono alla rotazione dei magneti molecolari. Maggiore è l'intensità del campo, maggiori sono gli stessi angoli di rotazione dei magneti molecolari. Il disordine uniforme nella distribuzione dell'orientamento di questi magneti scompare: la maggior parte dei poli nord si orienta nella direzione della forza magnetica, la maggior parte dei poli sud nella direzione opposta. Ogni parte del ferro, che si suppone separata dal resto della sostanza, deve produrre nello spazio esterno le stesse azioni di un magnete il cui asse ha per direzione la forza magnetica. Il limite di magnetizzazione è raggiunto, quando gli assi di tutti i magneti molecolari hanno preso ovunque la direzione della forza magnetica.

Quando il campo esterno scompare, i magneti elementari ritornano alle loro posizioni precedenti e si dispongono, come prima, in modo uniformemente disordinato. Il magnetismo temporaneo scompare. Ma, se i magneti molecolari non tornano tutti alle loro vecchie posizioni o non vi ritornano completamente, rimane un certo magnetismo residuo dopo la scomparsa del campo. La teoria dei magneti molecolari che subiscono una rotazione dà solo un'immagine meccanica della magnetizzazione, senza toccare la questione dell'intima natura del magnetismo; un magnete molecolare è di per sé una cosa enigmatica come qualsiasi magnete finito.

Faremo conoscere, nel capitolo VII, § 5, la teoria di Ampère, secondo la quale un magnete elementare è costituito da una particella materiale circondata da una corrente elettrica. Secondo le visioni moderne, una tale corrente può essere generata da uno o più elettroni, che ruotano attorno alla particella materiale ad altissima velocità.

La teoria del magnetismo ha ricevuto, attraverso il lavoro di Langevin (1905) e Weiss (1905-1911) una direzione completamente nuova. Langevin ammette che le molecole rappresentano magneti elementari ed eseguono, per agitazione termica, movimenti disorganizzati come quelli che animano le molecole di un gas. Di conseguenza, gli assi dei magneti elementari che, come vedremo, sono perpendicolari ai piani delle correnti che li circondano, prendono tutte le direzioni possibili, in assenza di campo magnetico. Sotto l'influenza di tale campo, gli assi dei magneti elementari, agitati in modo del tutto irregolare, subiscono una rotazione durante il loro movimento.

Lo sviluppo teorico di questa ipotesi porta a risultati estremamente importanti che presenteremo in seguito.

Weiss, in tutta una serie di memorie, ha perseguito l'idea di Langevin. Egli ammette che ogni molecola magnetica è influenzata, a parte il moto termico e il campo magnetico, solo dall'azione magnetica delle molecole vicine e che, inoltre, le altre forze puramente molecolari non hanno alcun ruolo. Avevo precedentemente suggerito (1875) che era necessario, nello studio teorico della magnetizzazione, tener conto della mutua azione magnetica tra molecole vicine. Weiss arriva anche al risultato che i momenti magnetici (§ 2) dei magneti elementari sono, per varie sostanze, multipli della stessa quantità, che chiamò *magnetone* e che svolge un ruolo analogo a quello dell'elettrone. Discuteremo anche questa teoria nel capitolo VIII.

Su idee completamente diverse poggia la spiegazione della magnetizzazione di una sostanza mediante la penetrazione in essa di linee o tubi di induzione magnetica. I tubi di induzione sono qui presentati come dati e, in un certo senso, come una nozione primitiva. Non sappiamo in fondo in cosa consista il meccanismo della modifica nell'etere che corrisponde alla nascita di un tubo di induzione, e non sappiamo nemmeno se tale modifica sia di carattere puramente statico o semplicemente dinamico. Si può solo dire che esiste lungo i tubi di induzione una tensione e che essi esercitano con la loro superficie laterale una pressione, l'uno e l'altro essendo determinati dalla formula (17,a). Attraversando un corpo qualunque, i tubi di induzione si attaccano, per così dire, alla sostanza del corpo, in modo che la tensione che esiste in essi mette in movimento il corpo e produce forze ponderomotrici. L'intima natura del magnetismo è così relegata in secondo piano e non si tratta più del meccanismo interno della magnetizzazione.

La cosa principale è l'esistenza del campo magnetico; la magnetizzazione non è altro che il segno esterno della modifica nella distribuzione delle linee di forza del campo, che è prodotta dalla presenza di un corpo la cui permeabilità magnetica è diversa da quella del mezzo circostante. La densità del magnetismo libero fittizio sulla superficie di un corpo è (per analogia con le cariche elettriche sui conduttori) completamente definita dalla formula (20).

Ritorniamo al magnetismo residuo. Supponiamo che un corpo portato nel campo magnetico, ad esempio un tondino d'acciaio, abbia acquisito il grado di magnetizzazione  $I$ , che, come abbiamo visto, è determinato in ogni punto del corpo dalla densità della forza magnetica fittizia sulla superficie della parte del corpo che si immagina isolata, questa superficie dovendo essere normale alle linee di forza; questo grado di magnetizzazione può essere misurato anche dal momento di tale parte isolata, diviso per il suo volume, vedi (23) e (23,a). Quando il campo

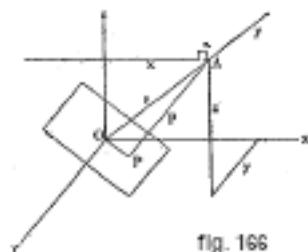
esterno scompare, rimane una certa magnetizzazione  $I_c$ . Il rapporto  $I_c : I$  moltiplicato per il numero 100 è la grandezza in centesimi del magnetismo residuo relativo; si potrebbe chiamare questa grandezza retentività. Dipende dalla posizione dell'angolo e dal metodo di produzione dell'acciaio. Poniamo l'acciaio magnetizzato in un campo di segno opposto, cioè in un campo che produrrebbe su un pezzo di acciaio vergine una magnetizzazione opposta a quella già esistente, e supponiamo che l'intensità  $H$  di questo campo aumenti gradualmente a partire da zero. Il magnetismo residuo  $I_c$  comincia dapprima a diminuire e raggiunge il valore zero per una determinata intensità  $H_c$  del campo. È solo per  $H > H_c$ , che cominciano ad apparire i magnetismi temporanei e residui di segno opposto. L'intensità  $H_c$  (più esattamente  $-H_c$ ), che fa sparire il magnetismo residuo, può essere chiamato l'intensità del campo di smagnetizzazione. Per non confondere questa grandezza con la forza smagnetizzante, di cui parleremo più avanti, e che agisce all'interno dei corpi magnetizzati, chiameremo  $H_c$  l'intensità coercitiva; questa designazione fu proposta nel 1885 da J. Hopkinson.

## 2. Momento magnetico. Poli

Per presentare la nozione di momento magnetico di un magnete nella sua forma più generale, non faremo affidamento su una sola proprietà del magnete, cioè contenente sempre quantità uguali di magnetismo positivo (nord) e negativo (sud). La distribuzione di questi due magnetismi all'interno e sulla superficie del magnete non avrà alcun ruolo in quanto segue. Assegnando opportuni segni alle varie masse  $m$  di magnetismo libero, si ottiene l'uguaglianza fondamentale

$$\sum m_i = 0 \quad (7.0.1)$$

dove  $m_i$  è la quantità di magnetismo concentrata in uno dei punti A del magnete. Sia P (fig. 166) un piano qualsiasi,  $p$  la lunghezza della perpendicolare abbassata dal punto A al piano P, che si conterà positivamente quando il punto A sarà un determinato lato di P.



Consideriamo la somma

$$M_p = \sum m_i p \quad (7.0.2)$$

che si estende a tutte le particelle di magnetismo libero. Quando si sposta il piano P parallelamente a se stesso della distanza  $q$ , si ottiene, invece di  $M_p$ , l'espressione

$$M_{p+q} = \sum m_i (p + q) = \sum m_i p + \sum m_i q$$

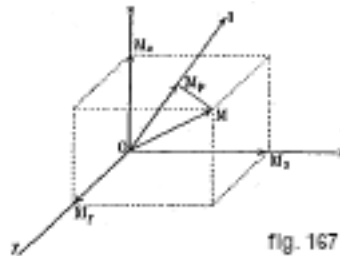
ma, nella prima sommatoria,  $q$  è lo stesso per tutti i termini e d'altra parte  $\sum m_i = 0$ ; pertanto

$$M_{p+q} = \sum m_i p + q \sum m_i = \sum m_i p$$

Confrontando con la (2), si vede che

$$M_{p+q} = M_p$$

cioè, la somma considerata non è modificata da uno spostamento parallelo del piano P (*invariante per traslazione*). Ne consegue che la grandezza  $M_p$ , dipende solo dalla direzione della normale  $p$  al piano P, ma non dalla posizione di questo piano nello spazio. Daremo, per un momento, alla grandezza  $M_p$  il nome di momento magnetico del magnete nella direzione  $p$ . Questa grandezza è un vettore la cui direzione è quella di  $p$  positivo. Il vettore  $M_p$  ha una direzione determinata, ma ovviamente non possiede un'origine determinata, cioè un punto di applicazione; può quindi essere rappresentato da una freccia, tracciata da qualsiasi punto dello spazio.



Siano  $x, y, z$  le coordinate del punto A; prendendo per piano P quello avente coordinate  $zOy$  (fig. 167), si ha  $p = x$ . In questo caso, il momento nella direzione di  $x$  è  $M_x = \sum m_i x$ . Si trovano allo stesso modo i momenti  $M_y$  e  $M_z$  e si hanno tre momenti magnetici

$$M_x = \sum m_i x \quad M_y = \sum m_i y \quad M_z = \sum m_i z \quad (7.0.3)$$

Cerchiamo la relazione che esiste tra questi tre momenti e il momento  $M_p$  preso lungo una direzione  $p$  qualsiasi. A tale scopo, tracciamo il piano P dall'origine delle coordinate e sia  $OA = s$ . Si ha

$$M_p = \sum m_i p = \sum m_i s \cos(s, p)$$

ma  $s \cos(s, p) = x \cos(x, p) + y \cos(y, p) + z \cos(z, p)$  e quindi

$$\begin{aligned} M_p &= \sum m_i x \cos(x, p) + \sum m_i y \cos(y, p) + \sum m_i z \cos(z, p) = \\ &= \cos(x, p) \sum m_i x + \cos(y, p) \sum m_i y + \cos(z, p) \sum m_i z \end{aligned}$$

cioè

$$M_p = M_x \cos(x, p) + M_y \cos(y, p) + M_z \cos(z, p) \quad (7.0.4)$$

Costruiamo il vettore  $M$  che ha per componenti  $M_x, M_y, M_z$  lungo gli assi coordinati (fig. 167); si ha

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} \quad (7.0.5)$$

$$M = M_x \cos(M, x) + M_y \cos(M, y) + M_z \cos(M, z) \quad (7.0.6)$$

è chiaro che  $M$  è il momento magnetico lungo la direzione OM. Si ha inoltre

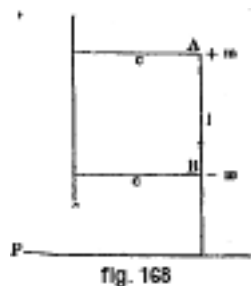
$$M_x = M \cos(M, x) \quad M_y = M \cos(M, y) \quad M_z = M \cos(M, z) \quad (7.0.7)$$

Sia  $OM_p$  il momento magnetico  $M_p$  lungo una certa direzione  $p$ ; portando la (5,b) nella (4), si ha

$$M_p = M \{ \cos(M, x) \cos(p, x) + \cos(M, y) \cos(p, y) + \cos(M, z) \cos(p, z) \}$$

cioè

$$M_p = M \cos(M, p) \quad (7.0.8)$$



Nel caso particolare di un magnete costituito semplicemente da due masse magnetiche  $+m$  e  $-m$  rispettivamente nei punti A e B (fig. 168), si ha, per il momento magnetico nella direzione BA,

dove  $l = BA$ . In una direzione perpendicolare a BA, il momento è uguale a  $mc + (-m)c = 0$ . È evidente che la (7) è il momento magnetico principale, nel caso particolare considerato, e che questa grandezza è identica a quella della formula (22). Quando si parla in generale del momento magnetico di un magnete, si intende sempre che si tratta del momento magnetico principale, la cui quantità è il massimo di  $M_n$ .

$$m = \sum m_n = \sum m_s \quad (7.0.10)$$
$$\mathcal{M} = Hml \sin \varphi \quad (7.0.11)$$

Siano  $x_n, y_n, z_n$  le coordinate del punto  $m_n$ ,  $x_s, y_s, z_s$  quelle del punto A,  $\xi_s, \eta_s, \zeta_s$  quelle del punto B. Dalla regole di composizione delle forze parallele, si ha

$$\begin{cases} \xi_n = \frac{\sum m_n H x_n}{\sum m_n H} = \frac{\sum m_n x_n}{m} & \eta_n = \frac{\sum m_n y_n}{m} & \zeta_n = \frac{\sum m_n z_n}{m} \\ \xi_s = \frac{\sum m_s x_s}{m} & \eta_s = \frac{\sum m_s y_s}{m} & \zeta_s = \frac{\sum m_s z_s}{m} \end{cases} \quad (7.0.12)$$

È chiaro che se i magnetismi fossero masse ponderabili, i poli sarebbero i centri di gravità del magnetismo nord e sud presi separatamente. Si ha, per il momento magnetico  $M_x$  del magnete, l'espressione, vedi (3) e (10),

$$M_x = \sum m_i x_i = \sum m_n x_n - \sum m_s x_s = m\xi_n - m\xi_s$$

e anche

$$M_y = m\eta_n - m\eta_s \quad M_z = m\zeta_n - m\zeta_s$$

queste differenze non sono altro che i momenti magnetici, nella direzione degli assi coordinati, di un magnete che ha solo magnetismo  $+m$  al polo A e magnetismo  $-m$  al polo B.

*Il momento magnetico di un magnete non cambia, quando tutto il magnetismo nord si concentra al polo nord, tutto il magnetismo sud al polo sud.* Il momento magnetico di un tale magnete è uguale a  $ml$ , vedi (7), nella direzione dell'asse BA. Ne consegue che, *in ogni magnete, il momento magnetico nella direzione dell'asse* (momento principale) *è uguale in valore al prodotto della quantità  $m$  di entrambi i magnetismi per la distanza tra i poli, cioè che si ha*

$$M = ml \quad (7.0.13)$$

La formula (9) dà ora

$$\mathcal{M} = MH \sin \varphi \quad (7.0.14)$$

*Un magnete, portato in un campo magnetico uniforme, è sottoposto all'azione di una coppia, il cui momento è uguale al prodotto del momento magnetico del magnete per l'intensità del campo e per il seno dell'angolo compreso tra l'asse del magnete e la direzione delle linee di forza.* Il massimo del momento della coppia, cioè

$$\mathcal{M}_{max} = MH \quad (7.0.15)$$

si verifica per  $\varphi = 90^\circ$ , cioè quando le linee di forza sono perpendicolari all'asse del magnete. Per  $\varphi = 0$ ,  $\mathcal{M} = 0$ ; *se il magnete è mobile, tende a disporsi in modo che il suo asse sia parallelo alle linee di forza.*

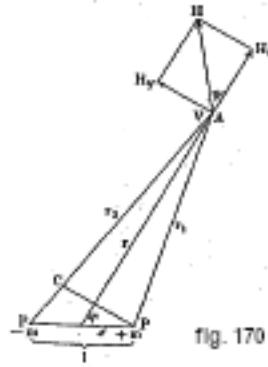
Citeremo solo una generalizzazione delle considerazioni precedenti. Sia  $Oxyz$  un triedro a tre rettangoli mobile rispetto al triedro a tre rettangoli  $O'x'y'z'$  che considereremo fisso; si considera un corpo costituito da masse  $m_i$  invariabilmente legate a  $Oxyz$  e alle quali sono applicate forze  $F_i$  di direzioni invariabilmente legate a  $O'x'y'z'$  e di intensità costanti, qualunque sia la posizione di  $Oxyz$  rispetto a  $O'x'y'z'$ . Per ogni posizione del triedro  $Oxyz$ , si sa sostituire il sistema di forze  $F_i$  con un sistema ridotto staticamente equivalente; si può anche proporre di ricercare la legge di variazione di questo sistema ridotto secondo le posizioni di  $Oxyz$ . La soluzione di quest'ultimo problema ha dato origine a un'importante branca della statica che ha ricevuto il nome di *astatica*, e la cui origine risale a E. F. A. Minding. I suoi risultati sono stati estesi da A. F. Möbius e M. Steichen, poi da O. J. Broch e N. M. F. Moigno che hanno dato applicazioni alla teoria del magnetismo. Un posto speciale va riservato a G. Darboux che, rettificando precedenti risultati di A. F. Möbius, ha ottenuto per via semplice importanti proposizioni del tutto nuove. Si possono infine consultare i Trattati di I. Somow, E. J. Routh e H. E. Timerding, nonché l'articolo nell'*Encyclopédie des sciences mathématiques*, ed. Francese, Tomo IV, vol. 2, sui fondamenti geometrici della Statica di P. Appell e L. Lévy.

### 3. Potenziale ed energia di un magnete

Abbiamo indicato nel § 4 del capitolo precedente alcune proprietà generali del potenziale magnetico, cioè del potenziale delle forze che si originano nel campo magnetico. Considereremo ora specialmente il caso in cui il campo magnetico è dovuto ai magneti. Consideriamo dapprima il potenziale di un piccolo magnete, o, che è la stessa cosa, di un magnete, le cui dimensioni sono piccole rispetto alla sua distanza dal punto A di cui vogliamo determinare il potenziale  $V$  (fig. 170). Siano P, P i poli,  $PP = l$ ; determinare la posizione del punto A mediante le coordinate polari  $r$  e  $\varphi$  indichiamo con  $r_1$  e  $r_2$  le distanze del punto A dai poli. Il potenziale cercato  $V$  è uguale a

$$V = \frac{m}{\mu} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{m}{\mu} \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$

dove  $\mu$  indica la permeabilità magnetica del mezzo circostante.



Supponendo  $l$  molto piccolo rispetto a  $r$ , si può porre al denominatore  $r_1 r_2 = r^2$  e al numeratore  $r_2 - r_1 = l \cos \varphi$ . Si ottiene così  $V = \frac{ml \cos \varphi}{\mu r^2}$ ; ma  $ml$  è uguale al momento magnetico  $M$  del magnete, e di conseguenza

$$V = \frac{M \cos \varphi}{\mu r^2} \quad (7.0.16)$$

Il momento magnetico appare qui come una caratteristica del magnete dato. La componente  $H_r$  dell'intensità  $H$ , nella direzione di  $r$  è

$$H_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2M \cos \varphi}{\mu r^2} \quad (7.0.17)$$

La componente  $H_\varphi$ , nella direzione perpendicolare a  $r$ , è

$$H_\varphi = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} = \frac{M \sin \varphi}{\mu r^2} \quad (7.0.18)$$

L'intensità  $H$  del campo nel punto A è

$$H = \sqrt{H_r^2 + H_\varphi^2} = \frac{M}{\mu r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \varphi} \quad (7.0.19)$$

l'angolo  $\psi$  compreso tra la direzione di  $H$  e  $r$  è determinato dalla formula

$$\tan \psi = \frac{H_\varphi}{H_r} = \frac{1}{2} \tan \varphi \quad (7.0.20)$$

Applichiamo l'espressione (13) al caso in cui il magnete ha la forma di un prisma (fig. 171), le cui basi  $S$  sono ricoperte da magnetismi aventi rispettivamente per densità superficiali  $+k$  e  $-k$ ; sia  $\delta$  l'altezza del prisma,  $l$  la direzione dell'asse magnetico; supporremo che non vi sia magnetismo libero sulla superficie laterale del prisma e che  $\delta$  sia molto piccola rispetto alla distanza  $r = aA$ . Si ha allora nella (13)  $M = Sk\delta$  e  $\varphi$  è l'angolo  $laA$ .

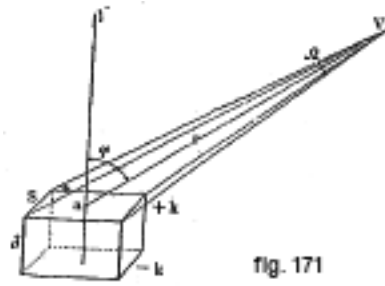


fig. 171

Descriviamo attorno ad A come centro una sfera di raggio  $r$  e sia  $\Omega$  l'angolo solido sotto il quale si vede la superficie  $S$  del punto A. Questo angolo ritaglia nella superficie sferica una certa area  $S'$  che, per  $\Omega$  molto piccolo, è  $S' = S \cos \varphi$ ; si ha inoltre  $S' = r^2 \Omega$ , di modo che  $S \cos \varphi = r^2 \Omega$ . Se si pone nella (13)  $M = Sk\delta$  e  $\cos \varphi = r^2 \Omega$ , viene

$$V = \frac{Sk\delta r^2 \Omega}{\mu S r^2} = \frac{k\delta \Omega}{\mu} \quad (7.0.21)$$

*Il potenziale del piccolissimo magnete considerato in un punto dato è proporzionale all'angolo solido sotto il quale si vede la base del magnete da questo stesso punto.*

Passiamo ora a determinare il potenziale di un magnete di qualsiasi forma e di dimensioni finite rispetto alla sua distanza dal punto A dove si cerca il potenziale  $V$ . Per semplificare, assumeremo  $\mu = 1$ . Siano  $\xi, \eta, \zeta$  le coordinate del punto A e  $dv = dxdydz$  un elemento di volume del magnete nei punti  $x, y, z$ . La porzione di magnete contenuta nel volume  $dv$  può essere considerata come un piccolo magnete. Se  $I$  è il grado di magnetizzazione nel punto  $x, y, z$ , il momento  $M$  di questo piccolo magnete è  $I dv = I dxdydz$ . Il corrispondente potenziale  $dV$  nel punto A è, vedi (13),

$$dV = \frac{I \cos(l, r) dxdydz}{r^2}$$

dove

$$r^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2$$

$$\cos(l, r) = \cos(l, x) \cos(r, x) + \cos(l, y) \cos(r, y) + \cos(l, z) \cos(r, z)$$

Si può portare il grado di magnetizzazione  $I$  sulla direzione dell'asse  $l$ ; siano A, B, C le componenti di questo vettore lungo gli assi coordinati, di modo che  $A = I \cos(l, x)$ , ecc. Notando che  $\cos(r, x) = \frac{\xi - x}{r}$  ecc., viene

$$dV = \left( A \frac{\xi - x}{r^3} + B \frac{\eta - y}{r^3} + C \frac{\zeta - z}{r^3} \right) dxdydz$$

Ci si rende facilmente conto che  $\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} = \frac{\xi - x}{r^3}$ , ecc., di modo che si ha infine l'espressione seguente

$$dV = \left( A \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} + B \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r} + C \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} \right) dxdydz \quad (7.0.22)$$

Questa formula fornisce il potenziale nel punto  $\xi, \eta, \zeta$  che è dovuto alla parte del magnete, il cui volume è  $dxdydz$  e il cui vettore di magnetizzazione ha componenti A, B, C nella direzione degli assi coordinati. Queste ultime componenti sono funzioni di  $x, y, z$  e il potenziale dovuto all'intero magnete è uguale a

$$V = \iiint \left( A \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} + B \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r} + C \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} \right) dxdydz \quad (7.0.23)$$



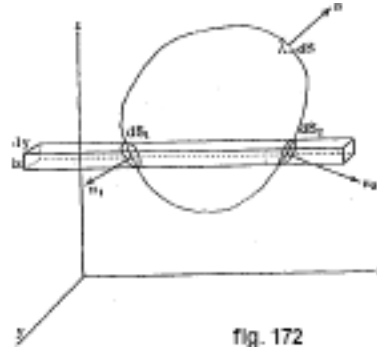
Consideriamo il primo termine di questo integrale, che scriveremo

$$V_x = \iiint A \frac{\partial^1}{\partial x} dx dy dz = \iint dy dz \int A \frac{\partial^1}{\partial x} dx \quad (7.0.24)$$

si ha, integrando per parti,

$$\int A \frac{\partial^1}{\partial x} dx = \left| \frac{A}{r} \right|_1^2 - \int \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial x} dx$$

Prendiamo per elemento dell'integrale  $V_x$  un tubo infinitamente stretto (fig. 172) di sezione  $dydz$ , che taglia sulla superficie  $S$  del magnete due aree  $dS_1$  e  $dS_2$ ; siano  $n_1$  e  $n_2$  le normali esterne a queste aree,  $A_1, r_1$  e  $A_2, r_2$  i valori di  $A$  e  $r$  in  $dS_1$  e  $dS_2$ .



Si ha  $dS_2 \cos(n_2, x) = -dS_1 \cos(n_1, x) = dydz$ , in base alla convenzione sui versi delle normali; di conseguenza

$$V_x = \iint \frac{A_2}{r_2} \cos(n_2, x) dS_2 + \iint \frac{A_1}{r_1} \cos(n_1, x) dS_1 - \iiint \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial x} dx dy dz$$

Il primo integrale si estende a tutti gli elementi  $dS_2$  in uscita dai tubi e il secondo a tutti gli elementi in entrata. Risulta evidente che la totalità degli elementi  $dS_1$  e  $dS_2$  danno l'intera superficie del magnete e si può pertanto scrivere più semplicemente

$$V_x = \iint \frac{\bar{A}}{r} \cos(n, x) dS - \iiint \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial x} dx dy dz$$

dove  $dS$  è un elemento della superficie del magnete,  $n$  la normale esterna a questo elemento,  $\bar{A}$  il valore della quantità  $A$  alla superficie del magnete. Se si trasformano allo stesso modo gli altri due termini dell'integrale (16), si ottiene

$$V = \iint \frac{\bar{A} \cos(n, x) + \bar{B} \cos(n, y) + \bar{C} \cos(n, z)}{r} dS - \iiint \frac{1}{r} \left( \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (7.0.25)$$

Questa espressione mostra che  $V$  può essere considerato come il potenziale di masse fittizie, alcune delle quali si trovano sulla superficie  $S$  del magnete e hanno la densità superficiale

$$k = \bar{A} \cos(n, x) + \bar{B} \cos(n, y) + \bar{C} \cos(n, z) \quad (7.0.26)$$

essendo le altre poste all'interno del magnete e aventi per densità di volume

$$\rho = - \left( \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \right) \quad (7.0.27)$$

Sostituendo, come si fa spesso, al simbolo di integrale multiplo, quello di integrale di superficie o di volume, si ha infine

$$V = \int \frac{k dS}{r} + \int \frac{\rho dv}{r} \quad (7.0.28)$$

Se  $\bar{I}$  è la magnetizzazione sulla superficie, si ha  $\bar{A} = \bar{I} \cos(\bar{l}, n)$  e quindi si può scrivere invece della (17)

$$k = \bar{I} \cos(\bar{I}, n) \quad (7.0.29)$$

*La densità superficiale è uguale alla proiezione sulla normale esterna della magnetizzazione alla superficie.* Per convenzione chiamiamo *magnetismo libero* le masse magnetiche fittizie di superficie o volume. Le formule (17) o (20) e (18) mostrano che la distribuzione del magnetismo libero dipende da quella della magnetizzazione  $I(A, B, C)$ . Considereremo alcuni casi speciali in seguito; in precedenza considereremo quello dove la magnetizzazione è uniforme, cioè dove  $I$ , e quindi anche  $A, B, C$  hanno la stessa grandezza e la stessa direzione in tutti i punti della calamita. Quando si ha

$$I = cost \quad (7.0.30)$$

e soprattutto la stessa direzione per questo vettore, allora

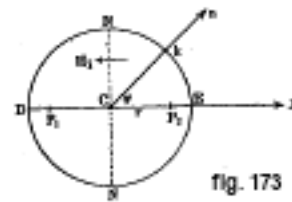
$$\rho = 0 \quad (7.0.31)$$

$$V = I \int \frac{\cos(I, n)}{r} dS \quad (7.0.32)$$

Poiché  $I$  è il momento magnetico dell'unità di volume, è chiaro che, nel caso di una magnetizzazione uniforme, il momento  $M$  del magnete di volume  $v$  è

$$M = Iv \quad (7.0.33)$$

In un magnete prismatico, il cui asse geometrico è parallelo a  $l$ , si ha sulla superficie laterale  $\cos(I, n) = 0$ , da cui  $k = 0$ ; sulle basi,  $\cos(I, n) = \pm 1$ . Si trova magnetismo libero solo sulle basi; la densità di questo magnetismo è in valore assoluto uguale al grado di magnetizzazione del prisma. Sia  $s$  l'area di entrambe le basi,  $L$  la lunghezza del magnete; la quantità di magnetismo è uguale a  $m = \pm Is$ ; i poli sono nei baricentri delle basi; la distanza tra i poli è  $L$ . Il momento magnetico è  $M = mL = IsL = Iv$ , in accordo con la (21,c).



Con una sfera di raggio  $r$  uniformemente magnetizzata, si ha  $k = I \cos(I, n) = I \cos \varphi$  (fig. 173). L'emisfero NEN è coperto dal magnetismo nord, l'emisfero NDN dal magnetismo sud; la densità è proporzionale a  $\cos \varphi$ ; sull'equatore NN, è nulla. La quantità totale  $m$  di magnetismo dello stesso nome è

$$m = \int_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} I \cos \varphi \cdot r^2 \sin \varphi d\varphi d\psi = \pi I r^2 \quad (7.0.34)$$

Il momento è uguale a  $Iv = \frac{4}{3}\pi r^3 I$ ; ora  $M = ml$ , con  $l$  la distanza  $P_1 P_2$  tra i poli; pertanto

$$l = \frac{M}{m} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 I}{\pi I r^2} = \frac{4}{3}r \quad (7.0.35)$$

Ne consegue che  $CP_1 = CP_2 = \frac{2}{3}r$ . Si ottiene lo stesso risultato determinando le posizioni dei baricentri delle masse  $+m$  e  $-m$ . Abbiamo considerato nel § 10 del cap. I il caso in cui una sfera è ricoperta di elettricità, la cui densità  $k$  è proporzionale al coseno della latitudine. Si ha quindi all'interno della sfera un campo uniforme; l'intensità  $\psi$  del campo e la densità  $k$  sono determinate dalle formule (1-72a), (1-72b) e si ha  $\psi = -F$ . Indichiamo ora con  $H_i$  l'intensità di un campo magnetico all'interno della sfera; poiché questo vettore ha una direzione opposta a quella di  $I$  (vedi fig. 173), si ha

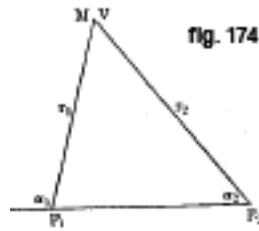
$$k = l \cos \varphi = -\frac{3}{4\pi} H_i \cos \varphi$$

da cui

$$H_i = -\frac{4}{3}\pi I \quad (7.0.36)$$

Si consideri ancora una lastra sottilissima, infinitamente estesa e uniformemente magnetizzata; supponiamo che la magnetizzazione  $I$  sia normale alle facce della piastra. Si ha, come nel caso di un cilindro, per la densità del magnetismo libero sulle facce del piatto,  $k = \pm I$ . Ognuna delle due facce dà, all'interno della piastra, la forza  $2\pi k = 2\pi I$ , diretta dalla faccia nord verso quella sud, cioè nella direzione opposta di  $I$ . Si ottiene così, per l'intensità del campo all'interno della piastra,

$$H_i = -4\pi I \quad (7.0.37)$$



Abbiamo stabilito le formule che permettono di calcolare il potenziale  $V$  di un dato magnete. Le superfici  $V = \text{cost}$  sono le superfici di livello del potenziale; costruendo le traiettorie ortogonali di queste superfici si ottengono le linee di forza del campo magnetico del magnete. Nel caso molto semplice in cui vi siano due poli  $P_1$  e  $P_2$  (fig. 174), contenenti uguali quantità di magnetismi di nomi opposti, il potenziale  $V$  nel punto  $M$  è uguale a  $\frac{m}{r_1} - \frac{m}{r_2}$  e conseguentemente l'equazione delle superfici di livello del potenziale è

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \text{cost} \quad (7.0.38)$$

L'equazione delle linee di forza è

$$\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2 = \text{cost} \quad (7.0.39)$$

dove  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  sono gli angoli che formano i raggi vettoriali  $r_1, r_2$  con l'asse del magnete. Nel caso di due poli uguali e dello stesso nome, si ottiene per l'equazione delle superfici di livello di potenziale

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \text{cost} \quad (7.0.40)$$

e per l'equazione delle linee di forza

$$\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 = \text{cost} \quad (7.0.41)$$

Maxwell, Lindeck, Ebert e altri hanno proposto vari metodi per tracciare queste linee.

Ora determineremo l'energia di un magnete portato in un dato campo magnetico. Poiché le notazioni  $V$  e  $H(\alpha, \beta, \gamma)$  finora si riferiscono al potenziale e all'intensità di campo del magnete stesso, indicheremo il potenziale e l'intensità del campo magnetico dati da  $V'$  e  $H'(\alpha', \beta', \gamma')$ .

Consideriamo dapprima un magnete infinitamente piccolo, che contiene le quantità  $+m$  e  $-m$  di magnetismo; siano  $dl$  la distanza tra i poli,  $V'_1$ , e  $V'_2$ , i valori del potenziale  $V$  a questi poli. La formula (42b6), dà, per l'energia potenziale  $dW$  del magnete,

$$dW = m(V'_1 - V'_2) = m dl \frac{\partial V'}{\partial l} = -m H' dl \quad (7.0.42)$$

essendo  $H'_l$  la componente del campo nella direzione  $l$ , che va da  $-m$  a  $+m$ . Sia  $I(A, B, C)$ , come prima, la magnetizzazione del piccolo magnete,  $dv$  il suo volume. Si ha  $m dl = I dc$ , rappresentando le due espressioni il momento magnetico e di conseguenza

$$dW = -I H'_l dv = -I H' \cos(H', l) dv$$

Inoltre,

$$\cos(H', l) = \cos(H', x) \cos(l, x) + \cos(H', y) \cos(l, y) + \cos(H', z) \cos(l, z)$$

e  $I \cos(l, x) = A$ , ecc.,  $H' \cos(H', x) = \alpha'$ , ecc.; si ha pertanto

$$dW = -(A\alpha' + B\beta' + C\gamma') dv \quad (7.0.43)$$

e di conseguenza, per l'energia potenziale di un magnete finito

$$W = - \int (A\alpha' + B\beta' + C\gamma') dv \quad (7.0.44)$$

Questa formula si può stabilire altrimenti, considerando il magnetismo libero le cui densità  $k$  e  $\rho$  sono date dalle formule (17) e (18). Si ha, dalla (42b)

$$W = \int V' \frac{k ds}{r} + \int V' \frac{\rho dv}{r}$$

trasformando questa espressione, si ritrova la (25).

Nel caso di un campo esterno uniforme, le grandezze  $\alpha', \beta', \gamma'$  sono costanti; sostituendo  $\alpha' = H' \cos(H', x)$ , ecc., si ha

$$W = -H' \left\{ \cos(H', x) \int A dv + \cos(H', y) \int B dv + \cos(H', z) \int C dv \right\}$$

Sia  $M$  il momento magnetico del magnete; la componente  $M \cos(M, x)$  lungo l'asse  $x$  è la somma delle componenti lungo tale asse dei momenti  $I dv$  dei magneti elementari nei quali il magnete dato può essere scomposto. Si ha quindi

$$M \cos(M, x) = \int I \cos(I, x) dv = \int A dv$$

Sostituendo gli integrali con il loro valore, si ottiene

$$W = -H' M \{ \cos(H', x) \cos(M, x) + \cos(H', y) \cos(M, y) + \cos(H', z) \cos(M, z) \}$$

o

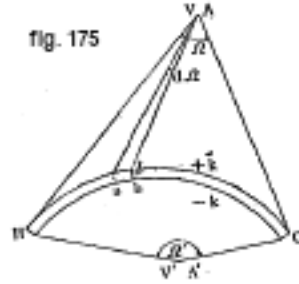
$$W = -H' M \cos(H', M) \quad (7.0.45)$$

L'energia potenziale è minima e di conseguenza l'equilibrio del magnete è stabile, quando  $\cos(H', M) = 1$ , cioè quando l'asse del magnete è parallelo alle linee di forza, il che concorda con la fine del § 2.

Ricordiamo che tutte le formule di questo paragrafo sono state stabilite assumendo che la permeabilità magnetica del mezzo sia  $\mu = 1$ . Se  $\mu$  è diverso da uno, è necessario, nelle espressioni di  $V$ , introdurre  $\mu$  al denominatore.

#### 4. Potenziale ed energia di un doppio strato magnetico (foglio magnetico)

Abbiamo indicato nel § 4 del capitolo precedente le proprietà del campo magnetico che sono analoghe a quelle del campo elettrico e abbiamo poi incontrato il concetto di doppio strato magnetico, detto anche foglio magnetico. Abbiamo chiamato momento o anche potenza del foglio magnetico il prodotto  $\omega = k\delta$ , dove  $\delta$  è lo spessore del foglio,  $\pm k$  la densità superficiale che è la stessa su entrambi i lati del foglio. Il foglio è semplice quando, in tutti i suoi punti,  $\omega$  ha la stessa grandezza; composto, quando ha una grandezza variabile. Quando parleremo in seguito di un foglio, sottintenderemo sempre che si tratta di un foglio semplice.



Cerchiamo il valore del potenziale  $V$  di un foglio magnetico BC (fig. 175) in un dato punto A. Dividiamo il foglio in elementi e sia  $ab$  uno di questi elementi,  $dV$  il suo potenziale nel punto A. Questo elemento  $ab$  rappresenta appunto il piccolo magnete il cui potenziale è determinato dalla formula (14), dove dobbiamo scrivere ora, per l'angolo solido,  $d\Omega$  invece di  $\Omega$ . Poiché  $k\delta$  è la potenza  $\omega$  del foglio magnetico, si ha

$$dV = \frac{\omega}{\mu} d\Omega$$

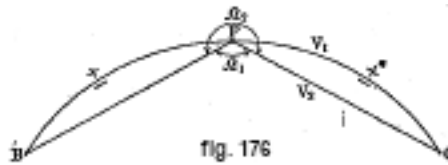
da cui, per il potenziale  $V$  del foglio magnetico (semplice) nel punto A,

$$V = \frac{\omega}{\mu} \Omega \quad (7.0.46)$$

dove  $\omega = k\delta$  è la potenza del foglio,  $\Omega$  l'angolo solido sotto il quale si vede dal punto A il contorno del foglio. Se da un altro punto A' è visibile il lato negativo o faccia sud del foglio, il potenziale  $V$  nel punto A' è uguale a

$$V' = \frac{\omega}{\mu} \Omega' \quad (7.0.47)$$

essendo  $\Omega'$  l'angolo solido sotto il quale è visto il contorno. Quando due facce del foglio sono entrambe in parte visibili dal punto dato,  $V = \frac{\omega}{\mu} \int d\Omega$  contiene elementi di nomi opposti, che si sommano algebricamente.



Supponiamo che i punti A e A' si avvicinino indefinitamente a uno stesso punto P del foglio (fig. 176), che consideriamo come infinitamente sottile. Si ha allora, alla superficie del foglio, dal lato positivo del potenziale  $V_1 = \frac{\omega}{\mu} \Omega_1$ , dal lato negativo il potenziale  $V_2 = \frac{\omega}{\mu} \Omega_2$ ; ma  $\Omega_1 + \Omega_2 = 4\pi$  e quindi  $V_2 = -\frac{\omega}{\mu} \Omega (4\pi - \Omega_1) = \frac{\omega}{\mu} \Omega_1 - 4\pi \frac{\omega}{\mu} = V_1 - 4\pi \frac{\omega}{\mu}$ ; si vede pertanto che

$$V_1 - V_2 = 4\pi \frac{\omega}{\mu} \quad (7.0.48)$$

in pieno accordo con la (6-40), perché, nel calcolo del potenziale, abbiamo considerato un mezzo di permeabilità magnetica  $\mu$ .

La formula (27) mostra che il potenziale  $V$  di un foglio magnetico e di conseguenza anche la forza agente in un qualsiasi punto A, non dipendono affatto dalla forma della superficie di questo foglio, ma solo dal suo contorno. Quando si fa variare la superficie, il punto A non deve essere attraversato, perché in questo passaggio il potenziale cambia improvvisamente della quantità  $4\pi\omega : \mu$  e l'intensità  $H$  cambia verso.

In un foglio magnetico la cui superficie è chiusa, si ha  $\Omega = 0$  e  $\Omega' = 4\pi$ , così che

$$V = 0 \quad V' = -\frac{4\pi\omega}{\mu} = cost$$

l'intensità del campo è nulla, sia all'esterno che all'interno del foglio chiuso.

Le superfici di livello del potenziale di un foglio magnetico sono le superfici

$$\Omega = cost \quad (7.0.49)$$

L'intensità del campo, che è diretto lungo la normale  $n$  alla superficie (27,c) vale

$$H = -\frac{\partial V}{\partial n} = -\frac{\omega}{\mu} \frac{\partial \Omega}{\partial n} \quad (7.0.50)$$

Proponiamoci di determinare il valore dell'energia potenziale di un foglio magnetico, portato in un campo magnetico di intensità  $H'$ . Sia  $dW$  l'energia potenziale di un elemento di area  $dS$  di questo foglio. Secondo la formula (23,d),

$$dW = -mH'dl$$

dove  $m$  indica la quantità di magnetismo in ciascuno dei poli dell'elemento considerato; si ha  $m = k dS$ , dove  $k$  rappresenta la densità superficiale del magnetismo su ciascuna faccia del foglio; inoltre  $dl = \delta$ , che è lo spessore del doppio strato; infine  $H'_l$  è la componente dell'intensità del campo nella direzione  $l$  e nel verso da  $-m$  a  $+m$ , cioè dal lato negativo (sud) del foglio verso il lato positivo (nord). Indicheremo questa direzione, che è normale alla superficie  $S$ , con  $n$ . Si ha così

$$dW = -k\delta H'_n dS = -\omega H'_n dS \quad (7.0.51)$$

e osservando che  $k\delta = \omega$ ; da cui

$$W = -\omega \int H_n dS$$

Ma essendo la direzione  $n$  perpendicolare a  $dS$ , l'ultimo integrale non è altro che il flusso di forza  $\Phi'$  o il numero totale  $N$  di linee di forza, che passano all'interno del contorno del foglio, vedi (6-12b). Di ha quindi

$$W = -\omega\Phi' = -\omega N \quad (7.0.52)$$

*L'energia potenziale di un foglio magnetico è uguale al prodotto, influenzato dal segno meno, della potenza del foglio per il flusso di forza  $\Phi'$  o per il numero totale di linee di forza, che passano all'interno del contorno del foglio nel verso della faccia negativa verso quella positiva.* Il segno meno indica che quando  $\Phi'$  è positivo, cioè quando le linee di forza hanno effettivamente la direzione indicata, le forze magnetiche, nello spostamento del foglio dalla posizione che occupa all'infinito, compiono lavoro negativo, mentre le forze esterne, che spostano il foglio, svolgono un lavoro positivo.

Consideriamo il caso molto importante in cui il campo esterno è esso stesso dovuto alla presenza di un altro foglio magnetico. Indichiamo con  $\omega_1$  la potenza del primo foglio, con  $\omega_2$  quella del secondo, che dà origine al campo esterno. Sia inoltre  $\Phi_{1,2} = N_{1,2}$  il flusso o il numero

totale di linee di forza che passano all'interno del contorno del primo foglio e fuoriescono dal secondo. Indichiamo con  $W_{1,2}$  l'energia potenziale cercata. La formula (28) dà

$$W_{1,2} = -\omega_1 \Phi_{1,2} = -\omega_1 N_{1,2} \quad (7.0.53)$$

ma il flusso totale delle linee di forza uscenti dal secondo foglio è proporzionale alla potenza  $\omega_2$  di questo secondo foglio, come mostra la formula (27,d); la parte  $\Phi_{1,2}$  di questo flusso, che passa all'interno del contorno del primo foglio, deve quindi essere anch'essa proporzionale a  $\omega_2$ . Sia  $\frac{L_{1,2}}{\mu}$  il fattore di proporzionalità, cioè poniamo

$$\Phi_{1,2} = N_{1,2} = \frac{L_{1,2}}{\mu} \omega_2 \quad (7.0.54)$$

Il fattore  $L_{1,2}$  dipende solo dalla dimensione, dalla forma e dalla posizione relativa dei contorni dei due fogli magnetici: è una grandezza di natura puramente geometrica. Portando la (29) nella (28, a), viene

$$W_{1,2} = -\frac{\omega_1 \omega_2}{\mu} L_{1,2} \quad (7.0.55)$$

Indichiamo ora con  $W_{2,1}$  l'energia potenziale del secondo foglio, che si trova nel campo magnetico dovuto al primo foglio. Sia  $\Phi_{2,1} = N_{2,1}$  il flusso o il numero totale di linee di forza che escono dal primo foglio e passano all'interno del contorno del secondo. Come nella formula (28,a), si ha

$$W_{2,1} = -\omega_2 \Phi_{2,1} = -\omega_2 N_{2,1} \quad (7.0.56)$$

La quantità  $\Phi_{2,1} = N_{2,1}$  è proporzionale a  $\omega_1$ ; cioè

$$\Phi_{2,1} = N_{2,1} = \frac{L_{2,1}}{\mu} \omega_1 \quad (7.0.57)$$

dove  $L_{2,1}$  è una grandezza puramente geometrica come  $L_{1,2}$ . Le formule (30,a) e (30,b) danno

$$W_{2,1} = -\frac{\omega_1 \omega_2}{\mu} L_{2,1} \quad (7.0.58)$$

Dalle formule che abbiamo appena stabilito derivano una serie di conseguenze molto importanti.  $W_{1,2}$  è il lavoro che si deve fare per portare il primo foglio ad una distanza infinita dal secondo;  $W_{2,1}$  è il lavoro nello stesso spostamento del secondo foglio rispetto al primo. Queste grandezze sono ovviamente uguali, poiché rappresentano il lavoro necessario per portare i due fogli ad una distanza infinita l'uno dall'altro. Quindi si ha

$$W_{1,2} = W_{2,1} \quad (7.0.59)$$

Conserveremo pertanto la sola notazione  $W_{1,2}$  e la chiameremo l'energia potenziale dei due fogli magnetici. Le formule (30) e (30,c) danno allora

$$L_{1,2} = L_{2,1} \quad (7.0.60)$$

Le grandezze geometriche  $L_{1,2}$  e  $L_{2,1}$  che entrano rispettivamente nelle formule (30) e (30,c) sono uguali. Manterremo la sola notazione  $L_{1,2}$  e chiameremo questa grandezza coefficiente di mutua induzione dei contorni dei due fogli magnetici nel vuoto ( $\mu = 1$ ). Indicheremo nel seguito l'origine di questa denominazione.

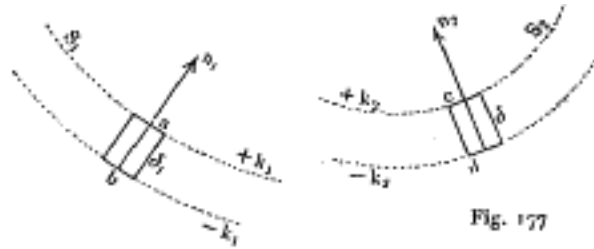
Quando si scelgono notazioni  $W_{1,2}$  e  $L_{1,2}$  si deve conservare anche la formula (30). Le formule (29), (30,b) e 31) danno ora

$$\frac{\Phi_{1,2}}{\Phi_{2,1}} = \frac{N_{1,2}}{N_{2,1}} = \frac{\omega_2}{\omega_1} \quad (7.0.61)$$

Nel caso particolare in cui  $\omega_1 = \omega_2$ , si ha

$$\begin{cases} \Phi_{1,2} = \Phi_{2,1} \\ N_{1,2} = N_{2,1} \end{cases} \quad (7.0.62)$$

Quando ci sono due fogli magnetici di forma qualsiasi, ma della stessa potenza, il flusso o il numero totale di linee di forza, che escono dal primo foglio e passano all'interno del contorno del secondo, è uguale al flusso o al numero totale di linee di forza, che escono dal secondo foglio e passano all'interno del contorno del primo. Non è difficile tradurre la formula più generale (32) anche nel linguaggio ordinario. La formula (30) esprime ora che l'energia potenziale di due fogli magnetici è uguale al prodotto cambiato di segno delle potenze  $\omega_1$  e  $\omega_2$  di questi fogli, moltiplicato per il coefficiente di mutua induzione  $L_{1,2}$  dei loro contorni.



Esistono diverse formule per il calcolo della grandezza  $L_{1,2}$ ; ne stabiliremo uno. In Fig. 177, i fogli magnetici sono rappresentati da linee tratteggiate. Prendiamo due elementi infinitamente piccoli  $ab$  e  $cd$  di questi fogli, le cui aree sono rispettivamente  $dS_1$  e  $dS_2$ ; siano  $n_1$  e  $n_2$  le normali alle facce positive di questi elementi,  $r$  la distanza tra  $ab$  e  $cd$ , che può essere assunta uguale ad  $ac$ . Denotiamo infine l'energia potenziale dei due elementi con  $w_{1,2}$  e siano  $V_a, V_b$  i potenziali del magnete  $cd$  nei punti  $a$  e  $b$ . Si ha

$$w_{1,2} = k_1 dS_1 (V_a - V_b) \quad (7.0.63)$$

ma

$$V_a = \frac{k_2 dS_2}{\mu} \left( \frac{1}{ac} - \frac{1}{ad} \right) \quad (7.0.64)$$

si ha  $\frac{1}{ac} = \frac{1}{r}$  e  $\frac{1}{ad}$  si deduce da  $\frac{1}{ac}$  mediante uno spostamento  $dn_2 = -\delta_2$ , nella direzione  $n_2$ , di modo che

$$\frac{1}{ad} = \frac{1}{r} + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_2} = \frac{1}{r} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_2} \delta_2$$

si ha quindi

$$V_a = \frac{1}{\mu} k_2 \delta_2 dS_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_2} \quad (7.0.65)$$

$V_b$  si deduce da  $V_a$  mediante uno spostamento  $dn_1 = -\delta_1$ , nella direzione  $n_1$  e pertanto

$$V_b = V_a + \frac{\partial V_a}{\partial n_1} dn_1 = V_a - \frac{\partial V_a}{\partial n_1} \delta_1$$

da cui

$$V_a - V_b = \frac{\partial V_a}{\partial n_1} \delta_1 = \frac{1}{\mu} k_2 \delta_1 \delta_2 dS_2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial n_1 \partial n_2}$$

Portando questo valore nella (34) e ponendo  $k_1 \delta_1 = \omega_1$ ,  $k_2 \delta_2 = \omega_2$ , si ottiene

$$w_{1,2} = \frac{\omega_1 \omega_2}{\mu} \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial n_1 \partial n_2} dS_1 dS_2 \quad (7.0.66)$$



da cui, per l'energia potenziale totale dei due fogli

$$W_{1,2} = \frac{\omega_1 \omega_2}{\mu} \iint \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial n_1 \partial n_2} dS_1 dS_2 \quad (7.0.67)$$

Se si confronta questa espressione con la (30), si trova, per il coefficiente di mutua induzione di due fogli nel vuoto,

$$L_{1,2} = - \iint \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial n_1 \partial n_2} dS_1 dS_2 \quad (7.0.68)$$

Nella (35) e (36), ciascuna delle integrazioni semplici si estende a tutti gli elementi della superficie del foglio corrispondente.

## 5. Magnetismo libero

Abbiamo incontrato, in quanto precede, due grandezze caratteristiche dello stato magnetico di un corpo: il grado di magnetizzazione o semplicemente la magnetizzazione  $I$  e il magnetismo libero, di superficie e di volume. La prima di queste grandezze  $I$ , che è vettoriale e le cui componenti abbiamo designato con  $A, B, C$ , determina il vero stato magnetico di una sostanza in un dato punto. È uguale al momento magnetico dell'unità di volume in questo punto, cioè al momento  $dM$  di un elemento infinitamente piccolo del magnete, che si immagina isolato da tutto il corpo, diviso per il volume di questo elemento. Il magnetismo libero è una sostanza fittizia, la cui azione, obbedendo a una determinata legge, può sostituirsi a quella che si manifesta realmente nello spazio, in presenza del corpo magnetizzato. Abbiamo trovato, per la densità  $k$  del magnetismo superficiale libero, le formule (17) e (20),

$$k = \bar{I} \cos(\bar{I}, n) = \bar{A}(n, x) + \bar{B} \cos(n, y) + \bar{C} \cos(n, z) \quad (7.0.69)$$

dove  $\bar{I}(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$  indica la magnetizzazione alla superficie,  $n$  la normale esterna a questa superficie. Per la densità di volume  $\rho$  del magnetismo libero interno, si ha la formula (18)

$$\rho = - \left( \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \right) \quad (7.0.70)$$

Consideriamo prima il magnetismo libero interno. La formula (38) mostra che  $\rho = 0$  per  $I = \text{cost}$  e che la presenza del magnetismo libero è dovuta alla non invariabilità di  $I$ , cioè alla non uniformità della magnetizzazione vera. Questa dipendenza tra  $\rho$  e  $I$  può si può spiegare in modo elementare come segue. Consideriamo due elementi vicini  $a$  e  $b$  del magnete SN (fig. 178); sia  $\sigma$  l'area della base,  $\Delta x$  la lunghezza dell'elemento  $a$ ,  $I$  la sua magnetizzazione, avendo il vettore  $I$  la direzione dell'asse  $x$ .

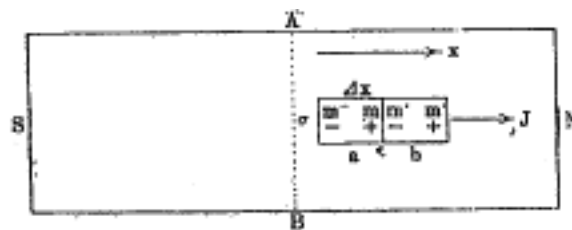


Fig. 178

Alle estremità dell'elemento  $a$  si trovano i magnetismi  $\pm m$ , che diventerebbero magnetismi liberi, se questo elemento fosse isolato dal magnete. La magnetizzazione dell'elemento  $b$  è uguale a  $I + \Delta I$ : alle sue estremità ci sono i magnetismi  $\pm m'$ . Il momento magnetico dell'elemento

$a$  è uguale a  $m\Delta x$ ; ha come espressione  $L\sigma\Delta x$ , per cui si ha  $m = \sigma I$ . Allo stesso modo, si ha  $m' = \sigma(I + \Delta I)$ . Se si ammette che  $(+m)$  e  $(-m')$  sono in uno stesso piano, si ottiene, per il magnetismo libero in questo piano,

$$m - m' = -\sigma\Delta I = -\sigma\frac{\partial l}{\partial x}\Delta x$$

Al limite si può ammettere che questo magnetismo libero è distribuito nel volume  $\sigma\Delta x$  dell'elemento  $a$ ; la sua densità di volume è allora

$$\rho = \frac{m - m'}{\sigma\Delta x} = -\frac{\partial l}{\partial x} \quad (7.0.71)$$

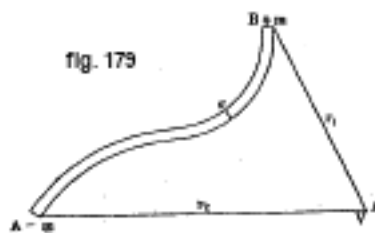
Abbiamo supposto che  $I$  abbia la direzione dell'asse  $x$ ; lasciamo al lettore stabilire la formula più generale (38), considerando, come abbiamo dovuto fare molte volte in questo Trattato, un parallelepipedo infinitamente piccolo, i cui spigoli sono  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ .

Nei soliti metodi di magnetizzazione si ottiene il magnetismo nord (+) su tutta la metà nord del corpo che si magnetizza, il magnetismo sud (−) su tutta la metà sud. La formula (39) mostra che è necessario per questo che il massimo  $l_m$  di  $I$  corrisponda alla zona indifferente; in altre parole, la magnetizzazione reale deve diminuire dal centro AB del magnete verso le sue due estremità. Un magnete è quindi solitamente più fortemente magnetizzato proprio nel punto in cui la densità del magnetismo libero fittizio è zero.

Dobbiamo notare che il ragionamento appena fatto sulla fig. 178 non è del tutto rigoroso. Abbiamo supposto che le quantità di magnetismo  $+m$  di un elemento del magnete e  $-m'$  dell'elemento vicino siano per così dire composte in modo da formare un'unica massa  $m - m'$ . In realtà, una tale composizione delle masse può essere impraticabile; le particelle magnetiche più piccole sono, infatti, probabilmente separate l'una dall'altra da intervalli.

Lasciamo inoltre al lettore la dimostrazione che la quantità totale di magnetismo libero dello stesso segno (magnetismo superficiale e magnetismo interno), che si trova in una metà del magnete, è numericamente uguale al massimo  $I_m$  della magnetizzazione che si ha nella zona neutra AB.

Consideriamo ora alcuni casi particolari di magnetizzazione. Sia un magnete infinitamente sottile AB (fig. 179) di sezione costante  $\sigma$ , magnetizzato uniformemente in modo che il vettore  $I = \text{cost}$  abbia ovunque la direzione dell'asse geometrico del magnete.



È chiaro che  $k = 0$  sulla superficie laterale, perché, per questa superficie, si ha, nella formula (37),

$$\cos(I, n) = 0$$

inoltre,  $\rho = 0$  ovunque, poiché  $A, B, C$  nella (38) sono quantità costanti. C'è magnetismo libero solo alle estremità A e B, che sono i poli del magnete. Un tale magnete filiforme uniformemente magnetizzato è chiamato solenoide magnetico. La quantità  $\pm m$  di magnetismo libero ai poli è pari a  $\pm I\sigma$ , la formula (37) da  $k = \bar{I} = I$ . Il potenziale  $V$  in un punto A ha per valore, quando la permeabilità magnetica del mezzo circostante  $\mu = 1$

$$V = I\sigma \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (7.0.72)$$

*Il potenziale di un solenoide magnetico non dipende in alcun modo dalla forma del solenoide ma solo dalla posizione delle sue estremità.* Un solenoide magnetico chiuso dà in tutti i punti dello spazio  $V = 0$ , quindi anche  $H = 0$ . Non contiene magnetismo libero e non esercita alcuna azione magnetica esterna; può tuttavia avere una magnetizzazione molto forte. Un tale solenoide anulare rappresenta una catena magnetica chiusa.

Tra le diverse distribuzioni della magnetizzazione in magneti di qualsiasi forma e dimensione, la magnetizzazione solenoidale e quella lamellare sono di particolare interesse.

La magnetizzazione è detta solenoidale ,quando l'intero magnete può essere scomposto in solenoidi magnetici. Si ha ovunque, in un tale magnete,

$$\rho = 0 \quad (7.0.73)$$

o, si veda la (38)

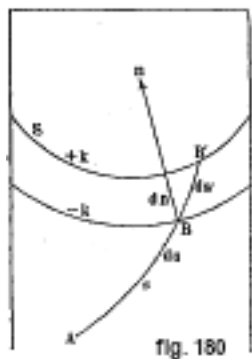
$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0 \quad (7.0.74)$$

Quest'ultima equazione esprime la condizione affinché si abbia magnetizzazione solenoidale.

Il potenziale del magnete è in questo caso, si veda la (37)

$$V = \int \frac{k dS}{r} = I \int \frac{\cos(I, n)}{r} dS \quad (7.0.75)$$

La magnetizzazione si dice lamellare, quando l'intero magnete può essere scomposto in un numero infinito di fogli magnetici semplici. Ciascun foglio ha una determinata potenza ed è portato da una certa superficie  $S$  (fig. 180). La magnetizzazione  $I$  ha, in ogni punto, una direzione normale alla superficie  $S$  che passa per questo punto. Sia  $ab$  uno di questi fogli magnetici infinitamente sottili,  $n$  la normale alla sua superficie,  $dn$  il suo spessore. La potenza di questo foglio è una quantità infinitamente piccola uguale a  $kdn$ , dove  $k$  è la densità finita del magnetismo libero, che apparirebbe sulla superficie  $S$ , se si separasse il foglio  $ab$  dal magnete. Ritagliamo, nel foglio, un elemento di area  $dS$  e volume  $dv = dS dn$ . Il momento magnetico di questo elemento è  $k dS dn = k dv$ : d'altra parte questo momento è uguale a  $I dv$ , pertanto  $I = k$ , e la potenza del foglio è uguale a  $I dn$ , essendo  $I$  nella direzione della normale  $n$ .



Sia A un qualsiasi punto preso come origine; se si passa da questo punto, seguendo una qualsiasi curva  $s$ , in un qualsiasi punto B della faccia del foglio considerato, la somma delle potenze di tutti i fogli attraversati dalla curva  $s$  non dipende ovviamente dalla forma di questa curva , né dalla posizione del punto B sulla superficie  $S$ . Questa somma è una funzione delle coordinate  $x, y, z$  del punto B e le superfici  $S$  dei fogli attraversati sono le sue superfici di livello. Indicheremo questa funzione con  $\varphi(x, y, z)$ ; si può attribuirle la forma simbolica

$$\varphi = \int_A^B I dn = \int_A^B I \cos(dn, ds) ds = \int_A^B I \cos(I, ds) ds \quad (7.0.76)$$

Quando si attraversa il doppio strato  $ab$  da  $B$  a  $B'$ , la funzione  $\varphi$  cresce da  $d\varphi = Idn$  si ha quindi

$$I = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \quad (7.0.77)$$

Chiameremo la funzione  $\varphi$  il potenziale di magnetizzazione: esso svolge rispetto a  $I$  lo stesso ruolo del potenziale  $V$  rispetto all'intensità  $H$ . La formula (43) dà

$$d\varphi = Idn = I \cos(I, ds) ds$$

ma si ha  $I \cos(I, ds) ds = Adx + Bdy + Cdz$ , dove  $A = I \cos(I, n)$ , ecc.  $dx = ds \cos(ds, dx)$ , ecc. Si ottiene così

$$Adx + Bdy + Cdz = d\varphi$$

da cui

$$A = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad B = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad C = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (7.0.78)$$

Si ricava che

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial B}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (7.0.79)$$

*Nella magnetizzazione lamellare esiste un potenziale di magnetizzazione  $\varphi$ ; le sue superfici di livello sono le superfici dei fogli magnetici. La magnetizzazione  $I$  è ovunque normale a queste superfici di livello e la sua intensità è determinata dalla formula (43). La condizione di magnetizzazione lamellare si esprime con le formule (44).*

La denominazione di potenziale è ovviamente qui estesa solo per analogia; non c'è alcun tipo di relazione tra una grandezza come  $\varphi$  e un lavoro.

Dopo aver considerato l'origine del magnetismo libero, la sua distribuzione in alcuni casi particolari, e le azioni esterne a cui dà luogo, è opportuno aggiungere qualche parola sui suoi effetti nei punti che si trovano all'interno del magnete. Più avanti studieremo più approfonditamente cosa accade all'interno di una sostanza magnetica; parleremo qui solo di una circostanza particolarmente essenziale, quella che si chiama l'azione smagnetizzante del magnetismo libero; considereremo soprattutto l'aspetto qualitativo del fenomeno.

Poniamo una sbarra di ferro  $AB$  (fig. 181) in un campo magnetico, la cui intensità è rappresentata in intensità e direzione dalla freccia  $H$ ; sia  $L$  la lunghezza,  $d$  lo spessore della barra. Sotto l'effetto di questo solo campo si otterrebbe una certa magnetizzazione  $I_0$ ; ma si vede sulla figura che le masse magnetiche libere  $\pm m$ , che si considerano distribuite sulle basi  $s$ , producono all'interno del magnete un certo campo  $H_i$ , la cui direzione è opposta a quella del campo esterno  $H$ . Ne deriva una magnetizzazione  $I$  minore  $I_0$ .



fig. 181

È la comparsa del campo interno  $H_i$  che dà origine all'azione smagnetizzante del magnetismo libero, o, come talvolta si dice, delle estremità del magnete. Questa azione è minima al centro della barra e aumenta avvicinandosi alle estremità. Per una barra magnetica molto allungata, si può ammettere di avere  $H_i = 0$  nel mezzo. Il valore medio  $H'_i$  in tutta la barra è proporzionale a  $m$ , cioè a  $d^2$ ; si può inoltre considerare  $H'_i$  come inversamente proporzionale

a  $L^2$ . Sia  $L : d = q$ ; questo rapporto si può chiamare il grado di allungamento della barra; si può notare che l'azione smagnetizzante media  $H'_i$  delle estremità della barra è inversamente proporzionale al grado di allungamento  $q$  della barra.

Il rapporto

$$N' = -\frac{H'_i}{I} \quad (7.0.80)$$

è chiamato *coefficiente medio di smagnetizzazione*; è un numero puro, poiché  $H'_i$  e  $I$  hanno le stesse dimensioni (vedi § 6). Quando assumiamo dati  $H'_i$  e  $I$ , si ha

$$N'q^2 = C \quad (7.0.81)$$

essendo  $C$  un numero costante, cioè indipendente da  $L$  e da  $d$ . Gli esperimenti con barre di ferro cilindriche hanno confermato la formula (45,a); si è trovato  $C = 45$ , per  $q > 100$ , cioè per barre molto allungate.

Quando si pone un anello di ferro in un campo anulare, dove  $H$  è di conseguenza anche  $I_0$ , sono ovunque tangenti a circonferenze concentriche al cerchio assiale dell'anello, si ottiene una catena magnetica chiusa; non c'è magnetismo libero e la grandezza  $I_0$  corrisponde all'intensità  $H$  del campo. Ma se si pratica una fenditura nell'anello, su entrambi i lati di questa appare del magnetismo libero e, invece del valore  $I_0$ , si osserva un valore medio  $I$  inferiore. In una sfera uniformemente magnetizzata, la formula (22,b), dà in tutti i punti lo stesso valore di  $N'$ :

$$N' = \frac{4}{3}\pi (= 4,1888) \quad (7.0.82)$$

In un disco sottile, le cui facce sono perpendicolari a  $H$ , si ha, vedere (22,c)

$$N' = 4\pi (= 12,5664)$$

È per un tale disco che si ottiene il massimo coefficiente di smagnetizzazione. Citeremo di nuovo alcune altre formule senza dimostrazione.

ELLISSOIDE DI RIVOLUZIONE, il cui asse è parallelo a  $H$ ; il semiasse di rivoluzione è  $c$ , il raggio dell'equatore è  $a$ ; sia  $c : a = q$ , e l'eccentricità.

1. *Ovoide* (ellissoide allungato),  $c > a$ ,  $q > 1$ ,  $e = \sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{q^2}}$

$$N' = 4\pi \left( \frac{1}{e^2} - 1 \right) \left( \frac{1}{2e} \ln \frac{1+e}{1-e} - 1 \right) = \frac{4\pi}{q^2 - 1} \left\{ \frac{q}{\sqrt{q^2 - 1}} \ln \left( q + \sqrt{q^2 - 1} \right) - 1 \right\} \quad (7.0.83)$$

Per un ovoide molto allungato ( $q > 50$ ), si può porre

$$N' = \frac{4\pi}{q^2} (\ln 2q - 1) \quad (7.0.84)$$

2. *Sferoide* (ellissoide appiattito),  $c < a$ ,  $q < 1$ ,  $e = \sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2}} = \sqrt{1 - q^2}$

$$N' = \frac{4\pi}{e^2} \left( 1 - \frac{1}{e} \sqrt{1 - e^2} \arcsin e \right) = \frac{4\pi}{1 - q^2} \left( 1 - \frac{q}{\sqrt{q^2 - 1}} \arccos q \right) \quad (7.0.85)$$

In un cilindro magnetizzato trasversalmente ( $H$  perpendicolare all'asse del cilindro), si ha

$$N' = 2\pi \quad (7.0.86)$$

Ricaveremo i valori seguenti di  $N'$  dal lavoro di Du Bois.

*Ellissoide di rotazione* ( $H$  parallelo all'asse di rivoluzione),  $q = c : a$ ,

$q = 0$	0,5	1	5	10	20	50	100
$N' = 12,5664$	6,5864	4,1888	0,7045	0,2549	0,0848	0,0181	0,0065
		$q = 200$	500	1000			
		$N' = 0,0016$	0,0003	0,00008			

Il primo numero si riferisce ad un disco sottile, il secondo a uno sferoide, il terzo a una sfera, i seguenti ad ovoidi.

*Cilindro magnetizzato longitudinalmente,  $q = L : d$ ,*

$q = 0$	10	15	25	50	100	200	500	1000
$N' = 12,5664$	0,2160	0,1206	0,0533	0,0162	0,0045	0,0011	0,00018	0,00018

Partendo da  $q = 100$ , si ha  $N'q^2 = 45$ , si veda la (45,a).

Tra le numerose ricerche effettuate sull'argomento, ricordiamo l'importante lavoro di Shudde-magen (1910) relativo alle barre di ferro cilindriche. Ha trovato che, assegnato  $q$ , la grandezza  $N'$  dipende dal valore assoluto del diametro della barra e varia ad esempio da 10 a 16%, quando il diametro aumenta da 3,175 mm a 19,05 mm. Per una data asta,  $N'$  è praticamente costante solo se l'induzione non supera le 10000 unità C.G.S.; quando l'induzione  $B$  cresce oltre questo valore,  $N'$  diminuisce rapidamente. La formula  $N'q^2 = 45$  è quindi soddisfatta solo quando  $q > 150$  e l'induzione minore di 8000.

## 6. Unità di grandezze magnetiche

Le grandezze fisiche che si incontrano nello studio del campo magnetico e delle sue sorgenti sono misurate da quelle che vengono chiamate unità magnetiche. Daremo, in questo paragrafo, alcune indicazioni su queste unità e sulle loro dimensioni. Le unità C.G.S. presentano oggi, come del resto in quasi tutte le parti della Fisica, una particolare importanza; tuttavia, per alcune grandezze, si deve ancora tener conto delle unità di Gauss, dove le unità fondamentali sono il millimetro, il milligrammo e il secondo; si continua infatti, in alcuni osservatori magnetici, ad utilizzare queste unità per la misura dell'intensità del magnetismo terrestre.

1. QUANTITÀ DI MAGNETISMO  $m$ . Abbiamo già dato la definizione dell'unità di massa magnetica, su cui si basa la costruzione delle unità elettromagnetiche. Abbiamo trovato, per le sue dimensioni, le formule (4) e (4,a),

$$\begin{cases} [m] &= [\mu]^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1} \\ [m] &= L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1} \end{cases} \quad (7.0.87)$$

La relazione tra le unità C.G.S. e quelle Gaussi ottiene con l'aiuto della regola nel Tomo I:

$$\begin{cases} 1 \text{ unità C.G.S.} &= 1 \frac{(cm)^{\frac{3}{2}} (gr)^{\frac{1}{2}}}{sec} = \frac{(10 mm)^{\frac{3}{2}} (1000 mgr)^{\frac{1}{2}}}{sec} \\ &= 1000 \frac{(mm)^{\frac{3}{2}} (mgr)^{\frac{1}{2}}}{sec} = 1000 \text{ unità di Gauss} \end{cases} \quad (7.0.88)$$

Per i valori numerici di una quantità data di magnetismo, si ha, nei due sistemi,

$$m (C.G.S.) = 0,001 m (Gauss) \quad (7.0.89)$$

2. Intensità di un campo  $H(\alpha, \beta, \gamma) = f : m$  dove  $f : m$ , dove  $f$  è una forza. Si ha

$$[H] = L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1} \quad (7.0.90)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ unità } C.G.S. = 1 (cm)^{\frac{3}{2}} (gr)^{\frac{1}{2}} (sec)^{-1} \\ = 1 (10 \text{ mm})^{-\frac{1}{2}} (1000 \text{ mgr})^{\frac{1}{2}} (sec)^{-1} \\ = 10 (mm)^{-\frac{1}{2}} (mgr)^{\frac{1}{2}} (sec)^{-1} = 10 \text{ unità di Gauss} \end{array} \right. \quad (7.0.91)$$

$$H (C.G.S.) = 0,1 H (Gauss) \quad (7.0.92)$$

Se quindi la componente orizzontale dell'intensità del magnetismo terrestre è data, da un osservatorio magnetico, pari a 1,4 (Gauss), essa è pari a 0,14 unità C.G.S. di intensità.

L'unità di intensità C.G.S. è l'intensità in un punto tale che, sull'unità C.G.S. di quantità di magnetismo, agisce una forza di una dyne. Attualmente, l'unità di intensità C.G.S. è chiamata gauss.

3. LA DENSITÀ SUPERFICIALE DEL MAGNETISMO LIBERO è  $k = m : s$ , dove  $s$  è un'area.

$$[k] = \frac{[m]}{L^2} = [\mu]^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1} \quad (7.0.93)$$

4. LA DENSITÀ DI VOLUME DEL MAGNETISMO LIBERO è  $\rho = m : v$ , dove  $v$  è un volume.

$$[\rho] = \frac{[m]}{L^3} = [\mu]^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1} \quad (7.0.94)$$

5. IL MOMENTO MAGNETICO è  $M' = ml$ , dove  $l$  è una lunghezza.

$$[M'] = [m] L = [\mu]^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1} \quad (7.0.95)$$

e, nel caso particolare dove  $\mu$  è un numero puro.

$$[M'] = L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1} \quad (7.0.96)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ unità } C.G.S. = 1 (cm)^{\frac{5}{2}} (gr)^{\frac{1}{2}} (sec)^{-1} = 1 (10 \text{ mm})^{\frac{5}{2}} (mgr)^{\frac{1}{2}} (sec)^{-1} \\ = 10000 (mm)^{\frac{5}{2}} (mgr)^{\frac{1}{2}} (sec)^{-1} = 10000 \text{ unità di Gauss} \\ M' (C.G.S.) = 0,0001 M' (Gauss) \end{array} \right. \quad (7.0.97)$$

Quando  $m$  è uguale all'unità C.G.S. di magnetismo e  $l = 1 \text{ cm}$ , si ha  $M' = 1$  unità C.G.S. di momento magnetico.

6. MAGNETIZZAZIONE  $I (A, B, C) = M' : v$ , dove  $v$  è un volume.

$$[I] = [M'] : L^2 = [\mu]^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1} \quad (7.0.98)$$

Le grandezze  $k$  e  $I$  hanno le stesse dimensioni, come dovrebbe essere, vedi (20). La magnetizzazione è  $I = 1$  unità C.G.S., quando il momento magnetico di un centimetro cubo è uguale all'unità C.G.S. di momento.

7. FLUSSO DI FORZA  $\Phi = Hs$ , dove  $s$  è un'area,

$$[\Phi] = [H] L^2 = [\mu]^{-\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{3}{2}} T^{-1} \quad (7.0.99)$$

8. FLUSSO DI INDUZIONE  $\Psi = \mu\Phi$

$$[\Psi] = [\mu] [\Phi] = [\mu]^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1} \quad (7.0.100)$$

9. IL POTENZIALE MAGNETICO dove la FORZA MAGNETOMOTRICE è  $V = m : l\mu$  dove  $l$  è una lunghezza.

$$[V] = [m] : L [\mu] = [\mu]^{-\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1} \quad (7.0.101)$$

Il prodotto  $Vm$  ha per dimensione

$$[\mu]^{-\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1} [\mu]^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1} = L^2 M T^{-2}$$

cioè le dimensioni di un lavoro, come ci si attendeva.

10. LA RESISTENZA MAGNETICA DI UN MEZZO è  $1 : \mu$  ed ha per dimensione  $[\mu]^{-1}$ . La resistenza magnetica di una parte del tubo di induzione è uguale a  $r = V : \Psi$ , si veda (38,a)

$$[r] = [V] : [\Psi] = [\mu]^{-\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1} : [\mu]^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1} = [\mu]^{-1} L^{-1} \quad (7.0.102)$$

e, nel caso particolare in cui  $\mu$  è un numero puro

$$[r] = \frac{1}{L} \quad (7.0.103)$$

La formula (37) dà lo stesso risultato, perché  $\sigma$  ha dimensione  $L^2$ .

11. LA POTENZA DI UN DOPPIO STRATO MAGNETICO O DI UN FOGLIO MAGNETICO è  $\omega = k\delta$ , dove  $\delta$  è una lunghezza.

$$[\omega] = [k] L = [\mu]^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1} \cdot L = [\mu]^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1} \quad (7.0.104)$$

La formula (35) ha le dimensioni della grandezza  $W_{1,2}$

$$[W_{1,2}] = [\omega]^2 [\mu]^{-1} L^{-1} \cdot L^{-2} \cdot L^4 = L^2 M T^{-2} \quad (7.0.105)$$

12. IL COEFFICIENTE DI MUTUA INDUZIONE DEI CONTORNI DI DUE FOGLI NEL VUOTO  $L_{1,2}$ , si veda la (36), ha per dimensione

$$[L_{1,2}] = L \quad (7.0.106)$$

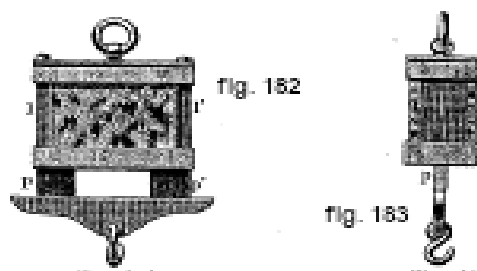
Parleremo in seguito del coefficiente di mutua induzione in un mezzo qualunque; le sue dimensioni sono  $[\mu] L$ .

## 7. Magneti naturali e magneti artificiali (in acciaio)

Noi abbiamo incontrato diverse grandezze, che caratterizzano le proprietà di magneti; le principali sono la magnetizzazione  $I$  e il magnetismo libero. Come abbiamo visto, esiste un magnetismo permanente e un magnetismo temporaneo. Studiando, in questo capitolo, i magneti come sorgenti del campo magnetico, dobbiamo prestare particolare attenzione ai magneti permanenti, perché solo questi magneti possono essere considerati come le sorgenti primitive di un campo, come abbiamo già visto nel § 1. Studieremo nel seguito come si produce il magnetismo temporaneo in un campo magnetico, disponendo questo fenomeno tra gli effetti del campo magnetico.

Esistono due tipi di magneti permanenti, magneti naturali e artificiali. I magneti naturali sono minerali di ferro che si trova in vari luoghi, ad esempio negli Urali. Tale è l'ossido magnetico  $Fe^3O^3 = FeO + Fe^2O^3$ , che possiede nel modo più marcato le proprietà dei magneti; la pirite  $6FeS + Fe^2S^3$  è meno magnetica. I pezzi di minerale, appena estratti dal terreno, non manifestano quasi mai proprietà magnetiche; per questo è necessario un certo tempo di estrazione e anche allora la magnetizzazione è ben lungi dall'apparire in tutti i pezzi. Quando si magnetizza artificialmente un tale minerale, vi si trova quasi tanto magnetismo residuo quanto nell'acciaio. Le figure 182 e 183 rappresentano un magnete naturale, ai cui poli sono applicati anelli di ferro  $l$  e  $l'$  mediante anelli di rame; queste lastre terminano in parti più spesse  $p$  e  $p'$  si trasportano i poli magnetici.





I magneti artificiali sono realizzati in acciaio. Si dà loro la forma di barre o ferri di cavallo. I magneti composti da più lamine sovrapposte sono particolarmente potenti; queste lamine sono prima magnetizzate separatamente e solo successivamente unite tra loro; quelle a metà sono un po' più lunghe. La figura 184 mostra un magnete rettilineo (visto lateralmente e in pianta) formato da nove lamine, che non si toccano. I poli magnetici sono alle estremità comuni *ff*. Si costruiscono allo stesso modo magneti anche in a cavallo. Si aggiunge ad un magnete in ferro di cavallo una barra o una lamina di ferro che si chiama la sua armatura. Un magnete a ferro di cavallo con la sua armatura forma una catena magnetica.

È stato riscontrato che la graduale perdita di magnetismo residuo diminuisce quando viene aggiunta un'armatura. È per questo motivo che le barrette magnetiche vengono solitamente conservate a coppie in una custodia; sono disposte l'una contro l'altra in parallelo, i poli di nomi opposti uno di fronte all'altro e le estremità unite da piccole sbarre di ferro dolce. Jamin ha costruito magneti a ferro di cavallo molto potenti, con un gran numero di sottili strisce di acciaio (fino a 50).

La scelta dell'acciaio e il modo in cui è stato prodotto giocano un ruolo importante nella preparazione delle barre magnetiche. A seconda della destinazione che deve ricevere la calamita, si cerca, in certi casi, di ottenere la massima potenza possibile, cioè il massimo del magnetismo residuo: in altri è minore la quantità che la costanza del magnetismo residuo che è importante. Per raggiungere il primo obiettivo, l'acciaio deve possedere la massima capacità di ritentività, per il secondo, la massima forza coercitiva possibile.

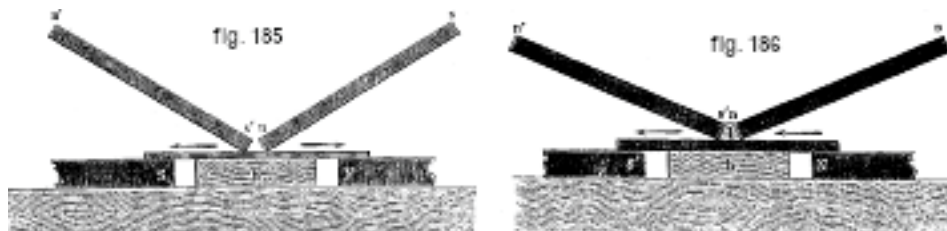


L'acciaio deve essere temperato, cioè riscaldato a una certa temperatura, e bruscamente raffreddato in acqua. L'acciaio ricotto, cioè riscaldato e poi raffreddato lentamente, ha molto grande retentività.

Barus e Strohual (1883), Holborn (1891), Guthe (1897) e M.me Curie (1898) hanno cercato i migliori processi da impiegare per la fabbricazione di magneti. M.me Curie ha scoperto che, per tipi di acciaio contenenti da 0,8 a 1,4% di carbonio, la migliore temperatura di tempra è compresa tra 760° e 800°. Dopo la tempra, l'acciaio deve essere mantenuto in temperatura per 48 ore da 60° a 70°, magnetizzarlo fino a saturazione, quindi smagnetizzarlo fino a quando la magnetizzazione così raggiunta si riduce a 0,9. Magneti così prodotti hanno una grande costanza, cioè una grande forza coercitiva. Barus e Strohual hanno proposto di mantenere l'acciaio a 100° dopo la tempra, per 24 ore e poi, dopo magnetizzazione, altre 5 ore alla stessa temperatura. Hanno riconosciuto, inoltre, che un magnete diventa insensibile all'azione meccanica, quando viene preventivamente sottoposto, per un certo tempo, a scosse, urti, surriscaldamento, ecc.

La magnetizzazione dell'acciaio un tempo avveniva per attrito; questo metodo non è più utilizzato oggi ad eccezione delle osservazioni magnetiche effettuate durante i viaggi scientifici.

La barra d'acciaio è posta direttamente su un tavolo o, come rappresentano le figure 185 e 186, alle estremità dei nomi opposti di due magneti N e S', sorreggendola al centro con un piccolo pezzo di legno. L'attrito avviene con due magneti  $ns$  e  $n's'$ . Nel tasto semplice (fig. 185), si mettono le estremità  $n$  e  $s'$  a contatto con il centro della barra e si a scorrere nella direzione delle frecce, in versi opposti. Questa operazione viene ripetuta più volte. Nel doppio tasto (fig. 186), si mette, tra le estremità  $n$  e  $s'$ , un piccolo pezzo di legno  $l$  e si spostano contemporaneamente i due magneti più volte nello stesso verso, da un'estremità della barra all'estremità all'altra; per finire, li si riporta al centro della barra e si tolgono.



Oggi si utilizza quasi esclusivamente il metodo della magnetizzazione elettromagnetica; si pone la barra, per un intervallo abbastanza breve, all'interno di una bobina, nella quale viene introdotta una corrente elettrica. Un'intensità di campo  $H$  di 700 unità C.G.S. all'interno della bobina è più che sufficiente. Supponiamo che la bobina contenga  $m_i$  strati di filo, e che abbia, in ogni strato,  $n_2$  spire di per centimetro di lunghezza della bobina. Vedremo che l'intensità  $i$  della corrente (in ampère) può essere calcolata dalla formula

$$i = \frac{H}{0,4\pi n_1 n_2} \quad (7.0.107)$$

da cui si deduce, per  $H = 700$ ,

$$i = \frac{560}{n_1 n_2} \quad (7.0.108)$$

Le proprietà del magnete dipendono molto dalla natura dell'acciaio: con buoni tipi di acciai ordinari, che non contengono altro corpo estraneo che il carbonio, si può ottenere una magnetizzazione media fino a 400 unità C.G.S., eccezionalmente fino a 480. Nei fili di acciaio lunghi, dove si può trascurare l'azione smagnetizzante delle estremità, si arriva a  $I = 780$  unità C.G.S. Come Barus e Strouhal hanno mostrato, la forma della barra influenza fortemente la magnetizzazione che si ottiene.

Un'aggiunta di silicio all'acciaio non gli conferisce proprietà notevoli. Al contrario, l'acciaio, a cui è stato aggiunto G o Wo è molto adatto alla fabbricazione di magneti. In particolare, l'acciaio al tungsteno è notevole; possiede una grande ritenzione e un'enorme forza coercitiva; è tre volte maggiore che per i migliori tipi di acciaio ordinario. Holborn, Negbaur, P. Meyer, Du Bois si sono occupati dello studio dell'acciaio al tungsteno; Hopkinson ha studiato le proprietà dell'acciaio contenente Si o Mn.

L'acciaio al nichel ha proprietà estremamente curiose, che sono state oggetto di ricerche molto approfondite da parte di Guillaume, così come quelle di Dumont, Dumas e altri. Il magnetismo residuo di questa lega non è grande; parleremo più avanti del suo magnetismo temporaneo. Occupiamoci ora della distribuzione del magnetismo libero sulla superficie di un magnete d'acciaio. Esistono due metodi principali per determinare questa distribuzione: il metodo di oscillazione di un ago magnetico e il metodo di estrazione.

Il metodo dell'oscillazione è molto poco preciso e si applica solo a magneti molto lunghi; è stato impiegato da Coulomb. Si basa sul fatto che il numero di oscillazioni al secondo di un ago magnetizzato, in un campo magnetico, è proporzionale a  $\sqrt{H}$ , essendo  $H$  la componente

dell'intensità del campo nel piano in cui l'ago oscilla; per gli aghi magnetici di costruzione comune, questo piano è orizzontale. Sia  $H_0$  la componente orizzontale dell'intensità del magnetismo terrestre e  $n_0$  il numero di oscillazioni dell'ago, quando è sotto l'influenza del solo magnetismo terrestre. Si può ammettere che  $H_0 = c_1 n_0^2$ , essendo  $c_1$  un fattore di proporzionalità. Il magnete è posizionato verticalmente, l'ago magnetizzato viene portato a una piccola distanza da una sezione orizzontale qualsiasi del magnete, nel piano del meridiano magnetico, che passa per l'asse del magnete sul lato nord quando la sezione è nella metà nord, sul lato sud quando è nella metà sud. L'intensità del campo nelle immediate vicinanze dell'ago è uguale a  $H_0 + H$ ; si assume  $H = c_2 k$ , dove  $k$  indica la densità superficiale per la sezione considerata,  $c_2$  un fattore di proporzionalità, che non è evidentemente esatto. Se il numero di oscillazioni dell'ago è  $n$ , si ha  $H + H_0 = c_1 n^2$ ; si deduce  $H = c_1 (n^2 - n_0^2)$ ; ma  $H = c_2 k$  e conseguentemente  $k = C (n^2 - n_0^2)$ , dove  $C = c_1 : c_2$ . La quantità  $n^2 - n_0^2$  può quindi servire come misura della densità superficiale  $k$ . Determinando  $n$  a diverse altezze, si ha un'idea della distribuzione del magnetismo libero nel magnete.

Nel metodo di estrazione, il magnete è posto orizzontalmente e si misura la forza  $f$  necessaria per estrarre una piccola sfera di ferro dolce, a contatto con la superficie orizzontale del magnete. Invece di una piccola sfera, si può prendere un piccolo cilindro con una base inferiore arrotondata. Si pone  $f = c^2 k$ , con  $k$  la densità del magnetismo libero nel punto in cui avviene lo strappo. Rigorosamente,  $f$  è proporzionale a  $k k_1$ , dove  $k_1$  indica la densità del magnetismo sulla piccola sfera o sul piccolo cilindro. Ma, per il ferro dolce, si può, entro certi limiti, ammettere che  $k_1$  è proporzionale a  $k$ , così che  $f = c k^2$ . La quantità  $\sqrt{f}$  serve quindi di misura alla grandezza  $k$ . Per determinare la forza  $f$  si utilizza una bilancia ordinaria o meglio ancora una bilancia a molla adatta a tali misure.

Biot ha dedotto dalle sue osservazioni la seguente relazione tra la densità del magnetismo libero in un punto e la distanza  $x$  di questo punto dal centro del magnete, la cui lunghezza è  $2l$ :

$$k = a (b^x - b^{-x}) \quad (7.0.109)$$

essendo  $a$  e  $b$  costanti. Per  $x = 0$ , cioè nel mezzo del magnete si ha  $k = 0$ ; agli estremi  $k = \pm (b^l - b^{-l})$ . A rigor di termini, la quantità  $k$  ottenuta con l'uno o l'altro dei due metodi precedenti non rappresenta la densità  $k$  di uno strato superficiale di magnetismo libero, ma deve essere considerata come misura della quantità totale di magnetismo libero contenuto in un sottile strato trasversale del magnete, avente ovunque lo stesso spessore. Supponendo che la magnetizzazione  $I$  abbia, in tutti gli strati, la direzione del magnete, si può considerare  $k$  come identica, secondo il suo significato fisico, alla quantità  $\rho$  della formula (39). Questa formula dà:

$$I = I_0 - a_I (b^x - b^{-x}) \quad (7.0.110)$$

dove  $I_0$  è la magnetizzazione nel mezzo del magnete,  $a_I = a : \log b$ . La formula (56,a) porta il nome di Va Rees, che determinò  $I$  direttamente mediante il metodo di induzione che spiegheremo più avanti.

Passiamo alla determinazione dei poli dei magneti. Abbiamo definito i poli magnetici come i centri di gravità dei magnetismi dello stesso nome  $m$  e  $-m$ . Indicando con  $l$  la distanza tra i poli, il momento magnetico  $M$  del magnete è dato, come abbiamo visto, dalla formula (11),

$$M = ml \quad (7.0.111)$$

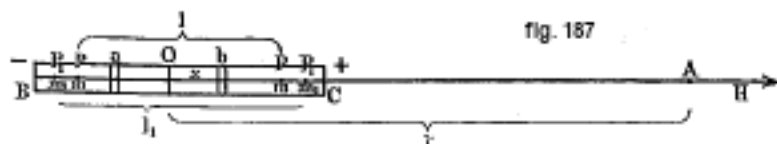
inoltre i poli sono i punti di applicazione delle forze della coppia, che, in un campo magnetico uniforme, agisce sul magnete. Si vede facilmente che l'azione del magnete in punti la cui distanza dal magnete è molto grande rispetto alle dimensioni di quest'ultimo, è la stessa come se le quantità totali di magnetismo dello stesso nome  $+m$  e  $-m$  si trovassero concentrati ai poli. Tuttavia, la determinazione della posizione dei poli di un magnete non offre molto interesse

teorico e non ha quasi importanza nelle applicazioni. La posizione teorica dei poli, come centri di gravità dei magnetismi liberi con lo stesso nome, è intimamente legato alla loro distribuzione. Conoscendola, si può ricavare con il calcolo la posizione dei poli. Non potrebbe esserci alcun interesse pratico nella determinazione dei poli se non quando il magnete si trova in un campo uniforme o quando si considera la sua azione su punti molto distanti. Ma proprio in questi due casi, tutte le grandezze che hanno una certa importanza nelle applicazioni non sono proporzionali al momento magnetico  $M$ , che si presenta come il prodotto dei due fattori  $m$  e  $l$ . Ciò è mostrato, nel primo caso, dalla formula (12) e nel secondo, da tutte le formule che esprimono l'azione del magnete in punti molto distanti; quest'ultima è sempre proporzionale a  $M$ . Una delle formule che si riferiscono a questa azione sarà stabilita poco più avanti, e le formule generali in uno dei Capitoli seguenti (Azioni ponderomotrici delle calamite). Del resto anche la formula (13,c), conferma quanto appena detto. Tuttavia, il momento  $M$  non cambia, quando si sostituisce  $m$  e  $l$  con altre grandezze  $m_1$  e  $l_1$ , tali che

$$m_1 l_1 = ml = M \quad (7.0.112)$$

Se quindi, invece di poli effettivi, se ne prendono altri distanti  $l_1$ , dove si suppongono concentrate altre masse magnetiche  $m_1$  che soddisfano la condizione (57,a), né l'azione del campo uniforme sul magnete, né l'azione del magnete stesso in punti molto lontani non si trovano modificate. In altre parole, nei due soli casi in cui la posizione dei poli, cioè la distanza  $l$ , potrebbe presentare interesse, vi è solo la grandezza  $M$  importante da conoscere.

L'azione di un magnete in un punto A vicino non può essere sostituita da quella di due masse magnetiche uguali e di nomi contrari, concentrate in due punti determinati. Ma supponiamo che il punto A si trovi a una distanza  $r$  dal magnete tale da poter trascurare  $L_1^4 : r_1^4$ , ma non  $L_1^2 : r_1^2$ , differendo  $L_1$  di poco dalla lunghezza  $L$  del magnete. L'azione del magnete sul punto A può allora essere sostituita da quella di due masse  $\pm m_1$ , concentrate nei punti  $P_1$  e  $P_2$  a una distanza  $l_1$  l'una dall'altra, con  $m_1$  e  $l_1$  soddisfacenti la (57,a). Riecke ha chiamato tali punti poli equivalenti. La posizione di questi poli, cioè le quantità  $l_1$  e  $m_1$ , dipendono dalla posizione del punto A.



Consideriamo un esempio semplice, che renderà chiaro quanto esposto. Consideriamo un magnete BC (fig. 187), dove i magnetismi di nomi opposti  $+m$  e  $-m$  sono distribuiti simmetricamente rispetto al punto medio O di questo magnete. Sia  $M$  il momento magnetico,  $P, P$  i poli ordinari.,  $PP = l$ ,  $M = ml$ . Il punto A si trova sul prolungamento dell'asse alla distanza  $OA = r$ ; indichiamo con  $H$  l'intensità del campo nel punto A, con  $L$  la lunghezza del magnete. Proponiamoci di calcolare la grandezza  $H$ . Prendiamo due elementi  $a$  e  $b$  del magnete, posti simmetricamente alla distanza  $x$  da O e di lunghezza  $dx$ : sia  $\lambda dx$  la quantità totale di magnetismo libero in questi elementi. Introduciamo inoltre la notazione

$$\int_{-L/2}^{L/2} \lambda x^n dx = M_n \quad (7.0.113)$$

È chiaro che per  $n = 0$  e  $n = 1$ , si ha

$$\begin{cases} m = M_0 \\ M = 2M_1 \end{cases} \quad (7.0.114)$$

I due elementi  $a$  e  $b$  presi insieme danno in A l'intensità del campo  $dH$ , che è uguale a

$$\begin{aligned} dH &= \frac{\lambda dx}{(r-x)^2} - \frac{\lambda dx}{(r+x)^2} = \lambda dx \frac{4\lambda dx}{(r^2-x^2)^2} = \lambda dx \frac{4r dx}{r^4 \left(1 - \frac{x^2}{r^2}\right)^2} = \\ &= \frac{4\lambda x dx}{r^3} \left(1 - \frac{x^2}{r^2}\right)^{-2} = \frac{4\lambda x dx}{r^3} \left(1 + \frac{2x^2}{r^2} + \frac{3x^4}{r^4} + \frac{4x^6}{r^6} + \dots\right) \end{aligned}$$

Se ne deduce

$$H = \frac{4}{r^3} \int \lambda x dx + \frac{8}{r^5} \int \lambda x^2 dx + \frac{16}{r^7} \int \lambda x^3 dx + \dots$$

dove tutti gli integrali sono presi da  $x = 0$  a  $x = L/2$ . Se si introduce la notazione (57,b) e si tiene conto della (57,e), si ha

$$H = \frac{2M}{r^3} \left(1 + \frac{4M_3}{r^2 M} + \frac{8M_5}{r^4 M} + \dots\right) \quad (7.0.115)$$

Determiniamo ora l'intensità  $H'$  che è prodotta nel punto A da due masse magnetiche  $\pm m_1$ , che si trovano in  $P_1, P_1$  tali che  $P_1 P_1 = l_1$ . Si ha

$$\begin{aligned} H' &= \frac{m_1}{\left(r - \frac{1}{2}l_1\right)^2} - \frac{m_1}{\left(r + \frac{1}{2}l_1\right)^2} = \frac{2rl_1 m_1}{\left(r^2 - \frac{1}{4}l_1^2\right)^2} = \frac{2rl_1 m_1}{r^4 \left(1 - \frac{l_1^2}{4r^2}\right)^2} = \\ &= \frac{2l_1 m_1}{r^3} \left(1 - \frac{l_1^2}{4r^2}\right)^{-2} = \frac{2l_1 m_1}{r^3} \left(1 + \frac{l_1^2}{2r^2} + \frac{3l_1^2}{16r^4} + \dots\right) \end{aligned} \quad (7.0.116)$$

Per avere  $H = H'$ , serve dapprima che

$$l_1 m_1 = M \quad (7.0.117)$$

in altre parole, il momento magnetico del magnete equivalente deve essere uguale al momento magnetico del magnete dato. Ne consegue già che i poli equivalenti  $P_1, P_1$  possono sostituire i poli ordinari, in tutti i casi in cui interviene il momento, sia per un magnete portato in un campo magnetico uniforme sia per la ricerca dell'azione di un magnete su punti molto distanti. La distanza  $l$  è determinata dall'espressione

$$l = \frac{M}{m} = \frac{2 \int \lambda x dx}{\int \lambda dx} \quad (7.0.118)$$

La distanza  $l_1$  deve essere scelta in modo che  $H'$  differisca il meno possibile da  $H$ . Considerando solo i primi due termini delle serie (58) e (58,a), si ha

$$l_1 = \sqrt{\frac{8M_2}{M}} = 2\sqrt{\frac{\int \lambda x^3 dx}{\int \lambda x dx}} \quad (7.0.119)$$

Questa formula fornisce la distanza  $l_1$  dei poli equivalenti, nel caso considerato; la corrispondente quantità  $m_1$  di magnetismo in questi poli si ottiene allora con la formula (58.b). La lunghezza  $l_1$  differisce visibilmente da  $l$ . Ad esempio, quando c'è una relazione lineare tra  $\lambda$  e  $x$ , si ha  $l = 2L/3$ ,  $l_1 = \sqrt{3L/5} = 1,1619l$ . La differenza è superiore del 16% o di quasi  $-1/6$ . Se si volesse ottenere una precisione ancora maggiore, si dovrebbe uguagliare le somme del secondo e del terzo termine negli sviluppi (58) e (58,a); ma si otterrebbe così solo un piccolo cambiamento nella grandezza  $l_1$ , quando  $L : r$  non è grande.

Le formule che abbiamo introdotto si riferiscono alla posizione particolare del punto A che è rappresentato nella figura 187. Riecke ha studiato a fondo la dipendenza tra la grandezza  $l_1$  e la posizione del punto A; ha trovato che  $l_1$  ha lo stesso valore per tutti i punti A situati su una retta passante per il centro del magnete, ma che questo valore cambia da una retta all'altra.

Sono stati proposti molti metodi per la misura sperimentale della posizione dei poli P, P o dei poli  $P_1, P_1$ . Quando la legge di distribuzione del magnetismo libero è nota, la distanza  $l$  tra i poli ordinari P, P si calcola facilmente con la formula (58,c). Pouillet, Benoit, F. Kohlrausch, VanN Rees, Petrouschewski, Mascart, Holborn, Mme Curie, Benedicks (1902), Rüoss (1908), Salmon (1909) e altri ancora hanno dato metodi diversi per la misura della lunghezza  $l$ , ma non ci fermiamo qui, visto quanto sopra spiegato. I valori numerici, ottenuti da vari autori per il rapporto  $l : L$ , dove  $L$  indica la lunghezza del magnete, oscillano tra limiti molto ampi, ciò che non hanno nulla di sorprendente, poiché la posizione dei poli dipende dalla distribuzione del magnetismo libero, che a sua volta deve dipendere dalla forma del magnete, dalle proprietà dell'acciaio, dal processo e dal grado di magnetizzazione. Si può prendere approssimativamente  $l : L = 0,8$ . Mme Curie ha trovato, per barre a sezione quadrata (lunghezza 20 cm, larghezza 1 cm), valori che oscillano tra 0,72 e 0,84. Benedicks ha trovato che il rapporto  $l : L$  aumenta con il grado di magnetizzazione.

Il peso massimo che un magnete artificiale è in grado di portare è chiamato *forza portante*. Se si suppone che la magnetizzazione sia stata portata al massimo grado possibile, possiamo dire che la forza portante dipende solo dalla natura dell'acciaio e dalla forma del magnete. I magneti a ferro di cavallo hanno lo stesso peso di una forza portante più che doppia di quella dei magneti rettilinei, che supportano il peso solo a un'estremità. Häcker ha confrontato la forza portante  $Q$  di magneti realizzati con lo stesso tipo di acciaio e aventi la stessa forma, ma peso diverso  $P$ . Ha dedotto dalle sue osservazioni la formula empirica

$$Q = aP^{\frac{2}{3}} \quad (7.0.120)$$

dove  $a$  indica un numero costante. La grandezza  $q : Q$  rappresenta la forza portante relativa all'unità di peso del magnete. La relazione (59) dà

$$q = \frac{a}{\sqrt[3]{P}} \quad (7.0.121)$$

Si vede che la forza portante relativa di un magnete diminuisce quando il peso di quest'ultimo aumenta. Quando  $P = a^3$ , il magnete può portare esattamente il proprio peso; se  $P > a^3$ , porta meno; se  $P < a^3$ , porta di più. Häcker ha scoperto che esprimendo  $P$  e  $Q$  in chilogrammi, si ha  $a = 10,33$  per i magneti a ferro di cavallo. Tuttavia, nei migliori magneti che si producono oggi,  $a$  è molto più alto di questo numero e può arrivare fino a 20.

Il grado di magnetizzazione e di conseguenza anche la forza portante dei magneti artificiali diminuisce nel corso del tempo, quando i magneti vengono abbandonati. Questo fatto era già noto allo studioso arabo Geber (Abù Mùsa Gàbir ben Hajjaw). Maggiore è la forza coercitiva, più lenta è questa perdita di forza portante: diminuisce molto, quando i magneti fanno parte di una catena magnetica chiusa.

## 8. Influenza delle azioni meccaniche e delle variazioni di temperatura su magneti artificiali

Scosse, così come sforzi di estensione o torsione, ripetuti alternativamente più volte in versi differenti su un'asta d'acciaio durante la sua magnetizzazione, aumentano il magnetismo residuo.

Uno shock meccanico in un magnete artificiale in acciaio ne diminuisce la magnetizzazione. G. Wiedemann, Villari, Streintz, Brown, Berson, Krüse e altri ancora hanno studiato l'influenza degli urti, di una caduta da una certa altezza, ecc. Quando un magnete è sottoposto a una serie di urti, l'influenza di questi urti diminuisce nel tempo ed è espressa, secondo Streintz, per l' $n^{esimo}$  urto, da una funzione esponenziale della forma  $a^{-n}$ , oppure, secondo Berson dal ramo discendente di un'iperbole equilatera. Krüse ha osservato che l'effetto degli urti meccanici, nella caduta ripetuta di un magnete, non dipende dalle dimensioni di quest'ultimo, ma dalla natura

dell'acciaio. Cadendo da un'altezza di  $9,6\text{ m}$ , la perdita di magnetismo residuo può arrivare fino al 25%. G. Wiedemann ha trovato un risultato molto interessante: se si smagnetizza un magnete d'acciaio, sottoponendolo all'azione di un campo magnetico negativo, una parte della primitiva magnetizzazione riappare sotto l'influsso di urti meccanici. L'estensione provoca una perdita di magnetismo, che si ritrova al cessare della trazione.

L'effetto della torsione sui magneti artificiali in acciaio è di particolare interesse. G. Wiedemann in particolare, Wertheim, Matteucci, Knott e altri ancora hanno studiato questo effetto, di cui indicheremo i risultati più importanti ottenuti da Wiedemann. Il magnetismo residuo delle barre d'acciaio diminuisce nella torsione, ma più lentamente di quanto cresce l'angolo di torsione; la diminuzione è proporzionale alla magnetizzazione iniziale. La detorsione produce un'ulteriore diminuzione del magnetismo. Una torsione ripetuta più volte in un senso e nell'altro ha solo una lieve influenza, ma la prima detorsione produce una notevole diminuzione del magnetismo.

In particolare è da notare il seguente risultato. Se, dopo ripetute torsioni in entrambi i versi, il magnetismo non varia più nello stato di detorsione, una torsione in un verso produce una diminuzione del magnetismo, nell'altra un aumento. L'influenza della torsione sull'acciaio parzialmente o completamente smagnetizzato non è meno notevole. Se la diminuzione del magnetismo è piccola, il magnete perde nelle piccole torsioni meno magnetismo di un'asta semplicemente magnetizzata. Se la smagnetizzazione è stata significativa, il magnetismo prima aumenta nella torsione, raggiunge un massimo, poi diminuisce. Più completa è la smagnetizzazione, maggiore è la torsione in cui si raggiunge il massimo. Se la smagnetizzazione è stata assoluta, la torsione (così come ogni urto meccanico) ripristina una parte della magnetizzazione iniziale.

G. Wiedemann ha fornito una spiegazione molto dettagliata dei vari effetti delle azioni meccaniche sui magneti, che si basa sulla teoria dei magneti molecolari in grado di subire una rotazione. Si può consultare su questo argomento il suo lavoro, *Die Lehre von der Elektrizität*, Volume III, Braunschweig 1895.

Consideriamo ora l'effetto delle variazioni di temperatura sui magneti in acciaio. Faraday ha dimostrato che i magneti riscaldati fino alla temperatura di ebollizione dell'olio di mandorle (inferiore di  $400^\circ$ ) perdono completamente il loro magnetismo residuo, sebbene possano ancora ricevere magnetismo temporaneo a questa temperatura.

Quando si scalda, per la prima volta, un magnete d'acciaio appena magnetizzato, fino ad una certa temperatura  $t$ , il suo magnetismo diminuisce; questo fenomeno era già stato osservato da Canton (1759). Se poi si riporta il magnete alla sua temperatura iniziale  $t_0$ , si ritrova parte del magnetismo perduto. La perdita nel riscaldamento si compone quindi di due parti: una perdita temporanea e una definitiva. In un secondo riscaldamento fino alla temperatura  $t$ , si ha una nuova perdita, ma inferiore a quella temporanea dovuta al primo riscaldamento; per raffreddamento si ha ancora una certa perdita definitiva, minore però di quella osservata dopo il riscaldamento e raffreddamento iniziale. Una terza variazione di temperatura tra  $t$  e  $t_0$  dà ancora una minore perdita definitiva di magnetismo. Quando si ripetono le stesse alternanze di riscaldamento e raffreddamento un gran numero di volte, alla fine si ottiene solo una temporanea perdita di riscaldamento, vale a dire che lo stato magnetico viene completamente ripristinato nel raffreddamento. Il magnete ha quindi in qualche modo raggiunto un certo stato stazionario tra le temperature  $t_0$  e  $t$ . Quando un tale magnete viene riscaldato a una temperatura  $t_1 < t$ , la sua perdita di magnetismo è solo temporanea; ma se viene riscaldato ad una temperatura  $t_1 > t$ , esso manifesta alla temperatura  $t_0$  una nuova perdita definitiva di magnetismo e si raggiunge un nuovo stato stazionario solo dopo un nuovo e ripetuto riscaldamento fino alla temperatura  $t_1$  seguito ogni volta da un raffreddamento a  $t_0$ .

L'entità della perdita finale di magnetismo, in tali ripetute alternanze di riscaldamento e raffreddamento, dipende dalla forma e dalla sostanza del magnete. Sia  $m_0$  il magnetismo iniziale del magnete.  $m = m_0(1 - \beta)$  il magnetismo residuo dopo ripetute alternanze di riscaldamento fino alla temperatura  $t$  e di raffreddamento fino alla temperatura  $t_0$ . Si osserva che  $\beta$  aumenta

quasi proporzionalmente allo spessore della barra; inoltre  $\beta$  è tanto minore quanto più lungo è il magnete. Con l'acciaio duro,  $\beta$  è molto più grande che con l'acciaio dolce. Si è trovato, ad esempio, per  $t_0 = 10^\circ$  e  $t = 100^\circ$ ,  $\beta = 0,153$  con acciaio dolce e  $\beta = 0,515$  con acciaio duro.

Il coefficiente di temperatura  $\alpha$  di un magnete, portato preventivamente allo stato stazionario suddetto, è di grandissima importanza in tutte le osservazioni che si fanno sui magneti o con essi. Nella formula  $m = m_0 \{1 - \alpha(t - t_0)\}$ , la quantità  $m_0 \alpha(t - t_0)$  esprime esclusivamente la perdita temporanea del magnetismo nel riscaldamento da  $t_0$  a  $t$ . Con magneti precedentemente preparati si è ottenuto un coefficiente di temperatura compreso tra 0,0007 e 0,0010 e anche oltre; con magneti appena preparati,  $\alpha$  oscilla tra 0,0002 e 0,0009 a seconda della natura dell'acciaio, del grado di durezza e delle dimensioni del magnete. Moureaux ha riscontrato, per la maggior parte dei magneti attualmente in uso negli osservatori magnetici, valori di  $\alpha$  compresi tra 0,0004 e 0,0005. Ahsworth (1898) ha trovato che  $\alpha$  è molto piccolo per i tipi di acciaio più duri. Per alcuni acciai al nichel, così come per i fili di acciaio,  $\alpha$  è negativo; si possono produrre anche tipi di acciaio per i quali  $\alpha = 0$ . Durward (1898) ha determinato  $\alpha$  anche per le diverse specie di acciaio.

È davvero notevole che il primo raffreddamento di un magnete appena preparato ne diminuisca anche il magnetismo. Quando un'asta d'acciaio viene magnetizzata a  $100^\circ$ , per raffreddamento perde parte del suo magnetismo. Se viene nuovamente riscaldata, il suo magnetismo diminuisce ancora, ma aumenta già nel raffreddamento seguente. Trowbridge ha scoperto, in uno dei suoi esperimenti, che il magnetismo di un magnete di acciaio prodotto a  $20^\circ$  diminuisce di oltre il 65%, quando viene raffreddato a  $-140^\circ$ ; Dewar e Fleming hanno tuttavia notato che, nel brusco raffreddamento di un magnete d'acciaio fino alla temperatura dell'aria liquida ( $-185^\circ$ ), può prodursi sia una diminuzione che un aumento del magnetismo, a seconda della composizione dell'acciaio, ad esempio in funzione del suo contenuto di nichel.

L'acciaio più o meno smagnetizzato ha anche proprietà curiose per quanto riguarda l'influenza della variazione di temperatura. La seguente piccola tabella riporta i risultati di cinque serie di osservazioni fatte da G. Wiedemann su un tondino di acciaio dolce;  $M$  indica il magnetismo residuo iniziale a  $0^\circ$ ,  $m$  il magnetismo dopo la smagnetizzazione a  $0^\circ$ ,  $m_{100}$  il magnetismo dopo il riscaldamento a  $100^\circ$ ,  $m_0$  il magnetismo dopo il raffreddamento a  $0^\circ$ .

	$M$	$m$	$m_{100}$	$m_0$
1	70,5	70,5	42,2	54,5
2	72	40,1	27	48,5
3	70	25	18	39,5
4	72	2	2	9
5	75	0	0	9,5

La prima serie si riferisce al caso in cui il magnete non è stato del tutto magnetizzato ( $m = M$ ) e l'ultima al caso in cui la smagnetizzazione è completa ( $m = 0$ ). Questa tabella mostra che con una bassa smagnetizzazione, il riscaldamento e il successivo raffreddamento producono un'ulteriore diminuzione del magnetismo ( $m_0 < m$ ). Con una significativa smagnetizzazione, vi è un aumento del magnetismo dopo il riscaldamento e il raffreddamento ( $m_0 > m$ ). L'ultima serie è particolarmente interessante: un'asta priva di magnetismo ( $m = 0$ ) diventa magnetica se riscaldata a  $100^\circ$  e poi raffreddata a  $0^\circ$  ( $m_0 = 9,5$ ). Wiedemann ha anche scoperto che se, al contrario, si magnetizza a  $100^\circ$  ( $M$ ) e smagnetizza ( $m$ ) l'asta, raffreddandosi fino a  $0^\circ$  ( $m_0$ ) e riscaldandola nuovamente a  $100^\circ$  ( $m_{100}$ ), si può ottenere, a seconda del grado di smagnetizzazione, o  $m_{100} < m$ , o  $m_{100} > m$ . L'ultima disuguaglianza si verifica anche nel caso in cui  $m = 0$  ( $M = 56$ ,  $m = 0$ ,  $m_0 = 14,5$ ,  $m_{100} = 5,55$ ).

G. Wiedemann ha studiato teoricamente l'influenza della variazione di temperatura sul magnetismo residuo. Questa influenza è ovviamente duplice; da un lato, una variazione di

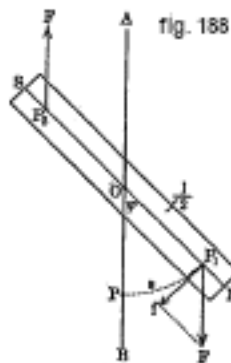


temperatura produce una variazione temporanea di magnetismo, che scompare quando si ritorna alla temperatura originaria; dall'altro ha come conseguenza la soppressione definitiva di una parte del magnetismo residuo. Sulla base della teoria dei magneti molecolari capaci di rotazione, si può supporre che il magnetismo di ciascuna molecola sia una funzione della temperatura, il che spiega la variazione temporanea del magnetismo. Allo stesso tempo, il riscaldamento modifica, ad esempio, la struttura interna della sostanza, rende le molecole più mobili e forse rimuove in alcuni casi le cause che impediscono loro di ritornare nelle posizioni che occupavano prima della magnetizzazione. Come risultato, molte molecole ritornano, quando la temperatura sale, alle loro posizioni prima della magnetizzazione o comunque si avvicinano ad esse, e questo corrisponde alla scomparsa definitiva di parte del magnetismo residuo.

## 9. Oscillazioni semplici, smorzate e aperiodiche di un magnete

Consideriamo un magnete NS (fig. 188), libero di ruotare attorno ad un asse passante per il punto O e perpendicolare al piano della figura. Supponiamo che il magnete venga portato in un campo magnetico uniforme; sia  $H$  la componente, nel piano della figura, dell'intensità del campo,  $M$  il momento magnetico del magnete. I poli sono in  $P_1$  e  $P_2$  a una distanza  $P_1P_2 = l$ ; AB è la direzione della componente  $H$ , che è allo stesso tempo la direzione dell'asse del magnete, quando questo è nella sua posizione di equilibrio. Quando il magnete è separato da quest'ultima posizione da un angolo  $P_1OB = \varphi$ , è sotto l'influenza di una coppia di forze  $F = Hm$  il cui momento è  $MH \sin \varphi$ , vedi (12).

Sia P la posizione di equilibrio del polo  $P_1$ ,  $s$  l'arco  $PP_1$ ,  $f = -F \sin \varphi$  la componente della forza  $F$  lungo la tangente e nel verso negativo dell'arco  $s$ . Per  $\varphi$  abbastanza piccolo, si può porre  $f = -F \varphi = -\frac{2F}{l}s$ . Questa espressione mostra che, per deviazioni molto piccole, il magnete compie un moto vibratorio armonico intorno alla sua posizione di equilibrio. Studieremo questo movimento. Supponiamo che, sotto l'influenza della coppia  $FF$ , il magnete ruoti durante il tempo  $dt$  dell'angolo  $-d\varphi$ . Il lavoro  $dr$  della coppia è uguale al prodotto del momento della coppia per  $-d\varphi$ , cioè  $-MH \sin \varphi d\varphi$  (poiché  $dr = -f ds = -2F \sin \varphi ds = -2F \frac{l}{2} \sin \varphi d\varphi = -Hml \sin \varphi d\varphi = -MH \sin \varphi d\varphi$ ). Questo lavoro è uguale all'aumento della forza viva  $J$  del magnete nel suo moto di rotazione.



Abbiamo visto che  $J$  è il semi prodotto del momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse di rotazione e del quadrato della velocità angolare  $d\varphi/dt$ . Indicando con  $K$  il momento d'inerzia del magnete rispetto all'asse di rotazione, si ha quindi  $J = \frac{1}{2}K \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$  e pertanto

$$dJ = K \frac{d\varphi}{dt} \frac{d^2\varphi}{dt^2} dt = K \frac{d^2\varphi}{dt^2} d\varphi$$

L'uguaglianza  $dr = dJ$  dà allora

$$K \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -MH \sin \varphi$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{MH}{K} \sin \varphi \quad (7.0.122)$$

Per oscillazioni molto piccole, si può scrivere

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{MH}{K} \varphi \quad (7.0.123)$$

In pratica, non si osserva l'angolo  $\varphi$ , ma una quantità  $y$  che gli è proporzionale, ad esempio il numero di divisioni di una scala, nel noto metodo di deflessione di uno specchio. Introducendo la quantità  $y$ , si ottiene, per l'equazione delle piccole oscillazioni di un magnete.

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{MH}{K} y = 0 \quad (7.0.124)$$

o, ponendo,

$$\frac{MH}{K} = c^2 \quad (7.0.125)$$

l'equazione

$$\frac{d^2y}{dt^2} + c^2 y = 0 \quad (7.0.126)$$

Questa equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti è soddisfatta da un valore della forma  $y = Ce^{\alpha t}$ . Se si porta questo valore nella (62), si ottiene  $\alpha^2 + c^2 = 0$ , da cui  $\alpha = \pm ci$  ( $i = \sqrt{-1}$ ). L'integrale completo è pertanto

$$y = C_1 e^{cit} + C_2 e^{-it} = (C_1 + C_2) \cos ct + i(C_1 - C_2) \sin ct$$

Supponiamo che, per  $t = 0$ , si abbia  $y = 0$  e la velocità  $\frac{dy}{dt} = v_0$ . La prima condizione richiede  $C_1 + C_2 = 0$ , per cui

$$y = i(C_1 - C_2) \sin ct$$

La seconda condizione, introdotta nell'espressione della velocità

$$\frac{dy}{dt} = ic(C_1 - C_2) \cos ct$$

dà

$$ic(C_1 - C_2) = v_0$$

Si ricava

$$i(C_1 - C_2) = \frac{v_0}{c}$$

per cui

$$y = \frac{v_0}{c} \sin ct \quad (7.0.127)$$

$$\frac{dy}{dt} = v = v_0 \cos ct \quad (7.0.128)$$

Si ottiene l'ampiezza  $a$ , ponendo  $v = 0$ , e si ha  $ct = \pi/2$  e portando nella (63) questo valore si ha allora

$$a = \frac{v_0}{c} \quad (7.0.129)$$

La durata  $T_1$  di una oscillazione completa si deduce dall'equazione

$$c(t + T_1) = ct + 2\pi$$

si ricava

$$T_1 = \frac{2\pi}{c} \quad (7.0.130)$$

Le formule (63,b) e (63,c) consentono di dare all'equazione (63) la forma

$$y = a \sin 2\pi \frac{t}{T_1} \quad (7.0.131)$$

è l'equazione dei moti vibratorii armonici. Mediante la (61,a) e (63,c), si ottiene la durata  $T_1$  di una oscillazione completa del magnete.

Si ha, per la durata  $T = \frac{1}{2}T_1$  di una semi oscillazione del magnete

$$T = \pi \sqrt{\frac{K}{MH}} \quad (7.0.132)$$

La durata  $T$  di oscillazione di un magnete è inversamente proporzionale alla radice quadrata dell'intensità  $H$  del campo magnetico che agisce nel piano di oscillazione. Ne consegue che il numero  $n$  di oscillazioni (in un dato tempo) è proporzionale a  $\sqrt{H}$  o che  $n^2$  è proporzionale a  $H$ , come già visto in precedenza.

La formula (65) fornisce la durata dell'oscillazione, quando le deviazioni rimangono sufficientemente piccole perché il seno possa essere sostituito dal suo arco nell'equazione (60). Nel caso generale, il semi periodo  $T$  ha l'espressione

$$T = \sqrt{\frac{2H}{MK}} \int_0^\alpha \frac{d\varphi}{\cos \varphi - \cos \alpha} \quad (7.0.133)$$

Sviluppando in serie l'espressione compresa sotto il radicale, si ha, con un calcolo noto,

$$T = \sqrt{\frac{K}{MH}} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4 \frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \sin^6 \frac{\alpha}{2} + \dots \right\} \quad (7.0.134)$$

In molti casi, è sufficientemente preciso considerare la formula seguente

$$T = \pi \sqrt{\frac{K}{MH}} \left( 1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) \quad (7.0.135)$$

o quella ancora più semplice

$$T = \pi \sqrt{\frac{K}{MH}} \left( 1 + \frac{\alpha^2}{16} \right) \quad (7.0.136)$$

Portando la (61,a) nella (63,b), viene

$$v_0 = ac = a \sqrt{\frac{MH}{K}} \quad (7.0.137)$$

Nello stabilire l'equazione (60), abbiamo assunto che nessuna forza agisce sul magnete oltre a quelle definite dall'intensità del campo magnetico. Supponiamo ora che oltre alle forze dovute a questo campo agisca sul magnete una coppia proporzionale alla velocità angolare del magnete, che si oppone al suo movimento, cioè tende a farlo ruotare nel senso opposto a quello di  $d\varphi/dt$ . Questa coppia si manifesta naturalmente solo durante il movimento del magnete; la resistenza dell'aria circostante, ad esempio, può darle origine. Incontreremo un altro caso molto più importante del movimento di un magnete, posto in un campo magnetico e sottoposto contemporaneamente ad un'analogia coppia resistente, nella teoria dei galvanometri provvisti di quelli che vengono chiamati ammortizzatori. Vedremo che quando si trovano nelle vicinanze di un magnete mobile, metalli non magnetici, rame per esempio, in questi metalli si producono correnti elettriche che reagiscono sul magnete e si oppongono al suo movimento; l'intensità di queste correnti e di

conseguenza la loro azione sono, in ogni istante, proporzionali alla velocità del movimento del magnete.

Il momento  $a$  della coppia che si oppone al movimento del magnete è uguale a  $-n \frac{d\varphi}{dt}$ , dove  $n$  è un fattore di proporzionalità. Se l'angolo  $\varphi$  diminuisce della quantità  $d\varphi$ , il lavoro di questa coppia è uguale a  $-n \frac{d\varphi}{dt} d\varphi$ ; si ha quindi, per l'aumento  $dJ$  della semi forza viva

$$dJ = K \frac{d^2\varphi}{dt^2} d\varphi = -MH \sin \varphi d\varphi - n \frac{d\varphi}{dt} d\varphi$$

Supponendo  $\varphi$  molto piccolo e introducendo la grandezza  $c^2$ , si veda la (61,a), così come la notazione

$$\frac{n}{K} = 2p$$

si ottiene, per l'equazione del moto di un magnete sotto l'azione di un ammortizzatore

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2p \frac{d\varphi}{dt} + 2\varphi = 0 \quad (7.0.138)$$

Per  $p = 0$ , si ritrova l'equazione già considerata del moto di un magnete senza smorzamento. La quantità  $p$  si presenta quindi, in un certo senso, come la misura dello smorzamento; vale a dire come misura della causa che si oppone al movimento del magnete. Se si introduce nuovamente la grandezza  $y$ , direttamente osservabile e proporzionale all'angolo  $\varphi$ , si ottiene l'equazione

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2p \frac{dy}{dt} + 2y = 0 \quad (7.0.139)$$

Anche questa equazione è lineare del secondo ordine e a coefficienti costanti. Essa è soddisfatta da una funzione  $y$  della forma  $Ce^{\alpha t}$ ; portando questo valore nella (67), si trova

$$\begin{aligned} \alpha^2 + 2p\alpha + c^2 &= 0 \\ \alpha_1 &= -p + \sqrt{p^2 - c^2} \quad \alpha_2 = -p - \sqrt{p^2 - c^2} \end{aligned} \quad (7.0.140)$$

La soluzione della (67) ha quindi la seguente forma generale

$$y = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t} \quad (7.0.141)$$

dove  $C_1, C_2$  sono coefficienti costanti arbitrari.

Bisogna distinguere due casi: lo smorzamento non è molto forte o è molto pronunciato.

**I. LO SMORZAMENTO NON È MOLTO FORTE; VI È UN MOTO OSCILLATORIO AMMORTIZZATO.** Questo è il caso in cui

$$p < c \quad (7.0.142)$$

Se si introduce la notazione

$$q = \sqrt{c^2 - p^2} \quad (7.0.143)$$

si ha

$$\alpha_1 = -p + qi \quad \alpha_2 = -p - qi$$

e la formula (67,b) dà

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^{-pt} (\cos qt + i \sin qt) + C_2 e^{-pt} (\cos qt - i \sin qt) = \\ &= (C_1 + C_2) e^{-pt} \cos qt + i (C_1 - C_2) e^{-pt} \sin qt \end{aligned}$$

Supponiamo che, per  $t = 0$ , si abbia  $y = 0$  e  $\frac{dy}{dt} = v = v_0$ . La prima condizione richiede che  $C_1 + C_2 = 0$ ; pertanto

$$y = i (C_1 - C_2) e^{-pt} \sin qt \quad (7.0.144)$$

Si ha quindi

$$v = i(C_1 - C_2)e^{-pt}(q \cos qt - p \sin qt)$$

e la seconda condizione dà

$$qi(C_1 - C_2) = v_0 \quad (7.0.145)$$

Da ciò si deduce, tenendo conto di  $C_1 + C_2 = 0$ ,

$$C_1 = \frac{v_0}{2qi} \quad C_2 = -\frac{v_0}{2qi}$$

di modo che

$$y = \frac{v_0}{q}e^{-pt} \sin qt \quad (7.0.146)$$

Poniamo

$$\frac{v_0}{q} = \frac{v_0}{\sqrt{c^2 - p^2}} = a \quad (7.0.147)$$

si ha infine

$$y = ae^{-pt} \sin qt \quad (7.0.148)$$

Per  $p = 0$ , cioè in assenza di smorzamento, si ottiene il moto vibratorio armonico semplice. L'equazione (69) è identica all'equazione del moto oscillatorio smorzato che è stata considerata nel Volume I. Si tratta di un moto oscillatorio la cui ampiezza diminuisce gradualmente. La prima ampiezza è

$$\alpha_1 = \frac{aq}{\sqrt{q^2 + p^2}} e^{-\frac{p}{q} \arctan \frac{p}{q}} \quad (7.0.149)$$

Il logaritmo naturale  $\lambda$  del rapporto tra i valori assoluti di due ampiezze successive  $\alpha_n$  e  $\alpha_{n+1}$  è detto decremento logaritmico; è uguale a

$$\lambda = \ln \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} = \frac{\pi p}{q} \quad (7.0.150)$$

L'intervallo di tempo  $\tau$ , tra un passaggio dalla posizione di equilibrio e il successivo, è dato dalla seguente formula

$$\tau = \frac{\pi}{q} = \frac{\pi}{\sqrt{c^2 - p^2}} \quad (7.0.151)$$

Per  $p = 0$ , si ottiene una durata di oscillazione  $T = \frac{\pi}{c}$ , si veda (63,c), dove  $T_1 = 2T$ . Si ha  $\tau > T$ , poiché

$$\frac{\tau^2}{T^2} = \frac{c^2}{c^2 - p^2} = \frac{q^2 + p^2}{q^2} = \frac{\pi^2 + \frac{\pi^2 p^2}{q^2}}{\pi^2} = \frac{\pi^2 + \lambda^2}{\pi^2} \quad (7.0.152)$$

Le formule (68,e) e (69,a) danno

$$v_0 = aq = a_1 \sqrt{q^2 + p^2} e^{-\frac{p}{q} \arctan \frac{p}{q}} \quad (7.0.153)$$

tale è la relazione che lega la velocità iniziale  $v_0$  all'ampiezza iniziale  $a_1$ .

Da (69,b) e (69,c), risulta

$$\lambda = pc \quad (7.0.154)$$

Introducendo  $\lambda$  e  $\tau$  al posto di  $p$  e  $q$ , si ottengono, invece della (69,a) e (69,e), le formule

$$a_1 = a \frac{\pi}{\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}} e^{-\frac{\lambda}{\pi} \arctan \frac{\lambda}{\pi}} \quad (7.0.155)$$

$$v_0 = a \frac{\pi}{\tau} = a_1 \frac{\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}}{\tau} e^{-\frac{\lambda}{\pi} \arctan \frac{\lambda}{\pi}} \quad (7.0.156)$$

II. LO SMORZAMENTO È MOLTO FORTE; IL MOTO È APERIODICO. Supponiamo che si abbia nella (67)

$$p > c \quad (7.0.157)$$

Introduciamo la notazione

$$q = \sqrt{p^2 - c^2} \quad (7.0.158)$$

Le formule (67,a) danno ora

$$y = e^{-pt} (C_1 e^{qt} + C_2 e^{-qt}) \quad (7.0.159)$$

La velocità  $v$  del moto è uguale a

$$v = \frac{dy}{dt} = -e^{-pt} \{ (p - q) C_1 e^{qt} + (p + q) C_2 e^{-qt} \} \quad (7.0.160)$$

Consideriamo tre casi particolari.

1. *Il magnete è scostato di un angolo al quale corrisponde il valore  $y = a$ ; in tale posizione si ha,  $v = 0$ ,  $t = 0$ . Il magnete è poi lasciato a se stesso: si tratta di cercare come  $y$  e  $v$  dipendono da  $t$ . La condizione di avere  $y = a$  e  $v = 0$ , per  $t = 0$ , esige che  $C_1 + C_2 = a$  e  $(p - q) C_1 + (p + q) C_2 = 0$ . I valori di  $C_1$  e  $C_2$  deducibili, messi nella (71,a) e (71,b) danno*

$$y = \frac{ae^{-pt}}{2q} \{ (p + q) e^{qt} - (p - q) e^{-qt} \} \quad (7.0.161)$$

$$v = -\frac{(p^2 - q^2) ae^{-pt}}{2q} (e^{qt} - e^{-qt}) \quad (7.0.162)$$

La prima di queste formule mostra che la deviazione  $y$  non diventa negativa per nessun valore positivo di  $t$  e che è solo per  $t = \infty$  che si ha  $y = 0$ . Il magnete non oscilla; si avvicina asintoticamente alla sua posizione di equilibrio, e teoricamente la raggiunge solo dopo un tempo infinito. In pratica, si vede il magnete muoversi verso la sua posizione di equilibrio e fermarsi quando l'ha raggiunta. Un tale moto si dice aperiodico. La velocità  $v$  raggiunge il suo valore massimo

$$v_m = -a\sqrt{p^2 - q^2} \left( \frac{p - q}{p + q} \right)^{\frac{p}{2q}} \quad (7.0.163)$$

dopo un tempo

$$t_m = \frac{1}{2q} \ln \frac{p + q}{p - q} \quad (7.0.164)$$

che è indipendente dalla deviazione iniziale  $a$ ; la velocità poi decresce.

2. *Il magnete, deviato di  $y = a$ , subisce una percussione, di modo che all'istante  $t = 0$ , possiede una velocità  $-v_0$  verso la posizione di equilibrio. Le condizioni per  $C_1, C_2$  sono ora le seguenti:*

$$C_1 + C_2 = a \quad (p - q) C_1 + (p + q) C_2 = v_0$$

Se ne deduce

$$y = \frac{e^{-pt}}{2q} \{ [v - a(p - q)] e^{-qt} - [v_0 - a(p + q)] e^{qt} \} \quad (7.0.165)$$

Questa espressione dà  $y = 0$  per

$$l_t = \frac{1}{2q} \ln \frac{v_0 - a(p - q)}{v_0 - a(p + q)} \quad (7.0.166)$$

Affinché  $l_t$  sia positivo, serve che

$$v_0 > a(p + q) \quad (7.0.167)$$

Il magnete raggiunge allora la sua posizione di equilibrio con una velocità

$$v'_0 = -\sqrt{(v_0 - ap)^2 - a^2 q^2} \left[ \frac{v_0 - a(p+q)}{v_0 - a(p-q)} \right]^{\frac{p}{2q}} \quad (7.0.168)$$

passa dall'altra parte di questa posizione, si ferma (vedi caso 3) e ritorna asintoticamente alla posizione di riposo. Quando  $v_0$  è minore o uguale ad  $a(p+q)$ , il magnete, sebbene non sia stato colpito, non passa per la posizione di equilibrio.

3. *Il magnete si trova nella sua posizione di equilibrio ( $y = 0$ ) e subisce nell'istante  $t = 0$  una percussione, che gli comunica la velocità  $v_0$ .* Per  $t = 0$ , si ha  $y = 0$ ,  $v = v_0$ , cosa che richiede che  $C_1 + C_2 = 0$ ,  $(p-q)C_1 + (p+q)C_2 = -v_0$ . Invece della (71,a) si ha

$$y = \frac{v_0 e^{-pt}}{2q} (e^{qt} - e^{-qt}) \quad (7.0.169)$$

$$v = \frac{v_0 e^{-pt}}{2q} \{ (p+q)e^{-qt} - (p-q)e^{qt} \} \quad (7.0.170)$$

Si trova che  $v = 0$  all'istante

$$t_m = \frac{1}{2q} \ln \frac{p+q}{p-q} \quad (7.0.171)$$

valore che è indipendente dalla velocità iniziale  $v_0$ ; la massima deviazione  $y_m$  è uguale a

$$y_m = \frac{v_0}{\sqrt{p^2 - q^2}} \left( \frac{p-q}{p+q} \right)^{\frac{p}{2q}} \quad (7.0.172)$$

È interessante notare che la formula (72,c) è identica alla (74,b) e che la (72,b) è alquanto analoga alla (74, c).

III. CASO DI TRANSIZIONE. Supponiamo di avere, nell'equazione (66)

$$p = c \quad (7.0.173)$$

le radici  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , vedi (67,0), allora diventano uguali. Sappiamo, dalla teoria delle equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti, come procedere in questo caso. Seguiremo però un altro metodo, ponendo  $q = 0$  nelle formule del caso II; si trovano espressioni della forma  $\frac{0}{0}$ , il cui valore può essere determinato con la regola ben nota.

1. Per  $t = 0$ , si ha  $v = 0$ : la formula (72) dà così, per  $q = 0$

$$y = ae^{-pt} (1 + pt) \quad (7.0.174)$$

$$v = -ap^2 t e^{-pt} \quad (7.0.175)$$

*Il moto è aperiodico.* Si ha la velocità massima

$$v_m = -\frac{ap}{e} \quad (7.0.176)$$

nell'istante

$$t_m = \frac{1}{p} \quad (7.0.177)$$

2. Per  $t = 0$ , si ha  $y = a$ ,  $v = v_0$ ; la formula (73) dà per  $q = 0$

$$y = \{a - (v_0 - ap)t\} e^{-pt} \quad (7.0.178)$$

Il magnete passa per la sua posizione di equilibrio nell'istante

$$t_1 = \frac{a}{v_0 - ap} \quad (7.0.179)$$

con la velocità

$$v'_0 = -(v_0 - ap) e^{\frac{ap}{v_0 - ap}} \quad (7.0.180)$$

Affinché il magnete superi questa posizione di equilibrio, si deve avere

$$v_0 > ap \quad (7.0.181)$$

3. Per  $t = 0$ , si ha  $y = 0$ ,  $v = v_0$ . La formula (74) dà per  $q = 0$

$$y = v_0 t e^{-pt} \quad (7.0.182)$$

$$v = v_0 e^{-pt} (1 - pt) \quad (7.0.183)$$

Nell'istante

$$t_m = \frac{1}{p} \quad (7.0.184)$$

avviene la deviazione massima

$$y_m = \frac{v_0}{pe} \quad (7.0.185)$$

La teoria che abbiamo appena dato del moto smorzato di un magnete è dovuta a Gauss. Casi più complicati sono stati studiati da Schering, O. D. Chwolson, P. Weiss, E. Dorn; E. du Bois-Reymond ha pure fornito una teoria dei moti aperiodici. Più recentemente, Pierre Curie (1891) ha introdotto, nello studio di un moto smorzato, una nozione analoga a quella dell'equazione ridotta di Van der Waals, nonché l'idea degli stati corrispondenti del moto (vedi Volume III).



# 8. Sorgenti del campo magnetico.

## Corrente elettrica

### 1. Introduzione

Dopo aver studiato, nel capitolo precedente, la prima delle due sorgenti del campo magnetico, i magneti e principalmente i magneti permanenti, considereremo ora la seconda, la corrente elettrica. Tratteremo, nel presente capitolo, uno dei casi in cui questa corrente trae origine, di alcune delle questioni che sorgono in questo modo di produzione, nonché delle proprietà del campo magnetico nello spazio che circonda i corpi dove si manifesta il fenomeno della corrente elettrica. Non ci occuperemo ancora qui di uno studio approfondito dell'aspetto teorico della nostra materia.

Abbiamo incontrato nel primo libro, capitolo II, tutta una serie di fenomeni, che serviranno da punto di partenza per le nostre successive considerazioni; è opportuno, per comodità del lettore, richiamarli brevemente.

Quando due corpi A e B di diversa natura, formati da sostanze conduttrici di elettricità, vengono messi in contatto, entrambi appaiono elettrizzati, uno positivamente, l'altro negativamente. I loro potenziali  $V_1$  e  $V_2$  sono disuguali; si manifesta una differenza di potenziale; in altre parole ancora, nel passaggio da un corpo all'altro si ha un salto di potenziale  $V_1 - V_2$ . Abbiamo chiamato forza elettromotrice ( $E$ ) la causa di questo fenomeno, e ammesso che questa forza abbia la direzione del salto, cioè dal corpo di potenziale inferiore  $V_2$  al corpo di potenziale superiore  $V_1$ . Abbiamo preso, per sua misura, la grandezza di questo salto e abbiamo posto

$$E = V_1 - V_2 \quad (8.0.1)$$

Abbiamo scritto simbolicamente  $E = A|B = -B|A$ . In una catena di corpi diversi a contatto tra loro, a, B, C,..., M, N, agiscono una serie di forze elettromotrici  $e_k$ , la cui somma forma la forza elettromotrice della catena  $E$ :

$$E = A|B + B|C + \dots + M|N = \sum e_k = V_1 - V_n \quad (8.0.2)$$

questa somma è uguale alla differenza di potenziale  $V_1$  e  $V_n$  alle estremità della catena. Abbiamo chiamato catena regolarmente aperta una catena in cui i corpi estremi sono identici.

La forza elettromotrice di una catena regolarmente aperta, composta da conduttori di prima classe (metalli, carbone, minerali, ossidi) è nulla. I corpi identici, cioè gli estremi della catena, sono a potenziale uguale.

Per una catena di questo tipo, composta da tre corpi diversi, si ottiene la legge di Volta, espressa dalla formula (2-12).

$$A|B + B|C = A|C \quad (8.0.3)$$

I conduttori di prima classe possono essere disposti in serie di Volta.

I conduttori o elettroliti di seconda classe (acidi e sali disciolti o fusi) non seguono la legge di Volta. La forza elettromotrice  $E$ , che agisce in una catena regolarmente aperta nella cui composizione entrano gli elettroliti S, cioè la differenza di potenziale  $V_1 - V_2$  delle estremità di tale catena, non è nulla. Si ha, per esempio,

$$E = V_1 - V_2 = A|S + S|B + B|A \leq 0 \quad (8.0.4)$$

e ancora

$$E = V_1 - V_2 = A|S_1 + S_1|S_2 + S_2|B + B|A \leq 0 \quad (8.0.5)$$

Invece della (2), si ha ora

$$A|S + S|B \leq A|B \quad (8.0.6)$$

Il verso della forza elettromotrice  $E$  coincide con il verso in cui predominano i salti positivi, cioè con un verso di innalzamento; in altre parole,  $E$  è diretto da  $V_2$  a  $V_1$  se  $V_2 < V_1$ . Una combinazione di corpi che formano una tale catena è chiamata elemento galvanico. Abbiamo introdotto, la notazione

$$(A, B) = A|S + S|B + B|A$$

e dimostrato che

$$(A, B) + (B, C) = (A, C) \quad (8.0.7)$$

questa uguaglianza resta vera quando

$$(A, B) = A|S_1 + S_1|S_2 + S_2|B + B|A \quad (8.0.8)$$

Quando si caricano i corpi A, B, C, si devono lasciare invariati gli elettroliti S, o  $S_1$  e  $S_2$ . Un elemento tipo, la cui forza elettromotrice è definita dallo schema (2,e), è l'elemento Daniell, già descritto e rappresentato nella figura 77. Si ha, per questo elemento

$$\begin{aligned} E &= V_1 - V_2 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = \\ &= Cu|CuSO^4 + CuSO^4|ZnSO^4 + ZnSO^4|Zn + Zn|Cu \end{aligned} \quad (8.0.9)$$

La quantità  $E$  è completamente determinata e può essere misurata in modo molto preciso; ma la questione della quantità di ciascuno dei suoi quattro componenti è ancora pendente. La piccola tabella data al Cap. II § 9 è la migliore illustrazione che si possa dare dello stato in cui si trova. Per fortuna ci occuperemo, in seguito, solo della quantità  $E$  e le sue componenti  $e_1$ ,  $e_2$ ,  $e_3$ ,  $e_4$ , non giocheranno alcun ruolo in essa.

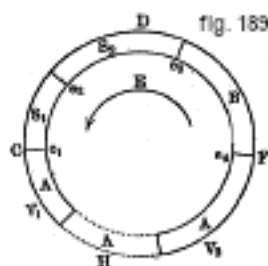
Abbiamo chiamato elettrodi le estremità di una catena regolarmente aperta, e abbiamo distinto tra l'elettrodo positivo e l'elettrodo negativo.

La forza elettromotrice al contatto di due corpi (salto di potenziale) non dipende né dalle dimensioni né dalla forma di questi corpi, né dall'area della loro superficie di contatto, ma solo dalla composizione chimica e dallo stato fisico del costituente sostanze. Ne abbiamo dedotto che la forza elettromotrice di un elemento non dipende dalla forma e dalle dimensioni dell'elemento, né dalla sua struttura interna, ma solo dalla natura e dallo stato fisico delle sostanze che entrano nella sua costruzione.

Ricordiamo, per finire, che sono state considerate varie fonti primarie dello stato elettrico, alcune considerate in dettaglio, altre semplicemente citate, nei §§ 14 e 15.

## 2. Produzione di corrente idroelettrica (galvanica)

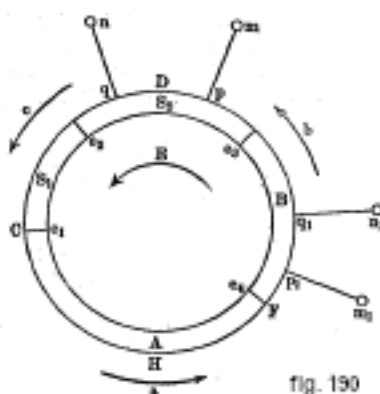
La figura 189 rappresenta una catena regolarmente aperta, dove assumiamo due metalli per esempio (più precisamente due conduttori A e B della prima classe) e due elettroliti  $S_1$  e  $S_2$ . Le estremità A, A sono ai potenziali  $V_1$  e  $V_2$ ; la forza elettromagnetica  $E$  è uguale a  $V_1 - V_2$  e ha la direzione indicata dalla freccia. Ciascuna delle parti costituenti A,  $S_1$ ,  $S_2$ , B, A della catena è ad un certo potenziale che le è proprio: ma solo le differenze di questi potenziali sono perfettamente determinate e i potenziali stessi hanno solo una grandezza accidentale, potendo ognuna delle parti costitutive della catena essere portate a qualsiasi potenziale positivo o negativo.



Cosa deve accadere quando si chiude una catena regolarmente aperta, cioè quando si mettono a contatto le sue estremità o quando le si collega con un corpo della stessa sostanza di A, come rappresentato con la linea tratteggiata in figura? È chiaro fin dall'inizio che nessuna nuova forza elettromotrice viene così introdotta nella catena, poiché i nuovi contatti avvengono tra sostanze della stessa natura. Supponiamo inoltre, sebbene ciò non abbia alcuna importanza per il seguito, che le grandezze  $e_i$  e conseguentemente la loro somma  $E$  non varino, quando si chiude la catena.

È possibile uno stato elettrico "statico" in una catena contenente elettroliti? Supponiamo che un tale stato sia possibile e che l'intera parte CHF (fig. 190) si trovi a uno stesso potenziale  $V$ . La parte B deve allora trovarsi al potenziale  $V + e_4$ ,  $S_2$  al potenziale  $V + e_4 + e_3$ ,  $S_1$  al potenziale  $V + e_4 + e_3 + e_2 + e_1$  e infine, la parte A contigua a  $S_1$  al potenziale  $V + e_4 + e_3 + e_2 + e_1 = V + E$ , ciò che è in contraddizione con l'ipotesi di uno stato statico, in cui l'intera parte CAF è a un potenziale  $V$  ovunque uguale.

ono dalla posizione del punto A.



*In una catena chiusa contenente elettroliti non è possibile stabilire uno stato elettrico statico; d'altra parte, tale stato si avrebbe se la catena fosse composta solo da conduttori di prima classe ( $V_1 = V_2$ ,  $E = 0$ ).*

Poiché uno stato statico è impossibile in una catena chiusa che contiene elettroliti, è necessario stabilire uno stato dinamico, vale a dire un movimento di elettricità. Nella parte CHF, il movimento dell'elettricità positiva deve avvenire nella direzione di C verso F, vedi la freccia  $a$ , perché la parte contigua a  $S_1$  è, come abbiamo appena visto, a un potenziale superiore alla parte vicina B. Ma il movimento dell'elettricità positiva è possibile solo se discendente, cioè dal potenziale più grande al più piccolo. Ne consegue che il potenziale deve diminuire in maniera progressiva lungo tutta la parte CHF; cioè, deve determinare lungo CHF una caduta di potenziale.

Si può dire, ragionando diversamente, che un movimento di elettricità è possibile solo dove esiste una forza elettromotrice e quest'ultima esiste solo dove il potenziale non è costante.

Conveniamo di considerare positiva una caduta di potenziale nel verso discendente; questo concorda con la convenzione secondo cui un salto di potenziale (forza elettromotrice) è considerato positivo nella direzione ascendente.

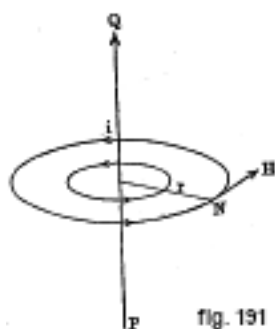
Ci siamo resi conto che l'elettricità positiva deve fluire ininterrottamente nel verso CAF. L'elettricità non può accumularsi in F, e la parte A stessa è stata scelta arbitrariamente, poiché una catena regolarmente aperta può avere alle due estremità la sostanza B, o  $S_1$ , o  $S_2$ ; è chiaro che in tutte le parti della catena si deve produrre un movimento di elettricità positiva nella direzione delle frecce  $b$  e  $c$ . Ne consegue che, in tutte le parti della catena si devono stabilire cadute di potenziale nella verso del movimento di elettricità positiva. *Prenderemo questo verso per quello della corrente elettrica nella catena.* Si vede nella figura 190 che *il verso della corrente elettrica e della caduta di potenziale è lo stesso di quello della forza elettromotrice  $E$* , che agisce nella catena; cioè il verso in cui, girando intorno alla catena, si trova una somma positiva per i potenziali salti. Ammetteremo che esiste, contemporaneamente al movimento di elettricità positiva nel verso della caduta di potenziale e della grandezza  $E$ , un uguale movimento di elettricità negativa nel verso contrario. I due movimenti, presi insieme, costituiscono il fenomeno della corrente elettrica nella catena contenente gli elettroliti. Una tale corrente può essere chiamata corrente idroelettrica.

Non interessa dare troppa importanza all'immagine che abbiamo appena dato della corrente. Il movimento in versi opposti delle due elettriche non è qualcosa che si possa facilmente concepire. Ciò che importa è il fatto che i corpi si elettrizzino al loro contatto, o che ai capi di una catena regolarmente aperta contenente elettroliti ci sia una differenza di potenziale, *comporta necessariamente l'esistenza di uno stato dinamico nella catena chiusa e una caduta di potenziale in tutte le sue parti.* Questa caduta di potenziale è un fatto indiscutibile: infatti, quando si collegano due punti qualsiasi  $p$  e  $q$  o  $p_1$  e  $q_1$  appartenenti a una delle parti costitutive della catena, a due sfere  $m$  e  $n$  o  $m_1$  e  $n_1$ , si osserva che tutte le sfere sono elettrizzate e che i potenziali delle sfere  $m$  e  $m_1$  sono rispettivamente superiori a quelli delle sfere  $n$  e  $n_1$ .

In cosa consiste il fenomeno fondamentale della corrente elettrica? Questa è una domanda che possiamo, per ora, lasciare da parte, attenendoci all'immagine a cui ci ha portato l'esame di ciò che deve accadere, quando chiudiamo una catena contenente elettroliti.

La catena è solitamente costituita da un elemento, che contiene gli elettroliti, e da un filo che serve a chiudere la catena. Introducendo un filo nella catena, la corrente può attraversala. Quando il filo entra nella composizione di uno strumento, si dice che lo strumento è introdotto nella catena.

Lo spazio che circonda i conduttori percorsi da una corrente elettrica è un campo magnetico. Approfondiremo le proprietà di questo campo in uno dei paragrafi successivi di questo capitolo, e ci limiteremo, per il momento, a poche indicazioni.



*Le linee di forza del campo magnetico di una corrente elettrica sono curve chiuse, che circondano i conduttori percorsi dalla corrente.* Lo studio sperimentale del campo mostra che, per una corrente rettilinea di grande lunghezza PQ (fig. 191), le linee di forza sono cerchi, i cui piani sono perpendicolari alla linea PQ della corrente e che hanno i loro centri su questa retta. Il verso delle linee di forza è indicato in figura dalle frecce, per il caso in cui la corrente ha il verso da P a Q. Questo verso si determina con la regola di Ampère o con quella della vite (o

del cavatappi). La regola di Ampère è la seguente: un osservatore disposto lungo la linea della corrente, in modo tale che la corrente entra dai suoi piedi ed esce dalla sua testa, vede le linee di forza dirette da destra verso sinistra; se dirige il suo sguardo verso il polo nord mobile  $N$ , vede questo spostarsi verso sinistra, cioè nella direzione e verso dell'intensità  $H$  del campo.

La regola della vite si enuncia nel modo seguente: se l'asse di una vite è disposto lungo la linea della corrente, facendo ruotare la testa di tale vite nel verso delle linee di forza del campo magnetico, essa avanza nel verso PQ della corrente.

Lo studio sperimentale mostra anche che, nel caso semplice considerato, *l'intensità  $H$  del campo in un dato punto  $N$  è inversamente proporzionale alla distanza  $r$  dal punto alla linea di corrente*, per cui si può porre

$$H = \frac{C}{R} \quad (8.0.10)$$

dove  $C$  è un fattore di proporzionalità. L'osservazione mostra che l'intensità  $H$  del campo alla data distanza  $r$  dal conduttore rettilineo può essere molto diversa a seconda della corrente considerata; in altre parole, la corrente ha una proprietà individuale, dalla quale dipende l'intensità del campo magnetico che la circonda. La grandezza fisica, che definisce quella proprietà della corrente, si chiama *intensità di corrente*; *la assumeremo proporzionale all'intensità  $H$  del campo*, a una data distanza  $r$  dalla linea di corrente. Si può quindi scrivere, invece della (3):

$$H = \frac{cI}{r} \quad (8.0.11)$$

dove  $I$  indica l'intensità di corrente,  $c$  un altro fattore di proporzionalità che dipende dalla scelta delle unità. Per motivi che indicheremo in seguito, si pone  $c = 2$ , di modo che

$$H = \frac{2I}{r} \quad (8.0.12)$$

Si sceglie come unità el. mag. di intensità di corrente, l'intensità di una corrente che, per  $r = 1$ , dà il valore  $H = 2$ . Più in particolare, l'unità el. mag. C.G.S. di intensità di corrente è uguale all'intensità di una corrente che, percorrendo un lungo conduttore rettilineo, dà, alla distanza di un centimetro dal conduttore, un'intensità di campo pari a 2 unità C.G.S. di intensità.

Il nome ampère è dato a 0,1 unità el. mag. CGS di intensità di corrente. Questa è l'unità pratica dell'intensità di corrente generalmente usata oggi. Per avere un'idea della sua entità, possiamo notare che, per produrre l'arco voltaico, è richiesta una corrente di circa 10 ampère.

Si ottengono le dimensioni dell'unità el. mag. di intensità di corrente utilizzando la formula (4) e la formula (7-47).

$$[I] = [H] L = [\mu]^{-\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1} L = [\mu]^{-\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1} \quad (8.0.13)$$

o, se si considera  $\mu$  come una quantità senza dimensione

$$[I] = L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1} \quad (8.0.14)$$

Vengono utilizzati vari strumenti, come ad esempio galvanometri, amperometri, ecc. per misurare l'intensità di una corrente. Studieremo questi dispositivi in dettaglio negli ultimi capitoli di questo libro, ma assumeremo in seguito che le loro disposizioni generali siano già note al lettore.

Consideriamo ora più da vicino il movimento dell'elettricità all'interno di un conduttore e deduciamo alcune conseguenze dalle nozioni fondamentali a cui ci ha portato lo studio della produzione di una corrente. La corrente elettrica, una volta stabilita, rappresenta, se non è soggetta ad alcuna variazione, un esempio di equilibrio dinamico, che abbiamo già incontrato in diverse occasioni; nonostante la corrente, lo stato elettrico di ogni punto della catena rimane

invariato. Consideriamo, all'interno del conduttore che costituisce la parte costituente della catena, una qualsiasi superficie chiusa  $s$ . Assumiamo che la quantità di elettricità  $d\eta$ , che penetra nel tempo  $\tau$  nell'elemento  $ds$  all'interno del dominio delimitato dalla superficie  $s$ , è uguale a

$$d\eta = c \frac{\partial V}{\partial n} \tau ds \quad (8.0.15)$$

dove  $n$  indica la direzione della normale esterna all'elemento della superficie  $ds$ . Ciò che sta alla base di questa ipotesi è che consideriamo l'elettricità come priva di inerzia; supponiamo che la quantità di elettricità messa in moto è proporzionale alla forza elettrica agente, e che il movimento dell'elettricità cessa nello stesso momento in cui questa forza scompare. Poiché lo stato elettrico all'interno della superficie  $s$  rimane stazionario, la quantità totale di elettricità che penetra attraverso questa superficie deve essere nulla. Ciò dà l'equazione

$$\int \frac{\partial V}{\partial n} ds = 0 \quad (8.0.16)$$

ma sappiamo che questo integrale è uguale a  $-4\pi\eta_i$ , dove  $\eta_i$  indica la quantità di elettricità che si trova all'interno della superficie  $s$ ; l'equazione (5,a) dà quindi  $\eta_i = 0$ . Si può ancora ragionare altrimenti; applicando l'equazione (5,a) ad un parallelepipedo infinitamente piccolo, con spigoli  $dx, dy, dz$ , si ottiene l'equazione

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (8.0.17)$$

in tutti i punti del conduttore percorso dalla corrente stazionaria; ora il membro sinistro della (6) è uguale a  $-4\pi\rho$ , essendo  $\rho$  la densità di volume dell'elettricità; si ha quindi  $\rho = 0$ . Tutto questo ci porta alla immagine seguente: *non c'è elettricità libera all'interno di un conduttore percorso da una corrente elettrica*: non c'è elettricità libera se non sulla superficie del conduttore, il cui potenziale è la grandezza  $V$  che entra nelle equazioni (5) e (6). Supponendo ulteriormente che non si alcuna perdita di elettricità si dalla superficie laterale del conduttore, si ha, in tutti punti di questa superficie, l'equazione

$$\frac{\partial V}{\partial n_1} = 0 \quad (8.0.18)$$

essendo  $n_1$  la direzione della normale alla superficie laterale del conduttore.

### 3. Grandezze fondamentali che caratterizzano la corrente e loro unità

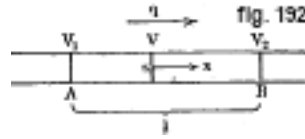
Studiando, mediante un ago magnetico, l'intensità del campo in prossimità delle diverse parti di una catena, si trova che l'intensità della corrente è la stessa in tutte le parti della catena. Quindi si ha

$$I = cost \quad (8.0.19)$$

Arriveremo in seguito allo stesso risultato con considerazioni teoriche. Cerchiamo qual è la quantità di elettricità  $\eta_1$  che passa, nell'unità di tempo, attraverso la sezione trasversale della catena. Poiché lo stato elettrico all'interno della catena è uno stato di equilibrio dinamico, non può esserci in nessuna parte un accumulo di elettricità. Ammettendo che non ci sia perdita di elettricità dalla superficie laterale del conduttore, si deve evidentemente avere

$$\eta_1 = cost \quad (8.0.20)$$

cioè,  $\eta_1$  deve avere lo stesso valore in tutte le sezioni della catena.



Assumendo che la parte considerata della catena abbia la forma di un filo, si può supporre che le superfici di livello del potenziale, normalmente alle quali si produce il movimento dell'elettricità, coincidano con le sezioni del filo. Sia AB (fig. 192) un troncone del filo,  $V_1$  e  $V_2$  ( $V_1 > V_2$ ) i potenziali nelle sezioni trasversali A e B,  $s$  l'area della sezione trasversale del filo,  $AB = l$  la lunghezza del troncone. La corrente ha la direzione da A verso B. Sia  $V$  il potenziale in una qualsiasi sezione intermedia,  $x$  la normale avente il verso della corrente. È necessario porre, nella formula (5),  $\tau = 1$  e sostituire  $d\eta$ , con  $\eta_1$ ,  $ds$  con  $s$ ; inoltre,  $x$  ha un verso opposto a quello di  $n$  nella (5); si ha come risultato

$$\eta_1 = -c \frac{dV}{dx} s \quad (8.0.21)$$

La quantità  $c$  dipende dalla sostanza del conduttore; maggiore è  $c$ , minore è la forza  $-dV/dx$  necessaria per mettere in moto la quantità di elettricità  $\eta_1$ . Chiameremo  $c$  la conducibilità specifica della sostanza; designeremo la quantità inversa  $1 : c$  con  $\rho$  e la chiameremo *resistenza specifica*; la (7,b) si può allora scrivere

$$\frac{dV}{dx} = -\frac{\rho}{s} \eta_1 \quad (8.0.22)$$

Se si ammette che la parte considerata della catena sia omogenea, sia dal punto di vista geometrico che dal punto di vista fisico, cioè se  $s$  e  $\rho$  sono quantità costanti, si ha, rispetto alla (7,a),

$$\frac{dV}{dx} = -C \quad (8.0.23)$$

dove  $C = \frac{\rho}{s} \eta_1$  è indipendente da  $l$ . Supponendo che  $V$  è una funzione continua di  $x$ , cioè non subisce salti, si ottiene per integrazione

$$V = V_0 - Cx \quad (8.0.24)$$

*In una parte geometricamente e fisicamente omogenea della catena, il potenziale è una funzione lineare della distanza  $x$ , contato lungo il conduttore; in altre parole, in tale parte della catena, la caduta potenziale per unità di lunghezza è una quantità costante.* Applicando la formula (8) alla sezione  $AB = l$  e facendo  $C = \frac{\rho \eta_1}{s}$ , si ha

$$V_2 = V_1 - \frac{\rho l}{s} \eta_1 \quad (8.0.25)$$

Introduciamo la notazione

$$\frac{\rho l}{s} = R \quad (8.0.26)$$

e chiamiamo  $R$  la resistenza della parte AB della catena. Si deduce allora dalla (8,a)

$$\eta_1 = \frac{V_2 - V_1}{\frac{\rho l}{s}} = \frac{V_2 - V_1}{R} \quad (8.0.27)$$

Le formule (9) e (10) possono essere tradotte dalla seguente proposizione. *La resistenza di un filo (dove  $s$  e  $\rho$  sono costanti) è proporzionale alla resistenza specifica della sua sostanza e alla sua lunghezza; è inversamente proporzionale all'area della sua sezione trasversale.* È inoltre

indipendente dalla forma di questa sezione trasversale. Poiché  $\eta_1$  ha lo stesso valore in tutte le parti della catena, la (10) dà

$$\frac{V_1 - V_2}{R} = \text{cost} \quad (8.0.28)$$

Questa importante formula determina la distribuzione della caduta di potenziale nelle diverse parti della catena:  $R$  è la resistenza della parte di catena, dove la caduta di potenziale totale è pari a  $V_1 - V_2$  e, di conseguenza, il rapporto  $(V_1 - V_2) : R$  rappresenta la caduta di potenziale per unità di resistenza.

*La caduta di potenziale per unità di resistenza ha lo stesso valore in tutte le parti della catena, quando queste parti sono scelte in modo che non ci sia salto di potenziale, cioè che nessuna forza elettromotrice vi agisca. Questa caduta è numericamente uguale alla quantità di elettricità che passa, nell'unità di tempo, attraverso un qualsiasi tratto della catena.*

La formula (10) è una relazione tra tre grandezze: il potenziale, la resistenza e la quantità di elettricità. Le unità di potenziale e di quantità di elettricità sono legate tra loro dalla condizione che  $(V_1 - V_2) \eta_1$  sia numericamente uguale al lavoro compiuto dalle forze elettriche, nel passaggio di  $\eta_1$  da  $V_1$  a  $V_2$ . Resta quindi solo da scegliere le unità per due grandezze  $R$  e  $\eta$  o  $V$ .

Nell'unità di tempo passa nel circuito, tra le sezioni A e B, la quantità di elettricità  $\eta_1$ ; nel tempo  $t$ , passa la quantità  $\eta = \eta_1 t$ . Il lavoro  $r$ , compiuto dalle forze elettriche nella parte AB del circuito, nel tempo  $t$ , è uguale a

$$r = (V_1 - V_2) \eta = (V_1 - V_2) \eta_1 t = \eta_1^2 R t = \frac{(V_1 - V_2)^2}{R} t \quad (8.0.29)$$

una quantità di calore  $Q$  equivalente a questo lavoro è infatti emessa dal circuito. Il lavoro nell'unità di tempo è

$$r_1 = (V_1 - V_2) \eta_1 = \eta_1^2 R = \frac{(V_1 - V_2)^2}{R} \quad (8.0.30)$$

e la quantità corrispondente  $Q_1$  di calore emesso è

$$Q_1 = (V_1 - V_2) \eta_1 = A \eta_1^2 R = \frac{A (V_1 - V_2)^2}{R} \quad (8.0.31)$$

dove  $A$  rappresenta l'equivalente termico del lavoro.

Abbiamo introdotto la nozione di intensità della corrente  $I$  e abbiamo guardato a questa intensità come a una grandezza caratterizzante la proprietà della corrente da cui dipende l'intensità  $H$  del campo;  $H$  e  $I$  sono correlati dall'equazione (3,a). Esperimenti diretti dimostrano che l'intensità  $I$  della corrente è proporzionale alla quantità di elettricità  $\eta_1$  che passa, nell'unità di tempo, attraverso una qualunque sezione del circuito; cioè, si può porre

$$I = C \eta_1 \quad (8.0.32)$$

Per rendersi conto della possibilità di una verifica sperimentale di questa formula, è necessario vedere chiaramente quali grandezze, presenti nelle ultime equazioni, sono accessibili all'osservazione diretta e alla misura. Riscriviamo le formule (3,a), (10) e (12,b):

$$H = \frac{cl}{r} \quad (8.0.33)$$

$$\eta_1 = \frac{V_1 - V_2}{R} = \frac{V_1 - V_2}{\frac{\rho l}{s}} \quad (8.0.34)$$

$$Q_1 = A (V_1 - V_2) \eta = A \eta_1^2 R = \frac{A (V_1 - V_2)^2}{R} \quad (8.0.35)$$



In queste formule,  $c$  e  $A$  sono fattori di proporzionalità; a parte  $r, l, s$  si possono osservare e misurare:

1. L'intensità  $H$  del campo, dall'intensità della forza agente sul polo di un ago magnetico;
2. La differenza di potenziale  $V_1 - V_2$ , utilizzando un elettrometro;
3. La quantità di calore  $Q_1$ , con qualsiasi metodo calorimetrico.

Rimangono le tre grandezze  $I, \eta, \rho$ , determinate dalle tre equazioni (13,a,b,c).

a) Per una data sostanza,  $\rho = \text{cost}$ ; per sostanze diverse si possono ricavare i valori relativi della resistenza specifica  $\rho$ ;

b) Le grandezze  $I$  e  $\eta_1$  sono tra loro proporzionali.

Infatti le equazioni (13,c) danno  $R$ , misurando  $Q_1$  e  $V_1 - V_2$ . Se si varia  $l$  e  $s$ , si trova per  $\rho$  un valore costante, restando la sostanza la stessa; se si varia la sostanza, si ottengono i valori relativi di  $\rho$ . Le stesse equazioni (13,c) danno  $\eta_1$ , quando  $Q_1$  e  $V_1 - V_2$  sono stati misurati. Infine (13,a) fornisce i valori relativi dell'intensità  $I$  della corrente, quando  $H$  è stato misurato. Avendo così misurato le grandezze  $I$  e  $\eta_1$ , si è sicuri sperimentalmente che l'equazione (13) è esatta. Si può andare oltre. Supponiamo di aver misurato le grandezze  $r, H$  e  $V_1 - V_2$  in unità C.G.S., di aver preso, invece della formula (13,a) o (3,a), la formula (4), e quindi posto  $c = 2$ ; in questo caso, l'esperienza indica che il coefficiente  $C = 1$  nella (13). Prendendo la formula (4), si ha

$$I = \eta_1 \quad (8.0.36)$$

*L'intensità della corrente è misurata dalla quantità di elettricità che attraversa, nell'unità di tempo, una qualsiasi sezione del circuito.*

Abbiamo così dimostrato che l'intensità della corrente deve essere effettivamente la stessa in tutte le parti del circuito, poiché la (14) e la (7,a) danno l'equazione (7).

Il rapporto

$$i = \frac{I}{s} \quad (8.0.37)$$

nella quale  $s$  indica l'area della sezione del circuito, è detta la *densità di corrente*.

Se si pone  $\eta_1 = I$  nella (13,b) e nella (13,c), si ha

$$I = \frac{V_1 - V_2}{R} \quad (8.0.38)$$

$$Q = A(V_1 - V_2)I = AI^2R = \frac{A(V_1 - V_2)^2}{R} \quad (8.0.39)$$

Si ottiene, per la quantità di calore  $Q$ , emessa nella parte considerata del circuito nel tempo  $t$ ,

$$Q = A(V_1 - V_2)It = AI^2Rt = \frac{A(V_1 - V_2)^2 t}{R} \quad (8.0.40)$$

Il lavoro  $r$  delle forze elettriche che gli corrispondono è uguale a

$$r = (V_1 - V_2)It = I^2Rt = \frac{(V_1 - V_2)^2 t}{R} \quad (8.0.41)$$

La quantità di elettricità  $\eta$ , che passa nel tempo  $t$  per una sezione qualsiasi del circuito, è uguale a

$$\eta = \eta_1 t = It \quad (8.0.42)$$

Le relazioni appena ottenute ci permettono di determinare le unità elettromagnetiche delle grandezze  $\eta$ ,  $V_1 - V_2$  (o  $V$ ) e  $R$  (o  $\rho$ ). La formula (19) si traduce nella seguente proposizione: *l'unità el. mag. di quantità di elettricità passa, nell'unità di tempo, attraverso la sezione del conduttore, sotto l'unità el. mag. di intensità di corrente*. Abbiamo già definito, nel primo Libro,

l'unità el. stat. di quantità di elettricità, partendo dalla legge di Coulomb sull'azione reciproca dei corpi elettrizzati, e abbiamo appena trovato un'altra unità di quantità di elettricità, l'unità el. mag., partendo dalla legge di Coulomb relativa all'azione reciproca dei corpi magnetizzati. Designeremo queste unità con  $\eta_e$  e  $\eta_m$  e vedremo più tardi che

$$\eta_m = v\eta_e \quad (8.0.43)$$

dove  $v$  è il valore numerico della velocità della luce, espressa con un'unità di velocità derivata dalle unità fondamentali di lunghezza e tempo che, insieme all'unità di massa, sono alla base dei sistemi di unità elettrostatiche ed elettromagnetiche.

In particolare, si ottiene la seguente definizione: l'unità el. mag. C.G.S. di quantità di elettricità passa, in un secondo, attraverso qualsiasi sezione del circuito, sotto un'unità el. mag. G.G.S. di intensità di corrente. Invece della relazione generale (20), si ha ora

$$\eta_m = 3 \cdot 10^{10} \cdot \eta_e \quad (8.0.44)$$

Quest'ultima relazione mostra che l'unità el. mag. C.G.S. di quantità di elettricità rappresenta una grandezza molto grande nel senso comune del termine. Due di queste unità, distanti un chilometro, esercitano l'una sull'altra una forza di

$$\frac{3 \cdot 10^{10} \cdot 3 \cdot 10^{10}}{(10^5)^2} \text{ dyne} = 91744 \text{ kg}$$

Le formule (19) e (4,a) forniscono le dimensioni dell'unità el. mag. di quantità di elettricità:

$$[\eta] = [I] T = [\mu]^{-\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1} T = [\mu]^{-\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} \quad (8.0.45)$$

Se si considera  $\eta$  come una grandezza priva di dimensione, si ha

$$[\eta] = L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} \quad (8.0.46)$$

La quantità di elettricità che passa in un secondo attraverso una qualsiasi sezione di un circuito, con un'intensità di un ampere, è detta un *coulomb*. Questa è l'unità el. mag, pratica di quantità di elettricità. Dalla definizione dell'ampere segue che il coulomb è uguale a 0,1 unità el. mag. C.G.S. di quantità di elettricità. Un coulomb è uguale a  $3 \cdot 10^9$  unità el. stat.. C.G.S. di quantità di elettricità. Due coulomb distanti un chilometro agiscono l'uno sull'altro con una forza di 917,44 kg. Un microcoulomb ( $10^{-6}$  coulomb) è uguale a 3000 unità e. stat. C.G.S. di quantità di elettricità.

La prima delle formule (12), cioè

$$r = (V_1 - V_2) \eta \quad (8.0.47)$$

dà, per l'unità di potenziale, la seguente definizione: l'unità el. mag. di potenziale è uguale alla differenza di potenziale di due punti tale che, nel trasporto dell'unità el. mag. di quantità di elettricità da uno di questi punti all'altro, si effettua l'unità di lavoro. Essa è  $v$  volte più piccola dell'unità el. st.. di potenziale. L'unità el. mag. C.G.S. di potenziale è uguale alla differenza di potenziale di due punti tale che, nel trasporto dell'unità el. mag. C.G.S di quantità di elettricità da uno di questi punti all'altro, sia compiuto un erg di lavoro. Essa è  $3 \cdot 10^{10}$  volte più piccola dell'unità el. st. C.G.S. di potenziale. Poiché quest'ultima (potenziale di una piccola sfera di raggio 1 cm, sulla cui superficie si trova un'unità e. st. C.G.S: di quantità di elettricità), è già una piccola grandezza nel senso comune del termine, l'unità el. mag. C.G.S. di potenziale è naturalmente una quantità estremamente piccola.

La formula (21), in cui  $r$  denota un lavoro, così come la formula (20,b), danno le dimensioni dell'unità el. mag. di potenziale  $V$  o di differenza di potenziale  $e$ , che è la stessa cosa, di forza elettromotrice  $E$ :

$$[V] = [E] = [r] : [\eta] = L^2 M T^{-2} : [\mu]^{-\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} = [\mu]^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2} \quad (8.0.48)$$

Nel caso particolare dove si considera  $\mu$  come una grandezza di dimensione zero, si ha

$$[V] = [E] = L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2} \quad (8.0.49)$$

*L'unità el. mag. pratica di potenziale o differenza di potenziale è il volt; il volt è uguale a  $10^8$  unità el. mag. C.G.S., di potenziale. Un'unità el. st. C.G.S. di potenziale è quindi pari a 300 volt.*

La forza elettromotrice di un elemento Daniell, cioè la differenza di potenziale ai capi di un circuito regolarmente aperto, in cui è inserito un elemento Daniell, è di poco superiore a un volt. Se si accoppiano in serie 300 elementi aventi ciascuno una forza elettromotrice di un volt, e se si mette un polo di questo circuito a terra, mentre l'altro è collegato a una sfera di 1 cm di raggio, si trova su di essa un'unità el. st. C.G.S. di quantità di elettricità.

La formula (15) dà l'unità el. mag. di resistenza: questa unità è la resistenza di un conduttore, attraverso la quale passa l'unità el. mag. di intensità di corrente, quando la differenza di potenziale ai capi del conduttore è pari all'unità el. mag. di potenziale. In particolare, l'unità el. mag. C.G.S. di resistenza è la resistenza di un conduttore, attraverso il quale passa l'unità el. mag. C.G.S. di intensità di corrente (10 ampere), quando la differenza di potenziale delle estremità del conduttore è uguale all'unità el. mag. C.G.S. di potenziale. Poiché 10 ampere è un'intensità di corrente già in grado di produrre un arco elettrico e l'unità el. mag. C.G.S. di potenziale è una piccolissima quantità, l'unità el. mag. C.G.S. di resistenza è di per sé una quantità estremamente piccola. La formula (15) fornisce, per le dimensioni dell'unità el. mag. di resistenza,

$$[R] = [V] : [I] = [\mu]^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2} : [\mu]^{-\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1} = [\mu] L T^{-1} \quad (8.0.50)$$

o, nel caso in cui si considera  $\mu$  come una grandezza di dimensione zero,

$$[R] = \frac{L}{T} \quad (8.0.51)$$

Queste dimensioni sono identiche a quelle di una velocità. L'unità pratica di resistenza corrisponde all'ampere, come unità di intensità di corrente, e al volt, come unità di forza elettromotrice; è detta *ohm*. Si può scrivere simbolicamente, secondo la (15),

$$\begin{aligned} 1 \text{ ohm} &= \frac{1 \text{ volt}}{1 \text{ ampere}} = \frac{10^8 \text{ unità el. mag. C.G.S. di potenziale}}{0.1 \text{ unità el. mag. C.G.S. di intensità di corrente}} = \\ &= \frac{10^9 \text{ unità el. mag. C.G.S. di resistenza}}{1} \end{aligned}$$

L'ohm è quindi uguale a  $10^9$  unità el. mag. C.G.S. di resistenza. Ricerche, sulle quali torneremo in seguito, hanno dimostrato che l'ohm è uguale alla resistenza di una colonna di mercurio di  $1 \text{ mm}^2$  di sezione e di 106,3 cm (più esattamente forse 106,27 cm) di lunghezza a  $0^\circ$ .

Alle unità pratiche, di cui abbiamo appena parlato, deve corrispondere una determinata unità di lavoro, e il lavoro  $r$ , nella formula (18), si esprime con questa unità, quando  $I$ ,  $R$  e  $V_1 - V_2$  sono misurate rispettivamente in coulomb, ohm e volt e il tempo in secondi. L'uguaglianza  $r = (V_1 - V_2) I t$  dà:

$$\begin{aligned} &\text{unità pratica di lavoro: } (1 \text{ volt})(1 \text{ ampere})(1 \text{ secondo}) \\ &= (10^8 \text{ unità el. mag. C.G.S. di potenziale}) (0,1 \text{ unità el. mag. C.G.S. di intensità di corrente}) \\ &(1 \text{ unità C.G.S. di tempo}) \\ &= 10^8 \cdot 0,1 \text{ unità C.G.S. di lavoro} = 10^7 \text{ erg} = 10 \text{ megaerg} = 1 \text{ joule} = 0,24 \text{ grammo-calorie.} \end{aligned}$$

L'unità di lavoro, nel sistema di unità pratiche, è uguale a un joule, il quale è equivalente a 0,24 gramma-calorie. Si possono ora scrivere le formule (17) e (18) come segue:

$$Q = 0,24 (V_1 - V_2) It = 0,24 I^2 R t = \frac{0,24 (V_1 - V_2)^2 t}{R} \text{ gr.cal} \quad (8.0.52)$$

$$r = (V_1 - V_2) It = I^2 R t = \frac{(V_1 - V_2)^2 t}{R} \text{ joule} \quad (8.0.53)$$

Si può chiamare il joule, l'unità elettrotecnica del lavoro. L'unità elettrotecnica di potenza, che le corrisponde, è il joule al secondo o watt; questo è uguale a  $1/736$  della potenza di un cavallo.

Per completezza, considereremo nuovamente l'unità el. mag. di capacità  $q$ . Se  $\eta$  è la carica,  $V$  il potenziale,  $q$  la capacità di un conduttore, ad esempio quella di un condensatore, si ha  $\eta = qV$ ; questa formula mostra che l'unità el. mag. di capacità è uguale alla capacità di un corpo, che, con una carica di un el. mag. di quantità di elettricità, ha l'unità el. mag. di potenziale. A partire dalle ultime due unità, la prima è  $v$  volte più grande, vedi (20), e la seconda  $v$  volte più piccola delle unità el. st. corrispondenti, è chiaro che l'unità el. mag. di capacità è  $v^2$  volte maggiore dell'unità el. st. di capacità, o ancora che è uguale alla capacità di una sfera, il cui raggio è uguale a  $v^2$  unità di lunghezza.

L'unità el. mag. C.G.S. di capacità è la capacità di un corpo, che, per una carica uguale a una unità el. mag. di quantità di elettricità (10 coulomb), ha l'unità el. mag. C.G.S. di potenziale. È uguale a  $v^2 = 9 \cdot 10^{20}$  unità el. mag. C.G.S. di capacità o ancora alla capacità di una sfera di raggio pari a  $9 \cdot 10^{20} \text{ cm} = 9 \cdot 10^{15} \text{ km} = 64$  milioni di volte la distanza dalla Terra al Sole.

Le dimensioni dell'unità el. mag. di capacità sono

$$[q] = [\mu] : [V] = [\mu]^{-2} L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} : [\mu]^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2} = [\mu]^{-1} L^{-1} T^{-2} \quad (8.0.54)$$

o, più particolarmente

$$[q] = L^{-1} T^2 \quad (8.0.55)$$

L'unità pratica di capacità è detta il *farad*. Essa corrisponde a un potenziale di un volt per una carica di un coulomb. Si può scrivere simbolicamente

$$\begin{aligned} 1 \text{ farad} &= \frac{(1 \text{ coulomb})}{(1 \text{ volt})} = \frac{(0,1 \text{ unità el. mag. C.G.S. di quantità di elettricità})}{(10^8 \text{ unità el. mag. C.G.S. di potenziale})} \\ &= 10^{-9} \text{ unità el. mag. C.G.S. di capacità} \end{aligned}$$

Il farad è uguale a  $10^{-9}$  unità el. mag. C.G.S. di capacità o a  $9 \cdot 10^{11}$  unità el. st. C.G.S. di capacità. È la capacità di una sfera il cui raggio è pari a 9 milioni di chilometri. La grandezza effettivamente utilizzata nella pratica è il microfarad =  $10^{-6}$  farad. Un microfarad è uguale a  $10^{-6} \text{ farad} = 10^{-15}$  unità el. mag. C.G.S. = 900000 unità el. st. C.G.S. di capacità.

Il microfarad è uguale alla capacità di una sfera di raggio 9 km. La capacità della sfera terrestre è uguale a 708 microfarad. La capacità di un condensatore ad aria, piano e circolare, le cui armature sono distanti 1 mm, è uguale a un microfarad, quando il loro raggio è di 6 m.

Mostreremo che il sistema di unità utilizzato nella tecnica è un sistema assoluto, cioè è regolarmente costruito con determinate unità fondamentali di lunghezza  $L$ , massa  $M$  e tempo  $T$ . Per costruire questo sistema, abbiamo arbitrariamente preso l'ampere = 0,1 unità el. mag. C.G.S. e il volt =  $10^8$  unità el. mag. C.G.S. Inoltre, nella definizione del coulomb e del joule, abbiamo adottato l'unità di tempo  $T = 1$  secondo. L'ohm e il farad sono poi stati regolarmente derivati dall'ampere, dal volt e dal coulomb. Resta quindi da determinare  $L$  e  $M$ . Siano  $L = x \text{ cm}$ ,  $M = y \text{ gr}$ . Si ha allora, dalla (4.a) e (21.b),

$$1 \text{ ampere} = 1 \cdot (x \text{ cm})^{\frac{1}{2}} (y \text{ gr})^{\frac{1}{2}} (\text{sec})^{-\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} \text{ unità C.G.S. di intensità di corrente}$$

$$1 \text{ volt} = 1 \cdot (x \text{ cm})^{\frac{3}{2}} (y \text{ gr})^{\frac{1}{2}} (\text{sec})^{-2} = x^{\frac{3}{2}} y^{\frac{1}{2}} \text{ unità C.G.S. di potenziale}$$

Dalle definizioni di ampere e volt, risulta che

$$x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} = 0,1 \quad x^{\frac{3}{2}} y^{\frac{1}{2}} = 10^8$$

dove  $x = 10^9$ ,  $y = 10^{-11}$ . Il sistema pratico di unità di misura è quindi basato sulle unità fondamentali  $L = 10^9 \text{ cm}$  (approssimativamente la lunghezza di un quadrante terrestre),  $M = 10^{-11} \text{ gr}$  e  $T = 1 \text{ s}$ .

#### 4. Legge di Ohm. Accoppiamento di elementi

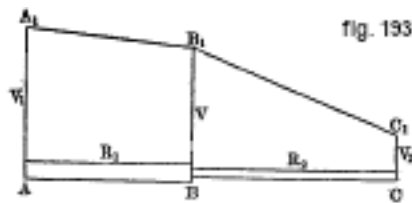
Prenderemo come punto di partenza dei ragionamenti seguenti le due formule (2,f), e (15), dove però cambieremo un po' le notazioni. Scriveremo la prima di queste formule come segue

$$E = \sum e_k = V' - V'' \quad (8.0.56)$$

Indica che la forza elettromotrice  $E$  di un elemento è uguale alla somma delle forze elettromotrici o dei salti di potenziale  $e_k$  nel circuito, nonché della differenza  $V' - V''$  dei potenziali ai capi del circuito regolarmente aperti. La seconda formula

$$I = \frac{V_1 - V_2}{R_{1,2}} \quad (8.0.57)$$

dà l'intensità di una corrente, in una parte geometricamente e fisicamente omogenea del circuito, quando la resistenza di questa parte è  $R_{1,2}$  e la differenza di potenziale dei suoi estremi  $V_1 - V_2$ . La formula (25) indica che, in qualsiasi sezione del circuito, la caduta di potenziale ha lo stesso valore, a parità di intensità di corrente; maggiore è la resistenza dell'unità di lunghezza del conduttore che forma il circuito, più rapidamente cade il potenziale. Consideriamo ora una parte del circuito omogenea fisicamente, ma non geometricamente.



I segmenti AB e BC (fig. 193) sono della stessa sostanza e differiscono solo per la loro dimensione trasversale; siano  $V_1$  e  $V_2$  i potenziali in A e in C,  $R_1$  e  $R_2$  le resistenze delle parti AB e BC. Prese le ascisse lungo il circuito, portiamo in ordinate i valori dei potenziali; la distribuzione del potenziale è allora rappresentata graficamente da una linea tratteggiata  $A_1B_1C_1$ ; la caduta è più rapida lungo BC che lungo AB. Indichiamo con  $V$  il potenziale in B e con  $R_{1,2}$  la somma  $R_1 + R_2$ ; si ha

$$I = \frac{V_1 - V}{R_1} = \frac{V - V_2}{R_2} = \frac{(V_1 - V) + (V - V_2)}{R_1 + R_2} = \frac{V_1 - V_2}{R_{1,2}} \quad (8.0.58)$$

$$V = \frac{V_1 R_2 + V_2 R_1}{R_1 + R_2} \quad (8.0.59)$$

La prima di queste equazioni mostra che la formula (25) rimane applicabile a qualsiasi parte del circuito che sia fisicamente omogenea, sebbene geometricamente eterogenea. Consideriamo ora una parte fisicamente eterogenea del circuito. Sia AC un tratto del circuito formato da

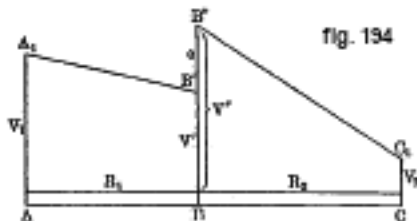
due parti AB e BC di diversa sostanza (fig. 194), tale che in B agisca la forza elettromotrice  $e$ , uguale al salto di potenziale  $V'' - V'$ . La distribuzione del potenziale è rappresentata dalla linea tratteggiata  $A_1B'B''C_1$ , dove  $B''B' = V'' - V' = e$  e si ha

$$\begin{aligned} I &= \frac{V - V'}{R_1} = \frac{V'' - V_2}{R_2} = \frac{(V_1 - V') + (V'' - V_2)}{R_1 + R_2} = \\ &= \frac{(V_1 - V_2) + (V'' - V')}{R_1 + R_2} = \frac{V_1 - V_2 + e}{R_{1,2}} \end{aligned} \quad (8.0.60)$$

se ne deduce

$$V' = \frac{V_1 R_2 + V_2 R_1 - e R_1}{R_1 R_2} \quad V'' = \frac{V_1 R_2 + V_2 R_1 + e R_2}{R_1 R_2} \quad (8.0.61)$$

Prendiamo infine l'intero circuito chiuso. Ci sono salti potenziali, che consideriamo positivi quando corrispondono a un aumento del potenziale, e cadute che conteremo positivamente quando c'è una diminuzione del potenziale. Se, partendo da un qualsiasi punto M del circuito, dove non c'è brusca variazione del potenziale, facciamo l'intero giro del circuito, per ritornare allo stesso punto M, troviamo anche il valore iniziale del potenziale; di conseguenza *la somma delle variazioni di potenziale lungo tutto il circuito chiuso è nulla*.



Poiché queste variazioni possono essere solo salti e cadute, è chiaro che, in un circuito chiuso, *la somma dei salti di potenziali è uguale alla somma delle cadute*; ma la somma dei salti non è altro che la forza elettromotrice  $E$  agente nel circuito, e di conseguenza, *in un circuito chiuso la somma di tutte le cadute di potenziale è uguale alla forza elettromotrice  $E$* . Dividiamo l'intero circuito in sezioni fisicamente omogenee; siano  $V_1$  e  $V_2$  i potenziali agli estremi della prima sezione,  $V_3$  e  $V_4$  i potenziali agli estremi della seconda, ecc.;  $V_2$  non è naturalmente uguale a  $V_3$ , né  $V_4$  a  $V_5$ , perché ci sono salti di potenziale ai limiti di separazione di queste sezioni. Indichiamo con  $R_{1,2}$ ,  $R_{3,4}$  ecc. le rispettive resistenze delle sezioni e con  $R = R_{1,2} + R_{3,4} + \dots$  la resistenza dell'intero circuito. Per ogni sezione si può scrivere l'equazione (25,a) e così si ha

$$I = \frac{V_1 - V_2}{R_{1,2}} = \frac{V_3 - V_4}{R_{3,4}} = \dots = \frac{(V_1 - V_2) + (V_3 - V_4) + (V_5 - V_6) + \dots}{R_{1,2} + R_{3,4} + R_{5,6} + \dots}$$

Al numeratore c'è la somma di tutte le cadute di potenziale del circuito, che, come appena dimostrato, è uguale a  $E$ ; se si introduce la somma  $R$  delle resistenze  $R_{1,2}$ ,  $R_{3,4}$ , ecc., si trova

$$I = \frac{E}{R} \quad (8.0.62)$$

Questa formula esprime la famosa legge di Ohm: *l'intensità della corrente è direttamente proporzionale alla forza elettromotrice che agisce nel circuito e inversamente proporzionale alla resistenza totale di quest'ultimo*. Si possono anche considerare le equazioni (25,a) e (25,c) come formulanti la legge di Oim, per una sezione del circuito, se si considera  $V_1 - V_2$  nel primo caso,  $V_1 - V_2 + e$  nel secondo, come forza elettromotrice agente nella sezione assegnata.

Conoscendo  $E$  e  $R$ , si ottiene l'intensità  $I$  della corrente, che è anche uguale alla caduta di potenziale per unità di resistenza. Quando si conoscono le resistenze di tutte le parti del circuito prese separatamente, si può determinare l'entità della caduta di potenziale in ciascuna di queste parti. Se c'è un elemento nel circuito, non si può in generale trascurare la caduta di

potenziale all'interno dell'elemento, perché entra, nella costituzione di quest'ultimo, di liquidi la cui resistenza specifica è molto grande rispetto a quella dei metalli. È facile determinare quale parte della caduta totale è relativa all'elemento. Indichiamo con  $R_i$  la resistenza interna del circuito, cioè la resistenza dell'elemento, con  $R_e$  la resistenza esterna, cioè la resistenza del circuito rimanente, dove non ci sono più forze elettromotrici; si ha  $R_i + R_e = R$ . La caduta di potenziale all'interno dell'elemento è uguale a  $\frac{R_i E}{R}$ , quella del circuito rimanente a  $\frac{R_e E}{R}$ . Supponiamo che nel circuito aperto la differenza di potenziale agli estremi dell'elemento, dove inizia la parte esterna del circuito, sia  $V_1 - V_2$ ; si ha allora  $V_1 - V_2 = E$ . Dall'equazione (26), si ottiene

$$I = \frac{E}{R} = \frac{V_1 - V_2}{R_i + R_e} \quad (8.0.63)$$

Indichiamo con  $V' - V''$  la differenza di potenziale agli stessi estremi nel circuito chiuso; l'equazione (25,a) dà, in questo caso, per la parte esterna del circuito

$$I = \frac{V' - V''}{R_e} \quad (8.0.64)$$

se ne deduce

$$\frac{V' - V''}{V_1 - V_2} = \frac{V' - V''}{E} = \frac{R_e}{R} = \frac{R_e}{R_e + R_i} \quad (8.0.65)$$

Quando la resistenza esterna  $R_e$  è molto grande rispetto a  $R_i$ ,  $V' - V''$  è approssimativamente uguale a  $V_1 - V_2$  o a  $E$ ; se  $R_e$  è molto piccola rispetto a  $R_i$ , anche  $V' - V''$  è una quantità molto piccola.

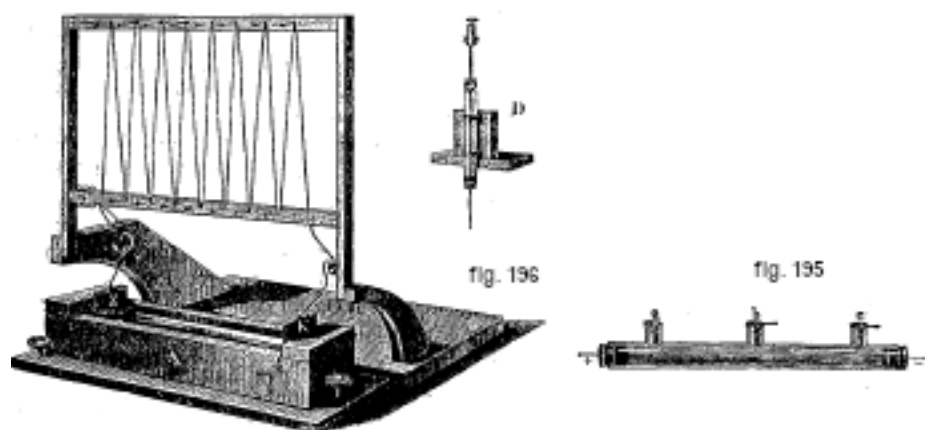
Molte ricerche sperimentali sono state intraprese da vari fisici allo scopo di verificare la legge di Ohm; ma tutti questi lavori oggi non hanno altro che un interesse storico e ci limiteremo a indicare quasi esclusivamente i più importanti. Tra i più vecchi, ricordiamo quelli di Fechner (1831), Pouillet, Gaugain, Beetz (1862) e Kohlrausch (1869), che hanno confermato non solo la stessa legge di Ohm, ma anche le leggi che esprimono come la resistenza dipenda dalle dimensioni del conduttore.

Una Commissione, di cui Maxwell, Everett e Schuster erano membri, ha da allora effettuato, su richiesta della British Association, una verifica della legge di Ohm; quasi contemporaneamente, Chrystall ha svolto un lavoro ancora più preciso, seguendo un metodo proposto da Maxwell. Coin, Fitzgerald e Trouton hanno verificato la legge di Ohm soprattutto per i conduttori liquidi e infine Sulzberger per soluzioni molto diluite. Tutti questi lavori hanno confermato, nei limiti degli errori di osservazione, l'esattezza della legge di Ohm.

Uno strumento molto comodo e un metodo elegante, per la verifica della legge di Ohm in tutte le sue parti, come esercizio pratico, sono descritti da E. Wiedemann e H. Ebert nella loro opera *Physikalisches Praktikum*, 5a ed., Braunschweig 1904, p. 410.

La legge secondo la quale la caduta di potenziale per unità di resistenza è la stessa in tutte le parti del circuito è teoricamente equivalente a quella che si esprime quando si dice che l'intensità della corrente è la stessa in tutte le parti del circuito; tuttavia i lavori di Hermann e R. Kohlrausch sulla distribuzione dell'elettrizzazione (del potenziale) lungo un circuito sono ancora oggi interessanti. Hermann (1801) aveva cercato di determinare, molto prima di Ohm, l'elettrizzazione nei diversi punti di una colonna liquida (fig. 195) inserita nel circuito. Il liquido era in un lungo tubo, provvisto di tubi laterali  $a, b, c$ , attraverso i quali erano introdotti dei fili collegati ad un elettroscopio sensibile. Osservò così da un lato un'elettrizzazione positiva, dall'altro un'elettrizzazione negativa, e nel mezzo un punto neutro. Ricerche molto accurate sono state fatte anche da R. Kohlrausch (1848): egli ha mostrato, usando un condensatore piano, che la forza elettromotrice di un elemento, misurata in circuito chiuso con uno dei metodi descritti in seguito, è proporzionale alla differenza di potenziale degli estremi del circuito regolarmente aperto. Ha studiato ulteriormente la caduta di potenziale lungo un circuito chiuso, impiegando lo

strumento in fig. 196. L'elemento era costituito da una lunga scatola A, contenente una soluzione di solfato di rame con una lastra di rame K, un vaso poroso e una soluzione di solfato di zinco con una lastra di zinco Z; il circuito esterno era costituito da un lungo filo, disposto a zig-zag su un telaio di legno. Un punto *a* del circuito era unito a una delle armature di un condensatore e a terra, un altro punto *b* all'altra armatura del condensatore; la carica di quest'ultimo misurava la differenza di potenziale dei punti *a* e *b*. Per la parte liquida del circuito sono stati utilizzati fili-sonde D. È facile vedere come KOHLRAUSCH sia riuscito a determinare la caduta di potenziale in funzione della resistenza, variando i punti *a* e *b*, cambiando i conduttori, ecc.



L'esattezza della legge di Ohm, nel caso in cui il circuito contiene pessimi conduttori, è stata oggetto di lavori dovuti a Gaugain (1860, fili di cotone) e a J. J. Thomson e Newall (1887, olio di oliva, solfuro di carbonio, benzina). È stato dimostrato, in elettroliti buoni conduttori, per basse cadute di potenziale ( $10^{-6}$  volt/cm), da Kohlrausch e Nippoldt (1869), in cattivi conduttori (acqua distillata) con forti cadute (100 volt/cm) di Kohlrausch e Heydweiller (1894). L'esattezza della legge di Ohm negli elettroliti è stata confermata con correnti alternate da Kohlrausch e Grotrian (1874), le alternanze raggiungevano anche le 100 al secondo; E. Cohn (1884) arrivò fino a 25000 oscillazioni di corrente al secondo; infine Nernst (1897) e Erskine (1897), fino a milioni di vibrazioni (raggi di Hertz). E. Cohn ha dimostrato teoricamente che se la legge dell'elettrolisi dovuta a Faraday (vedi dopo) è esatta, le deviazioni dalla legge di Ohm non possono manifestarsi negli elettroliti, anche con  $10^9$  vibrazioni al secondo; è solo per un numero di vibrazioni al secondo dell'ordine di  $10^{15}$  (vibrazioni luminose) che la legge di Ohm cessa di essere applicabile.

Bellati e Lussana, Herwig, Siemens e più in particolare Braun hanno indicato una serie di sostanze per le quali la legge di Ohm non è completamente verificata quando sono poste in un circuito; ma in questo caso si verificano fenomeni secondari che influenzano i risultati dell'osservazione.

La legge di Ohm permette di calcolare l'intensità della corrente in un circuito dove agiscono *n* elementi, formando quella che viene chiamata una batteria. Sia *e* la forza elettromotrice, *r* la resistenza di un singolo elemento, *R*<sub>0</sub> la resistenza del circuito esterno, *E* la forza elettromotrice, *R*<sub>*i*</sub> la resistenza della batteria. Gli elementi possono essere associati in serie, in parallelo o a gruppi. Consideriamo prima le prime due modalità di raggruppamento. Abbiamo già mostrato che si ha  $E = ne$  nell'accoppiamento in serie,  $E = e$  in quello in parallelo. Si ha  $R_i = nr$  nell'accoppiamento in serie,  $R_i = r : n$  nell'accoppiamento in parallelo, poiché *n* elementi associati in parallelo formano, per così dire, un unico elemento, dove la corrente attraversa una sezione di area *n* volte maggiore. La seguente tabella può essere compresa senza ulteriori spiegazioni:



	Formula generale	$R_0$ molto grande	$R_0$ molto piccolo
Un solo elemento	$I = \frac{e}{r+R_0}$	$I = \frac{e}{R_0}$	$I = \frac{e}{r}$
$n$ elementi in serie	$I = \frac{ne}{nr+R_0}$	$I = \frac{ne}{R_0}$	$I = \frac{e}{r}$
$n$ elementi in parallelo	$I = \frac{e}{\frac{r}{n}+R_0}$	$I = \frac{e}{R_0}$	$I = \frac{ne}{r}$

Le ultime due colonne verticali mostrano che, quando la resistenza esterna  $R_0$  è molto grande rispetto alla resistenza interna  $R_i$ , è necessario associare gli elementi in serie; se invece  $R_0$  è piccolo rispetto a  $R_i$ , devono essere associati in parallelo.

Sia  $n = pq$ , dove  $p$  e  $q$  sono due numeri interi. Si possono associare gli  $n$  elementi dati in gruppi, cioè  $p$  elementi in serie e  $q$  gruppi ottenuti in parallelo, oppure,  $q$  elementi in parallelo e  $p$  gruppi ottenuti in serie. In questo caso si ha  $E = pe$ ;  $R_i = \frac{pr}{q}$ , in modo che l'intensità della corrente sia

$$I = \frac{pe}{\frac{pr}{q} + R_0} \quad (8.0.66)$$

Ponendo  $q = \frac{n}{p}$ , viene

$$I = \frac{pe}{\frac{p^2r}{q} + R_0} \quad (8.0.67)$$

Come dovrebbero essere scelti i fattori  $p$  e  $q$  per ottenere la massima intensità di corrente possibile, o anche qual è il miglior raggruppamento degli  $n$  elementi da questo punto di vista? Per risolvere questo problema si consideri provvisoriamente  $I$  come una funzione del numero  $p$  variabile in modo continuo. Per  $I$  massimo, si deve avere  $\frac{dI}{dp} = 0$ , cioè

$$\frac{dI}{dp} = \frac{\left(\frac{p^2r}{n} + R_0\right)e - pe \cdot \frac{2pr}{n}}{\left(\frac{p^2r}{n} + R_0\right)^2} = \frac{R_0 - \frac{p^2r}{n}}{\frac{p^2r}{n} + R_0}e = 0$$

ne risulta che

$$\frac{p^2r}{n} = R_0 \quad (8.0.68)$$

o

$$R_i = R_0 \quad (8.0.69)$$

La massima intensità di corrente si ha con un raggruppamento degli  $n$  elementi tale che la resistenza della batteria sia uguale alla resistenza esterna del circuito. La formula (27,b) e l'uguaglianza  $q = n : p$  danno

$$p = \sqrt{\frac{R_0}{r}}n \quad q = \sqrt{\frac{r}{R_0}}n \quad (8.0.70)$$

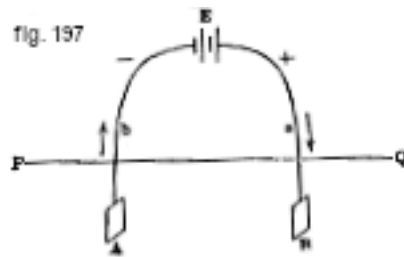
In pratica occorre scegliere per  $p$  e  $q$  gli interi più vicini a quelli dati da queste formule, che soddisfano l'uguaglianza  $pq = n$ .

In pratica, occorre scegliere per  $p$  e  $q$  gli interi più vicini a quelli dati da queste formule, che soddisfano l'uguaglianza  $pq = n$ .

Si possono anche impiegare altri modi di accoppiamento rispetto a quelli che abbiamo appena considerato, in cui, per esempio, i gruppi particolari non sono eguali. Wassmuth, Auerbach, Grawinkel e Tsétline hanno risolto diversi problemi di questo genere. Inoltre, in certe circostanze, non si cerca di ottenere la massima intensità di corrente possibile, ma di soddisfare certe altre condizioni. Questa è in particolare la condizione che il funzionamento della batteria sia il più economico possibile, cioè il dispendio di sostanza (l'usura di Zn per esempio), per unità di intensità di corrente, cioè la più piccola possibile. Weinhold e Handl, in particolare, si sono occupati di quest'ultima questione.

Per concludere, diremo alcune parole sulla chiusura di un circuito con la terra. Sia PQ (fig. 197) la superficie del suolo, A e B due piastre metalliche incastrate in quest'ultimo; quando le

si collega alla batteria E, si trova che il circuito è chiuso, cioè che attraverso bEa passa una corrente continua, anche se la distanza tra A e B è notevole. Sarebbe un errore ammettere che poi attraverso il suolo passi una corrente di elettricità positiva da B ad A. Dobbiamo piuttosto considerare la Terra come un immenso serbatoio di elettricità a potenziale zero. La batteria E mantiene un potenziale positivo in *a*, un potenziale negativo in *b*, in modo che si stabilisca una corrente continua di elettricità positiva da *a* attraverso B verso la Terra e dalla Terra da A verso *b*.



Spesso è importante osservare che nella chiusura di un circuito da parte della terra vengono quasi sempre introdotte nuove forze elettromotrici che agiscono sulle superfici di contatto delle piastre A e B con il terreno più o meno umido. Quando le forze elettromotrici nel circuito sono generalmente piccole e si tratta di misure precise, la circostanza indicata può giocare un ruolo non trascurabile.

## 5. Correnti derivate

Finora abbiamo supposto che il circuito sia costituito da un elemento o da una batteria e da una serie lineare di conduttori (fili). Nella parte esterna di tale circuito, la direzione della corrente è ovunque la stessa, e la caduta di potenziale in questa direzione è costantemente positiva, cioè corrisponde sempre ad una diminuzione del potenziale. Passiamo ora al caso in cui i conduttori lineari formano una rete, in diversi punti della quale i conduttori si ramificano, mentre in altri agiscono forze elettromotrici. Il problema che allora si pone è il seguente: *data una determinata rete, cioè la disposizione geometrica dei conduttori e le rispettive resistenze, nonché le forze elettromotrici, in intensità, direzione e posizione, che agiscono nella rete; si tratta di determinare l'intensità delle correnti, in tutti i conduttori di cui è composta la rete, in intensità e verso.* La soluzione completa di questo problema si ottiene utilizzando le due equazioni di Kirchhoff che considereremo.

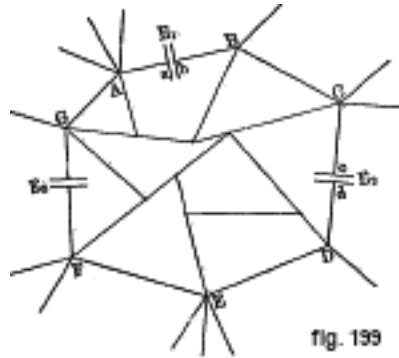


Supponiamo che in un certo punto P della rete si incontrino numerosi conduttori; chiameremo un tale punto un *nodo*. Poiché in un nodo non si ha né accumulo né perdita di elettricità, è chiaro che deve uscire da esso tanta elettricità quanto ne fluisce verso di lui; cioè, la somma delle intensità *I* delle correnti dirette verso il nodo deve essere uguale alla somma delle intensità *I* delle correnti che se ne allontanano. Se si concorda di considerare come positive le correnti che si dirigono verso un nodo e come negative quelle che se ne allontanano, si ha più semplicemente l'equazione

$$\sum I = 0 \quad (8.0.71)$$

PRIMA LEGGE DI KIRCHHOFF. *La somma delle intensità delle correnti nei conduttori che si incontrano in un nodo è nulla; di devono considerare di segno opposto le correnti che vanno verso il nodo e quelle che se ne allontanano.*

La seconda equazione di Kirchhoff è relativa a un qualsiasi sistema di conduttori formante, nella rete data, una figura chiusa che chiameremo contorno chiuso. ABCDEFGA (fig. 199) rappresenta un tale contorno, dove agiscono le forze elettromotrici date  $E_1, E_2, E_3$ , ecc. Ogni sezione AB, BC, ecc., ha una determinata resistenza, anch'essa data; si tratta di determinare l'intensità  $I$  e il verso della corrente che passa in ciascuna di queste sezioni.



Consideriamo nel contorno le parti che non contengono alcuna sorgente di forza elettromotrice, né alcun nodo, ad esempio le parti Aa, bB, BC, Cc, dD, DE, EF, ecc. La formula (25, a) mostra che, in ciascuna di queste parti, la caduta di potenziale è uguale in quantità al prodotto dell'intensità  $I$  della corrente per la resistenza e ha lo stesso verso della corrente. Se si percorre l'intero contorno in un qualsiasi verso determinato, la somma delle cadute di potenziale sarà uguale alla somma delle quantità  $IR$ ; ma la somma delle cadute, che si contano positivamente quando c'è una diminuzione di potenziale, deve essere pari alla somma dei salti, che vengono conteggiati positivamente quando c'è un innalzamento quota, poiché la somma di tutte le variazioni di potenziale che si incontrano durante l'attraversamento del contorno deve essere nulla. Si ottiene così l'equazione

$$\sum IR = \sum E \quad (8.0.72)$$

quando non esiste nel contorno considerato alcuna forza elettromotrice, si ha

$$\sum IR = 0 \quad (8.0.73)$$

SECONDA LEGGE DI KIRCHHOFF. *In ogni contorno chiuso, la somma dei prodotti delle intensità delle correnti per le rispettive resistenze delle parti del contorno è uguale alla somma delle forze elettromotrici.* Percorrendo il contorno, si deve contare  $I$  positivamente quando la corrente è diretta nel verso del percorso,  $E$  positivamente quando si incontra un salto di potenziale corrispondente a un incremento.

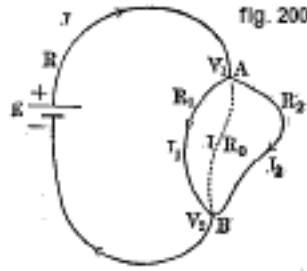
Scrivendo le equazioni (28) e (29) o (29,a), per i vari nodi e contorni chiusi della rete, si trova sempre il numero di equazioni necessarie e sufficienti per determinare tutte le  $I$  incognite.

Siccome l'intensità  $I$  della corrente è la stessa in Aa e bB per esempio, o in cC e dD, è chiaro che le parti AB, CD, FG, che contengono un salto di potenziale, daranno ciascuna un termine della forma  $IR$ , dove  $R$  indica la resistenza totale di tale parte.

Faremo un'osservazione molto importante sul tema delle equazioni della forma (28) e (29). Il problema che si pone consiste nel determinare le intensità  $I$  delle correnti in modulo e verso. Si potrebbe pensare che il verso delle correnti debba essere già noto quando si scrivono le equazioni (28) e (29), ma le quantità  $I$ , come abbiamo visto sopra, devono essere introdotte con segni opportuni; ma, in realtà, questa difficoltà non esiste. In certi casi si vede subito, dalla disposizione delle varie parti della rete, quale verso deve avere la corrente in ognuna di esse. Se

così non fosse, bisogna attribuire alle correnti  $I$  un verso arbitrario qualsiasi; quando si trova, risolvendo le equazioni (28) e (29),  $I > 0$  o, ciò significa che il verso ammesso è quello corretto, altrimenti si ottiene  $I < 0$ .

Altre equazioni generali, relative alle derivazioni di corrente in un sistema di conduttori, sono state ulteriormente stabilite da diversi autori, in particolare da Bosscha, Helmholtz, Borgmann, Slouguinoff, ecc.; i metodi da seguire per stabilire e risolvere i sistemi di equazioni (28) e (29) sono stati studiati da Maxwell, Fleming, Ulbricht, Guillaume (1891), Ahrens (1897) e altri ancora. Non ci soffermeremo su questi lavori, perché dovremo considerare al momento solo derivazioni molto semplici, che non danno luogo ad alcuna difficoltà. Nel capitolo dedicato alle misure elettriche, incontreremo alcuni casi di derivazioni più complicate.



I. DERIVAZIONE SEMPLICE E SHUNT. Lo schema di una derivazione semplice di corrente è dato dalla figura 200. Nel circuito agisce la forza elettromotrice  $E$ ; i punti A e B sono collegati da due fili di resistenza  $R_1$  e  $R_2$ ; la parte AEB ha una resistenza  $R$ . Si tratta di trovare le intensità di corrente  $I, I_1, I_2$  nella parte principale del circuito e nei due rami AB. I versi di queste correnti sono immediati; sono indicati da frecce. La formula (28) dà, per il punto A,

$$I = I_1 + I_2 \quad (8.0.74)$$

Dalla seconda equazione di Kirchhoff, applicata al contorno formato dalla derivazione, si ha

$$I_1 R_1 - I_2 R_2 = 0$$

o

$$I_1 R_1 = I_2 R_2 \quad (8.0.75)$$

Per il contorno  $AI_1BEA$ , si deve scrivere

$$IR + I_1 R_1 = E \quad (8.0.76)$$

Si ottengono pertanto tre equazioni per le tre incognite  $I, I_1, I_2$ . L'equazione (30,a) dà

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1} \quad (8.0.77)$$

*Le intensità delle correnti nei due rami paralleli sono inversamente proporzionali alle resistenze di questi rami;* dalla (30) e (30,c), si ha

$$I_1 = \frac{IR_2}{R_1 + R_2} \quad I_2 = \frac{IR_1}{R_1 + R_2} \quad (8.0.78)$$

Infine, dalla (30,b)

$$I = \frac{E(R_1 + R_2)}{R(R_1 + R_2) + R_1 R_2} = \frac{E}{R + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} \quad (8.0.79)$$

$$I_1 = \frac{ER_2}{R(R_1 + R_2) + R_1 R_2} = \frac{ER_1}{R(R_1 + R_2) + R_1 R_2} \quad (8.0.80)$$

Queste ultime formule contengono la soluzione del problema. Quando  $I$  è dato, le (30,d) determinano le intensità  $I_1$  e  $I_2$ , in cui  $I$  si sdoppia.

Si chiama resistenza della derivazione la resistenza  $R_0$  di un conduttore che, introdotto tra i punti A e B al posto dei due fili  $AI_1B$  e  $AI_2B$  (cfr nella fig. 200 la linea tratteggiata), non modificherà l'intensità  $I$  della corrente nella parte principale del circuito. Ma, da una tale sostituzione, si ha  $I = \frac{E}{R+R_0}$ ; confrontando con la (30,e), si ottiene l'importante formula seguente

$$R_0 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (8.0.81)$$

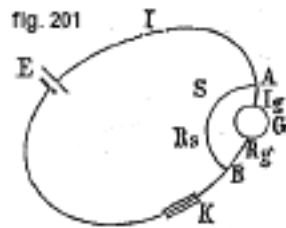
La resistenza di un sistema di due conduttori paralleli introdotti in un circuito è uguale al prodotto delle resistenze dei due fili diviso per la loro somma. Si può anche mettere la (30,g) nella seguente forma:

$$\frac{1}{R_0} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (8.0.82)$$

La conducibilità di un sistema di due conduttori inseriti in parallelo in un circuito è pari alla somma delle conducibilità di tali conduttori. L'equazione (30,g) può essere stabilita senza ricorrere a (30,b). Siano  $V_1$  e  $V_2$  i potenziali dei punti A e B; si ha

$$I_1 = \frac{V_1 - V_2}{R_1} \quad I_2 = \frac{V_1 - V_2}{R_2} \quad I = \frac{V_1 - V_2}{R_0}$$

Dalle prime due formule si deduce la (30,c); portando questi valori di  $I, I_1, I_2$  nella (30) e dividendo per  $V_1 - V_2$ , si ottiene la (30,h) e quindi la (30,g).



La derivazione semplice viene utilizzata in quello che viene chiamato lo shuntage dei dispositivi, ad esempio galvanometri. Supponiamo che la corrente  $I$  del circuito sia troppo intensa per passare in uno strumento G (fig. 201). Introducendo lo strumento nel circuito tra i punti A e B, si desidera far passare attraverso di esso solo una corrente  $I_g$ , costituente una data frazione di  $I$ , ad esempio  $0,1I$  o  $0,01I$ , ecc. Sia, in generale,

$$I_g = \frac{1}{n} I \quad (8.0.83)$$

essendo  $n$  un numero assegnato. Si collegano i punti A e B con un filo detto shunt;  $R_g$  indica la resistenza dello strumento shuntato, si tratta di determinare la resistenza  $R_s$  dello shunt in funzione di due quantità date  $R_g$  e  $n$ . Le formule (30,d) danno

$$I_g = \frac{R_s}{R_s + R_g} I$$

L'equazione di condizione (30,i) dà pertanto

$$\frac{R_s}{R_s + R_g} = \frac{1}{n}$$

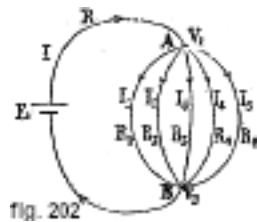
da cui

$$R_s = \frac{1}{n-1} R_g \quad (8.0.84)$$

Se la parte  $n$ -esima della corrente deve passare attraverso lo strumento, la resistenza dello shunt deve essere la  $(n-1)$ -esima parte della resistenza dello strumento. Introducendo lo shunt  $S_1$ , si riduce la resistenza totale del circuito, in modo che l'intensità  $I$  della corrente aumenta. Affinché  $I$  non cambi, è necessario introdurre nel circuito una resistenza  $K$  compensatrice. Prima dell'introduzione dello shunt, la resistenza tra i punti A e B era  $R_g$ ; dopo la sua introduzione, diventa  $\frac{R_g R_s}{R_g + R_s}$ , si veda la (30,g). Si ha quindi

$$K = R_g - \frac{R_g R_s}{R_g + R_s} = \frac{R_g^2}{R_g + R_s} = \frac{R_g^2}{R_g + \frac{R_g}{n-1}} = \frac{n-1}{n} R_g \quad (8.0.85)$$

Se si vuole, per esempio, che  $I_g = I/10$ , si deve prendere  $R_s = R_g/9$  e  $K = 9/10 R_g$ .



II. DERIVAZIONE MULTIPLA. Tra i punti A e B sono interposti un numero arbitrario di fili aventi rispettivamente per le resistenze  $R_1, R_2, R_3, \dots, R_k, \dots$ ;  $E$  e  $R$  mantengono il loro vecchio significato. Ci si propone di determinare i valori di  $I$  e  $I_k$ , dati quelli di  $E, R$  e di  $R_k$ . Nel punto A, si ha

$$I = \sum I_k \quad (8.0.86)$$

Siano  $V_1$  e  $V_2$  i potenziali dei punti A e B,  $R_0$  la resistenza della derivazione, cioè di tutto il fascio di fili montati in parallelo. Si ha

$$I_1 = \frac{V_1 - V_2}{R_1} \quad I_2 = \frac{V_1 - V_2}{R_2} \quad I_3 = \frac{V_1 - V_2}{R_3} \quad \dots \quad I_k = \frac{V_1 - V_2}{R_k} \quad \dots \text{ se}$$

ne deduce  $I_1 R_1 = I_2 R_2 = I_3 R_3 = \dots = I_k R_k = \dots$  o

$$\frac{I_1}{\frac{1}{R_1}} = \frac{I_2}{\frac{1}{R_2}} = \frac{I_3}{\frac{1}{R_3}} = \dots = \frac{I_k}{\frac{1}{R_k}} = \dots \quad (8.0.87)$$

Le intensità delle correnti nei fili in parallelo sono inversamente proporzionali alle resistenze o direttamente proporzionali alle conducibilità dei fili. Se si introduce, invece del fascio di fili, un solo filo di resistenza  $R_0$ , si ha

$$I = \frac{V_1 - V_2}{R_0} \quad (8.0.88)$$

Portando la (31,c) e la (31,a) nella (30), si a

$$\frac{1}{R_0} = \sum \frac{1}{R_k} \quad (8.0.89)$$

La conducibilità dell'intero fascio è uguale alla somma delle conducibilità dei fili che lo compongono. Si ha inoltre

$$I = \frac{E}{R + R_0} = \frac{E}{R + \frac{1}{\sum \frac{1}{R_k}}} = \frac{E \sum \frac{1}{R_k}}{R \sum \frac{1}{R_k} + 1} \quad (8.0.90)$$

Infine la (31,b) e la (30) danno, per la p-esima corrente  $I_p$

$$I_p = \frac{\frac{1}{R_p}}{\sum \frac{1}{R_n}} - I = \frac{E}{R_p} \frac{1}{R \sum \frac{1}{R_n} + 1} \quad (8.0.91)$$

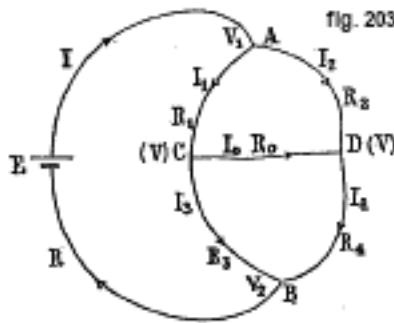
Si ha, ad esempio per quattro conduttori,

$$I = \frac{R_2 R_3 R_4 + R_1 R_3 R_4 + R_1 R_2 R_4 + R_1 R_2 R_3}{R(R_2 R_3 R_4 + R_1 R_3 R_4 + R_1 R_2 R_4 + R_1 R_2 R_3) + R_1 R_2 R_3 R_4} E \quad (8.0.92)$$

I quattro termini del numeratore sono i numeratori delle espressioni di  $I_1 I_2, I_3, I_4$ ; il denominatore è identico a quello di questi ultimi. Si arriverà alle stesse formule, applicando la (29) ai contorni  $AEBI_1A, AI_1BI_2A, AI_2BI_3A$ , ecc.

III. PONTE DI WHEATSTONE. Il ponte di Wheatstone è rappresentato in forma schematica, per il caso più semplice, in figura 203. Si distingue dalla semplice derivazione solo per l'aggiunta del conduttore CD, che costituisce quello che viene chiamato il ponte; AC, AD, BC e BD sono i quattro rami o lati del ponte. Indichiamo le resistenze e le intensità delle correnti con le lettere indicate in figura. Sono date le grandezze  $E, R, R_1, R_2, R_3, R_4, R_0$ ; le incognite sono  $I, I_1, I_2, I_3, I_4, I_0$ . La prima legge di Kirchhoff applicata ai punti A, C e B dà

$$\begin{cases} I &= I_1 + I_2 \\ I_1 &= I_0 + I_3 \\ I &= I_1 + I_4 \end{cases} \quad (8.0.93)$$



Abbiamo attribuito arbitrariamente alla corrente  $I_0$  la direzione da C verso D. La seconda legge di Kirchhoff, applicata ai contorni AFBCA, ACDA e CDBC, fornisce le equazioni

$$\begin{cases} IR + I_1 R_1 + I_2 R_2 &= E \\ I_1 R_1 + I_0 R_0 - I_2 R_2 &= 0 \\ I_0 R_0 + I_4 R_4 - I_3 R_3 &= 0 \end{cases} \quad (8.0.94)$$

Dalle sei equazioni (32) e (32,a), si possono ricavare le intensità di corrente cercate. Risolvendo queste equazioni, si trova, per l'intensità di corrente nel ponte,

$$\begin{cases} I_0 &= \frac{E(R_2 R_3 - R_1 R_4)}{R_0 \{ (R_1 + R_2 + R_3 + R_4) + (R_1 + R_3)(R_2 + R_4) \} +} \\ K &+ R(R_3 + R_4)(R_1 + R_2) + R_1 R_2(R_2 + R_4) + R_2 R_4(R_1 + R_3) \end{cases} \quad (8.0.95)$$

L'intensità della corrente nel ponte è nulla, quando  $R_2 R_3 - R_1 R_4 = 0$  o quando

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} \quad (8.0.96)$$

cioè quando le resistenze dei quattro rami sono in proporzione geometrica. Data l'importanza di quest'ultima relazione, mostreremo come può essere stabilita direttamente. Quando  $I_0 = 0$ , si ha  $I_1 = I_3$  e  $I_2 = I_4$ , perché non c'è derivazione di corrente nei punti C e D. La seconda legge di Kirchhoff fornisce, per i contorni ACDA e CDBC,

$$I_1 R_1 - I_2 R_2 = 0 \quad I_3 R_3 - I_4 R_4 = 0$$

da cui

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{I_2}{I_1} \quad \frac{R_3}{R_4} = \frac{I_4}{I_3}$$

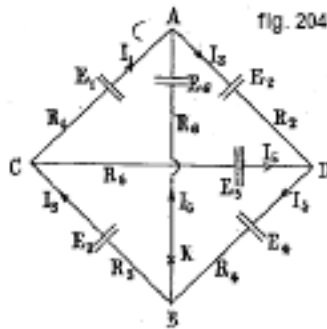
ma i membri di destra sono uguali, poiché  $I_2 = I_4$ ,  $I_1 = I_3$ , e lo stesso vale per la successione dei membri di sinistra, e si ha la relazione (32,c). Anche il seguente ragionamento è molto istruttivo. Siano  $V_1$  e  $V_2$  i potenziali dei punti A e B; lungo ACB e ADB, il potenziale si abbassa da  $V_1$  a  $V_2$ . Il verso della corrente  $I_0$  nel ponte è determinato da quello dei due punti C e D che ha il potenziale più alto;  $I_0 = 0$ , quando C e D hanno lo stesso potenziale. Ne consegue che in ogni punto C (o D) su uno dei conduttori, si può far corrispondere un punto D (o C) sull'altro, tale che l'intensità della corrente sia nulla nel ponte che unisce questi due punti; ma poiché  $I_1 = I_3$  e  $I_2 = I_4$ , si ha

$$I_1 = \frac{V_1 - V}{R_1} = I_3 = \frac{V - V_2}{R_3}$$

$$I_2 = \frac{V_1 - V}{R_2} = I_4 = \frac{V - V_2}{R_4}$$

dividendo la seconda equazione per la prima, si ottiene la relazione (32,c).

Lo schema del ponte di Wheatstone può assumere varie forme; se, ad esempio, si traccia il ramo AEB all'interno del contorno ACBDA, si ottiene una figura che ricorda un quadrilatero con le sue due diagonali; in una delle diagonali agisce la batteria E, nell'altra si misura l'intensità  $I_0$  della corrente. Quando la condizione (32,c) è soddisfatta, la chiusura o l'apertura di una delle diagonali non influenza l'intensità della corrente nell'altra:  $I_0$  rimane uguale a zero;  $I$  ovviamente non varia, se si apre la diagonale CD quando non è percorsa da corrente.



Fröhlich ha mostrato che con una tale disposizione delle diagonali, la relazione (32,c) è appropriata anche nel caso molto più generale in cui nei sei conduttori che formano la rete agiscono forze elettromotrici. La Figura 204 mostra un caso del genere; da  $R_1$  a  $R_6$  e da  $E_1$  a  $E_6$  denotano rispettivamente le resistenze e le forze elettromotrici; da  $I_1$  a  $I_6$  sono le intensità delle correnti, quando le due diagonali sono chiuse. Le frecce indicano i versi delle forze elettromotrici; poiché i versi delle correnti possono essere scelti prima arbitrariamente, ammetteremo che queste stesse frecce designano anche i versi delle correnti. In K c'è un interruttore di corrente. Supponiamo che la chiusura o l'apertura della diagonale AB non influenzi l'intensità di corrente  $I_5$  nella diagonale CD. La prima equazione di Kirchhoff dà quindi, per i punti A, D e C,

$$I_2 = I_1 + I_6 \quad I_4 = I_5 + I_2 = I_5 + I_1 + I_6 \quad I_3 = I_1 + I_5 \quad (8.0.97)$$



La seconda equazione di Kirchhoff dà, per i contorni ACDA e BCDB

$$\begin{aligned} E_1 + E_2 - E_5 &= I_1 R_1 + I_2 R_2 - I_5 R_5 \\ E_3 + E_4 - E_5 &= I_3 R_3 + I_4 R_4 + I_5 R_5 \end{aligned}$$

o, dalla (32,d)

$$\begin{aligned} E_1 + E_2 - E_5 &= I_1 R_1 + (I_1 + I_6) R_2 - I_5 R_5 = I_1 (R_1 + R_2) - I_5 R_5 + I_6 R_2 \\ E_1 + E_4 - E_5 &= (I_1 + I_5) R_3 + (I_5 + I_1 + I_6) R_4 + I_5 R_5 = \\ &= I_1 (R_2 + R_4) + I_5 (R_3 + R_4 + R_5) + I_6 R_4 \end{aligned}$$

Apriamo il ramo AB; i membri di sinistra delle ultime due equazioni non cambiano; a destra,  $I_0 = 0$ ,  $I_5$  non varia per ipotesi,  $I_1$  assume un nuovo valore  $I'_1$ . I membri di sinistra non cambiano, si deve avere

$$\begin{aligned} I_1 (R_1 + R_2) - I_5 R_5 + I_6 R_2 &= I'_1 (R_1 + R_2) - I_5 R_5 \\ I_1 (R_3 + R_4) + I_5 (R_3 + R_4 + R_5) + I_6 R_4 &= \\ &= I'_1 (R_3 + R_4) + I_5 (R_3 + R_4 + R_5) \end{aligned}$$

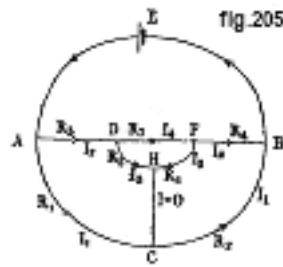
o

$$\begin{aligned} (I'_1 - I_1) (R_1 + R_2) &= I_6 R_2 \\ (I'_1 - I_1) (R_3 + R_4) &= I_6 R_4 \end{aligned}$$

se ne deduce

$$\frac{R_1 + R_2}{R_3 + R_4} = \frac{R_2}{R_4} \quad \text{o} \quad \frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}$$

Quando nei sei conduttori, cioè nei quattro lati e nelle due diagonali che costituiscono lo schema generale del ponte di Wheatstone, agiscono delle forze elettromotrici, si ha la seguente proposizione: se l'apertura o la chiusura di una diagonale non influenza l'intensità della corrente nell'altra diagonale, le resistenze dei quattro lati formano la proporzione geometrica (32,c). La proposizione rimane vera, quando alcune delle quantità da  $E_1$  a  $E_0$  sono nulle, ad esempio tutte tranne una; nel caso del ponte semplice (fig. 203), tutte le  $E$  sono nulle, eccetto  $E_6$ .



IV. DOPPIO PONTE DI WHEATSTONE. PONTE DI THOMSON (LORD KELVINE). Lo schema di questa derivazione è rappresentato in figura 205; differisce dallo schema a ponte semplice in quanto un'estremità H del ponte CH è collegata al conduttore aggiuntivo DHF. Le resistenze dei conduttori sono indicate con da  $R_1$  a  $R_7$ ;  $R_1$  e  $R_2$ ,  $R_3$  e  $R_4$ ,  $R_5$  e  $R_6$  sono disposti simmetricamente. Consideriamo semplicemente il caso in cui, nel ponte CH, l'intensità della corrente  $I = 0$ . L'intensità della corrente ha allora lo stesso valore  $I_1$  in AC e CB, lo stesso valore  $I_2$  in AD e FB, ed infine lo stesso valore  $I_3$  in DH e HF, come indicato in figura. L'intensità della corrente in DF è indicata con  $I_4$ . Applicando la seconda equazione di Kirchhoff ai contorni ADHCA e FBCHF, si ottiene

$$\begin{cases} R_1 I_1 = R_3 I_2 + R_5 I_3 \\ R_2 I_1 = R_4 I_2 + R_6 I_3 \end{cases} \quad (8.0.98)$$

Le formule danno l'importante teorema seguente:

*Quando si ha, nel ponte,  $I = 0$  e quando due qualsiasi dei tre rapporti  $\frac{R_1}{R_2}, \frac{R_3}{R_4}, \frac{R_5}{R_6}$  sono uguali, i tre rapporti sono uguali.* Per ottenere la condizione generale per cui  $I = 0$ , applichiamo la prima equazione di Kirchhoff al punto D e la seconda al contorno DHFD; si ha così

$$I_2 = I_3 + I_4 \quad (8.0.99)$$

$$(R_5 + R_6) I_3 = R_7 I_4 \quad (8.0.100)$$

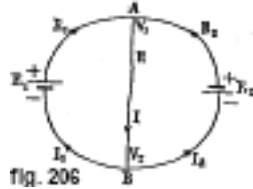
Queste equazioni danno

$$I_2 = I_3 \left( 1 + \frac{R_5 + R_6}{R_7} \right)$$

Se si porta questo valore nella (33) e si divide la prima di queste due equazioni per la seconda, si ottiene,  $I_1$  e  $I_2$  svaniscono,

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3 \left( 1 + \frac{R_5 + R_6}{R_7} \right) + R_5}{R_4 \left( 1 + \frac{R_5 + R_6}{R_7} \right) R_6} \quad (8.0.101)$$

Si ritrova, per  $R_7 = 0$ , la condizione del ponte semplice  $R_1 : R_2 = R_3 : R_4$ .



V. DUE ELEMENTI SONO MONTATI IN SERIE. Gli elementi  $E_1$  e  $E_2$  (fig. 206) sono collegati in serie; i due punti A e B sono uniti da un filo. Le parti  $AE_1B$  e  $AE_2B$  hanno le resistenze  $R_1$  e  $R_2$ , che comprendono naturalmente le resistenze degli elementi stessi; la resistenza di AB è  $R$ . Le intensità delle correnti sono indicate con  $I_1$  e  $I_2$  e  $I$ ; i versi delle correnti  $I_1$  e  $I_2$  non sono in dubbio, ma quello della corrente  $I$  è stato presa arbitrariamente da A a B. Le equazioni di Kirchhoff applicate al punto A e ai contorni  $AE_1BA$  e  $AE_2BA$  danno

$$I_1 = I_2 + I \quad (8.0.102)$$

$$I_1 R_1 + IR = E_1 \quad (8.0.103)$$

$$I_2 R_2 - IR = E_2 \quad (8.0.104)$$

Quando  $I = 0$ , si ha  $I_1 = I_2$ ,  $I_1 R_1 = E_1$ ,  $I_2 R_2 = E_2$  da cui si deduce

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{E_1}{E_2} \quad (8.0.105)$$

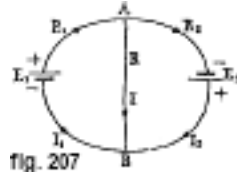
*Affinché l'intensità di corrente nel ramo di giunzione AB sia nulla, la condizione (34,c) deve essere verificata.* Se si risolvono le tre equazioni (34), (34,a) (34,b), si trova

$$I_1 = \frac{E_1 (R + R_1) + E_2 R}{RR_1 + RR_2 + R_1 R_2} \quad (8.0.106)$$

$$I_2 = \frac{E_2 (R + R_1) + E_1 R}{RR_1 + RR_2 + R_1 R_2} \quad (8.0.107)$$

$$I = \frac{E_1 R_2 - E_2 R_1}{RR_1 + RR_2 + R_1 R_2} \quad (8.0.108)$$

L'ultima formula dà per  $I = 0$  la condizione (34,c).



V. DUE ELEMENTI SONO MONTATI IN PARALLELO. Questo schema (fig. 207) si distingue dal precedente per il fatto che gli elementi  $E_1$  e  $E_2$  sono montati in parallelo. Nessun dubbio si ha qui sul verso della corrente  $I$ ; i versi delle correnti  $I_1$  e  $I_2$  sono al contrario presi arbitrariamente. Le equazioni di Kirchhoff danno

$$I = I_1 + I_2 \quad (8.0.109)$$

$$I_1 R_1 + RI = E_1 \quad (8.0.110)$$

$$I_2 R_2 + RI = E_2 \quad (8.0.111)$$

Quando  $I_1 = 0$ , si ha  $I = I_1$  e

$$E_1 = RI \quad (8.0.112)$$

$$E_2 = (R + R_2) I \quad (8.0.113)$$

se ne deduce

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{R}{R + R_2} < 1 \quad (8.0.114)$$

L'intensità della corrente, nel ramo che contiene l'elemento  $E_1$ , può essere nulla solo quando  $E_1 < E_2$  e quando la condizione (35,e) è soddisfatta; si ha allora  $E_1 = RI$ , dove  $R$  è la resistenza del filo di giunzione AB,  $I$  l'intensità di corrente comune a tutte le parti del contorno  $ABE_2A$ . A causa dell'importanza di questo risultato, lo stabiliremo ulteriormente come segue. Siano  $I_1 = 0$ ,  $V_1$  e  $V_2$  i potenziali dei punti A e B. Poiché non c'è corrente in  $BE_1A$ , non c'è caduta di potenziale; il ramo  $BE_1A$  rappresenta in un certo senso un circuito regolarmente aperto e di conseguenza  $V_1 - V_2 = E_1$ . Ma si ha in AB

$$I = \frac{V_1 - V_2}{R} = \frac{E_1}{R} \quad \text{da cui} \quad E_1 = RI$$

Inoltre la corrente  $I$  ha la stessa intensità in tutto il circuito  $ABE_2A$  e quindi

$$I = \frac{E_2}{R + R_2}$$

Confrontando i due valori di  $I$  così ottenuti, si trova la (35,e).

Risolvendo le tre equazioni (35), (35,a) e (35,b), si ha

$$I_1 = \frac{E_1 (R + R_2) - E_2 R}{RR_1 + RR_2 + R_1 R_2} \quad (8.0.115)$$

$$I_2 = \frac{E_2 (R + R_1) - E_1 R}{RR_1 + RR_2 + R_1 R_2} \quad (8.0.116)$$

$$I = \frac{E_1 R_2 + E_2 R_1}{RR_1 + RR_2 + R_1 R_2} \quad (8.0.117)$$

Quando  $E_1 = E_2 = E$ , l'ultima formula dà

$$I = \frac{E}{R + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} \quad (8.0.118)$$

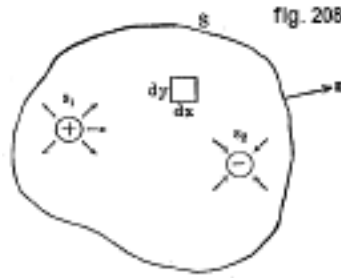
Se inoltre  $R_2 = R_1$ , si ottiene

$$I = \frac{E}{R + \frac{R_1}{2}} \quad (8.0.119)$$

Queste due formule confermano che la forza elettromotrice di due elementi montati in parallelo è uguale a quella di un singolo elemento; la (35,k) conferma che la resistenza di questi elementi è la metà della resistenza di un singolo elemento. È facile generalizzare queste conclusioni per un numero qualsiasi di elementi montati in parallelo.

VII. CORRENTI IN PIASTRE SOTTILI E IN CORPI TRIDIMENSIONALI. Finora abbiamo considerato la distribuzione della corrente in una rete di fili o in un sistema di conduttori lineari. Diremo ora qualche parola sulla distribuzione di una corrente in lamine sottili o corpi bidimensionali e in corpi tridimensionali.

Sia  $S$  (fig. 208) una piastra piana infinitamente sottile e conduttrice di elettricità; indichiamo con  $c$  la sua conducibilità specifica e con  $h$  lo spessore. Due fili sono saldati su un lato della piastra; siano  $s_1$  e  $s_2$  i luoghi attraverso i quali la corrente  $I$  entra nella piastra e ne esce. Si tratta di determinare le linee di corrente, cioè le curve che l'elettricità segue nel suo movimento da  $s_1$  a  $s_2$ .



Considerando lo spessore  $h$  come infinitamente piccolo, si può ammettere che la corrente ci sia solo parallelamente alle facce della piastra, cioè che costituisca un moto solo in due dimensioni. Consideriamo l'elemento piatto  $dx dy$  e determiniamo la quantità di elettricità  $d\eta$  che entra in questo elemento durante il tempo  $\tau$ . Penetra dalla parte  $dy$  la quantità di elettricità  $-ch dy \frac{\partial V}{\partial x} \tau$ , dalla parte opposta una quantità che si deduce dalla precedente facendo variare  $x$  di  $dx$  e cambiando il segno, cioè  $ch dy \left( \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dx \right) \tau$ ; penetra quindi in totale nell'elemento, da entrambe le parti, la quantità di elettricità  $ch \tau \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dx dy$ . Dal lato  $dx$  e da quello ad esso opposto, passa la quantità  $ch \tau \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} dx dy$ , di modo che si ha infine

$$d\eta = ch \tau \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) dx dy$$

Nello stato stazionario della corrente, si deve avere in tutti i punti della piastra, tranne quelli all'interno di  $s_1$  e  $s_2$ ,  $d\eta = 0$ , cioè

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \quad (8.0.120)$$

Se  $dx dy$  è preso all'interno di  $s_1$ , si ha  $d\eta = \frac{I \tau}{s_1} dx dy$ , poiché, nel tempo  $\tau$ , penetra nella piastra, da tutta l'area  $s_1$ , la quantità di elettricità  $I \tau$ ; ancora, per i punti all'interno di  $s_2$ , si ha  $d\eta = -\frac{I \tau}{s_2} dx dy$ . Si ottiene quindi, all'interno di  $s_1$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{1}{ch s_1} \quad (8.0.121)$$

e all'interno di  $s_2$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\frac{1}{chs_2} \quad (8.0.122)$$

Poiché si suppone che l'elettricità non può passare per il contorno esterno della piastra, si deve avere lungo tutto questo contorno

$$\frac{\partial V}{\partial n} = 0 \quad (8.0.123)$$

dove  $n$  (si veda la fig. 208) è la direzione della normale al bordo della piastra.

Mostreremo dapprima in alcuni semplici casi come le precedenti equazioni permettano di determinare completamente la funzione  $V$ , conoscendo la forma della lastra, la posizione dei punti  $s_1$  e  $s_2$  di entrata e di uscita dell'elettricità, nonché le grandezze  $c, h, I$ .

Per una lastra che si estende indefinitamente in tutte le direzioni, la condizione (36,c) scompare. La funzione

$$V = A - \frac{1}{2\pi ch} \log \frac{r_1}{r_2} \quad (8.0.124)$$

soddisfa alle equazioni (36), (36,a) e (36,b), essendo  $A$  una costante arbitraria,  $r_1$  e  $r_2$  le distanze da  $s_1$  e  $s_2$  dal punto a potenziale  $V$ . L'equazione  $V = \text{cost}$  delle linee di livello del potenziale è

$$\frac{r_1}{r_2} = \text{cost} \quad (8.0.125)$$

Queste linee sono cerchi che circondano eccentricamente i punti  $s_1$  e  $s_2$ ; le loro traiettorie ortogonali, cioè le linee di corrente, sono archi di cerchio congiungenti  $s_1$  e  $s_2$ .

In una lamina circolare, al cui bordo si trovano  $s_1$  e  $s_2$ , le linee di corrente sono pure archi di cerchio.

Quando la lamina è composta da parti di diversa conducibilità, le linee di corrente subiscono una rifrazione mentre passano da una parte all'altra. Indichiamo con  $s$  la curva di separazione di due di tali parti della lamina e supponiamo che  $V_1$  e  $c_1$  si riferiscano all'una,  $V_2$  e  $c_2$  all'altra; sia  $ds$  un elemento della curva  $s$ ,  $n$  la direzione della normale a questo elemento. Si ha allora, in tutti i punti della curva  $s$ , la relazione

$$c_2 \frac{\partial V_1}{\partial n} = c_1 \frac{\partial V_2}{\partial n} \quad (8.0.126)$$

che esprime che non si ha in questi punti né accumulo né perdita di elettricità. Lungo la curva  $s$ , si ha  $V_1 - V_2 = \text{cost}$ ; pertanto

$$\frac{\partial V_1}{\partial s} = \frac{\partial V_2}{\partial s} \quad (8.0.127)$$

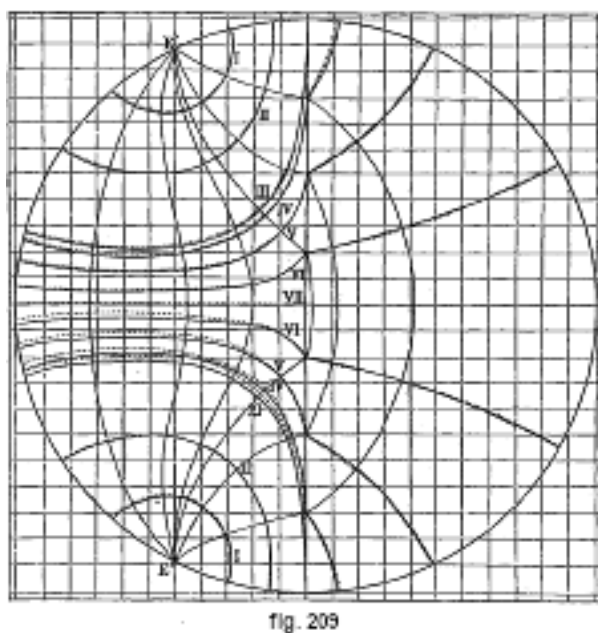
La linea di corrente in un punto è diretta lungo la diagonale del rettangolo costruito nel primo mezzo su  $\frac{\partial V_1}{\partial n}$  e  $\frac{\partial V_1}{\partial s}$ , nel secondo su  $\frac{\partial V_2}{\partial n}$  e  $\frac{\partial V_2}{\partial s}$ . Siano  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  gli angoli formati rispettivamente nei due mezzi dalla linea di corrente con la normale; si ha

$$\tan \varphi_1 = \frac{\partial V_1}{\partial s} : \frac{\partial V_1}{\partial n} \quad \tan \varphi_2 = \frac{\partial V_2}{\partial s} : \frac{\partial V_2}{\partial n}$$

Le equazioni (36,g) e (36,f) danno quindi

$$\frac{\tan \varphi_1}{\tan \varphi_2} = \frac{c_1}{c_2} \quad (8.0.128)$$

Questa formula esprime la legge di rifrazione delle linee di corrente. Quincke ha studiato teoricamente e sperimentalmente la distribuzione di corrente in una lamina circolare, metà in Pb e metà in Cu (fig. 209); gli elettrodi sono in  $E'$  ed  $E''$ ; si vedono, nella figura, le linee di corrente rifratte, che uniscono  $E'$  a  $E''$ .



A parte le linee di corrente, lungo le quali si propaga l'elettricità, le linee di uguale intensità di corrente presentano ancora un grande interesse; l'intensità non è affatto costante lungo le linee di corrente, poiché queste ultime, partendo da uno degli elettrodi, prima divergono e poi convergono verso l'altro elettrodo. Vi è uguale intensità di corrente nei punti dove  $\frac{\partial V}{\partial n} = \text{cost}$ , con  $N$  indicante la normale alla linea di livello del potenziale. Tale condizione può essere espressa nella seguente forma:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 = cost \quad (8.0.129)$$

Nel caso di una lamina che si estende indefinitamente in tutte le direzioni, dove le linee di livello del potenziale hanno l'equazione  $r_1 : r_2 = cost$ , si veda la (36,e) e dove le linee di corrente sono archi di cerchio che uniscono  $s_1$  e  $s_2$ , l'equazione delle linee di uguale intensità di corrente è  $r_1 r_2 = cost$ ; queste ultime linee sono *lemniscate*, che circondano i punti  $s_1$  e  $s_2$ .

Il problema della propagazione della corrente in un piano è stato collegato per la prima volta da Kirchhoff (1875) alla teoria della rappresentazione conforme delle aree piane. La proposizione su cui poggia questa teoria è la seguente:

Le curve piane ottenute eguagliando a costanti la parte reale e la parte immaginaria di una qualsiasi funzione  $f(z)$  della variabile complessa  $z = x + iy$  formano un sistema ortogonale e isotermo. Inoltre, la formula

$$Z = f(z) \quad (8.0.130)$$

che dà due equazioni reali, definisce un modo di trasformazione con conservazione della grandezza e del verso di rotazione degli angoli.

Consideriamo una funzione  $V'$ , che può essere chiamata il potenziale coniugato di  $V$ , tale che

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V'}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial V'}{\partial x} \end{cases} \quad (8.0.131)$$

la funzione  $V'$  soddisfa l'equazione (36); le curve  $V' = cost$  sono le traiettorie ortogonali delle curve  $V = cost$ , poiché

$$\frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial V'}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial V'}{\partial y} = 0$$

infine, queste due famiglie di curve formano un sistema isoterma, poiché

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial V'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V'}{\partial y}\right)^2$$

Le curve  $V' = \text{cost}$  sono ciò che si chiamano le linee di corrente. Ciò detto, se si considera la funzione  $Z = V + iV'$ , si ottiene precisamente una funzione della variabile complessa  $z$ , come la (36,k).

Tra le funzioni di questo tipo, dovrebbero essere prese qui le seguenti:

$$Z = -\frac{I}{2\pi ch} \log(z - z_0) \quad (8.0.132)$$

essa corrisponde infatti ad un'unica sorgente di corrente nel punto  $z_0$  per il quale la corrente  $I$  entra nel piano  $x, y$ , secondo le proprietà possedute nel piano dal potenziale logaritmico

$$V = m \log \frac{I}{r}$$

proprietà del tutto analoghe a quelle del potenziale newtoniano nello spazio; questi due potenziali differiscono solo perché il primo non si annulla all'infinito e può avere qualunque segno. Quando ci sono più elettrodi, si può prendere una somma di termini della forma (36,m). Consideriamo, ad esempio, la parte del piano che giace al di sopra dell'asse  $x$  e siano  $z_0$  e  $z_1$  i punti di ingresso e di uscita della corrente  $I$ , si avrà

$$Z = -\frac{I}{2\pi ch} \left( \log \frac{z - z_0}{z - z_1} + \log \frac{z - \bar{z}_0}{z - \bar{z}_1} \right)$$

indicando con  $\bar{z}_0$  e  $\bar{z}_1$  le variabili immaginarie coniugate di  $z_0$  e  $z_1$ .

Essendo la parte immaginaria di quest'ultima espressione  $Z$  costante sull'asse delle  $x$ , si vede che, per ottenere la soluzione del problema attualmente proposto per una lamina limitata da una qualsiasi curva, è sufficiente realizzare la rappresentazione conforme del semipiano precedente sul dominio interno della curva data, in modo che l'asse  $x$  corrisponda al nuovo limite. Per il cerchio la trasformazione è molto semplice; denotando con  $a$  il raggio di questo cerchio, si deve prendere

$$\zeta = a \frac{1 + iz}{1 - iz}$$

e la soluzione cercata è

$$Z = -\frac{I}{2\pi ch} \left( \log \frac{\zeta - \zeta_0}{\zeta - \zeta_1} + \log \frac{\zeta - \zeta'_0}{\zeta - \zeta'_1} \right)$$

essendo  $\zeta_0, \zeta_1, \zeta'_0, \zeta'_1$  i punti della seconda area, che corrispondono ai punti  $z_0, z_1, \bar{z}_0, \bar{z}_1$  della prima.

Tutti i dettagli necessari sulla teoria della rappresentazione conforme delle aree piane si trovano nelle opere di G. Darboux, *Théorie générale des surface*, Vo. I, p. 170, e da E. Picard, *Traite d'analyse*, Vol. II, p. 268.

Beltrami (1868) ha stabilito la forma che l'equazione (36) assume su una superficie qualunque, dove il quadrato dell'elemento lineare è

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

si ha allora

$$\frac{\partial}{\partial u} \frac{G \frac{\partial V}{\partial v} - F \frac{\partial V}{\partial u}}{\sqrt{EG - F^2}} + \frac{\partial}{\partial v} \frac{E \frac{\partial V}{\partial v} - F \frac{\partial V}{\partial u}}{\sqrt{EG - F^2}} = 0 \quad (8.0.133)$$

e il potenziale  $V'$  si trova definito dalla relazione differenziale

$$dV' = -\frac{E \frac{\partial V}{\partial v} - F \frac{\partial V}{\partial u}}{\sqrt{EG - F^2}} du + \frac{E \frac{\partial V}{\partial u} - F \frac{\partial V}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}} dv$$

L'elemento lineare di una superficie qualunque può, in un'infinità di modi, essere ricondotto alla forma

$$ds^2 = \lambda^2 (dx^2 + dy^2)$$

si veda, G. Darboux, *Théorie générale des surface*, Vol I, p. 148; si dice, in questo caso, che esiste una rappresentazione conforme della superficie sul piano e vediamo che l'equazione (36,n) si riduce alla (36). Si possono quindi ancora applicare soluzioni come la (36,m) allo studio della distribuzione di corrente su una superficie curva, come hanno fatto Kirchhoff, G. Neumann, Lipzchitz e W. Wolf.

Lo studio della propagazione della corrente in un mezzo tridimensionale porta anche alla determinazione del potenziale  $V$ ; le traiettorie ortogonali delle superfici di livello di quest'ultimo sono le linee di corrente cercate. Si vede facilmente che  $V$  soddisfa in tutti i punti del mezzo, eccetto gli elettrodi, l'equazione

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (8.0.134)$$

analoga alla (36). Alla superficie del mezzo, si ha

$$\frac{\partial V}{\partial n} = 0 \quad (8.0.135)$$

Al limite di questi due diversi mezzi si ha l'equazione (36,f) e la rifrazione delle linee di corrente avviene secondo la legge espressa dalla formula (36,h). Alla superficie degli elettrodi, che possono trovarsi al confine o all'interno del mezzo, esiste una condizione che, caso in ogni caso particolare, si scrive facilmente, esprimendo che la quantità totale di elettricità, penetrante nell'unità di tempo all'interno del mezzo dalla superficie degli elettrodi, è uguale a  $\pm I$ , dove  $I$  denota l'intensità data della corrente all'esterno del mezzo. La densità di corrente  $i$  è

$$i = -c \frac{\partial V}{\partial N} \quad (8.0.136)$$

essendo  $N$  la normale alla superficie  $V = \text{cost}$ . Indichiamo con  $u, v, w$  le componenti della densità di corrente  $i$  lungo le direzioni degli assi coordinati. Si ha allora, in un mezzo isotropo

$$u = -c \frac{\partial V}{\partial x} \quad v = -c \frac{\partial V}{\partial y} \quad w = -c \frac{\partial V}{\partial z} \quad (8.0.137)$$

In un mezzo anisotropo,  $u, v, w$  sono funzioni lineari delle tre derivate parziali di  $V$ .

Il modulo  $V$  può essere considerato, in generale, come il potenziale di due masse elettriche di uguale modulo, ma di segno opposto, che coprono le superfici degli elettrodi, e di certe masse fittizie distribuite su tutta la superficie del mezzo; queste ultime devono essere determinate in modo da soddisfare la condizione (37,a). Consideriamo il caso più semplice, quello di un mezzo che si estende indefinitamente in tutte le direzioni, all'interno del quale sono presenti due elettrodi sferici  $S_1$  e  $S_2$  di raggio  $\rho$  molto piccolo rispetto alla distanza  $d$  tra gli elettrodi. Il potenziale  $V$ , in un punto qualunque M, è in questo caso

$$V = C \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (8.0.138)$$

dove  $C$  è una costante,  $r_1$  e  $r_2$  le distanze del punto M dai centri delle sfere  $S_1$  e  $S_2$ . Si ha

$$I = -4\pi\rho^2 c \left( \frac{\partial V}{\partial r_1} \right)_{r_1=\rho}$$

Ma, siccome  $\rho$  è piccolo rispetto a  $d$ , si può, nelle vicinanze della superficie dell'elettrodo  $S_1$ , porre  $V = C : r_1$ ; si ha allora

$$I = -4\pi\rho^2 c C \left( -\frac{1}{r_1^2} \right)_{r_1=\rho} = 4\pi c C$$



e portando il valore di  $C$  dedotto da questa relazione nella (38), viene

$$V = \frac{1}{4\pi c} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (8.0.139)$$

Le linee di corrente sono identiche alle linee di forza magnetica nel caso di due poli magnetici di nomi opposti; la loro equazione è  $\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 = \text{cost}$ , vedi (23,c), dove  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  sono gli angoli formati dai raggi vettori  $r_1$  e  $r_2$  con la retta  $S_1S_2$ . I potenziali  $V_1$  e  $V_2$  delle sfere  $S_1$  e  $S_2$  sono

$$V_1 = \frac{I}{4\pi c} \cdot \frac{1}{\rho} \quad V_2 = -\frac{I}{4\pi c} \cdot \frac{1}{\rho} \quad (8.0.140)$$

trascurando  $1 : (d - \rho)$  rispetto a  $1 : \rho$ . Si può chiamare la grandezza  $R$ , definita dalla formula  $I = (V_1 - V_2) : R$ , la resistenza del mezzo di estensione infinita; la (38,b) dà

$$R = \frac{1}{2\pi c \rho} \quad (8.0.141)$$

La resistenza del mezzo considerato è inversamente proporzionale al raggio degli elettrodi e indipendente dalla loro distanza.

Quando si immerge, in una soluzione di solfato di rame, una piastra orizzontale di argento, platino o ottone, collegata al polo negativo di una batteria, e un filo verticale collegato al polo positivo, si ottiene sulla piastra, per effetto dell'elettrolisi (vedi oltre), un deposito di rame, che assume la forma di anelli rosso chiaro, separati l'uno dall'altro da anelli scuri. Soluzioni di sali di manganese o di ossido di piombo in potassa caustica danno anelli del tutto simili a quelli colorati di Newton (Volume II), quanto alla disposizione dei colori. Questi anelli furono scoperti e studiati, per la prima volta, da Nobili (1827); si chiamano anelli Nobili. Guébhard (1880) attirò nuovamente l'attenzione su questo fenomeno e ottenne figure più complicate con parecchi elettrodi. La produzione degli anelli di Nobili o delle figure di Guébhard è completamente spiegata dalla teoria della propagazione della corrente in una piastra.

Lo spessore dello strato depositato nell'elettrolisi è in un punto proporzionale alla densità di corrente in questo punto e il colore dipende da questo spessore. Le figure ottenute corrispondono quindi alle curve di intersezione della superficie della piastra con le superfici di uguale densità di corrente. L'equazione di queste ultime è  $\frac{\partial V}{\partial N} = 0$ . Voigt, H. Weber, Heine, Ditscheiner, Riemann e altri hanno fornito una teoria completa della produzione degli anelli Nobili e delle figure di Guébhard. Delvalez (1909) l'ha recentemente studiata di nuovo.

## 6. Campo magnetico di una corrente elettrica

Abbiamo fatto conoscere le proprietà generali del campo magnetico che sono indipendenti dalle sue sorgenti; abbiamo considerato soprattutto il campo magnetico dovuto ai magneti, in particolare ai doppi strati o strati magnetici. Studiamo ora il campo magnetico che si forma attorno ai conduttori attraversati da una corrente elettrica. Ricorderemo anzitutto alcune delle formule che sono state precedentemente introdotte. Le componenti  $\alpha, \beta, \gamma$  del vettore che abbiamo chiamato intensità del campo magnetico soddisfano, all'esterno dei magneti o degli spazi vorticosi, le condizioni (7-30),

$$\frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{\partial \beta}{\partial x} \quad \frac{\partial \beta}{\partial z} = \frac{\partial \gamma}{\partial y} \quad \frac{\partial \gamma}{\partial x} = \frac{\partial \alpha}{\partial z} \quad (8.0.142)$$

Il lavoro delle forze magnetiche è nullo, quando un polo magnetico si muove su una qualsiasi curva chiusa che non abbraccia uno spazio vorticoso.

Quando nel campo magnetico sono presenti linee di forza chiuse, disposte interamente nello stesso mezzo omogeneo, tali linee abbracciano necessariamente almeno uno spazio vorticoso, all'interno del quale le forze magnetiche non hanno potenziale e dove le componenti  $\alpha, \beta, \gamma$

non soddisfano le equazioni (39). Lo spazio vorticoso deve essere chiuso, cioè avere la forma di un anello. Indicheremo con  $\sigma$  la seguente espressione,

$$\sigma = \iint \left\{ \left( \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z} \right) \cos(n, x) + \left( \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right) \cos(n, y) + \left( \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right) \cos(n, z) \right\} ds \quad (8.0.143)$$

l'integrazione estesa a tutti gli elementi  $ds$  di qualsiasi sezione dello spazio vorticoso; possiamo rappresentare questa sezione come facente parte di una superficie che ha per contorno una qualsiasi linea di forza, o più in generale una qualsiasi linea chiusa che racchiude lo spazio del vortice. La grandezza  $\sigma$  ha lo stesso valore per tutte le sezioni di un dato spazio vorticoso; è uguale al lavoro  $R$  delle forze magnetiche, quando la quantità unitaria del magnetismo si sposta lungo un percorso chiuso qualsiasi, racchiudendo lo spazio del vortice solo una volta. Più esattamente si ha:

$$R = \pm \sigma \quad (8.0.144)$$

dove il segno dipende dal verso dello spostamento della massa magnetica. Il potenziale  $V$  è una funzione non uniforme; questa funzione varia della quantità  $\sigma$ , quando, percorrendo una curva chiusa che abbraccia lo spazio vorticoso, si ritorna al punto di partenza. Quindi si ha

$$V = V_0 - p\sigma \quad (8.0.145)$$

Esiste in uno spazio vorticoso una direzione di percorrenza che abbiamo chiamato positivo. Questo verso e il verso positivo delle linee di forza, per le quali si ha  $R > 0$  e  $p > 0$ , sono definite, l'una rispetto all'altra, dalla regola della vite o del cavatappi. Un doppio strato o foglio magnetico ha in ogni punto una potenza  $\omega = k\delta$ , dove  $\pm k$  è la densità del magnetismo,  $\delta$  lo spessore dello strato. Il potenziale  $V$  dello strato in qualsiasi punto M è uguale a

$$V = \omega \Omega \quad (8.0.146)$$

dove  $\Omega$  è l'angolo solido, sotto il quale si vede da M il contorno dello strato. Attraversando lo strato, il potenziale fa un salto uguale a

$$V_1 - V_2 = 4\pi\omega \quad (8.0.147)$$

L'energia potenziale di un foglio magnetico posto in un campo magnetico è data dalla formula (7-28), quella di due fogli, dalla formula (7-30).

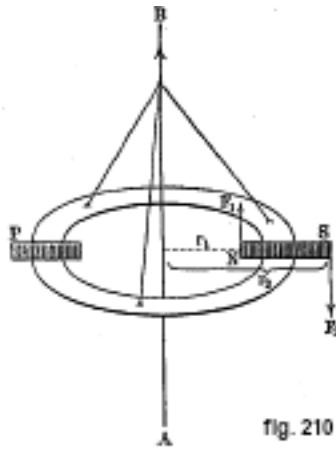
Affronteremo ora lo studio delle proprietà speciali del campo magnetico di una corrente elettrica. Naturalmente, un'idea delle proprietà fondamentali di questo campo può essere acquisita solo attraverso l'esperienza. Quando abbiamo introdotto la nozione di intensità  $I$  della corrente, come grandezza caratteristica di una data corrente e misurabile a priori, nelle stesse condizioni, dall'intensità  $H$  del campo, abbiamo considerato il caso particolare di un conduttore rettilineo di grande lunghezza. Abbiamo visto che le linee di forza sono cerchi che circondano il conduttore e che l'intensità del campo, alla distanza  $r$  da questo conduttore, è espressa dalla formula (3,a)

$$H = \frac{cI}{r} \quad (8.0.148)$$

essendo  $c$  un fattore di proporzionalità. Prendendo  $c = 2$ , cioè ponendo

$$H = \frac{2I}{r} \quad (8.0.149)$$

abbiamo introdotto l'unità elettromagnetica di intensità di corrente. Il seguente esperimento conferma la correttezza della formula (40). Al conduttore lineare verticale AB (fig. 210) è attaccato, mediante tre fili, un anello, sul quale appoggiare un magnete NS e un contrappeso P.



Se si fa passare una corrente per AB, l'anello rimane immobile, sebbene sui poli N e S agiscano le forze  $F_1 = H_1 m$  e  $F_2 = H_2 m$ , dove  $m$  indica la quantità di magnetismo in ciascun polo. Ne segue che il momento delle forze  $F_1$  e  $F_2$  rispetto all'asse AB è nullo, cioè che  $F_1 r_1 - F_2 r_2 = 0$ , dove  $r_1, r_2$  sono le distanze dei poli del magnete da AB. Si ha quindi

$$H_1 m r_1 - H_2 m r_2 = 0$$

da cui

$$H_1 : H_2 = r_2 : r_1$$

l'intensità del campo è inversamente proporzionale alla distanza  $r$ .

Partendo dalla formula (41) si ottengono, per il lavoro  $R$  delle forze magnetiche, quando la quantità unitaria di magnetismo circola intorno al correndo su una delle linee di forza,

$$R = 2\pi r H = 2\pi r \frac{2I}{r} = 4\pi I \quad (8.0.150)$$

Le forze agenti nel campo magnetico della corrente, che è indistinguibile dal campo dei magneti, hanno ovviamente un potenziale  $V$  e soddisfano, all'esterno della corrente, le equazioni (39). Determiniamo il valore di questo potenziale. Sia P un qualsiasi piano passante per la corrente rettilinea considerata e formante un angolo  $\theta$  con un piano di origine  $P_0$ . Tutti i piani come P sono delle superfici equipotenziali, perché, nello spostamento di un polo magnetico nel piano P ovunque perpendicolare alle linee di forza, il lavoro delle forze magnetiche è nullo. Indichiamo con  $V_1$  e  $V$  i rispettivi valori del potenziale nei piani  $P_0$  e P. Il lavoro, nello spostamento della quantità di magnetismo  $m = 1$  da  $P_0$  a P, lungo una delle linee di forza, è uguale a  $r\theta$ .  $H = r\theta \cdot \frac{2I}{r} = 2I\theta$ ; di conseguenza

$$V = V_1 - 2I\theta \quad (8.0.151)$$

Se si assume il piano  $xy$  perpendicolare alla corrente e l'asse  $x$  nel piano  $P_0$  si ha, indicando con  $x, y$  le coordinate di un punto qualunque nel piano P,  $\tan \theta = \frac{y}{x}$ , per cui

$$V = V_1 - 2I \arctan \frac{y}{x} \quad (8.0.152)$$

La non uniformità del potenziale è evidenziata da questa formula in modo molto netto. Quando si circola attorno alla corrente,  $V$  varia della quantità  $4\pi I$  dopo ogni giro, e il potenziale  $V$  di un punto M si può esprimere in modo generale con la formula

$$V = V_0 - 4\pi p I \quad (8.0.153)$$

dove  $p$  è un numero intero positivo o negativo, che indica il numero di giri della corrente nel verso positivo delle linee di forza, quest'ultimo essendo legato a quello della corrente dalla regola

della vite. Siccome la (42,c) non può dipendere dalla scelta della curva sulla quale ci si sposta, è chiaro che il lavoro  $R$  è uguale a

$$R = 4\pi pI \quad (8.0.154)$$

indipendentemente dalla curva percorsa dalla massa magnetica, sempre che partendo da un certo punto  $M$  per ritornarvi, si sia girato  $p$  volte intorno alla corrente. Quando si ritorna in  $M$ , senza aver girato completamente intorno alla corrente, o dopo aver fatto lo stesso numero di giri in senso positivo e negativo, si ha  $R = 0$  e si ritrova in  $M$  il valore iniziale del potenziale.

Lo spazio occupato dalla corrente stessa, cioè dal conduttore lineare rettilineo, è uno spazio vorticoso; le forze magnetiche non hanno potenziale e le condizioni (39) non sono soddisfatte. Il verso del percorso positivo dello spazio vorticoso coincide con quello della corrente  $I$ , poiché questi due versi sono legati tra loro a quello delle linee di forza dalla regola della vite. Confrontando la (42,c) con la (39,c) o, che è la stessa cosa, la (42) con la (39,b), si ha la formula molto importante.

$$4\pi I = \sigma \quad (8.0.155)$$

essendo  $\sigma$  espresso dall'integrale (39,a), esteso ora a una sezione qualunque del conduttore attraversato dalla corrente.

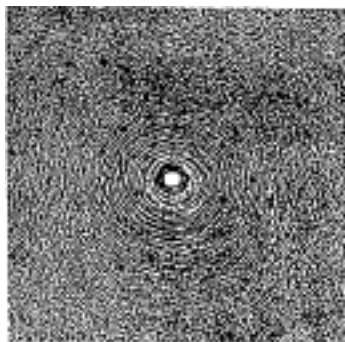


fig. 211

Per ottenere le linee di forza, nel caso considerato, si utilizza la limatura di ferro, facendo passare un filo verticale attraverso un piccolo foro praticato in un foglio di cartone orizzontale e inviando nel filo una corrente la più intensa possibile. Se poi si cosparge il cartone con la limatura, queste si dispongono come mostrato in figura 211.

Abbiamo fin qui considerato il campo magnetico di una lunga corrente rettilinea, per riconoscere le proprietà fondamentali del campo della corrente elettrica. Trattiamo ora il caso generale in cui il conduttore lineare percorso dalla corrente ha una forma qualsiasi e vediamo cosa ci dà l'osservazione diretta.

L'osservazione mostra dapprima che le linee di forza del campo magnetico di una corrente lineare sono sempre curve chiuse, interamente situate nello spazio che circonda il conduttore attraversato dalla corrente. Ciò rimane vero, per quanto si sia vicini alla superficie del conduttore. Ne consegue che:

1. *Lo spazio occupato da un conduttore lineare, in cui passa una corrente, è uno spazio vorticoso; le forze magnetiche non hanno potenziale e le equazioni (39) non sono soddisfatte;*
2. *Esistono solo correnti elettriche chiuse;*
3. *Il lavoro  $R$  relativo a qualsiasi curva chiusa, che racchiude  $p$  volte il conduttore lineare, non dipende dalla forma di questa curva, né dalla sua posizione, ed è uguale a*

$$R = p\sigma \quad (8.0.156)$$

dove  $\sigma$  è dato dalla (39,a).

4. La grandezza  $\sigma$  ha lo stesso valore per ogni sezione del conduttore determinata da qualsiasi superficie; la normale  $n$  va presa nel verso di percorrenza della corrente elettrica.

Il lavoro  $R$  non dipende dalla curva che avvolge la corrente, ma solo dalla quantità  $\sigma$ , che a sua volta dipende solo da ciò che accade all'interno del conduttore, cioè dalle proprietà particolari della corrente. È chiaro invece che, per una data curva che racchiude la corrente, cioè per una data disposizione del conduttore, il lavoro  $R$  è proporzionale all'intensità  $H$  del campo nei punti dello spazio circostante. Abbiamo chiamato la grandezza, che caratterizza la proprietà della corrente da cui dipende l'intensità del campo osservato, intensità della corrente e l'abbiamo designata con  $I$ . Il lavoro  $R$  è ovviamente proporzionale a  $I$ ; ne consegue che  $\sigma$  è proporzionale a  $I$  e che si può scrivere

$$R = \sigma = CI \quad (8.0.157)$$

riferendosi  $R$  a una curva che contiene una sola volta ( $p = 1$ ) il conduttore. Ponendo  $C = 4\pi$ , cioè

$$R = \sigma = 4\pi I \quad (8.0.158)$$

si introduce una unità determinata di intensità di corrente. La formula (4), che ci ha dato l'unità el. mag. dell'intensità di corrente e la formula (42), che ne deriva, mostra che facendo nella (45)  $C = 4\pi$ , si introduce semplicemente la stessa unità elettromagnetica di intensità di corrente in un altro modo.

Quando la quantità di magnetismo  $m$  si sposta su una curva chiusa, il lavoro  $R_m$ , espresso in unità assolute, è uguale a

$$R_m = \sigma m = 4\pi m I \quad (8.0.159)$$

Si ha quindi, per le dimensioni dell'unità di intensità di corrente,

$$[I] = [R_m] : [m]$$

ma  $[R_m]$  è un lavoro e quindi  $[R_m] = ML^2 : T^2$ ; la formula (7-4) dà

$$[I] = ML^2 T^{-2} : [\mu]^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1} = [\mu]^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1} \quad (8.0.160)$$

che è in accordo con la (4,a).

Se si porta nella (46) il valore di  $\sigma$ , viene

$$4\pi I = \iint \left\{ \left( \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z} \right) \cos(n, x) + \left( \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right) \cos(n, y) + \left( \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right) \cos(n, z) \right\} ds \quad (8.0.161)$$

dove  $ds$  è un elemento della sezione del conduttore per una superficie qualunque. Abbiamo chiamato densità  $i$  di corrente il quoziente dell'intensità di corrente per l'area della sezione trasversale del conduttore percorso dalla corrente. Considereremo  $i$  come un vettore diretto lungo la tangente al conduttore lineare e indicheremo con  $u, v, w$  le componenti lungo gli assi coordinati di questo vettore. . Si ha

$$I = \iint i \cos(n, i) ds$$

ma inoltre  $\cos(n, i) = \cos(n, x) + \cos(n, y) + \cos(n, z) \cos(i, z)$  e  $u = i \cos(i, x)$ ,  $v = i \cos(i, y)$ ,  $w = i \cos(i, z)$ ; si ha quindi

$$4\pi I = 4\pi \iint \{u \cos(n, x) + v \cos(n, y) + w \cos(n, z)\} ds \quad (8.0.162)$$

Confrontando la (46,c) e la (46,d) e notando che l'uguaglianza di questi due integrali deve valere per qualsiasi superficie che interseca il conduttore, si ottengono le famose equazioni di

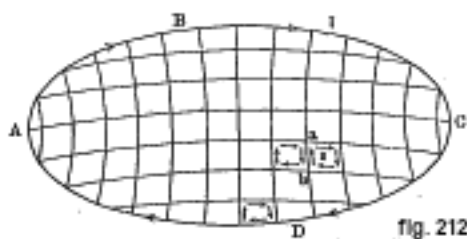
Maxwell, che mettono in relazione le proiezioni  $u, v, w$  sugli assi della densità  $i$  della corrente in un punto qualsiasi del conduttore alle componenti  $\alpha, \beta, \gamma$  dell'intensità  $H$  del campo nello stesso punto:

$$\begin{cases} 4\pi u &= \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z} \\ 4\pi v &= \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x} \\ 4\pi w &= \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \end{cases} \quad (8.0.163)$$

È importante avvicinare queste relazioni alle equazioni (39), che si riferiscono a tutti i punti esterni al conduttore percorso dalla corrente, cioè ai punti in cui le forze magnetiche hanno un potenziale. Le equazioni (47) mostrano abbastanza chiaramente che le forze magnetiche non possono avere alcun potenziale all'interno del conduttore percorso da una corrente.

Indicheremo ora una proprietà particolarmente importante del campo magnetico. *L'intensità del campo di una data corrente non dipende dalla sostanza che riempie lo spazio intorno alla corrente, purché questa sostanza sia omogenea, isotropa e occupi un'estensione indefinita.* Infatti, supponiamo prima che ci sia ovunque, nell'ambiente circostante,  $\mu = 1$ . Quando si introduce in questo ambiente un corpo, per il quale  $\mu$  non è uguale a uno, si manifesta in esso, come mostreremo rigorosamente nel capitolo sull'induzione magnetica, una distribuzione solenoidale di magnetismo, dove la densità di volume del magnetismo all'interno del corpo è nulla; il magnetismo libero appare solo sulla superficie del corpo, ed è solo quest'ultimo che modifica il campo magnetico. Quando le dimensioni del corpo aumentano in modo da riempire tutto lo spazio che circonda la corrente fino alla superficie stessa del conduttore, non c'è più alcun magnetismo libero, perché la superficie esterna del corpo si trova all'infinito e, sulla superficie di contatto con il conduttore, non può più esistere magnetismo libero, poiché da questa superficie non possono partire le linee di forza che intrecciano la corrente. La presenza di una tale sostanza non modifica quindi l'intensità  $H$  del campo in un dato punto  $M$  e l'intensità della forza che agisce su una massa di magnetismo libero in questo punto non dipende da  $\mu$ , a meno che  $\mu$  abbia lo stesso valore in tutto lo spazio.

Indicheremo anche come sostituire una data corrente chiusa con un sistema di correnti elementari equivalenti. Sia ABCDA {fig. 212) una corrente chiusa di intensità  $I$ . Tracciamo una superficie attraverso la curva ABCDA, che divideremo in un certo numero di elementi  $s$ ; la suddivisione è stata fatta nella figura 212 mediante due sistemi di curve che si intersecano. Circondiamo ciascuno di questi elementi  $s$  di una corrente di intensità  $I$ , avente la stessa direzione della corrente data ABCDA. Si vede subito che tutte queste correnti si annullano a due a due, sui contorni degli elementi  $s$  non contigui alla corrente data ABCDA; per esempio esistono, nel lato  $ab$ , due correnti  $I$  di verso contrario, la cui azione esterna totale è conseguentemente nulla. Rimangono solo le correnti che circolano lungo il contorno ABCDA. Si arriva quindi finalmente al seguente risultato: *qualsiasi corrente chiusa può essere sostituita da un numero qualsiasi, anche infinitamente grande, di correnti chiuse, aventi la stessa intensità e la stessa direzione della corrente data; queste correnti elementari possono essere disposte su qualsiasi superficie avente per contorno la corrente data; le aree da esse delimitate devono coprire l'intera superficie, come mostrato in figura 212.*



Le considerazioni che abbiamo svolto fino ad ora possono essere molto utilmente avvicinate a quelle che si incontrano in idrodinamica, a partire dalla creazione da parte di Helmholtz e Lord

Kelvin della teoria dei vortici; ci basterà inoltre, per il momento, considerare il moto permanente di un fluido, così come ci stiamo attualmente limitando allo studio di un campo magnetico costante.

Nel moto permanente di un fluido, la velocità in un suo punto, le cui componenti indicheremo con  $\alpha, \beta, \gamma$  per meglio sottolineare che è analoga all'intensità di un campo magnetico costante, è funzione solo di  $x, y, z$  e non dipende dal tempo  $t$ . Helmholtz e Lord Kelvin hanno introdotto, nello studio di questo movimento, la nozione di circuitazione lungo una linea fluida chiusa. La circuitazione lungo la curva  $s$  è definita dall'integrale curvilineo

$$\sigma = \int_s \alpha dx + \beta dy + \gamma dz$$

che è l'analogo del lavoro delle forze magnetiche, quando la quantità unitaria di magnetismo si sposta lungo il percorso chiuso  $s$ . La circuitazione può essere data un'altra espressione usando la formula di Stokes. Facciamo passare, per la curva  $s$ , una superficie  $S$  semplicemente connessa, di cui quella curva è il limite. Si ha

$$\int_s \alpha dx + \beta dy + \gamma dz = \iint_S \left\{ l \left( \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z} \right) + m \left( \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right) + n \left( \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right) \right\} dS$$

dove l'integrale doppio è esteso a tutti gli elementi  $dS$  della superficie  $S$  e dove  $l, m, n$  sono i coseni direttori  $\cos(n, x), \cos(n, y), \cos(n, z)$  della normale  $n$  all'elemento  $dS$ . In idrodinamica, le quantità  $\frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z}, \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x}, \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y}$  sono uguali alle proiezioni  $\xi, \eta, \zeta$  del vettore vortice moltiplicato per il fattore 2; nell'elettromagnetismo queste sono le proiezioni della densità di corrente moltiplicate per  $4\pi$ , vedi (47). L'integrale doppio del secondo membro è detto, nella teoria dei vortici, flusso vorticoso attraverso la porzione di superficie  $S$ , oppure intensità vorticoso di questa porzione di superficie. Nella teoria del campo magnetico costante, è il flusso di elettricità o anche l'intensità della corrente, fino a un fattore costante. Ci basterà impiegare in quanto segue il linguaggio della teoria dei vortici; le spiegazioni precedenti permetteranno di tradurre tutti i risultati nel linguaggio dell'elettromagnetismo.

È facile vedere che il flusso vorticoso, attraverso una superficie chiusa tracciata in un fluido in moto permanente, è nullo. Ciò segue immediatamente dal fatto che le componenti  $\xi, \eta, \zeta$  del vettore vortice soddisfano identicamente, secondo le loro espressioni mediante derivate di  $\alpha, \beta, \gamma$  l'identità

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0$$

o, essendo data una superficie chiusa  $S$  delimitante un volume  $V$ , il teorema di Green dà

$$\iint_S (l\xi + m\eta + n\zeta) dS = \iiint_V \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) dV$$

il flusso vorticoso è quindi nullo attraverso la superficie  $S$  considerata.

Una linea vorticoso è una linea che ammette come tangente in ogni suo punto il vettore vortice  $(\xi, \eta, \zeta)$ ; è quindi l'analogo di una corrente elettrica lineare. In un fluido in moto permanente, le linee vorticoso formano una famiglia di curve a due parametri, o una congruenza nel linguaggio geometrico, tale che per ogni punto del fluido ne passa una ed una sola; lo stesso vale per le linee di corrente in un campo magnetico.

Una superficie vorticoso è una superficie tale che in ciascuno dei suoi punti è tangente al vettore vortice in quel punto. Su una superficie vorticoso si può tracciare una infinità semplice di linee vorticoso: basta, infatti, tracciare su questa superficie le linee tali che in ogni loro punto il vettore vorticoso sia ad esse tangente. Viceversa, per ottenere tutte le superfici vorticoso, basta prendere le superfici generate da linee vorticoso: ad esempio si tratterà nel fluido una curva AB,

e si prenderà la continuazione delle linee vorticosi risultanti dai vari punti di AB; queste linee formano una superficie vorticosa.

Se la curva AB non è chiusa, la superficie ottenuta è semplicemente connessa. Se è chiusa, si ottiene una superficie a forma di tubo chiamata tubo vortice, che non è più semplicemente collegata. Sia  $T$  una superficie,  $\xi, \eta, \zeta$  il vortice in un punto di questa superficie,  $(l\xi, m\eta, n\zeta)$  la componente del vortice lungo la normale  $(l, m, n)$  a  $T$ ; affinché questa superficie sia una superficie vorticosa, è necessario e sufficiente che si abbia, in ogni punto di  $T$

$$l\xi + m\eta + n\zeta = 0$$

che è la condizione perché il vettore  $\xi, \eta, \zeta$  sia tangente alla superficie.

*Affinché una superficie  $T$  sia una superficie vorticosa, è necessario e sufficiente che la circuitazione lungo la linea chiusa  $s$ , tracciata sulla superficie in modo da delimitare un'area  $S$  semplicemente connessa, sia nulla.* Tracciamo infatti su  $T$  una linea chiusa  $s$  che delimita una porzione  $S$  della superficie; la circuitazione lungo  $s$  è espressa dall'integrale doppio  $2 \iint_S (l\xi + m\eta + n\zeta) dS$ . Se la superficie  $T$  è vorticosa, la circuitazione è nulla qualunque sia la curva  $s$ , perché  $l\xi + m\eta + n\zeta$  è nullo. Viceversa, se la circuitazione è nulla qualunque sia la curva  $s$ , l'integrale doppio precedente è nullo, qualunque sia la porzione  $S$  della superficie  $T$  a cui si estende; quindi l'elemento differenziale  $l\xi + m\eta + n\zeta$  è nullo e la superficie  $T$  è una superficie vorticosa.

È possibile tracciare sulla superficie del tubo linee chiuse di altra natura, ad esempio una linea che gira intorno al tubo; una tale linea non limita di per sé un'area sul tubo e la circuitazione non è nulla. Per tutte queste linee tracciate sullo stesso tubo vorticoso, la circuitazione ha lo stesso valore. Sia infatti una seconda linea che gira pure intorno al tubo. Consideriamo due partizioni  $\Sigma$  e  $\Sigma'$  aventi rispettivamente le due linee come contorno. Queste due partizioni, tra le quali giace la superficie laterale del tubo, formano una superficie chiusa analoga a un cilindro di basi  $\Sigma$  e  $\Sigma'$ . Il flusso vorticoso totale attraverso questa superficie chiusa è nullo; ma il flusso attraverso la superficie vorticosa laterale del tubo è nullo; il flusso attraverso  $\Sigma$  è quindi uguale in valore assoluto al flusso attraverso  $\Sigma'$ , oppure l'intensità vorticosa di  $\Sigma$  è uguale a quella di  $\Sigma'$ . Secondo il teorema di Stokes, la circuitazione sul contorno di  $\Sigma$  è quindi uguale a quella sul contorno  $\Sigma'$ . Questo risultato porta ad una prima conclusione: il tubo vorticoso non può terminare all'interno del fluido; nel caso molto semplice in cui vi sia un'analogia con il campo magnetico, si chiude su se stesso come un anello. Ad ogni tubo vorticoso è attaccato un numero  $\sigma$  che è la circuitazione lungo una curva chiusa qualsiasi che gira una volta attorno al tubo, oppure l'intensità del vortice di una sezione trasversale.

Consideriamo ora lo spazio occupato dal fluido; sarà generalmente diviso in due parti: una riempita con gli elementi del fluido per i quali il vortice è nullo, l'altra riempita con gli elementi per i quali il vortice è diverso da zero; questa seconda parte si divide come abbiamo appena visto, nel caso in cui vi sia un'analogia con il campo magnetico, in anelli vorticosi circondati da fluido animato da un movimento irrotazionale. È qui che entreranno in gioco le straordinarie nozioni di *Analysis situs*, introdotte prima nel piano da Riemann (1857), poi nello spazio da Helmholtz (1858) e da Lord Kelvin (1869), e che tanto hanno contribuito per chiarire la teoria del campo magnetico. Prenderemo in prestito la seguente presentazione dall'opera di P. Appell, *Traite de Mécanique rationnelle*, Tomo III, pagina 406.

Concentreremo la nostra attenzione sulla parte del fluido animata da un movimento irrotazionale; in questa parte del fluido,  $\xi, \eta, \zeta$  sono nulli e le velocità derivano da un potenziale  $V(x, y, z)$  che supponiamo indipendente da  $t$ , poiché consideriamo solo un movimento permanente. La circuitazione lungo una linea fluida chiusa si esprime con l'integrale

$$\int \alpha dx + \beta dy + \gamma dz = - \int dV$$



preso lungo la linea: questo integrale è la variazione continua subita dalla funzione  $V$  quando il punto geometrico  $x, y, z$  gira intorno alla retta.

**PROPOSIZIONE FONDAMENTALE.** - *Se una linea chiusa tracciata nella parte senza rotazione può, per deformazione continua e senza lasciare questa parte, essere ridotta a un punto, la circuitazione lungo questa linea è NULLA e conseguentemente la variazione di  $V$  lungo questa linea è nulla.*

Immaginiamo infatti nel fluido senza rotazione una linea  $s$  che possa, per deformazione continua, ridursi a un punto: in questa deformazione, essa genera una porzione di superficie  $S$  che delimita interamente, e, secondo il teorema di Stokes, la circuitazione lungo  $s$  è espressa dall'integrale  $2 \iint_S (l\xi + m\eta + n\zeta) dS$ ; ma essendo la superficie  $S$  interamente nella parte priva di rotazione, il vortice  $(\xi, \eta, \zeta)$  è nullo su  $S$ , quindi  $l\xi + m\eta + n\zeta$  è nulla e la circuitazione è nulla. Ne consegue che la variazione della funzione  $V$ , seguita per continuità lungo la linea  $s$ , è nulla.

Studiamo ora la circuitazione lungo le varie curve che si possono tracciare nella parte senza rotazione. Si distinguono diversi casi, a seconda dell'ordine di connessione dello spazio occupato da questa parte:

1° La parte senza rotazione occupa uno spazio semplicemente connesso. - Uno spazio si dice semplicemente connesso, quando ogni linea chiusa tracciata in questo spazio può, per continuità e senza uscire dai limiti del detto spazio, essere ridotta a un punto; lo spazio esterno a una sfera è semplicemente connesso; lo spazio esterno ad un toroide non lo è, perché una curva chiusa tracciata all'esterno del toroide, in modo da compiere un giro attorno ad esso racchiudendolo, ovviamente non può essere ridotta per continuità a un punto senza penetrare nello spazio interno del toroide.

Segue immediatamente dalla proposizione fondamentale precedente che, se lo spazio occupato dal fluido non rotante è semplicemente connesso, la circuitazione lungo una qualsiasi linea di questo fluido è nulla e il potenziale  $V$  è uniforme in questo fluido.

2°. La parte senza rotazione occupa uno spazio doppiamente connesso. - Uno spazio è doppiamente connesso quando conducendo una sola partizione, si può, senza dividere lo spazio, renderlo semplicemente connesso. Questo è il caso dello spazio esterno ad un anello; si possono, in questo spazio, tracciare due tipi di curve chiuse; le une  $s$  non attraversano l'anello e possono quindi essere ridotte per continuità a un punto senza uscire dallo spazio considerato; lungo queste linee la circuitazione è nulla; le altre passano una o più volte attraverso l'anello. Prendiamo una linea  $s_1$ , che compie un giro; mostreremo che la circuitazione ha lo stesso valore costante  $\sigma_1$  lungo tutte queste linee. Per ciò, consideriamo due linee  $s_1$  e  $s'_1$  ciascuna che racchiude una volta l'anello. Si può rendere lo spazio esterno all'anello semplicemente connesso chiudendo l'apertura dell'anello con un tramezzo. Prendiamo su  $s_1$  due punti  $C$  e  $D$  infinitamente vicini tra loro, situati da una parte e dall'altra del tramezzo; prendiamo su  $s'_1$  due punti infinitamente vicini  $C'$  e  $D'$  posti allo stesso modo, e uniamo  $CC'$  e  $DD'$  con due linee infinitamente vicine, poste da una parte e dall'altra della suddivisione. La linea  $Cs_1DD's'_1C'C$  è una linea chiusa della prima categoria che può, per continuità, essere ridotta a un punto senza penetrare nello spazio interno dell'anello. La circuitazione lungo questa linea è quindi nulla. Se designiamo la circuitazione lungo una linea con il percorso effettuato su questa linea tra parentesi, si ha

$$(Cs_1D) + (DD') + (D's'_1C') + (C'C) = 0$$

Ma le due linee  $CC'$  e  $DD'$  sono infinitamente vicine, e allora si ha

$$(DD') = (CC') = - (C'C)$$

si conclude che

$$\begin{aligned} (Cs_1D) + (D's'_1C') &= 0 \\ (Cs_1D) &= (C's'_1D') \end{aligned}$$

che è quanto si voleva stabilire. Quindi, lungo tutte le linee  $s_1$  che passano una volta per l'anello, la circuitazione ha lo stesso valore  $\sigma_1$ ; questa costante è chiamata il modulo di queste linee. È facile vedere che se una linea chiusa tracciata nello spazio attraversa due volte l'anello, la circuitazione lungo questa linea è  $2\sigma_1$ , ecc. Lo spazio esterno all'anello è stato reso semplicemente connesso chiudendo l'apertura dell'anello con una divisoria: la funzione  $V$  è quindi uniforme in questo spazio, ma i suoi valori, in due punti C e D che sono infinitamente vicini su entrambi i lati e altri di questa divisoria, diversa da  $\sigma_1$ . Questo caso si verifica quando esiste un solo anello vorticoso in un fluido indefinito senza rotazione; il fluido senza rotazione occupa allora proprio uno spazio come quello che abbiamo appena considerato. Il modulo  $\sigma_1$  è l'intensità dell'anello vorticoso, come si vede considerando una linea  $s_1$  passante nell'anello, infinitamente vicina alla superficie dell'anello. L'avvicinamento tra questo anello vorticoso e lo spazio vorticoso precedentemente considerato nel campo magnetico è immediato.

3° *Spazio tre volte connesso.* - Uno spazio è triplicemente connesso quando può essere reso semplicemente connesso da due suddivisioni: tale è, ad esempio, lo spazio esterno all'insieme di due anelli. In questo spazio si possono tracciare tre tipi di linee chiuse. Le prime  $s$  possono essere ridotte per continuità a un punto senza uscire dallo spazio considerato; la circuitazione lungo queste linee è nulla. Le seconde  $s_1$  passano nell'apertura di uno degli anelli: se vi passano una volta, la circuitazione lungo queste linee è una costante  $\sigma_1$ , detta modulo di queste linee. Le terze  $s_2$  passano nell'apertura dell'altro anello; se vi passano una volta, la circuitazione lungo di esse è una costante  $\sigma_2$ , detta modulo di queste linee. Una linea  $s's''$  che attraversa ogni anello una volta dà per la circuitazione il valore  $\sigma_1 + \sigma_2$ ; infatti, unendo due punti A, B di questa linea mediante una curva passante all'esterno dei due anelli, si vede che la circuitazione lungo la linea  $s's''$  è la somma delle circuitazioni lungo le linee BAs'B e ABs''A, perché

$$(BA) + (AB) = 0$$

questa circuitazione è quindi certamente  $\sigma_1 + \sigma_2$ .

Attualmente, si renderà lo spazio indefinito semplicemente connesso utilizzando due suddivisioni, una che chiude il primo anello, l'altra il secondo anello. La funzione  $V$  sarà uniforme in questo spazio così partizionato: la differenza dei suoi valori in due punti infinitamente vicini ai lati della prima suddivisione sarà  $\sigma_1$ ; in due punti infinitamente vicini su entrambi i lati della seconda,  $\sigma_2$ . Questo caso si verifica quando esistono due anelli vorticosi in un fluido indefinito senza rotazione, o quando ci sono due spazi vorticosi in un campo magnetico.

4° *Collegamento d'ordine n.* - Si tratterà di spazi la cui connessione è di ordine  $n$  e il cui tipo è uno spazio indefinito con  $n - 1$  anelli: mediante  $n - 1$  suddivisioni, si renderanno questi spazi semplicemente connessi.

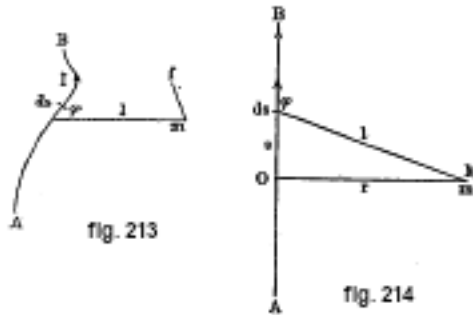
## 7. Legge di Biot e Savart. Sostituzione di una corrente con un foglio magnetico. Solenoide.

Biot e Savart, studiando il campo magnetico di una corrente, sono giunti alla conclusione che la forza con cui una corrente chiusa agisce su un polo magnetico può essere considerata come la risultante di un numero infinito di forze derivanti dagli elementi infinitamente piccoli in cui si può immaginare che la corrente sia scomposta. Sia AB (fig. 213) una parte della corrente,  $ds$  la lunghezza di uno degli elementi in cui si suppone che essa sia scomposta,  $r$  la distanza di questo elemento dal polo magnetico  $m$ ,  $\varphi$  l'angolo formato da  $ds$  e  $r$ . Secondo la legge di Biot e Savart, l'elemento di corrente  $ds$  agisce su  $m$  con una forza  $f$  determinata in modulo dalla formula

$$f = C \frac{Imds}{r^2} \sin \varphi \quad (8.0.164)$$

dove  $C$  è un fattore di proporzionalità. Questa forza è normale al piano passante per  $ds$  e  $r$  e ha un verso determinato dalla regola della vite. Quando la corrente  $I$  va da A a B, la forza

$f$ , normale al piano della figura, va dal lettore a questo piano. Se si dà una corrente chiusa di qualsiasi forma, la determinazione dell'intensità del campo in qualsiasi punto è quindi ricondotta dalla formula (48) a una semplice questione di integrazione.



Applichiamo dapprima la formula (48) per calcolare l'intensità del campo magnetico di una corrente rettilinea di estensione indefinita AB (fig. 214), in un punto M situato a distanza  $r$  da AB. In questo caso, la risultante  $F$  di tutte le forze  $f$  è uguale alla somma di queste ultime, che hanno la stessa direzione normale al piano della figura. Contando  $s$  positivamente dal punto O nel verso OB, si ha,

$$F = \int_{-\infty}^{+\infty} C \frac{Im}{l^2} \sin \varphi ds = Clm \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \varphi ds}{l^2}$$

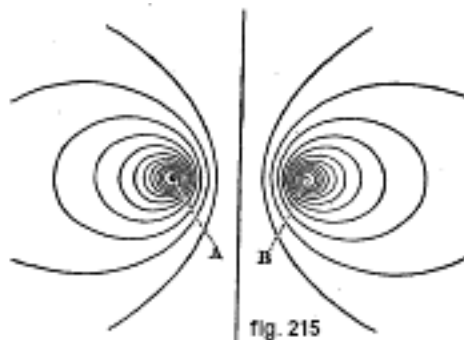
Introduciamo la variabile indipendente  $\varphi$ . Si ha  $l = r : \sin \varphi = -r \cot \varphi$ ,  $ds = \frac{r}{\sin^2 \varphi}$  e i limiti dell'angolo  $\varphi$  sono 0 e  $\pi$ . Si ha pertanto

$$F = \int_0^\pi \frac{\sin \varphi \sin^2 \varphi}{r^2} \cdot \frac{rd\varphi}{\sin^2 \varphi} = \frac{Clm}{r} \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi = \frac{2CI m}{r}$$

Se si pone  $m = 1$ , si trova per l'intensità del campo in M

$$H = \frac{2CI}{r} \quad (8.0.165)$$

Confrontando questa espressione alla (41), si vede in primo luogo che la legge di Biot e Savart porta alla relazione effettivamente esistente tra  $H$  e  $r$ , e in secondo luogo che se si pone  $C = 1$  nella formula, si introduce con la stessa l'unità elettromagnetica di intensità di corrente. È facile vedere che la (48,a) fornisce, per l'unità di intensità di corrente, la stessa equazione dimensionale già stabilita due volte, basandoci prima sulla formula (4), e poi sulla (46,a), si veda la (4,a) e (46,b).



Consideriamo ora il caso anch'esso molto importante di una corrente circolare, cioè una corrente che segue una circonferenza, di raggio  $R$ . Una delle linee di forza è allora l'asse del cerchio, cioè la retta, normale al piano del cerchio, che passa per il suo centro. In figura 215 è stata rappresentata una sezione del campo di corrente passante per tale asse; la corrente, il cui piano è perpendicolare al piano della figura, interseca questa sezione nei punti A e B. Cerchiamo l'intensità  $H$  del campo nel punto P (fig.216), situato sull'asse della corrente circolare alla distanza  $l$  dalla corrente stessa (e non dal suo centro C). All'elemento di corrente  $ds$  è dovuta una forza perpendicolare al piano ( $l, ds$ ); il modulo di questa forza, espresso in unità elettromagnetiche, si deduce dalla (48) ponendo  $C = 1$  e  $\sin \varphi = \sin(l, ds) = 1$ ; si ha così  $f = \frac{Imds}{l^2}$ .

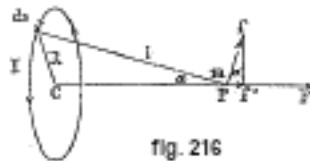


fig. 216

Tutte le forze  $f$  hanno come linee d'azione le generatrici di un cono di rivoluzione, il cui asse coincide con quello della corrente data. È evidente che la risultante  $R$  è uguale alla somma delle proiezioni  $f'$  delle forze  $f$  su questo asse. Si vede sulla figura che  $f' = f \sin \alpha$  e  $\sin \alpha = R : l$ . Si ha quindi  $f' = \frac{Ids \cdot m \cdot R}{l^2}$  e

$$F = \int \frac{ImR}{l^2} ds = \frac{ImR}{l^2} \int ds = \frac{ImR}{l^2} 2\pi R = \frac{2\pi R^2 Im}{l^2}$$

Ponendo  $m = 1$ , si ottiene, per l'intensità  $H$  del campo nel punto P

$$H = \frac{2\pi R^2 I}{l^2} \quad (8.0.166)$$

Nel centro del cerchio, si ha  $l = R$  e quindi

$$\begin{cases} F_0 = \frac{2\pi Im}{R} \\ H_0 = \frac{2\pi I}{R} \end{cases} \quad (8.0.167)$$

Indichiamo con  $F_s$  e  $H_s$  la forza e l'intensità del campo nel centro C, dovuti alla corrente  $I$  nell'arco di cerchio  $s$ . Si ha,  $F_s : F_0 = s : 2\pi R$ , da cui

$$F_s = \frac{Is m}{R^2} \quad (8.0.168)$$

$$H_s = \frac{R^2}{Is} \quad (8.0.169)$$

Queste ultime formule danno una nuova definizione dell'unità elettromagnetica di intensità di corrente; questa unità è l'intensità di una corrente che, in un arco di cerchio di lunghezza unitaria e raggio unitario ( $R = 1$ ), dà origine nel centro del cerchio all'unità elettromagnetica di intensità del campo ( $H_s = 1$ ), cioè agisce sull'unità elettromagnetica di quantità di magnetismo ( $m = 1$ ), posta in questo centro, con l'unità di forza ( $F_s = 1$ ).

L'unità elettromagnetica C.G.S. di intensità di corrente (10 *ampere*) è l'intensità di una corrente che, in un arco di circonferenza lungo 1 *cm* e di raggio 1 *cm*, produce nel centro del cerchio l'unità elettromagnetica C.G.S. di intensità di campo, in altre parole agisce sull'unità C.G.S. di quantità di magnetismo posta al centro del cerchio con una forza pari a una dine.

Possiamo ora affrontare una delle questioni più importanti della teoria della corrente elettrica, quella dell'equivalenza, entro certi limiti, delle azioni esterne di una corrente e di un foglio magnetico, o della possibile sostituzione di una corrente con un foglio magnetico, disposto su una superficie arbitraria  $S$  avente come contorno la linea del percorso della corrente. Abbiamo visto che le linee di forza hanno in entrambi i casi una disposizione analoga; abbracciano il conduttore di corrente o il contorno del foglio. Il lavoro  $R$ , nello spostamento della quantità unitaria di magnetismo su una linea di forza chiusa che racchiude la corrente  $I$ , cioè il periodo del potenziale  $V_1 - V_2$ , è uguale, vedi (46), a

$$R = V_1 - V_2 = 4\pi I \quad (8.0.170)$$

Per un foglio magnetico, quando si sposta, avvolgendo il contorno, da una faccia della superficie  $S$  all'altra faccia, si veda la (7-40), o la (7-28), si ha

$$R = V_1 - V_2 = 4\pi \frac{\omega}{\mu} \quad (8.0.171)$$

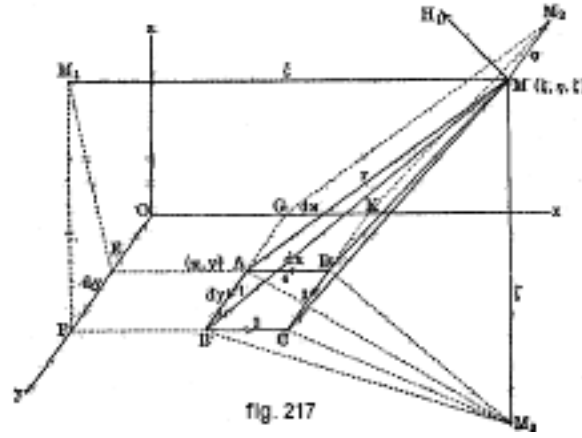
dove  $\omega = k\delta$  è la potenza del foglio,  $\mu$ . la permeabilità magnetica del mezzo circostante. L'analogia tra le formule (50) e (50,a) è evidente. Poiché la questione dell'equivalenza di una corrente e di un foglio magnetico presenta un notevole interesse, indicheremo innanzitutto le considerazioni con cui Drude, nella sua opera *Physik des Äthers*, ha stabilito questa equivalenza.

Sia  $s$  un conduttore lineare chiuso, nel quale passa una corrente  $I$ , e sia  $S'$  una qualsiasi superficie che racchiuda completamente la linea  $s$  nel suo spazio interno. Il campo magnetico, all'esterno della superficie  $S'$ , è assolutamente indistinguibile dal campo magnetico dei magneti; le forze magnetiche hanno ovunque un potenziale, che è uniforme poiché  $R = 0$  per tutte le curve chiuse che non intersecano la superficie  $S'$ . In base a quanto stabilito nel Libro I circa l'equipollenza delle masse elettriche, possiamo ora enunciare la seguente proposizione: se esiste all'esterno di una superficie chiusa  $S'$  un campo magnetico, in tutti i punti del quale le forze magnetiche hanno un potenziale, è sempre possibile trovare una distribuzione di massa magnetica sulla superficie  $S'$ , tale che il campo magnetico dovuto a questa distribuzione, all'esterno della superficie  $S'$ , sia proprio il campo magnetico dato. Il campo di corrente può quindi essere considerato al di fuori di  $S'$  come un campo dovuto a una distribuzione di massa magnetica su  $S'$ . Consideriamo una qualsiasi superficie  $S$  all'interno di  $S'$ , delimitata dalla linea di percorso della corrente. La superficie  $S'$  è assolutamente arbitraria; si richiede soltanto che contenga interamente la linea di corrente nel suo spazio interno. Si può quindi immaginare che si contragga in modo tale da divenire infinitamente vicina, all'esterno, al conduttore di corrente, nello stesso tempo in cui si avvicina a una distanza infinitamente piccola dalle due facce della superficie delimitata. Trascurando le dimensioni trasversali del conduttore, si ottengono così due distribuzioni di massa magnetica su entrambi i lati di  $S$ , che si possono peraltro supporre ovunque alla stessa distanza  $\delta$ .

Il numero di linee di forza che penetrano all'interno di queste due distribuzioni da un lato è uguale a quello delle linee che escono dall'altro; ne consegue che le rispettive densità  $k$  di queste due distribuzioni devono avere la stessa grandezza e differiscono solo per il segno; due tali distribuzioni formano un foglio magnetico, poiché il salto di potenziale  $4\pi \frac{\omega}{\mu}$ , o  $\omega = k\delta$ , ha dappertutto lo stesso valore  $4\pi I$ . La corrente  $I$  può quindi essere sostituita da un foglio magnetico, il cui contorno è la linea del percorso della corrente e la cui potenza  $\omega$  è determinata dall'uguaglianza

$$\frac{\omega}{\mu} = I \quad (8.0.172)$$

Arriveremo allo stesso risultato, partendo dalla legge di Biot e Savart. Consideriamo l'azione di una corrente rettangolare infinitamente piccola su un qualsiasi punto esterno. Supponiamo che la corrente  $I$  segua, nel verso ABCDA (fig. 217), il contorno di un rettangolo posto nel piano  $xOy$ .



Siano  $x, y$  le coordinate del punto A,  $AD = dx$ ,  $AB = dy$ ; assegniamo gli indici 1, 2, 3, 4 ai lati  $AB, BC, CD, DA$ . Proponiamoci di determinare l'intensità  $H$  del campo di corrente nel punto M, le cui coordinate sono  $MM_1 = \xi$ ,  $MM_2 = \eta$ ,  $MM_3 = \zeta$ . Prolungando i lati del rettangolo ABCD, abbiamo sugli assi  $Ox$  e  $Oy$ , i segmenti  $GK = dx$  e  $EF = dy$ . Uniamo i punti M e  $M_3$  ai punti A, B, C, D, il punto  $M_1$  a F ed E, infine il punto  $M_2$  a G e K.

L'intensità  $H$  è la risultante delle quattro intensità  $H_1, H_2, H_3, H_4$  dovute ai quattro elementi della corrente rettangolare  $I$ ; indicheremo con  $H_x, H_y, H_z$  le componenti parallele agli assi di coordinate del vettore  $H$ , con  $H_{1,x}, H_{1,y}, H_{1,z}$  quelle del vettore  $H_1$ , ecc. Si ha

$$H = \sqrt{H_x^2 + H_y^2 + H_z^2} \quad (8.0.173)$$

$$\begin{cases} H_x = H_{1,x} + H_{2,x} + H_{3,x} + H_{4,x} \\ H_y = H_{1,y} + H_{2,y} + H_{3,y} + H_{4,y} \\ H_z = H_{1,z} + H_{2,z} + H_{3,z} + H_{4,z} \end{cases} \quad (8.0.174)$$

$$H_{1,x} = H_1 \cos(H_1, x) \quad H_{1,y} = H_1 \cos(H_1, y) \quad H_{1,z} = H_1 \cos(H_1, z) \quad (8.0.175)$$

con formule analoghe per le componenti dei vettori  $H_2, H_3, H_4$ .

Indichiamo con  $r$  la distanza AM; si ha

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + \zeta^2} \quad (8.0.176)$$

$$\begin{cases} -\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial \xi} = \frac{\xi - x}{r} \\ -\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial \eta} = \frac{\eta - y}{r} \\ \frac{\partial r}{\partial \zeta} = \frac{\zeta}{r} \end{cases} \quad (8.0.177)$$

Dobbiamo determinare mediante la legge di Biot e Savart, i vettori  $H_1, H_2, H_3, H_4$  e le loro componenti. Sulla figura si è rappresentato solo il vettore  $H_1$ .

L'elemento di corrente AB dà in M un'intensità  $H_1$  che ha per modulo

$$H_1 = \frac{Idy}{r^2} \sin MAB = \frac{1}{r^3} r dy \sin MAB = \frac{2I}{r^3} \sin MAB \quad (8.0.178)$$

che è perpendicolare al piano MAB e, conformemente alla regola di Ampère, al verso indicato in figura.

Si ha

$$H_{1,x} = H_1 \cos(H_1, x) = \frac{2I}{r^3} \text{area } MAB \cos(H_1, x)$$

ma l'angolo che forma  $H_1$  con l'asse  $x$  è supplementare dell'angolo tra i piani MAB e  $zOy$ ; pertanto

$$H_{1,x} = -\frac{2I}{r^3} \text{area } MAB \cos(MAB, zOy) = -\frac{2I}{r^3} \text{area } M_1EF = -\frac{Idy}{r^3} \zeta \quad (8.0.179)$$

D'altra parte

$$H_{1,y} = H_1 \cos(H_1, y) = 0 \quad (8.0.180)$$

poiché il vettore  $H_1$ , essendo perpendicolare al piano MAB, è perpendicolare alla direzione di  $y$ .

Infine,

$$\begin{aligned} H_{1,z} &= H_1 \cos(H_1, z) = \frac{2I}{r^3} \text{area } MAB \cos(H_1, z) = \\ &= \frac{2I}{r^3} \text{area } MAB \cos(H_1, xOy) = \frac{2I}{r^3} \text{area } M_3AB = \frac{Idy}{r^3} (\xi - x) \end{aligned} \quad (8.0.181)$$

Analogamente, si ha

$$H_4 = \frac{Idx}{r^2} \sin MAB = \frac{1}{r^3} r dx \sin MAD = \frac{2I}{r^3} \text{area } MAD$$

Il vettore  $H_4$  è normale a MAD e si allontana dal lettore, cioè nel verso di  $y$  negativo. Si ha

$$H_{4,x} = H_4 \cos(H_4, x) = 0 \quad (8.0.182)$$

$$\begin{aligned} H_{4,y} &= H_4 \cos(H_4, y) = -\frac{2I}{r^3} \text{area } MAD \cos(MAD, xOz) = \\ &= -\frac{2I}{r^3} \text{area } M_2KG = -\frac{Idx}{r^3} z \end{aligned} \quad (8.0.183)$$

$$\begin{aligned} H_{4,z} &= H_4 \cos(H_4, z) = \frac{2I}{r^3} \text{area } MAD \cos(MAD, xOy) = \\ &= -\frac{2I}{r^3} \text{area } M_3AD = -\frac{Idx}{r^3} (\eta - y) \end{aligned} \quad (8.0.184)$$

La corrente CD differisce dalla corrente AB per il verso e per la coordinata  $x + dx$  che sostituisce  $x$ . Si ha pertanto, vedere la (52,d),

$$\begin{aligned} H_{3,x} &= -\left(H_{1,x} + \frac{\partial H_{1,x}}{\partial x} dx\right) = \frac{Idy}{r^3} \zeta - \frac{3Idy}{r^4} \frac{\partial r}{\partial x} \zeta dx = \\ &= \frac{Idy}{r^3} \zeta + \frac{3Idydx}{r^5} (\xi - x) \zeta \end{aligned} \quad (8.0.185)$$

$$H_{3,y} = 0 \quad (8.0.186)$$

$$\begin{aligned} H_{1,z} &= -\left(H_{1,z} + \frac{\partial H_{1,z}}{\partial x} dx\right) = -\frac{Idy}{r^3} (\xi - x) + \frac{Idy}{r^3} \frac{\partial r}{\partial x} dx = \\ &= -\frac{3Idydx}{r^5} (\xi - x)^2 \end{aligned} \quad (8.0.187)$$

Analogamente

$$H_{2,x} = 0 \quad (8.0.188)$$

$$H_{2,y} = -\left(H_{4,y} + \frac{\partial H_{4,y}}{\partial y} dy\right) = \frac{Idx}{r^3} \zeta + \frac{Idx dy}{r^5} (\eta - y) \zeta \quad (8.0.189)$$

$$H_{4,z} = -\left(H_{4,z} + \frac{\partial H_{4,z}}{\partial y} dy\right) = -\frac{Idx}{r^3} (\eta - y) + \frac{Idx}{r^3} dy - \frac{3Idx dy}{r^5} (\eta - y)^2 \quad (8.0.190)$$

Le formule (52,a) danno ora

$$H_x = \frac{3Idx dy}{r^5} (\xi - x) \zeta \quad (8.0.191)$$

$$\begin{aligned} H_y &= \frac{3Idx dy}{r^5} (\eta - y) \zeta \\ H_z &= \frac{2Idx dy}{r^3} - \frac{3Idx dy}{r^3} [(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2] = \frac{2Idx dy}{r^3} - \frac{3Idx dy}{r^3} (r^2 - \zeta^2) \end{aligned} \quad (8.0.192)$$

cioè

$$H_z = -\frac{Idx dy}{r^3} + \frac{3Idx dy}{r^3} \zeta^2 \quad (8.0.193)$$

Le ultime tre formule danno le componenti  $H$  nel punto M.

Indichiamo con  $\Omega'$  l'angolo solido infinitamente piccolo, sotto il quale si vede dal punto M il rettangolo ABCD. Sia  $\sigma$  l'area della sezione di questo angolo solido per una sfera di raggio  $r$ , descritta dal punto M come centro. Si ha  $\sigma = r^2\Omega'$  e d'altra parte

$$\sigma = \text{area } ABCD \cdot \cos(\sigma, ABCD) = dxdy \cos(r, \zeta) = dxdy \frac{\zeta}{r}$$

da cui

$$\Omega' = \frac{dxdy}{r^3} \zeta \quad (8.0.194)$$

Ciò dà, si veda la (52,d)

$$\frac{\partial \Omega'}{\partial \xi} = -\frac{3dxdy}{r^4} \frac{\partial r}{\partial \xi} \zeta = -\frac{3dxdy}{r^5} (\xi - x) \zeta \quad (8.0.195)$$

$$\frac{\partial \Omega'}{\partial \eta} = -\frac{3dxdy}{r^5} (\eta - y) \zeta \quad (8.0.196)$$

$$\frac{\partial \Omega'}{\partial \zeta} = \frac{dxdy}{r^3} - \frac{3dxdy}{r^5} \zeta^2 \quad (8.0.197)$$

Se si confrontano queste tre espressioni con la (54), (54,a) e (54,b), si trova

$$\begin{cases} H_x &= -\frac{\partial(I\Omega')}{\partial \xi} \\ H_y &= -\frac{\partial(I\Omega')}{\partial \eta} \\ H_z &= -\frac{\partial(I\Omega')}{\partial \zeta} \end{cases} \quad (8.0.198)$$

Le componenti  $H_x, H_y, H_z$  si riferiscono al punto M di coordinate  $\xi, \eta, \zeta$ . Queste formule mostrano che il potenziale  $V'$  della corrente  $I$ , che percorre il rettangolo ABCD, è, nel punto M

$$V' = I\Omega' + \text{cost} \quad (8.0.199)$$

in altre parole, è uguale a una costante più il prodotto dell'intensità della corrente per l'angolo solido, sotto il quale si vede dal punto M la linea chiusa percorsa dalla corrente. Da quanto visto in precedenza, si può anche scrivere

$$V' = I\Omega' - 4\pi pI \quad (8.0.200)$$

dove  $p$  indica quante volte la linea di percorso della corrente è stata intrecciata, partendo da M per ritornare a questo stesso punto.

Sostituiamo la corrente ABCD con un foglio magnetico il cui contorno è il rettangolo ABCD e una potenza  $\omega = k\delta \pm k$  è la densità superficiale sulle facce del foglio,  $+k$  (magnetismo nord) è sul lato delle  $z$  positive e  $\delta$  è la distanza tra le due facce del foglio. Si può considerare un tale foglio come un magnete corto, il cui asse è parallelo all'asse  $z$  e il cui momento è

$$M = k\delta dxdy = \omega dxdy \quad (8.0.201)$$

Nel Capitolo VII, il potenziale di questo magnete ha per espressione

$$V = \frac{k\delta}{\mu} \Omega' = \frac{\omega}{\mu} \Omega' \quad (8.0.202)$$

dove  $\Omega'$  ha lo stesso significato che nella (57); si ha inoltre la formula

$$H = \frac{M}{\mu r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \varphi}$$



dove  $\varphi$  indica l'angolo formato da  $r$  e dall'asse del magnete. Introducendo il valore del momento magnetico  $M$  dato dalla (59), si ha

$$H = \frac{\omega dx dy}{\mu r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \varphi} \quad (8.0.203)$$

Quando si confronta la (57) con la (59,a), si vede che la corrente infinitamente piccola considerata può essere sostituita da un foglio magnetico tale da avere  $I = \omega : \mu$ . Questa condizione non è altro che l'uguaglianza (51), di cui ora ci rimane da dimostrare la validità per qualsiasi corrente.

Prima, cercheremo ancora la grandezza  $H$  dell'intensità del campo della corrente rettangolare appena considerata. Abbiamo, vedi (52),

$$H^2 = H_x^2 + H_y^2 + H_z^2$$

Osservando che

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 = r^2 - \zeta^2$$

si trova, dalla (54) e (54,a), che

$$H_x^2 + H_y^2 = \frac{g I^2 dx^2 dy^2}{r^{10}} \zeta^2 (r^2 - \zeta^2)$$

Se si aggiunge  $H_z^2$ , si veda la (54,b), si ottiene

$$\begin{aligned} H^2 &= \frac{g I^2 dx^2 dy^2}{r^6} \zeta^2 - \frac{g I^2 dx^2 dy^2}{r^{10}} \zeta^4 + \frac{I^2 dx^2 dy^2}{r^6} - \frac{6 I^2 dx^2 dy^2}{r^8} \zeta^2 + \frac{g I^2 dx^2 dy^2}{r^{10}} \zeta^2 = \\ &= \frac{I^2 dx^2 dy^2}{r^6} + \frac{3 I^2 dx^2 dy^2}{r^8} \zeta^2 = \frac{I^2 dx^2 dy^2}{r^8} (1 + 3 \frac{\zeta^2}{r^2}) \end{aligned}$$

Indichiamo con  $\varphi$  l'angolo compreso tra  $r$  e l'asse  $z$ ; si ha  $\cos \varphi = \zeta : r$ , e quindi

$$H = \frac{I dx dy}{r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \varphi} \quad (8.0.204)$$

L'angolo  $\varphi$  è lo stesso nella (59,b) e (59,c), poiché l'asse magnetico del foglio, che sostituisce la corrente ABCDA, ha la direzione dell'asse  $z$ . Confrontando la (59,b) con la (59,c), si vede ancora che c'è un'equivalenza tra corrente e foglio, quando  $I = \omega : \mu$ .

Passiamo al caso generale in cui la corrente  $I$  percorre un conduttore lineare chiuso arbitrario. Basandosi sulla proposizione stabilita alla fine del § 6, si può sostituire la corrente considerata con un'infinità di correnti elementari  $I$  disposte su una qualsiasi superficie  $S$  avente per contorno la linea di percorso della corrente data. Tracciando su  $S$  due sistemi di linee ortogonali (vedi fig. 212), si può ammettere che ognuna di queste correnti elementari percorre il perimetro di un rettangolo infinitamente piccolo. Se si sostituisce ciascuna di queste correnti elementari con un foglio magnetico, si ottiene infine un foglio, che copre l'intera area della superficie  $S$ ; la potenza  $\omega$  di questo foglio è ovunque la stessa ed è determinata dall'uguaglianza  $I = \omega : \mu$ .

*È quindi dimostrato, partendo dalla legge di Biot e Savart, che ogni corrente chiusa  $I$  può essere sostituita da un foglio magnetico, che copre l'area di una qualsiasi superficie  $S$  avente come contorno la linea di percorso della corrente.* La potenza  $\omega$  di questo foglio è determinata dall'uguaglianza

$$\frac{\omega}{\mu} = I \quad (8.0.205)$$

La faccia nord del foglio deve essere rivolta verso il lato dal quale il verso della corrente sembra antiorario.

Il potenziale  $V$  della corrente chiusa considerata è uguale alla somma dei potenziali delle correnti chiuse elementari ad esso equivalenti. La formula (58) dà

$$V = \sum V' = \sum I\Omega' - 4\pi I = I \sum \Omega' - 4\pi pI$$

Il segno di sommatoria non si applica alla seconda metà dell'espressione (58), perché una linea che interseca la superficie  $S$  attraversa soltanto il contorno di una sola delle correnti elementari, con le quali è stata sostituita la data corrente chiusa. Sia  $\Omega$  l'angolo solido sotto il quale si vede quest'ultimo, cioè il contorno della superficie  $S$ ; si ha  $\sum \Omega' = \Omega$  e di conseguenza

$$V = I\Omega - 4\pi pI \quad (8.0.206)$$

Il potenziale in un dato punto di qualsiasi corrente chiusa è una funzione non uniforme, di cui uno dei valori è il prodotto dell'intensità  $I$  della corrente per l'angolo solido sotto il quale si vede dal punto la linea di percorso della corrente; il periodo della funzione è uguale a  $4\pi I$ .

Nella dimostrazione precedente, abbiamo preso come punto di partenza la legge di Biot e Savart. Viceversa, si può dedurre l'espressione di questa legge dalle proprietà di un potenziale a doppio strato. Basta applicare la formula di Stokes all'integrale doppio per il quale si può esprimere l'angolo solido  $\Omega$  sotto il quale si vede da un punto qualunque  $(\xi, \eta, \zeta)$  dello spazio una superficie qualsiasi  $S$  delimitata da una curva chiusa  $s$ . Un elemento  $dS$  di questa superficie è visto sotto un angolo uguale a

$$\frac{\cos(r, n)}{r^2} dS$$

chiamando  $r$  la distanza dal punto  $(\xi, \eta, \zeta)$  a un punto  $(x, y, z)$  dell'elemento, e chiamando  $(r, n)$  l'angolo formato dalla retta congiungente il secondo punto al primo con la direzione della normale in  $(x, y, z)$  alla superficie; così contato, questo angolo solido è positivo o negativo a seconda che l'angolo  $(r, n)$  è acuto o ottuso. Ora, designando con  $\cos(n, x)$ ,  $\cos(n, y)$ ,  $\cos(n, z)$  i coseni degli angoli della normale con gli assi, si ha

$$\cos(r, n) = \frac{\xi - x}{r} \cos(n, x) + \frac{\eta - y}{r} \cos(n, y) + \frac{\zeta - z}{r} \cos(n, z)$$

La somma degli angoli solidi per tutti gli elementi  $dS$  di  $S$  è quindi

$$\Omega = \iint \left\{ \frac{\xi - x}{r^3} \cos(n, x) + \frac{\eta - y}{r^3} \cos(n, y) + \frac{\zeta - z}{r^3} \cos(n, z) \right\} dS$$

Questo integrale di superficie esteso a  $S$  è indipendente dalla superficie  $S$  passante per il contorno  $s$  e dipende solo da quest'ultimo, poiché si ha (si veda E. Picard, *Traité d'Analyse*, Vol. I, 2<sup>a</sup> ed. p. 127)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\xi - x}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\eta - y}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\zeta - z}{r^3} \right) = 0$$

con

$$r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2$$

Proponiamoci di esprimere le derivate parziali di  $\Omega$ , considerate come funzioni di  $\xi, \eta, \zeta$  con integrali curvilinei, mediante la formula di Stokes. Prendiamo, ad esempio, la derivata parziale di  $\Omega$  rispetto a  $\xi$ ; avremo

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \xi} = \iint \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\xi - x}{r^3} \right) \cos(n, x) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\eta - y}{r^3} \right) \cos(n, y) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\zeta - z}{r^3} \right) \cos(n, z) \right] dS$$

Dobbiamo cercare delle funzioni  $\alpha, \beta, \gamma$  di  $x, y, z$  tali che

$$\begin{cases} \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\xi-x}{r^3} \right) \\ \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\eta-y}{r^3} \right) \\ \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\zeta-z}{r^3} \right) \end{cases}$$

Prendiamo  $\alpha = 0$ ; dobbiamo scegliere, se possibile,  $\beta$  e  $\gamma$  in modo da soddisfare alle equazioni

$$\frac{\partial \gamma}{\partial x} = -\frac{3(\eta-y)(\xi-x)}{r^5} \quad \frac{\partial \beta}{\partial x} = +\frac{3(\zeta-z)(\xi-x)}{r^5}$$

e

$$\frac{\partial \beta}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial y} = \frac{1}{r^3} - \frac{3(\xi-x)^2}{r^5}$$

Queste equazioni saranno verificate se si assume

$$\gamma = +\frac{y-\eta}{r^3} \quad \beta = -\frac{z-\zeta}{r^5}$$

e, pertanto, l'integrale curvilineo

$$\int_S \alpha dx + \beta dy + \gamma dz$$

si ridurrà a

$$\int_S \frac{(y-\eta) dz - (z-\zeta) dy}{r^3}$$

Si troverà allo stesso modo

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} &= \int_S \frac{(z-\zeta) dx - (x-\xi) dz}{r^3} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial \zeta} &= \int_S \frac{(x-\xi) dy - (y-\eta) dx}{r^3} \end{aligned}$$

È facile vedere che gli elementi differenziali in questi tre integrali curvilinei sono le componenti del vettore di Biot e Savart.

J. Bertrand (1890) ha fatto notare che l'equivalenza, dal punto di vista del campo di forza creato nello spazio circostante, di un foglio magnetico e di una corrente elettrica che percorre il contorno di questo foglio, può solo aver luogo, ammettendo per il magnetismo la legge di Coulomb, se la corrente agisce secondo la legge di Biot e Savart. C. De Jans (1910), lasciando indeterminata la legge di azione del magnetismo così come quella della corrente (salvo certe condizioni molto generali), propose di dimostrare che l'equivalenza di un foglio e di una linea che lo limita è possibile solo se l'agente che copre le due facce del foglio agisce secondo la legge di Coulomb, e che allo stesso tempo gli elementi del contorno agiscono secondo la legge di Biot e Savart.

L'intensità  $H$  del campo, dove il potenziale è determinato dalla formula (60), è uguale a

$$H = -I \frac{\partial \Omega}{\partial n} \quad (8.0.207)$$

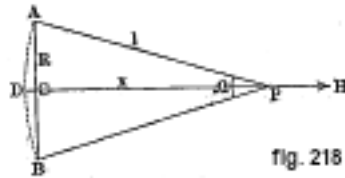
essendo  $n$  la direzione della normale alla superficie  $\Omega = \text{cost}$ . Applichiamo questa formula al caso già considerato (fig. 216) di una corrente circolare che agisce in un punto posto sul suo asse. Sia AB (fig. 218) il diametro della corrente, il cui piano è perpendicolare al piano della figura;  $R, l, x$  hanno qui lo stesso significato che nella fig. 216. L'angolo solido  $\Omega$  nel punto P è uguale al prodotto di  $4\pi$  per il rapporto tra l'area del segmento sferico ADB, cioè  $2\pi l CD = 2\pi l (l-x)$  e l'area totale  $4\pi l^2$ . Si ha quindi

$$\Omega = 2\pi \frac{l-x}{l} = 2\pi - \frac{2\pi x}{\sqrt{R^2 + x^2}}$$

Avendo la normale in P la direzione dell'asse  $x$ , la (60,a) dà

$$H = -I \frac{\partial \Omega}{\partial x} = -\frac{2\pi R^2 I}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{2\pi R^2 I}{l^3}$$

in accordo con la (49).



Supponiamo che la corrente  $I$  segua il contorno di una figura piana di area  $\sigma$ . L'azione di questa corrente sarà uguale a quella di un foglio magnetico che copre l'area piana  $\sigma$ . L'asse magnetico del foglio è perpendicolare al piano dell'area  $\sigma$ ; il momento magnetico  $M$  del foglio ha l'espressione  $M = k\sigma\delta = \omega\sigma$ ; ma si ha l'uguaglianza  $I = \omega : \mu$  e di conseguenza

$$M = I\sigma\mu \quad (8.0.208)$$

Per punti sufficientemente lontani, si può sostituire il foglio con un magnete corto, senza cambiare la direzione dell'asse magnetico e il modulo del momento magnetico. Ne segue che *l'azione di una corrente piana chiusa  $I$  su punti lontani può essere sostituita dall'azione di un magnete corto, il cui asse è perpendicolare al piano della corrente e il cui momento magnetico è uguale al prodotto dell'intensità di corrente per l'area attorno alla quale circola la corrente e per la permeabilità magnetica del mezzo circostante*. Il polo nord di questo magnete deve trovarsi dalla parte in cui il verso della corrente è antiorario. Per  $\mu = 1$ , si ha

$$M = I\sigma \quad (8.0.209)$$

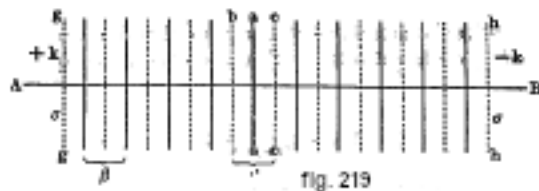
La nozione di solenoide è strettamente legata a quanto detto. Consideriamo un gran numero di correnti chiuse, di uguale intensità  $I$  e circondanti le stesse aree piane  $\sigma$  disposte parallelamente. Queste correnti sembrano essere infilate lungo la stessa linea retta, alla quale i loro piani sono perpendicolari. Un insieme di tali correnti è chiamato un *solenoid*, ora meno semplicemente solenoide elettromagnetico. La retta che attraversa tutte le correnti è l'asse del solenoide. Per semplificare, si può supporre che tutte le aree  $\sigma$  sono quelle di cerchi uguali, i cui centri sono posti sull'asse del solenoide. Per più precisione, bisognerebbe considerare l'intensità  $I$  delle correnti come infinitamente piccola e il numero di queste correnti infinitamente vicine come infinitamente grande. Ammetteremo tuttavia che  $I$  ha una grandezza finita e che le correnti si trovano a una distanza  $\beta$  l'una dall'altra molto piccola, ma finita. Sia  $n$  il numero delle correnti per unità di lunghezza del solenoide; si ha

$$n\beta = 1 \quad (8.0.210)$$

La grandezza

$$I_s = nI \quad (8.0.211)$$

può essere chiamata la potenza del solenoide; può essere considerata come una grandezza data, che non varia al crescere indefinitamente del numero  $n$  e alla contemporanea diminuzione dell'intensità  $I$  oltre ogni limite.



Sia AB (fig. 219) l'asse del solenoide; le rette a tratti continui, che sono ad essa perpendicolari, rappresentano le tracce sul piano della figura dei piani delle correnti, distanti  $\beta$ . Sostituiamo ogni corrente  $aa$  con un foglio magnetico. Se si pone  $\mu = 1$ , si ha, vedi (59,d)

$$\omega = I \quad (8.0.212)$$

Qui  $\omega = k\delta$ , dove  $\pm k$  indica la densità magnetica su due piano paralleli ad  $aa$ , distante  $\delta$ . Poniamo  $\delta = \beta$ , cioè sostituiamo la corrente  $aa$  con un foglio magnetico  $bbcc$ , i cui piani sono a una distanza  $\beta/2$  da  $aa$ . In questo caso si ha,  $\omega = k\beta = I$ , e si deduce, si veda la (61) e la (61,a)

$$k = \frac{I}{\beta} = nI = I_s \quad (8.0.213)$$

Eseguiamo una tale sostituzione per tutte le correnti; in ciascuno dei piani, le cui tracce sono rappresentate da linee tratteggiate, coesistono due strati superficiali di magnetismo di nomi opposti, la cui azione risultante è nulla. Non resta che l'azione dei due piani estremi  $gg$  e  $hh$ , sui quali si trovano le quantità  $\pm m$  del magnetismo,  $m$  avente l'espressione

$$m = k\sigma = nI\sigma = I_s\sigma \quad (8.0.214)$$

L'azione esterna di un solenoide è uguale all'azione di due masse magnetiche  $\pm m$ , uniformemente distribuite sulle due basi e tali che  $m = I_s\sigma$ , essendo  $I_s = nI$  la potenza del solenoide,  $\sigma$  l'area della sua sezione trasversale.

Tutto quanto detto vale anche per un solenoide non rettilineo, prendendo  $n$  abbastanza grande perché si possano considerare paralleli i piani di due correnti vicine.

L'azione esterna di un solenoide non dipende dalla sua forma, cioè dalla forma del suo asse, ma solo dalla posizione delle sue estremità. Si può dire che l'azione esterna di un solenoide è in qualche modo dovuta solo alle sue estremità. Chiameremo queste estremità nord e sud, essendo l'estremità nord quella dove il verso della corrente è antioraria. Un solenoide chiuso non esercita alcuna azione esterna.

Il potenziale  $V$  di un solenoide elettrodinamico in un qualsiasi punto esterno P è uguale a

$$V = nI\sigma \left\{ \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right\} = I_s\sigma \left\{ \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right\} \quad (8.0.215)$$

dove  $r_1$  e  $r_2$  sono le distanze del punto P dalle estremità del solenoide. Abbiamo trovato, per il potenziale  $V$  di un solenoide magnetico, si veda la (7-40)

$$V = I\sigma \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (8.0.216)$$

dove  $I$  denota il grado di magnetizzazione. L'azione di un solenoide elettrodinamico è identica a quella di un solenoide magnetico, se le estremità dello stesso nome dei due solenoidi hanno la stessa posizione e se inoltre la potenza  $I_s = nI$  del primo solenoide è numericamente uguale al grado di magnetizzazione  $I$  del secondo.

È facile determinare il flusso di forza  $\Phi$  all'interno di un solenoide. Sia AB (fig. 220) il solenoide, P un punto al suo interno.

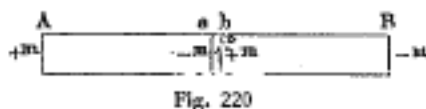


Fig. 220

Il punto P è esterno per i due solenoidi Aa e bB; l'azione di questi ultimi è uguale all'azione delle masse magnetiche  $\pm m = \pm k\sigma$  uniformemente distribuite sulle sezioni a e b. L'azione del solenoide infinitamente corto ab è ovviamente nulla. Ne consegue che il flusso di forza  $\Phi$  all'interno del solenoide è, vedi (61,d),

$$\Phi = 4\pi m = 4\pi nI\sigma = 4\pi I_s\sigma \quad (8.0.217)$$

Per un solenoide, la cui lunghezza è grande rispetto alle dimensioni lineari della sezione trasversale, si può ammettere che il flusso di forza sia uniformemente distribuito sull'area  $\sigma$  della sezione trasversale. In questo caso l'intensità  $H$  del campo all'interno del solenoide è uguale a  $\Phi : \sigma$  cioè

$$H = 4\pi nI = 4\pi I_s \quad (8.0.218)$$

Questa formula molto importante resta vera sia per un solenoide non rettilineo che per un solenoide chiuso. Ricorderemo ancora una volta che i risultati precedenti sono assolutamente rigorosi solo per un solenoide ideale, in cui  $I$  è infinitamente piccolo e  $n$  invece infinitamente grande. Si può facilmente intuire che, nell'uguaglianza  $m = nl\sigma$ , vedi (61,d), i due membri hanno le stesse dimensioni, notando che  $n$  non è un numero puro, ma il valore numerico di una certa grandezza fisica (la densità di distribuzione delle correnti), la cui dimensione, come segue dalla (61), è pari a  $L^{-1}$ .

In pratica, qualcosa che si avvicina a un solenoide, si ottiene inviando una corrente attraverso un sottile filo isolato, avvolto sulla superficie di un cilindro, in modo che le varie spire siano a contatto.

Come mostrato dalla formula (63), l'intensità  $H$  del campo all'interno di un solenoide non dipende dall'area della sezione trasversale. Ne consegue che una bobina elettrodinamica, cioè un filo avvolto su un cilindro in più strati e percorso da una corrente, costituisce una serie di solenoidi aventi un asse comune, essendo  $H$  data nello spazio interno dalla formula (63), (dove  $n$  indica allora il numero totale di spire di filo per unità di lunghezza della bobina).

Quando tutti gli strati contengono lo stesso numero  $n_1$  di spire per unità di lunghezza e il numero di strati è  $n_2$ , si ha  $n = n_1 n_2$ , e si ottiene, per l'intensità  $H$  del campo all'interno della bobina, l'espressione

$$H = 4\pi n_1 n_2 I \quad (8.0.219)$$

Fabry (1910) si è proposto di determinare in quali condizioni si potevano produrre intensi campi magnetici per mezzo di bobine senza ferro. I processi attualmente in uso non hanno permesso di superare cinquantamila gauss, e anche tali valori sono stati raggiunti solo in piccolissimi volumi, insufficienti per certi esperimenti. Così il fenomeno di Zeeman è stato studiato solo in campi superiori a 36000 gauss. È facile vedere che la potenza richiesta per produrre un dato campo cresce come il quadrato dell'intensità di questo campo, come l'estensione lineare della cavità della bobina, come la resistenza del filo, infine come il coefficiente di dilatazione o il rapporto tra il volume della bobina e quello effettivamente occupato dal metallo. Fabry ha calcolato che per produrre un campo di 100000 gauss, alla temperatura dell'aria liquida, in uno spazio cilindrico di 1 cm di raggio, occorrerebbe una potenza di 100 *KWatt*; la quantità di calore sprigionata sarebbe di 25 grandi calorie al secondo e il consumo di aria liquida per il raffreddamento raggiungerebbe i 24 litri al secondo. Alla temperatura ordinaria la potenza necessaria raggiungerebbe i 600 *KWatt*; ci sarebbe qualche difficoltà a eliminare l'enorme quantità di calore sprigionato in un volume molto piccolo e probabilmente bisognerebbe aumentare l'estensione della cavità dove si forma il campo magnetico, crescendo la potenza come la dimensione lineare di questa estensione, ma il volume in cui il calore è liberato si sprigiona come il cubo di questa dimensione.

## 8. Energia di una corrente portata in un campo magnetico

Una corrente elettrica è sottoposta, come una calamita, all'azione del campo magnetico in cui è portata e che è generalmente dovuta a un magnete qualsiasi o altre correnti. Questa azione del campo su una corrente si manifesta con forze ponderomotrici, che danno luogo ad uno spostamento del conduttore percorso dalla corrente. La necessità dell'esistenza di tale azione è una diretta conseguenza della legge di uguaglianza di azione e reazione. Quando si dice, infatti, che una corrente è circondata da un campo magnetico, ciò significa che, in presenza della corrente, forze ponderomotrici agiscono sui magneti che sono nel campo. Secondo la legge dell'uguaglianza di azione e reazione, devono manifestarsi forze ponderomotrici uguali, ma direttamente opposte, sulla corrente, quando i magneti sono nelle sue vicinanze. Ma tali forze sono quelle di un campo magnetico e quindi è chiaro che anche una corrente, portata in un campo magnetico per effetto dei magneti, deve essere soggetta a forze ponderomotrici. Inoltre, poiché il campo magnetico di una corrente non differisce fundamentalmente da quello di un magnete, una corrente portata in un campo magnetico di un'altra corrente è anch'essa soggetta a forze ponderomotrici. Da ciò segue la necessità dell'esistenza di un'azione reciproca delle correnti.

Si può andare oltre. Finora non abbiamo detto nulla sulle azioni ponderomotrici di una calamita su se stessa, perché abbiamo considerato la calamita come un solido invariabile. È evidente che il campo magnetico di un dato magnete non può dar luogo ad uno spostamento d'insieme di questo magnete, poiché le azioni reciproche tra due sue particelle qualsiasi sono uguali in modulo e opposte in verso. Ma, se si costruisce un magnete di cui alcune parti sono mobili, si può dimostrare l'azione del magnete su sé stesso. Quando, per esempio, si piega una sottile lama d'acciaio a forma di ferro di cavallo, fissandola prima in modo che nessuna delle sue parti possa spostarsi, allora in modo da far apparire dei poli alle estremità del magnete e infine quando lo si libera da ogni vincolo, le estremità della lama si trovano ad una distanza tale che l'azione reciproca dei poli è bilanciata dalle forze elastiche dovute alla flessione di questo tipo di molla. L'azione di un magnete su se stesso provoca quindi una deformazione del magnete. Una tale deformazione deve esistere, almeno in minima parte, in ogni magnete; torneremo più avanti su questa questione.

L'azione ponderomotrice di una corrente su sé stessa gioca un ruolo molto più importante. Qualsiasi elemento di un circuito chiuso si trova nel campo magnetico di tutti gli altri elementi del circuito stesso, e quindi su di esso agiscono delle forze che tendono a spostarlo. Tutti gli elementi di un circuito chiuso sono quindi sotto l'azione di forze ponderomotrici prodotte, per così dire, dal circuito stesso; in altre parole, un circuito chiuso tende a deformarsi. Questo fenomeno si può evidenziare facilmente; non è difficile costruire un circuito in cui alcune delle sue parti sono mobili; esse si possono far flottare su un liquido, munirle di cerniere, o infine ottenerle mediante sottili fili flessibili.

Quando una corrente inizia a spostarsi, nel campo magnetico dato dove è stata portata, le forze che agiscono su di essa compiono un certo lavoro, la cui intensità indicheremo con  $H'$ . Determiniamo la grandezza  $W$  con due metodi.

L'azione esterna della corrente  $I$  sulle sorgenti a noi sconosciute (magnetici o correnti) del campo  $H'$  è uguale all'azione sulle stesse sorgenti di un foglio magnetico, posto su una qualsiasi superficie  $S$  delimitata dal percorso della corrente e la cui potenza  $\omega$  è uguale a  $I\mu$ , essendo  $\mu$  la permeabilità magnetica del mezzo circostante. Ne consegue che l'azione del campo  $H'$  sulla corrente  $I$  è uguale all'azione del campo su questo foglio magnetico e che l'energia potenziale  $W$  della corrente deve essere uguale all'energia potenziale del foglio. Abbiamo trovato, per quest'ultimo, si veda la (7-28)

$$W = -\omega\Phi' = -\omega N' \quad (8.0.220)$$

dove  $\Phi'$  indica il flusso di forza e  $N'$  il numero totale di linee di forza che attraversano la

superficie  $S$  del foglio. Se ne deduce, per una corrente  $I$  che si trova in un mezzo omogeneo  $\mu$ ,

$$W = -I\mu\Phi' = -I\mu N' \quad (8.0.221)$$

Quando il mezzo è eterogeneo, l'intensità  $H'$  del campo attorno all'elemento  $dS$  della superficie  $S$  è dovuto tanto alle sorgenti del campo originariamente date quanto alle masse magnetiche fittizie che si immaginano, alla superficie di separazione delle sostanze di natura diversa che riempiono il mezzo. Sostituiamo la corrente data, nel modo che conosciamo, con un numero infinito di correnti elementari distribuite sulla superficie  $S$  e ciascuna di queste correnti elementari con un foglio magnetico, la cui energia  $dW$  sarà uguale a  $-\omega H'_n dS$ , vedi (7-27e);  $H'_n$  rappresenta qui la componente dell'intensità del campo lungo la direzione della normale  $n$  a  $dS$ . Ponendo  $\omega = I\mu$ , si ha

$$dW = -I\mu H'_n dS$$

da cui

$$W = -I \int \mu H'_n dS$$

ma  $\mu H'_n = B'_n$ , cioè è uguale alla componente dell'induzione magnetica lungo la direzione della normale  $n$ . Si ha pertanto

$$W = -I \int B'_n dS = IN \quad (8.0.222)$$

dove indichiamo con  $N$ , per distinguerlo da  $N'$  nella (64,a), il numero totale di linee di induzione che intersecano la superficie  $S$ . L'energia potenziale, di una corrente che si trova in un campo magnetico, è quindi uguale al prodotto cambiato in segno dell'intensità di corrente per il flusso di induzione o per il numero totale di linee di induzione che passano all'interno della linea di percorso della corrente, provenienti dal lato dove il verso della corrente è orario. Chiameremo questo il lato sud. Per un mezzo omogeneo, la formula (74,b) si cambia nella (64,a).

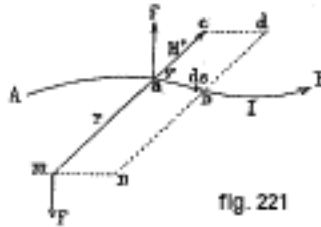


fig. 221

Ora calcoliamo  $W$  in un altro modo. Determiniamo dapprima le forze ponderomotrici che agiscono sul conduttore di corrente  $I$ , nel campo magnetico  $H'$ . Sia  $AB$  (fig. 221) il conduttore di corrente  $I$ , il cui verso è da  $A$  a  $B$ ,  $ab = ds$  un elemento di corrente,  $ac = H'I$  l'intensità del campo esterno, misurata dalla forza che agirebbe sul punto  $a$  se si trovasse, invece dell'elemento di corrente, l'unità di quantità di magnetismo. L'azione del campo sull'elemento di corrente  $ds$  non dipende dalla sorgente di questo campo. Possiamo supporre pertanto che l'intensità  $H'$  del campo è dovuta a una quantità di magnetismo  $m$ , che si trova a una certa distanza  $r$  da  $a$ , avendo  $r$  la direzione di  $H'$  e dovendo l'uguaglianza

$$H' = \frac{m}{\mu r^2} \quad (8.0.223)$$

essere soddisfatta per  $m$  e  $r$ .

La forza  $f$  esercitata dall'elemento  $ds$  su  $m$  è, si veda la (48)

$$f = \frac{mIds}{r^2} \sin \varphi \quad (8.0.224)$$



dove  $\varphi$  è l'angolo  $cab$  e dove l'intensità della corrente è espressa in unità el. mag. ( $C = 1$ ). Questa forza è normale al piano  $(r, ds)$ , cioè a  $mabn$  e il suo verso è quello indicato in figura, secondo la regola di Ampère. Dal principio di uguaglianza tra azione e reazione, il polo  $m$  agisce sull'elemento di corrente  $ds$  con una forza uguale e parallela a  $f$ , ma di verso opposto. Portando la (65) nella (65,a), viene

$$f = I\mu H' ds \sin \varphi \quad (8.0.225)$$

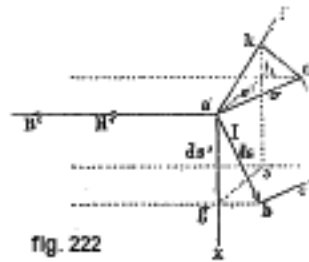
Le ausiliarie  $m$  e  $r$ , che abbiamo introdotto, non intervengono più in questa espressione. Il prodotto  $H' ds \sin \varphi$  è uguale all'area del parallelogrammo  $abcd$ . Si ha pertanto

$$f = \mu I \times \text{area}(H', ds) \quad (8.0.226)$$

dove  $\text{area}(H', ds)$  denota simbolicamente l'area di  $abcd$ . La forza  $f$ , che agisce sull'elemento di corrente  $Ids$ , posto nel campo magnetico  $H'$ , è normale al piano di  $H'$  e  $ds$ ; il suo verso è determinato da una regola analoga a quella di Ampère: *quando ci si sposta nella direzione e nel verso della corrente e si guarda nella direzione e nel verso delle linee di forza, la forza che agisce sulla corrente sembra diretta verso sinistra*.

Un'altra regola è nota come regola della mano sinistra: *se il pollice è ad angolo retto rispetto all'indice e al medio della mano sinistra, anch'essi rettangolari, e se il medio indica il verso della corrente, l'indice quello delle linee di forza del campo, il pollice dà la direzione e il verso della forza che agisce sulla corrente*.

Ciò posto, determiniamo il lavoro  $dR$  svolto dalle forze  $f$ , quando ogni elemento della corrente subisce uno spostamento infinitamente piccolo. A questo scopo, calcoliamo prima il lavoro  $dR'$  compiuto in uno spostamento infinitamente piccolo di uno degli elementi  $Ids$  della corrente. Lo spostamento di  $ds$  può essere ottenuto mediante una traslazione seguita da una rotazione dell'elemento attorno ad un suo punto. Se si sceglie, per quest'ultimo, il punto di applicazione della forza  $f$  all'elemento  $ds$ , il lavoro svolto nella rotazione è nullo, e basta quindi calcolare il lavoro della forza  $f$  nella traslazione corrispondente a tale rotazione.



Sia  $ab = ds$  l'elemento corrente (fig. 222),  $aH'$  l'intensità del campo. La forza  $f$  è normale al piano  $baH'$ ; il suo modulo è dato dalla formula (66) in cui  $\varphi$  è l'angolo  $baH'$ . Supponiamo che la corrente  $I$  abbia verso  $ab$ , in modo che la forza  $f$  sia diretta dall'osservatore verso il piano della figura. Consideriamo la traslazione che porta  $ab$  in  $dc$ ; indichiamo  $ad = bc$  con  $\sigma$ . Il lavoro cercato  $dR'$  è uguale a

$$dR' = f\sigma \cos(f, \sigma) = I\mu H' ds \sin(H', ds) \cdot \sigma \cos(f, \sigma) \quad (8.0.227)$$

Tracciamo l'asse  $ax$  normale al piano  $faH'$ ; il piano  $fax$  sarà perpendicolare a  $H'$ . Poiché la forza  $f$  è normale al piano  $baH'$  e che contemporaneamente  $f$  è perpendicolare ad  $ax$ , è chiaro che le rette  $aH'$ ,  $ax$  e  $ab$  sono situate in uno stesso piano perpendicolare a  $fax$ . La perpendicolare abbassata da  $b$  sul piano  $fax$  incontra quest'ultimo nel punto  $g$  situato sulla retta  $ax$ , poiché il piano  $bag$ , che altro non è che il piano  $baH'$ , è perpendicolare al piano  $fax$ . Sia  $ageh$  la proiezione di  $abcd$  sul piano  $fax$ . Tracciamo ancora la perpendicolare  $dk$  ad  $af$ ; il prolungamento

di  $eh$  interseca  $af$  nel punto  $k$ , essendo  $dh$  normale al piano  $fax$  e  $dk$  perpendicolare ad  $af$ ,  $hk$  è anche perpendicolare ad  $af$ ; ma  $eh$  è parallela a  $xa$  e quindi perpendicolare ad  $af$ , da cui segue che  $hk$  è il prolungamento di  $eh$ . L'angolo  $ake$  è quindi retto, così che  $ak$  è l'altezza del parallelogramma  $ageh$ . Ne consegue che

$$area \cdot ageh = ag \times ak \quad (8.0.228)$$

Ritorniamo ora alla formula (67). Come si vede in figura, si ha

$$\begin{aligned} ds \sin(H', ds) &= ab \sin(baH') = ab \cos(bag) = ag \\ \sigma \sin(f, \sigma) &= ad \cos(daf) = ak \end{aligned}$$

Portando questi valori nella (67) e tenendo conto della (67,a), si ottiene

$$dR' = I\mu H' \times area \cdot ageh$$

se si introduce, al posto di  $\mu H'$ , l'induzione  $B'$ , si ha

$$dR' = IB' \times area \cdot ageh$$

Il piano  $ageh$  è perpendicolare a  $B'$ ; quindi,  $B' \times area \cdot ageh$  è il flusso di induzione che attraversa il parallelogramma  $ageh$ . D'altra parte  $ageh$  è la proiezione del parallelogramma  $abcd$  sul piano  $fax$ , anch'esso perpendicolare al vettore  $B'$ ; ne consegue che il flusso di induzione, che attraversa  $ageh$ , è uguale al flusso di induzione che attraversa l'area  $abcd$  descritta dall'elemento corrente  $ds$  nel suo spostamento. Invece del flusso di induzione, si potrebbe anche considerare il numero di linee di induzione che attraversano l'area  $abcd$ ; tutte queste linee di induzione sono tagliate dall'elemento  $ds$ , quando si sposta dalla posizione  $ab$  alla posizione  $dc$ .

Prima di formulare una conclusione, esamineremo quale segno debba essere attribuito a  $dR'$ . Abbiamo ottenuto per  $dR'$  un valore positivo, quando l'angolo  $daf$  è acuto; quando  $daf$  è ottuso, cioè quando il parallelogramma  $abcd$  non è situato dietro, ma davanti al piano  $(ds, H')$ , il lavoro  $dR'$  è negativo. Nel primo caso ( $dR' > 0$ ), l'osservatore, che naviga nella direzione e nel verso della corrente  $I$  (da  $a$  verso  $b$ ) e che guarda nella direzione e nel verso delle linee di forza, si sposta verso sinistra; nel secondo caso ( $dR' < 0$ ), si sposta verso destra.

Va infine indicato che quanto precede rimane vero per uno spostamento finito dell'elemento corrente, perché uno spostamento finito può essere scomposto in un'infinità di spostamenti infinitamente piccoli.

Infine otteniamo il seguente risultato:

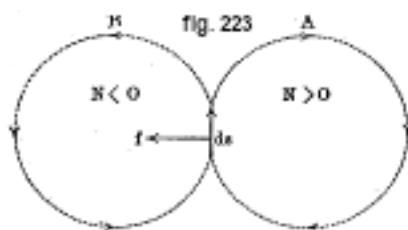
*Il lavoro compiuto da un campo magnetico esterno, in qualsiasi spostamento finito dell'elemento corrente  $ds$ , è uguale al prodotto dell'intensità  $I$  di corrente  $I$  per il flusso di induzione che attraversa l'area descritta dall'elemento  $ds$  nel suo spostamento, o ancora uguale al prodotto dell'intensità  $I$  della muratura per il numero di linee di induzione che l'elemento  $ds$  interseca nel suo spostamento. Questo lavoro è positivo, quando lo spostamento avviene alla sinistra di un osservatore, spostandosi nella direzione e nel verso della corrente e guardando nella direzione e nel verso delle linee di induzione.*

La Figura 222 mostra chiaramente che, nel calcolo del lavoro  $dR'$ , si può sostituire l'elemento di corrente  $ds$  con la sua proiezione su un piano perpendicolare alle linee di forza e considerare lo spostamento di questa proiezione, invece dello spostamento dell'elemento stesso. Infatti, quando l'elemento  $ds' = ag$  si sposta in  $he$ , il lavoro  $dR'$  è uguale a  $f\sigma' \cos(f, \sigma)$ , dove  $\sigma'$  indica  $ah$ . Dalla formula generale (66), dove si ha ora  $\sin \varphi = \sin(H', ds) = 1$ , la forza  $f$  è uguale a  $I\mu H' ds'$ , di modo che  $dR' = I\mu H' ds' \cdot \sigma' \cos(f, \sigma)$ ; ma  $\sigma' \cos(f, \sigma) = ak$ ,  $ds' = ag$  e quindi  $dR' = I\mu H' \times ah \times ag$  o, di veda la (67,a),  $dR' = IB' \times area \cdot ageh$ , cosa non diversa dalla (67,b).

Consideriamo il lavoro  $dR$  compiuto dal campo magnetico quando tutti gli elementi della corrente chiusa subiscono uno spostamento infinitamente piccolo;  $dR$  è uguale alla somma dei lavori  $dR'$  compiuti rispettivamente negli spostamenti di tutti gli elementi  $ds$  di corrente. Qualunque sia la forma della linea del percorso della corrente, vi sono sempre, per questa linea chiusa, due lati tali che se si guarda la corrente da uno, il verso che predomina è quello orario, e se si guarda dall'altro il verso è opposto. Noi abbiamo già chiamato il primo di questi lato sud; chiameremo il secondo, il lato nord.

Quando l'elemento  $ds$  si sposta, il lavoro  $dR'$  può essere positivo o negativo; d'altra parte, il numero  $N$  delle linee di induzione, che passano all'interno della linea di percorso della corrente, può aumentare o diminuire nello spostamento dell'elemento  $ds$  di corrente. Esiste una relazione tra il segno del lavoro  $dR'$  e la variazione del numero  $N$  di linee di induzione che passano all'interno della linea di percorso corrente? Sorge innanzitutto una questione, quella del verso delle linee di induzione relativamente a quello della corrente: queste linee possono attraversare l'interno della linea di percorrenza della corrente, passando dal lato sud al lato nord o viceversa. Conteremo  $N$  positivamente, quando le linee di induzione passano all'interno della linea di percorso della corrente nel senso che va dal lato sud verso il lato nord. Quando queste linee avranno verso opposto, considereremo  $N$  come negativo; diremo allora che  $N$  aumenta, per esempio, quando diminuisce il numero assoluto di linee di induzione che passano all'interno della linea di percorrenza della corrente.

Si consideri la Figura 223; supponiamo che le linee di induzione attraversino il piano della figura nel verso che parte dal lettore, il quale di conseguenza guarda nella direzione e nel verso delle linee di forza. Sia  $ds$  un elemento di corrente, la cui linea di percorso può occupare due posizioni; le proiezioni di queste due possibili posizioni, sul piano della figura, sono indicate da cerchi tratteggiati. Se la corrente ha la posizione A, si ha  $N > 0$ ; se ha la posizione B, si ha  $N < 0$ . La forza  $f$  agente su  $ds$  è diretta verso sinistra.



Sono possibili due casi di spostamento dell'elemento  $ds$ .

1. Il lavoro  $dR' > 0$ ; l'elemento  $ds$  si sposta in una direzione che forma un angolo acuto con  $f$ , cioè verso sinistra. È chiaro che  $N$  cresce nelle due posizioni A e B della corrente.
2. Il lavoro  $dR' < 0$ ; l'elemento  $ds$  si sposta verso destra; le  $N$  linee di induzione diminuisce nelle due posizioni A e B della corrente.

Il lavoro  $dR'$  e la variazione del numero di linee di induzione, che passano all'interno della linea del percorso di corrente, sono entrambe positive o entrambe negative.

Abbiamo visto che  $dR'$  è uguale al prodotto dell'intensità  $I$  della corrente per il numero di linee di induzione che l'elemento  $ds$  interseca nel suo spostamento; ma è anche il numero delle linee che penetrano nuovamente all'interno della linea di corso della corrente o ne escono. Applicando quanto sopra a tutti gli elementi di corrente  $ds$  e indicando con  $dN$  l'aumento del numero di linee di induzione, che attraversano l'interno della linea di percorso della corrente, si ottiene, per il lavoro  $dR$  del campo magnetico, quando tutti gli elementi della corrente subiscono uno spostamento infinitamente piccolo, l'espressione

$$dR = IdN \quad (8.0.229)$$

Il lavoro  $dR$  è uguale alla diminuzione di  $dW$  dell'energia potenziale della corrente e del campo, di modo che

$$dW = -IdN \quad (8.0.230)$$

dove  $W = -IN + cost$ ; ma, quando si toglie la corrente del campo magnetico, si ha  $N = 0$  e  $W = 0$ , e quindi la costante è nulla; si ha quindi

$$W = -IN \quad (8.0.231)$$

in accordo con la formula (64,b), che abbiamo ottenuto sostituendo la corrente con un foglio magnetico. Abbiamo anche espresso in linguaggio comune i risultati ai quali giungiamo.

Si deduce dalla (68), per il lavoro  $R$  del campo magnetica, in uno spostamento finito della corrente, l'espressione

$$R = I(N_2 - N_1) \quad (8.0.232)$$

dove  $N_1$  è il numero di linee di induzione che, nella posizione iniziale della corrente, attraversano l'interno della sua linea di percorso dal lato sud verso il lato nord,  $N_2$  il numero corrispondente nella nuova posizione della corrente.

Dalla formula (69,a) deriva una serie di conseguenze.

Supponiamo che il campo sia uniforme, che di conseguenza le linee di induzione siano rette parallele, e che la corrente abbia uno spostamento complessivo, cioè che la sua linea di percorso mantenga naturalmente una forma invariata nel suo spostamento.

*In una traslazione della corrente, cioè in uno spostamento della corrente parallela a se stessa, il lavoro  $R$  del campo è nullo.*

*Nella rotazione di tale corrente, attorno ad un asse parallelo alle linee di induzione, il lavoro  $R$  del campo è nullo.*

*Il lavoro di un campo uniforme è diverso da zero solo quando avviene una rotazione della corrente attorno ad un asse non parallelo alle linee di induzione.*

*Nella traslazione di una corrente in un campo non uniforme, il lavoro  $R$  è positivo quando il lato sud della corrente si sposta da un punto dove l'intensità del campo è minore verso un altro dove è maggiore.*

Tutte queste conclusioni si riferiscono a una corrente la cui linea di percorso conserva una forma invariata. Quando gli elementi di questa linea, cioè gli elementi dei conduttori percorsi dalla corrente, possono spostarsi ciascuno in qualsiasi modo, pur soddisfacendo la legge di continuità, il lavoro è determinato dalla formula generale (69,a).

Trattiamo ora il caso molto importante in cui il campo magnetico esterno è dovuto ad un'altra corrente, cioè cerchiamo l'energia potenziale  $W_{1,2}$  di due correnti di intensità  $I_1$  e  $I_2$ . Supponiamo il mezzo omogeneo, in modo che la sua permeabilità magnetica  $\mu$  è ovunque la stessa. Da quanto detto risulta chiaro che l'energia  $W_{1,2}$  deve essere uguale all'energia di due fogli magnetici di potenze  $\omega_1 = \mu I_1$  e  $\omega_2 = \mu I_2$ ; questa energia è determinata dalla formula (7-3), e sostituendo i valori di  $\omega_1$  e  $\omega_2$ , si ha

$$W_{1,2} = -I_1 I_2 \mu L_{1,2} \quad (8.0.233)$$

dove  $L_{1,2}$  è una grandezza puramente geometrica, che dipende solo dalla disposizione nello spazio delle linee di percorrenza delle due correnti. La grandezza  $\mu L_{1,2}$  è detta coefficiente di mutua induzione delle due correnti; le sue dimensioni sono  $[\mu] L$ . Abbiamo visto che  $L_{1,2}$  si calcola con la formula

$$L_{1,2} = - \iint \frac{\partial \left( \frac{1}{r} \right)}{\partial n_1 \partial n_2} dS_1 dS_2 \quad (8.0.234)$$

Indichiamo con  $\Psi_{1,2} = N_{1,2}$  il flusso di induzione o il numero di linee di induzione, che escono dall'interno della linea di percorso della prima corrente per entrare all'interno della linea di percorso della seconda, quando  $I_1 = 1$ , e con  $\Psi_{2,1} = N_{2,1}$  il flusso di induzione o il numero di

linee di induzione che escono dall'interno della linea di percorso della seconda corrente, per entrare in quella della linea di percorso della prima, quando  $I_2 = 1$ . Si ha quindi, nella formula (69),  $I = I_2$ ,  $N = I_1 N_{1,2}$  nel primo caso,  $I = I_1$ ,  $N = I_2 N_{2,1}$  nel secondo, ciò che dà

$$W = -I_1 I_2 N_{1,2} = -I_1 I_2 N_{2,1} \quad (8.0.235)$$

se ne deduce

$$\begin{cases} N_{1,2} = N_{2,1} \\ \Psi_{1,2} = \Psi_{2,1} \end{cases} \quad (8.0.236)$$

Da queste relazioni, che sono analoghe, alle uguaglianze (7-33) segue la seguente proposizione: quando ci sono due correnti della stessa intensità  $I$ , il flusso di induzione  $I\Phi_{1,2}$ , o il numero di linee di induzione  $IN_{1,2}$ , che esce dall'interno del percorso della prima corrente e attraversa l'interno della linea del percorso della seconda, è uguale al flusso di induzione  $I\Psi_{1,2}$  o al numero  $IN_{2,1}$  di linee di induzione, che escono dall'interno della linea di percorso della seconda corrente ed entrano all'interno della linea di percorso della prima. Confrontando la (70) con la (71,a), si trova

$$\mu L_{1,2} = \Psi_{1,2} = N_{1,2} \quad (8.0.237)$$

Il coefficiente di mutua induzione di due correnti è uguale al flusso di induzione o al numero di linee di induzione che escono dall'interno della linea di percorso di una delle correnti e attraversano quella della linea di percorso dell'altra corrente, quando le intensità delle correnti sono uguali all'unità.

La formula (70) mostra che l'energia potenziale di due correnti è uguale al prodotto  $I_1 I_2$  cambiato di segno delle intensità delle correnti, moltiplicato per il coefficiente  $\mu L_{1,2}$  della loro mutua induzione, che è uguale al flusso di induzione appena definito.

La quantità  $L_{1,2}$  è data, nella formula (71), da un integrale che si estende a due superfici  $S_1$  e  $S_2$ , aventi rispettivamente per contorni le due correnti date. Una tale espressione, del tutto naturale quando si tratta di due fogli magnetici le cui facce sono  $S_1$  e  $S_2$ , sembra un po' artificiale quando si tratta di due correnti, vale a dire, dal punto di vista geometrico, con due linee chiuse nello spazio; ma la formula (71) può essere trasformata in modo che vi compaiano solo gli elementi  $ds_1$  e  $ds_2$  delle linee di percorso delle due correnti.

Indichiamo con  $x_1, y_1, z_1$  e  $x_2, y_2, z_2$  le coordinate di un punto di ciascuno degli elementi  $ds_1$  e  $ds_2$ . Applicando due volte la formula di Stokes si trova la seguente identità:

$$\iint \frac{1}{r} \left( \frac{dx_1}{ds_1} \frac{dx_2}{ds_2} + \frac{dy_1}{ds_1} \frac{dy_2}{ds_2} + \frac{dz_1}{ds_1} \frac{dz_2}{ds_2} \right) ds_1 ds_2 = - \iint \frac{\partial^2 \left( \frac{1}{r} \right)}{\partial n_1 \partial n_2} dS_1 dS_2 \quad (8.0.238)$$

Il membro sinistro di questa identità è un integrale curvilineo doppio, che si estende alle due linee di percorso  $s_1$  e  $s_2$  delle correnti, designando  $r$  la distanza tra gli elementi  $ds_1$  e  $ds_2$  di queste linee. Il secondo membro è un integrale di superficie doppio esteso alle due superfici  $S_1$  e  $S_2$ , in cui  $r$  è la distanza tra gli elementi  $dS_1$  e  $dS_2$ ,  $n_1$  e  $n_2$  le normali a questi elementi. Sia  $\varepsilon$  l'angolo formato dagli elementi  $ds_1$  e  $ds_2$ ; si ha

$$\cos \varepsilon = \frac{dx_1}{ds_1} \frac{dx_2}{ds_2} + \frac{dy_1}{ds_1} \frac{dy_2}{ds_2} + \frac{dz_1}{ds_1} \frac{dz_2}{ds_2}$$

Portando nella (72) e tenendo conto della (71), si ottiene, per il coefficiente di mutua induzione di due correnti, l'espressione

$$\mu L_{1,2} = \mu \iint \frac{\cos \varepsilon}{r} ds_1 ds_2 \quad (8.0.239)$$

e si ha, per l'energia potenziale di due correnti, vedere la (70)

$$W_{1,2} = -I_1 I_2 \mu \iint \frac{\cos \varepsilon}{r} ds_1 ds_2 \quad (8.0.240)$$

essendo  $r$  la distanza tra gli elementi  $ds_1$  e  $ds_2$ ,  $\varepsilon$  l'angolo formato tra di loro.

Abbiamo indicato in precedenza che i diversi elementi di una corrente chiusa esercitano azioni ponderomotrici l'uno sull'altro, e che, di conseguenza, gli elementi mobili di un circuito possono spostarsi sotto l'azione del campo magnetico del circuito stesso. Ne consegue che ogni corrente ha una certa energia potenziale, che chiameremo anche  $W_{1,1}$ . Si vede facilmente che la forza  $f$ , che agisce in questo caso sull'elemento  $ds$  della corrente, ha un verso indipendente da quello della corrente nel circuito, poiché il verso delle linee di induzione cambia contemporaneamente al verso della corrente. Siamo sempre nel caso A, che corrisponde alla metà destra della figura 223; la corrente tende quindi ad aumentare l'area della superficie di cui forma il contorno.

È facile trovare l'espressione dell'energia  $W_{1,1}$ , che deve essere uguale all'energia potenziale propria di un foglio magnetico. Quando si associano a due a due gli elementi del foglio, si deve prendere la metà della somma ottenuta, poiché ogni coppia di elementi compare due volte in questa somma. Invece della formula (70), ora si ha

$$W_{1,1} = -\frac{1}{2}I_1^2\mu L_{1,1} \quad (8.0.241)$$

La quantità  $L_{1,1}$  è detta il *coefficiente di autoinduzione* della corrente data. Le formule (71) e (73) danno

$$L_{1,1} = -\iint \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n_1 \partial n'_1} dS_1 dS'_1 = \iint \frac{\cos \varepsilon}{r} ds_1 ds'_1 \quad (8.0.242)$$

essendo  $dS_1$  e  $dS'_1$  elementi di una stessa superficie,  $ds_1$  e  $ds'_1$  elementi di una stessa curva. Invece della (75), si può scrivere

$$W_{1,1} = -\frac{1}{2}I_1^2\mu \iint \frac{\cos \varepsilon}{r} ds_1 ds'_1 \quad (8.0.243)$$

L'energia potenziale totale  $W$  di due correnti  $I_1$  e  $I_2$  si compone di tre parti  $W_{1,1}$ ,  $W_{1,2}$ ,  $W_{2,2}$ . Le formule (69) e (75) danno

$$W = -\mu \left( \frac{1}{2}I_1^2 L_{1,1} + I_1 I_2 L_{1,2} + \frac{1}{2}I_2^2 L_{2,2} \right) \quad (8.0.244)$$

$L_{1,2}$  è il coefficiente di mutua induzione di due correnti,  $L_{1,1}$  e  $L_{2,2}$  i coefficienti di autoinduzione, per un mezzo nel quale  $\mu = 1$ .

## 9. Osservazioni sul carattere delle leggi che determinano le forze elettriche e magnetiche

Si incontrano, nello studio dei fenomeni elettrici e magnetici, tre tipi di leggi: leggi puntiformi, leggi differenziali e leggi integrali.

Le leggi puntiformi determinano l'azione reciproca di due quantità di sostanze elementari, la cui scienza ammette l'esistenza per vari motivi. La questione della realtà di queste sostanze è solo di secondaria importanza. Anche se si è assolutamente convinti della loro non realtà, si può tuttavia continuare a considerarle, per la comodità che tale nozione presenta. Spesso si rappresenta piccolissime quantità di queste sostanze concentrate in certi punti, da dove le forze osservate sembrano provenire. A queste leggi appartengono la legge di Coulomb e quella di Weber. Il significato che si deve attribuire a queste leggi e il loro carattere sono sufficientemente messi in luce da queste poche osservazioni.

Le leggi differenziali compaiono nello studio della corrente elettrica; definiscono il ruolo svolto da un elemento di corrente preso isolatamente, nei fenomeni osservati in presenza di un circuito chiuso in condizioni diverse. La legge di Biot e Savart ne è un esempio; si ha

$$f = \frac{mids}{l^2} \sin \varphi \quad (8.0.245)$$

dove si pone  $C = 1$ . La formula (74), ci fornisce un altro esempio di legge differenziale; se si ammette che l'energia potenziale di due correnti sia uguale alla somma delle energie potenziali elementari degli elementi di corrente presi a due a due, si può prendere, per l'energia potenziale  $w_{1,2}$  di due di tali elementi, l'espressione

$$w_{1,2} = -I_1 I_2 \frac{\cos \varepsilon}{r} ds_1 ds_2 \quad (8.0.246)$$

Le leggi integrali definiscono la parte quantitativa dei fenomeni osservati direttamente in presenza di correnti chiuse. Una legge integrale, verificata in un gran numero di casi particolari quanto più diversi possibile, esprime un fatto indiscutibile e può essere utilizzata per prevedere, con assoluta certezza, il carattere quantitativo di un dato fenomeno, assumendo naturalmente che tale fenomeno non vada oltre i limiti entro i quali si applica la legge integrale. Come esempio di una tale legge, si può citare quello espresso dalla formula (74) e che determina l'energia potenziale di due correnti:

$$W_{1,2} = -I_1 I_2 \iint \frac{\cos \varepsilon}{r} ds_1 ds_2 \quad (8.0.247)$$

Si possono citare anche tutte le formule che esprimono l'azione di una corrente chiusa su un polo magnetico e che si deducono per integrazione della formula (79) di Biot e Savart, ad esempio le formule generali (56), o quelle particolari (48,a) e (49).

Le considerazioni differenziali, che originariamente servivano a stabilire una legge integrale, possono in seguito essere riconosciute del tutto inammissibili; ma ciò può non avere alcuna conseguenza per il valore della stessa legge integrale. Qualunque cambiamento possano subire le nostre idee sull'essenza dei fenomeni, avremo sempre il diritto di calcolare l'energia potenziale di due correnti con la formula (80,a), o con qualsiasi altra formula dedotta da essa per elaborazione. Così le leggi integrali esprimono dei fatti, e si può dire, quindi, che nella loro applicazione non si tratta di fisica teorica, ma di fisica matematica, secondo la distinzione generale che abbiamo stabilito su questo argomento nel Volume I.

Le leggi differenziali non possono essere oggetto di alcuna verifica sperimentale diretta, perché non si possono osservare fenomeni dovuti agli elementi, presi isolatamente, di una corrente chiusa; solo il fenomeno integrale può essere sottoposto a osservazione. Tuttavia, le leggi integrali sono in realtà sempre derivate da leggi differenziali; quindi, la formula necessariamente esatta (50) è stata dedotta dalla (48). Potrebbe quindi sembrare che l'esattezza, verificata dall'esperienza, di una legge integrale comporti quella della legge differenziale, dalla quale è stata ottenuta mediante integrazione. Ci sarebbe un'idea errata, che viene messa da parte da questa semplicissima osservazione che si può ottenere lo stesso valore, per un integrale definito, con funzioni molto diverse sotto il segno dell'integrazione. È chiaro, infatti, che ad una data funzione si può aggiungere qualsiasi altra funzione il cui integrale, preso tra i limiti relativi al caso considerato, è nullo.

Consideriamo, ad esempio, la formula (79) di Biot e Savart; indichiamo simbolicamente con  $F(ds, m)$  una funzione delle coordinate del polo  $m$  e dell'elemento corrente  $Ids$ , che ha la proprietà che tutte le forze che esprime danno, dopo sommatoria lungo una linea di percorrenza chiusa, una risultante nulla. Si può sostituire la legge differenziale (79) con la seguente

$$f = \frac{mids}{l^2} \sin \varphi + F(ds, m) \quad (8.0.248)$$

è facile vedere che  $F(ds, m)$  deve essere il differenziale totale di una certa funzione di coordinate di un punto dell'elemento  $ds$ . La legge di Biot e Savart potrebbe quindi essere sostituita da una legge qualunque della forma (81), e nulla permetterebbe di stabilire quale di queste leggi corrisponde alla realtà. Così è anche con la formula (74) o (80,a), da cui non risulta la formula (80); si può sostituire quest'ultima con un'espressione della forma

$$w_{1,2} = -I_1 I_2 \mu \frac{\cos \varepsilon}{r} ds_1 ds_2 + F(ds_1, ds_2) \quad (8.0.249)$$

dove  $F(ds_1, ds_2)$  è una funzione delle coordinate e delle direzioni degli elementi  $ds_1$  e  $ds_2$ , la cui doppia sommatoria lungo le linee  $s_1$  e  $s_2$  ha un valore nullo.

Si può andare oltre. Ciò che è espresso da una legge integrale si realizza senza alcun dubbio; ad esempio, si osservano effettivamente le forze  $H_x, H_y, H_z$  nella (56) o l'energia (74). Ma è possibile che le grandezze determinate dalle leggi differenziali non esistano affatto. L'azione nel campo magnetico di una corrente su un polo magnetico è certa; non è così, in generale, per l'azione di un elemento di corrente su un polo. Quest'ultima nozione deriva sostanzialmente dall'idea di azione a distanza. Ciò che si può solo dire, è che *una corrente agisce su un polo magnetico, come se ogni elemento della corrente agisse separatamente su questo polo con una forza data da una qualsiasi delle espressioni della forma* (81). Lo stesso vale per le formule (80,a) e (81,a); vedremo, nel seguito, che si può sostituire la (80), ad esempio, con l'espressione

$$w_{1,2} = -I_1 I_2 \mu \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2}{r} ds_1 ds_2 \quad (8.0.250)$$

dove  $\varphi_1$  è l'angolo  $(r, ds_1)$  e  $\varphi_2$  l'angolo  $(r, ds_2)$ . Da quanto appena detto segue chiaramente che le leggi differenziali sono essenzialmente indeterminate, non verificabili e che la l'esistenza stessa delle grandezze, che sono determinate dalle leggi, non può acquisire la certezza scientifica.



## 9. Fenomeni termici e meccanici all'interno di un circuito

### 1. Fenomeni termici

Nel capitolo precedente abbiamo considerato uno dei casi in cui ha origine il campo magnetico di una corrente elettrica e abbiamo fatto conoscere le proprietà di tale campo. Sarebbe naturale occuparci ora delle altre circostanze in cui è presente una corrente elettrica; ma preferiamo studiare prima una serie di fenomeni che si osservano all'interno di un circuito chiuso e che sono indipendenti dalla sorgente della corrente, cioè dal modo in cui essa è generata. Ciò ci permetterà di orientarci nella teoria dell'origine di una corrente, tanto nel caso della corrente idroelettrica, di cui abbiamo già considerato le condizioni di produzione, quanto in tutte quelle in cui può manifestarsi il campo magnetico della corrente elettrica e che saranno oggetto del Capitolo XI.

Si osservano all'interno di un circuito chiuso, percorso da una corrente stazionaria, costante, una serie di fenomeni molto importanti, di cui ci accingiamo ad affrontare lo studio. Questi fenomeni sono talvolta designati con il nome di azioni di corrente, ma questa espressione è scelta male, poiché evoca l'idea del tutto definita che la corrente è qualcosa di già dato, che produce nel circuito questo o quel fenomeno. Quando notiamo contemporaneamente l'esistenza di una corrente nel circuito e la produzione di un determinato fenomeno nello stesso circuito, non possiamo considerare a priori il fenomeno osservato come necessariamente il risultato dell'azione della corrente. È infatti possibile che questo fenomeno sorga contemporaneamente alla corrente, come effetto di una certa causa prima che è anche la sorgente della corrente. Inoltre, il fenomeno che ci appare come un'azione della corrente può effettivamente essere la causa stessa che produce la corrente. Non c'è dubbio che, in certi casi, il fenomeno rappresenti effettivamente il risultato del passaggio della corrente elettrica nei corpi che costituiscono il circuito; ma, quando non si vuole risolvere in anticipo il problema dei rapporti reciproci tra la corrente elettrica e i fenomeni osservati nel circuito, non si deve parlare delle azioni della corrente.

I fenomeni più importanti osservati in un circuito sono fenomeni termici e fenomeni chimici. Considereremo in questo capitolo i primi; ai secondi sarà dedicato il capitolo successivo.

Abbiamo già determinato il lavoro svolto dalle forze elettriche, in una porzione di un circuito chiuso, quando l'elettricità scorre da un punto ad alto potenziale ad un altro a potenziale inferiore. Abbiamo poi valutato la quantità di calore  $Q$  equivalente a questo lavoro,

$$Q = A(V_1 - V_2) It = AI^2 Rt = \frac{A(V_1 - V_2)^2 t}{R}$$

dove  $I$  indica l'intensità della corrente,  $R$  la resistenza della porzione considerata del circuito,  $V_1 - V_2$  la differenza di potenziale delle estremità della sezione,  $t$  il tempo,  $A$  l'equivalente termico del lavoro. Se  $I$  è espressa in ampere,  $R$  in ohm,  $V_1 - V_2$  in volt,  $t$  in secondi,  $Q$  in joule ( $1 \text{ joule} = 10 \text{ Merg} = 0,24 \text{ grammo} - \text{calorie}$ , si ha  $A = 1$ ). Si ottengono quindi, per la quantità di calore  $Q$  ceduta in una sezione del circuito, le seguenti espressioni,

$$Q = (V_1 - V_2) It = I^2 Rt = \frac{(V_1 - V_2)^2 t}{R} \text{ joule} \quad (9.0.1)$$

$$Q = 0,24 (V_1 - V_2) It = 0,24 I^2 R t = 0,24 \frac{(V_1 - V_2)^2 t}{R} \text{ grammo - calorie} \quad (9.0.2)$$

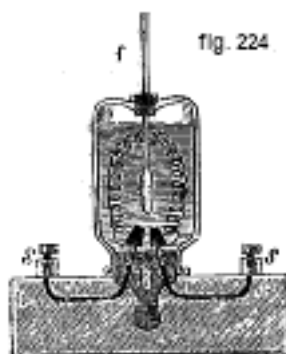
Indicheremo ancora una formula utilizzata nella pratica. Sia  $l$  la lunghezza del conduttore espressa in  $cm$ ,  $s$  l'area della sezione in  $mm^2$ ,  $\rho$  la resistenza specifica (che è uguale a 1 per Hg); la quantità di calore liberata in un minuto è uguale a

$$Q = 0,13703 I^2 \frac{l \rho}{s} \text{ grammo - calorie} \quad (9.0.3)$$

dove  $I$  è espresso in ampère.

È necessario aggiungere che la porzione considerata del circuito deve essere omogenea, poiché si producono, nei punti in cui sostanze di natura differente sono a contatto, fenomeni particolari di cui tratteremo in seguito. L'uguaglianza  $Q = I^2 R t$  si traduce con la legge seguente: *La quantità di calore, che è emessa in una parte omogenea di un circuito chiuso, è proporzionale al quadrato dell'intensità di corrente, alla resistenza del tratto considerato e al tempo.*

Questa legge è stata stabilita teoricamente da Clausius (1852), ma era stata trovata sperimentalmente ben prima da Joule (1841); E. Becquerel (1843) l'ha verificata con un metodo un poco più esatto; le ricerche più precise e complete che ne hanno mostrato il rigore sono dovute a E. Lenz (1844). Sarebbe giusto ricordarla, come in Russia, la legge di Joule e di Lenz. Il calore, che si libera in un circuito chiuso conformemente alla legge precedente, si chiama il calore di Joule.



Lo strumento utilizzato da Lenz nei suoi esperimenti, è rappresentato in figura 224. Un vaso di vetro, il cui fondo è forato si trova ruotato verso l'alto, è fissato a una piattaforma di legno; attraverso il tappo in vetro B passano due fili spessi, unitamente alle viti di pressione  $ss$  che servono per la messa in circuito; all'interno del vaso di vetro, si possono attaccare, alle estremità di questi due fili, vari fili più sottili di Pt o di altro metallo. Si versa, nel vaso, dell'alcool di cui si misura la temperatura con il termometro  $f$ . Variando l'intensità della corrente, nonché la resistenza del filo posto nel recipiente, e misurando il tempo al termine del quale la temperatura sale di  $1^\circ$ , Lenz ha potuto verificare l'esattezza della legge sopra formulata. Altri esperimenti sono stati condotti su conduttori solidi da Botto, Romney, Robinson, Jahn, Dieterich, H. Weber, ecc. Tra questi autori, Jahn e Dieterich hanno misurato  $Q$  usando il calorimetro di ghiaccio di Bunsen. Dieterich ha utilizzato il riscaldamento dei fili per determinare l'equivalente meccanico del calore e H. Weber per misurare la resistenza di questi fili. Sebbene Dieterich e H. Weber siano partiti dall'ipotesi dell'esattezza della legge Joule-Lenz, hanno tuttavia ottenuto, tra gli altri risultati delle loro ricerche, una verifica indiretta della legge stessa.

Il lavoro di studiosi precedenti (Joule, Becquerel, Jahn) ha mostrato che nei liquidi che fanno parte di un circuito, c'è anche un rilascio di calore conforme alla legge di Joule e Lenz. Per tenerne conto è necessario prendere alcune precauzioni, perché i fenomeni chimici che si verificano nei liquidi del circuito possono essere accompagnati da fenomeni termici. Ricerche svolte con cura non lasciano dubbi sulla validità della legge di Joule e Lenz per i conduttori liquidi, e

quindi, in generale, per tutte le parti di un circuito chiuso. Ciò permette di estendere le formule al calore liberato in tutto il circuito. Supponiamo che il circuito si scomponga in parti omogenee e tralasciamo i particolari fenomeni calorifici che si verificano nei punti in cui c'è contatto tra le diverse parti del circuito; si ha, per ogni parte, un'espressione della forma

$$Q_i = I^2 R_i t \text{ joule}$$

essendo  $R_i$  la resistenza della parte considerata,  $Q_i$  il calore da essa liberato. Indichiamo con  $R$  la resistenza dell'intero circuito e con  $Q$  la quantità totale di calore di Joule che essa libera; si ha  $Q = \sum Q_i = I^2 t \sum R_i = I^2 R t$ . Se si introduce, secondo la legge di Ohm ( $I = E : R$ ), la forza elettromotrice  $E$ , si ottiene

$$\begin{cases} Q = I^2 R t = I E t = \frac{E^2 t}{R} \text{ joule} \\ Q = 0, 24 I^2 R t = 0, 24 E t = 0, 24 \frac{E^2 t}{R} \text{ pic.calorie} \end{cases} \quad (9.0.4)$$

Qui  $I$  è espresso in ampère,  $R$  in ohm,  $E$  in volt,  $t$  in secondi.

Abbiamo ricordato che Dieterich aveva utilizzato il riscaldamento dei conduttori con una corrente, per determinare l'equivalente meccanico del calore. Altri lavori su questa questione (Quintus Jollius, Joule, F. Weber., Griffith) sono stati riportati nel Volume III.

Per mantenere in tutto il circuito un'intensità di corrente di 1 ampère quando la forza elettromotrice è pari a 1 volt, o una stessa intensità in una parte del circuito dove la differenza di potenziale agli estremi è di un 1 volt, è necessario un dispendio di lavoro di  $1 \text{ joule} = 10 \text{ megaergs} = 0, 102 \text{ kgm/sec}$ , cioè che la sorgente primitiva del lavoro svolto deve possedere una potenza di 1 watt o di  $1/736$  cavalli. Il watt si chiama anche ampère-volt. Si hanno, per la potenza  $Z$ , le formule

$$\begin{cases} Z = I E = I (V_1 - V_2) = I^2 R = \frac{E^2}{R} = \frac{(V_1 - V_2)^2}{R} \text{ watt} \\ Z = \frac{1}{736} I E = \frac{1}{736} I (V_1 - V_2) = \frac{1}{736} \frac{E^2}{R} = \frac{1}{736} \frac{(V_1 - V_2)^2}{R} \text{ cavalli} \end{cases} \quad (9.0.5)$$

$V_1 - V_2$  si riferisce al caso in cui si considera solo una parte del circuito,  $E$  a quello in cui si considera l'intero circuito.

Supponiamo, ad esempio, di voler chiudere una batteria di elementi di forza elettromotrice  $E$  e di resistenza  $R$ , con un filo di resistenza  $x$  tale che la quantità di calore  $Q$  liberata da questo filo sia massima. Si ha

$$Q = \frac{(V_1 - V_2)^2}{x} = \left( \frac{E x}{R + x} \right)^2 \frac{1}{x} = \frac{E^2 x}{(R + x)^2}$$

Il massimo di  $Q$  si ha per  $x = R$ ; è uguale a  $\frac{1}{4} \frac{E^2}{R}$ .

Il problema del riscaldamento dei due fili disposti in parallelo e di resistenze  $R_1$  e  $R_2$ , tra i quali si suddivide una corrente  $I = I_1 + I_2$ , ha un interesse particolare. Si ha evidentemente

$$Q = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 = R_1 I_1^2 + R_2 (I - I_1)^2$$

Uguagliando a zero la derivata prima di  $Q$  rispetto a  $I_1$ , si ottiene  $R_1 I_1 = R_2 I_2$ . La derivata seconda è uguale a  $2(R_1 + R_2)$ ; di conseguenza  $Q$  è minimo per  $R_1 I_1 = R_2 I_2$ , condizione effettivamente realizzata nella derivazione della corrente. Il minimo di  $Q$  è  $R_0 I_2$ , essendo  $R_0$  determinato dalla formula (8-30,g). Questo risultato può essere facilmente generalizzato nel caso di una derivazione multipla.

Il suono prodotto da un filo teso, nel quale viene inviata una corrente intermittente, si spiega in particolare con il suo alternarsi di riscaldamento e raffreddamento.

Il calore  $Q$  rilasciato dai conduttori che formano un circuito chiuso, li riscalda. Il grado di questo riscaldamento dipende non solo da  $Q$ , ma anche dalle proprietà dei conduttori e del

mezzo circostante. La grandezza  $Q$  dipende tra l'altro, come abbiamo visto, dalla resistenza del conduttore; di conseguenza, quando una corrente viene inviata successivamente attraverso una serie di fili dello stesso spessore, quello la cui resistenza specifica è maggiore viene generalmente riscaldato più fortemente; un filo di platino, per esempio, si scalda più di un filo di ferro, e quest'ultimo più di un filo di rame.

La temperatura alla quale un conduttore si riscalda dipende dalla conducibilità termica del gas circostante. Abbiamo descritto, nel capitolo del Volume III sulla conducibilità dei gas, un esperimento di Grove, che ha mostrato che un filo circondato da idrogeno si riscalda meno di un filo circondato da azoto, ossigeno o acido carbonico.

La questione di come l'aumento di temperatura di un filo dipenda dall'intensità della corrente e dalle dimensioni del filo è molto complessa e non può essere risolta teoricamente con esattezza, poiché le leggi del raffreddamento non sono note in modo abbastanza preciso. Il problema è reso ancora più difficile dal fatto che la resistenza  $R$  del filo aumenta contemporaneamente alla temperatura, che può agire sull'intensità  $I$  della corrente nel circuito; inoltre la variazione di  $R$  fa variare  $Q$ , e in modo particolarmente importante se  $I$  viene mantenuto costante.

Quando si suppone  $I$  dato e invariabile, si arriva al seguente risultato teorico. Siano  $l$  la lunghezza,  $d$  lo spessore,  $h$  la conducibilità termica esterna,  $\rho$  la resistenza specifica del filo,  $T_0$  la temperatura del mezzo ambiente,  $T$  la temperatura cercata alla quale il filo viene portato. Questa temperatura è raggiunta quando la quantità di calore  $Q = I^2 R$  ceduto dal filo nell'unità di tempo è uguale alla quantità di calore  $Q'$  ceduta dalla superficie  $\pi dl$ ; si ha

$$Q' = C\pi dlhf(T, T_0)$$

essendo  $C$  un fattore di proporzionalità. Ma si ha inoltre  $R = \frac{4\rho l}{\pi d^2}$ ; si può quindi porre  $\rho = \rho_0 [1 + \alpha(T - t_0)]$ , dove  $\rho_0$  è la resistenza specifica alla temperatura  $T_0$ . Portando  $\rho$  in  $R$  e eguagliando le grandezze  $Q$  e  $Q'$ , si ottiene

$$\frac{4l\rho_0 I^2}{\pi d^2} [1 + \alpha(T - t_0)] = C\pi dlhf(T, T_0)$$

Se ne deduce, indicando con  $k$  un nuovo fattore di proporzionalità,

$$\frac{f(T, T_0)}{1 + \alpha(T - t_0)} = \frac{k\rho_0 I^2}{hd^2} \quad (9.0.6)$$

Per aumenti di temperatura molto piccoli, su può scrivere che il membro di sinistra è uguale all'aumento di temperatura  $T - T_0$ . Qualunque sia la forma della funzione  $f(T, T_0)$ , il primo membro dell'uguaglianza (4) rimane invariato, al variare del filo ( $\rho_0, h$  o  $d$ ) e dell'intensità della corrente, si ha lo stesso aumento di temperatura da  $T_0$  a  $T$ . Si ottiene quindi lo stesso riscaldamento del filo, quando la condizione

$$\frac{\rho_0 I^2}{hd^3} = \text{cost} \quad (9.0.7)$$

è soddisfatta.

Ad esempio, fili della stessa sostanza, ma di diverso spessore  $d$ , si riscaldano ugualmente, quando il quadrato dell'intensità  $I$  della corrente aumenta in proporzione al cubo del diametro  $d$  del filo, oppure quando

$$I = Cd^{\frac{3}{2}} \quad (9.0.8)$$

Per correnti sufficientemente intense, i fili di metalli difficilmente fondibili iniziano a diventare incandescenti. J. Müller, Zöllner e Waltenhofen hanno studiato come varia l'intensità luminosa in funzione di  $I$  e di  $d$ ; ma sono arrivati a risultati discordanti. J. Müller ha trovato che si ottiene la stessa quantità di luce emessa dall'area unitaria di un filo di data sostanza, quando

l'intensità  $I$  della corrente è proporzionale al diametro  $d$  del filo. Zöllner ha preso anche fili di diverso spessore  $d$ , illuminando con essi una lastra di vetro opaco e determinando le intensità  $I$  della corrente, per le quali si ottenevano gli stessi illuminamenti del vetro opaco, cioè per i quali la superficie totale del filo emetteva la stessa quantità di luce; ha riconosciuto che, in queste condizioni,  $I$  deve aumentare proporzionalmente a  $d$ , il che è ovviamente in completo disaccordo con il risultato di Müller.

Per fondere un filo, lo si deve scaldare ad una determinata temperatura; il rapporto che esiste tra l'intensità di corrente  $I$  necessaria per la fusione e il diametro  $d$  è dato dalla formula (4,b). Prece ha determinato il valore numerico del coefficiente  $C$  per numerosi metalli. Ha trovato che, per  $d = 1\text{ mm}$ , l'intensità  $I$  della corrente espressa in ampère assume i seguenti valori:

Cu	Al	Pt	argentana	Fe	Sn	Pb
$I = 80,0$	59,2	40,8	40,4	24,1	12,8	10,8 ampère

La proprietà dei fili di poter essere portati al rosso da una corrente è sfruttata in particolare per l'accensione delle mine, oltre che in chirurgia (trattamento galvanocaustico).



L'applicazione più importante dell'incandescenza per la corrente si trova nell'illuminazione elettrica, il cui studio non può essere fatto qui, perché appartiene al campo dell'ingegneria elettrica. Esistono oggi, come sappiamo, due principali metodi di illuminazione elettrica, uno che utilizza lampade ad arco dove la sorgente luminosa è costituita dall'arco voltaico, l'altro lampade a incandescenza. Parleremo dell'arco voltaico nel capitolo sulle scariche elettriche. Una lampada ad incandescenza (fig. 225) è costituita da un'ampolla di vetro, solitamente a forma di pera, in cui si realizza il vuoto più perfetto possibile. C'è un filamento di carbonio, la cui lunghezza, spessore e forma differiscono notevolmente a seconda della destinazione della lampada. L'idea primaria dell'incandescenza di una sottile bacchetta di carbonio nel vuoto si deve all'ingegnere russo Ladiguine. La fabbricazione di filamenti di carbonio, sufficientemente fini e nello stesso tempo sufficientemente duri, è stata effettuata per la prima volta da Edison. Oggi si ottengono con sostanze organiche carbonizzate, ad esempio con carta, fibre vegetali, ecc. Le lampade sono caratterizzate dalla loro intensità luminosa, ad es. dal numero di candele che forniscono in illuminamento normale e dalla differenza di potenziale in volt che deve esistere alle estremità del filamento di carbonio per produrre questa incandescenza normale. Si parla, ad esempio, di lampade da 100 volt, 16 candele. La resistenza del filamento di carbonio è in generale molto grande e può raggiungere alcune centinaia di ohm; la resistenza del filamento incandescente è circa la metà della sua resistenza alla temperatura ordinaria. La potenza  $Z$  assorbita dalla lampada è determinata da una delle formule (3). Le ricerche di Voit, H. F. Weber e altri hanno mostrato che l'intensità luminosa emessa da una lampada aumenta approssimativamente in proporzione al cubo della potenza assorbita.

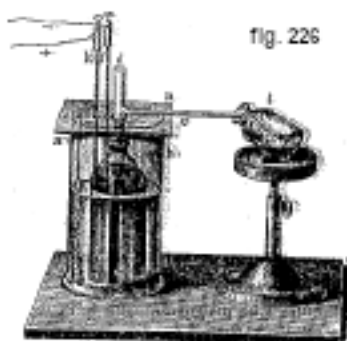
Negli ultimi tempi si è fatto grande uso della lampada Nernst, dove il filamento di carbonio è sostituito da una sottilissima bacchetta, la cui principale parte costitutiva è l'ossido di magnesio,

che non conduce elettricità a temperatura ordinaria. Il riscaldamento preliminare di questa bacchetta si ottiene facendo passare la corrente attraverso un filo di platino avvolto su di essa; la bacchetta viene così resa conduttrice e portata all'incandescenza dalla corrente.

Ai fenomeni termici, osservati in un circuito chiuso, appartengono anche i fenomeni di Peltier e di Thomson (effetto Thomson); li considereremo contemporaneamente ai fenomeni termoelettrici.

## 2. Endosmosi elettrica. Moto di particelle in sospensione

Si osserva, in un circuito chiuso, un fenomeno puramente meccanico molto interessante, il moto di un liquido attraverso un setto poroso o in un tubo stretto, e quasi sempre nella direzione da noi scelta per quella della corrente elettrica. È stato scoperto a Mosca da Reuss (1807); Porret, Becquerel e altri ancora l'hanno confermato e riprodotto in vari modi. Fu studiato per la prima volta in dettaglio da G. Wiedemann (1852), che ne diede le leggi; esporremo le ricerche di quest'ultimo fisico.

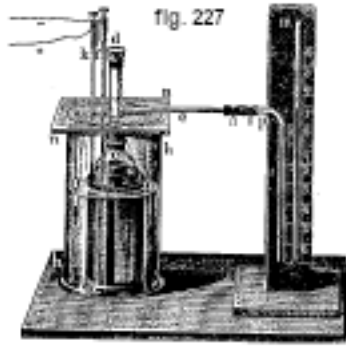


G. Wiedemann utilizzò due apparecchi, il primo dei quali è rappresentato dalla figura 226. Il vaso poroso *a*, in argilla cruda, è chiuso ermeticamente in alto dalla campana di vetro *c*, al cui collo è disposto il tubo *d* provvisto di un ramo laterale *e*. Dentro *a* c'è un cilindro di rame o di platino, da cui parte il filo *f* che attraversa la parete della campana di vetro *c*. Il vaso *a* è posto in un grande cilindro *h*, contenente un secondo cilindro metallico *i* al quale è saldato il filo *k*. I vasi *A* e *a* contengono acqua o altro liquido da studiare. Appena l'apparecchio viene introdotto nel circuito, in modo che la corrente passi da *i* a *c* attraverso il vaso poroso, il liquido sale nel tubo e fluisce nel vaso *l* attraverso il ramo *e*. Per modificare l'area *s* della parete porosa attraverso la quale passa il liquido, per così dire sotto pressione, Wiedemann ha ricoperto una parte della parete del vaso poroso con uno strato di resina; per modificare lo spessore *d* della parete, raschiò gradualmente gli strati esterni di questa parete.

Wiedemann determinò dapprima come la quantità in peso *m* di acqua, che attraversa la parete porosa in un determinato tempo, dipenda dall'intensità *I* della corrente, dall'area *s* e dallo spessore *d* della parete. Gli esperimenti mostrano che la quantità di liquido *q* è proporzionale all'intensità *I* della corrente e non dipende né dall'area *s* né dallo spessore *d* della parete del vaso poroso.

Il primo apparato di Wiedemann fa emergere la caratteristica del fenomeno, che è stato chiamato, in maniera poco felice, endosmosi elettrica. La parete porosa di argilla cruda può essere sostituito da una camera d'aria, sabbia fine, ecc.; migliore è il liquido che conduce la corrente, più debole è il fenomeno.

Per misurare la pressione *p*, sotto l'influenza della quale avviene il movimento del liquido, G. Wiedemann ha costruito un secondo strumento, che differisce dal primo solo per il fatto che il tubo laterale *e* è provvisto di un manometro a mercurio (fig. 227), essendo il tubo *d* chiuso alla sua estremità superiore.



Il vaso  $a$  conteneva una soluzione di solfato di rame. Si vede allora che la pressione idrostatica  $p$  è proporzionale all'intensità  $I$  della corrente, inversamente proporzionale all'area  $s$  e proporzionale allo spessore  $d$  della parete del vaso poroso: per diverse soluzioni di solfato di rame, la pressione  $p$  è, entro certi limiti, approssimativamente proporzionale alla resistenza specifica  $\rho$  della soluzione.

I due risultati ottenuti da Wiedemann sono espressi dalle seguenti formule:

$$q = aI \quad (9.0.1)$$

$$p = b \frac{Id}{s} \quad (9.0.2)$$

$a$  e  $b$  sono due fattori di proporzionalità e  $q$  è indipendente da  $s$  e  $d$ . Queste due formule concordano bene tra loro, se la causa che produce la pressione  $p$  va ricercata nella capillarità dei percorsi per i quali scorre il liquido; tale pressione deve infatti essere proporzionale alla lunghezza di tali percorsi, cioè allo spessore  $d$  della parete porosa, e proporzionale alla densità della corrente che attraversa tale parete, cioè alla grandezza  $I/s$ . È inoltre chiaro che  $q$  deve essere proporzionale a  $p$  e  $s$ ; per la legge di Poiseuille, la quantità di liquido  $q$ , per una data pressione, è inversamente proporzionale alla lunghezza del tubo capillare, cioè allo spessore  $d$  della parete. Si deve quindi avere per  $q$  una formula come la seguente:

$$q = b_1 \frac{ps}{d}$$

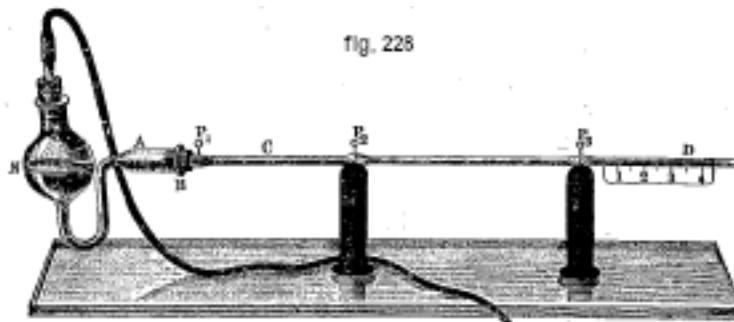
introducendo il valore (5,a) di  $p$ , si ottiene la (5). Supponiamo che  $p$  sia effettivamente proporzionale alla resistenza specifica  $\rho$ , cioè che si possa scrivere

$$p = cI \frac{\rho d}{s} \quad (9.0.3)$$

La quantità  $\rho d/s$  è la resistenza del liquido all'interno della parete porosa; ma la grandezza  $I\rho d/s$  è uguale alla differenza  $V_1 - V_2$  dei potenziali di due lati della parete e si ottiene pertanto la formula

$$p = c(V_1 - V_2) \quad (9.0.4)$$

*La pressione idrostatica è proporzionale alla differenza di potenziale dei due lati della parete.* Freund ha studiato come la grandezza  $q$  dipende dalla concentrazione della soluzione.



Quincke (1861) ha mostrato per primo che, nei tubi capillari, si produce anche un moto dei liquidi introdotti nel circuito. Lo strumento di Quincke (fig. 228) comprende uno stretto tubo di vetro CD, collegato al serbatoio N che contiene il liquido da studiare. Il tubo ha una leggera inclinazione rispetto all'orizzontale, essendo l'estremità D più alta dell'estremità C. Insufflando dell'aria nel recipiente N, si può riempire il tubo del liquido fino a una certa divisione della scala D. Se, per due dei tre fili di platino  $P_1, P_2, P_3$ , saldati nel tubo, si fa passare, nella direzione CD, la scarica di una bottiglia di Leida o la corrente di una batteria, il liquido si muove nella stessa direzione. Esperimenti con correnti elettriche hanno mostrato che la risalita del liquido, misurata dallo spostamento dell'estremità della colonna di liquido in D, è proporzionale all'intensità della corrente, alla lunghezza della colonna di liquido in ingresso nel circuito, cioè alla forza elettromotrice agente su di esso, ed inversamente proporzionale al quadrato del raggio del tubo. Anche la parete del tubo ha un'influenza; in un tubo d'argento, l'aumento è minore che in un normale tubo di vetro.

Si osserva una risalita solo nei liquidi che sono cattivi conduttori; dell'acqua, contenente lo 0,1% di NaCl o lo 0,04% di  $H^2SO^4$ , non manifestano più alcun movimento.

Quincke fece la notevole osservazione che alcuni liquidi si muovono nella direzione opposta alla direzione della corrente. Questo è particolarmente vero per uno degli alcoli, oltre che per l'essenza di trementina in un tubo ricoperto all'interno di gommalacca, ecc.

Van der Ven (1901) ha segnalato una circostanza che potrebbe influenzare i risultati degli esperimenti precedenti: il passaggio di una corrente in una soluzione produce una variazione della concentrazione, che dovrebbe favorire il movimento del liquido osservato. In una serie di lavori (dal 1902 al 1905) studiò varie soluzioni di sali e ne trovò un certo numero (azotati in particolare) che sono trasportati in senso contrario a quello della corrente. In due successive memorie (1906, 1907) indicò che, tra i 14 sali studiati, i solfati si muovono solo nella direzione della corrente elettrica, mentre i nitrati, i clorati e anche l'acetato di piombo si muovono nella direzione opposta della corrente elettrica.

Cruse (1905) ha studiato il passaggio dell'acqua distillata attraverso una parete di argilla porosa, in funzione della temperatura (da 10° a 70°) e dell'intensità della corrente. Ha trovato che la velocità del flusso dell'acqua, per un'intensità costante della corrente, aumenta quando la temperatura supera i 10°. Da 35 a 40°, la velocità passa per un massimo; a 50°, dapprima più rapidamente (fino a 50°), poi più lentamente. A 50° la velocità è la stessa che a 10°. Cruse ha inoltre riconosciuto che la formula (5) non vale per grandi valori di  $I$ . La grandezza  $a$  aumenta dapprima con  $I$ , raggiunge un massimo per poi diminuire.

Quando si introduce, in un circuito, un liquido dove le particelle sono in sospensione, queste particelle possono muoversi. Questo fenomeno fu osservato per la prima volta da Reuss, poi da Faraday, Armstrong, ecc. Quincke lo ha studiato attentamente. Ha notato che le particelle sospese nell'acqua si muovono in direzione opposta alla direzione della corrente, siano esse particelle solide, liquide o gassose (bolle). Non entreremo in ulteriore dettaglio.

I fenomeni di endosmosi elettrica sono strettamente correlati alla comparsa di una differenza di potenziale quando un liquido viene fatto passare sotto pressione attraverso un setto poroso o un tubo capillare, fenomeno già studiato. Possiamo ora aggiungere che la direzione della corrente, che si ottiene collegando due elettrodi immersi in un liquido in movimento (vedi fig. 101 e 102), è sempre opposta a quella della corrente che produrrà il movimento del liquido; in altre parole, quando un liquido scorre attraverso canali stretti, si produce una corrente che si oppone a questo movimento. Il lavoro che si deve spendere per superare questa resistenza, costituisce la sorgente di energia della corrente. Questa corrente è talvolta chiamata corrente capillare.

Una spiegazione teorica dell'endosmosi elettrica, del moto delle particelle in sospensione e del fenomeno delle correnti capillari fu data per la prima volta da Quincke. Si basa sul presupposto che il liquido e la parete del tubo capillare esiste una differenza di potenziale, la parete essendo quasi sempre elettrizzata negativamente, il liquido positivamente. Sulla superficie interna del



tubo capillare si forma un doppio strato elettrico, l'elettricità positiva essendo sulle particelle del liquido. Se la corrente è chiusa, quest'ultima elettricità è messa in moto dalle stesse forze elettriche che producono la corrente elettrica.

Il liquido deve essere un cattivo conduttore, perché è solo in questo caso che le sue particelle si muovono contemporaneamente alle cariche di elettricità libera che sono su di esse. Le particelle in sospensione vengono elettrizzate negativamente dal loro contatto con il liquido; per questo si muovono in verso contrario alla corrente. Helmholtz (1879) ha fornito una teoria matematica completa di questi fenomeni. Dorn ha verificato sperimentalmente alcune conseguenze di questa teoria. Fu sviluppata da Lamb (1888) e da M.me Smoluchowski (1903), che ne hanno dato una variante.

Recentemente è stata data un'applicazione tecnica alla proprietà posseduta dalla corrente elettrica di trasportare liquidi attraverso i corpi per essiccare la torba e simili sostanze porose. Il Conte v. Schwerin (1903) e Nernst (1909) hanno fatto uno studio pratico e teorico di questo metodo.

### **3. Influenza della corrente sulle proprietà dei conduttori solidi**

Occorre distinguere tra le variazioni temporanee delle proprietà della sostanza, che si verificano mentre è attraversata dalla corrente, e le variazioni permanenti che si verificano per effetto di un'azione prolungata della corrente.

La questione dell'influenza della corrente elettrica sulle dimensioni, cioè sulla lunghezza o sul volume dei conduttori, è stata a lungo discussa. Gli esperimenti di Edlund, Streintz, Doppler e in parte anche di F. Exner avevano dato risultati contraddittori, e furono solo le ricerche di Blondlot (1878) e quelle di Righi, a dimostrare che la corrente non produce variazione nella dimensioni di un conduttore, eccetto, naturalmente, i cambiamenti che derivano dal riscaldamento.

Wertheim ha studiato le proprietà elastiche di un filo quando è percorso da una corrente elettrica. Ha scoperto che la resistenza alla rottura diminuisce e così anche il modulo di Young. Streintz e Mebius non hanno osservato il verificarsi di tale risultato. Dufour ha riconosciuto che la resistenza di un filo di rame diminuisce e quella di un filo di ferro aumenta, dopo un prolungato passaggio di corrente.

La resistenza elettrica dei fili aumenta a poco a poco, come stabilito da Quintus Icilius, se vengono usati come conduttori di corrente.

È difficile stabilire in che misura le variazioni che si osservano nelle proprietà dei conduttori siano l'effetto immediato della corrente e in che misura siano la conseguenza di un permanente, seppur lieve, riscaldamento.

Ai fenomeni, che si verificano in un circuito chiuso, appartengono anche gli effetti fisiologici. Il loro studio non rientra nell'ambito di questo libro, e ci limiteremo a dare qualche indicazione su questo argomento trattando di correnti alternate. Gli effetti fisiologici delle correnti continue sono utilizzati in elettroterapia.



# 10. FENOMENI CHIMICI ALL'INTERNO DI UN CIRCUITO. ELETTROLISI. TEORIA DELLA CORRENTE IDROELETTRICA

## 1. Introduzione. Leggi dell'elettrolisi

Il secondo gruppo di fenomeni osservati in un circuito chiuso sono fenomeni chimici. Ricordiamo innanzitutto brevemente la terminologia utilizzata e che abbiamo già conosciuto.

Le sostanze in cui si osservano fenomeni chimici quando vengono introdotte in un circuito sono chiamate *elettroliti*. La loro introduzione nel circuito avviene solitamente nel modo seguente: nell'elettrolita, che è quasi sempre liquido, si immergono due elettrodi, l'anodo (elettrodo positivo) e il catodo (elettrodo negativo) ad una certa distanza l'uno dall'altro. Nella maggior parte dei casi, le placche metalliche vengono utilizzate come elettrodi. Il fenomeno che si verifica nell'elettrolita immesso nel circuito chiuso si chiama *elettrolisi*. Da un punto di vista puramente esteriore, il fenomeno dell'elettrolisi consiste nella comparsa o, come si dice, nella separazione, sulla superficie degli elettrodi, di determinate sostanze che spesso non sono altro che le parti chimicamente diverse che compongono l'elettrolita. Queste sostanze che vengono separate nell'elettrolisi sono chiamate ioni; sull'anodo si forma l'anione, sul catodo il catione. Così, nell'elettrolisi di una soluzione acquosa di  $ZnCl^2$  tra elettrodi di platino, l'anione Cl appare sull'anodo e il catione Zn appare sul catodo. Considerati esternamente l'anione e il catione rappresentano i prodotti della scomposizione dell'elettrolita e, va aggiunto, di una scomposizione prodotta dal passaggio della corrente attraverso l'elettrolita.

Abbiamo parlato, nel volume I, del concetto di equivalenza di atomi e gruppi di atomi, e abbiamo visto che è necessario distinguere da una parte il peso atomico e il peso molecolare, dall'altra parte il peso equivalente. Sono monovalenti H, K, Na, Cl, Br,  $AzH^4$ , OH, CAz,  $BrO^3$ , ecc; tutti questi atomi o gruppi di atomi sono equivalenti ad un atomo di idrogeno, cioè possono unirsi ad esso per sostituirlo. Sono bivalenti Ba, Sr, Zn, Cu, O,  $SO^4$ ,  $CO^3$ , ecc. Il peso molecolare di ciascun gruppo è uguale alla somma dei pesi atomici che entrano nella sua composizione. Il peso equivalente è pari alla  $k$  -esima parte del peso atomico o del peso molecolare, se il gruppo di atomi ha la valenza  $k$  o se il composto si decompone in ioni di valenza  $k$ . Si ha, ad esempio, per i gruppi  $AzH^4$ , OH,  $AzO^3$ , ecc. oppure per i composti NaCl,  $AzH^4Cl$ ,  $AgAzO^3$ , NaHO,  $KMnO^4$ , ecc., un peso equivalente pari al peso molecolare ( $k = 1$ ); ma in altri casi, si hanno i pesi equivalenti seguenti  $\frac{1}{2}O = 8$ ;  $\frac{1}{2}SO^4 = 48,03$ ;  $\frac{1}{2}H^2SO^4 = 49,04$ ;  $\frac{1}{2}CuSO^4 = 79,83$ ;  $\frac{1}{3}H^3PO^4$ ,  $\frac{1}{4}Na^4P^2O^7$ ,  $\frac{1}{4}C = 2,99$ ,  $\frac{1}{5}Na^5IO^6$ ,  $\frac{1}{6}Al^2Cl^6$ , ecc.

Il grammo equivalente pesa tanti grammi quante sono le unità del peso equivalente.

Non va dimenticato che si parla di equivalenti solo relativamente a ioni e a composti scomponibili in ioni con nomi opposti (anione e catione).

Uno stesso elemento, anche un determinato gruppo di atomi, possono avere valenze diverse a seconda delle combinazioni. Il rame è quindi monovalente nella combinazione CuCl, per cui il suo peso equivalente è uguale al peso atomico  $Cu = 63,18$ ; in  $CuCl^2$ , il rame è bivalente e il

suo peso equivalente  $\frac{1}{2}Cu = 31,59$ . Lo ione Fe può essere bivalente e trivalente, Sn bivalente e tetravalente, ecc.

Secondo la definizione proposta da Hittorf, possono essere elettroliti solo le sostanze che, nelle reazioni, effettuano tra loro un doppio scambio, dove le parti costituenti scambiate svolgono proprio il ruolo di ioni; la chimica chiama in generale tali corpi dei sali, contando anche pure tra essi le sostanze dove uno degli ioni è l'idrogeno. La denominazione di sale attribuita agli elettroliti non esaurisce completamente la questione; ciò risalta già dal fatto che non esiste limite ben preciso tra i sali e i non sali.

H, i metalli,  $AzH^4$ , e in generale tutti i corpi che formano un elettrolita con Cl,  $AzO^3$  o un altro radicale acido, svolgono il ruolo di cationi nell'elettrolisi.

Gli aloidi, OH, i radicali acidi come  $AzO^3$ ,  $SO^4$ ,  $PO^4$ ,  $ClO^3$ , ecc., in genere tutti i corpi che possono formare un elettrolita con H, Na o un metallo, svolgono il ruolo di anioni. Indicheremo in seguito alcuni esempi meno semplici.

Vedremo che gli ioni, di cui è composto un elettrolita, sono effettivamente separati agli elettrodi in casi relativamente rari. Alla loro comparsa agli elettrodi, gli ioni entrano molto spesso in reazioni diverse, puramente chimiche, ad esempio con il solvente, con la sostanza dell'elettrodo, con l'elettrolita stesso, ecc. Come risultato di queste reazioni, che sono considerate come fenomeni secondari nell'elettrolisi, in realtà compaiono sugli elettrodi non gli ioni, di cui l'elettrolita è composto, ma altre sostanze. Supponiamo per esempio, che si sia introdotto nel circuito una soluzione acquosa  $Na^2SO^4$ ; gli ioni sono  $2Na$  e  $SO^4$ . Il sodio reagisce immediatamente con il solvente, cioè con l'acqua, conformemente all'equazione  $2Na + 2H^2O = 2NaHO + H^2$ ; si forma al catodo della lisciva di soda e idrogeno. All'anodo, si produce la reazione  $SO^4 + H^2O = H^2SO^4 + O$ , quando l'anodo è di platino, carbone, ecc.; se è in rame, ad esempio, si ottiene la reazione  $SO^4 + Cu = CuSO^4$  e vi è dissoluzione dell'anodo con formazione di solfato di rame. Così, invece degli ioni  $Na^2$  e  $SO^4$ , appaiono i composti  $H^2 + 2NaHO$  e  $H^2SO^4 + O$  o  $CuSO^4$ . Studieremo in seguito con maggior dettaglio, i diversi casi di azioni secondarie nell'elettrolisi.

Le due leggi quantitative dell'elettrolisi sono state scoperte da Faraday (1833-34).

Legge I. *La quantità in peso di ioni, che compaiono sugli elettrodi per l'introduzione di un elettrolita in un circuito, è proporzionale alla quantità di elettricità che percorre il circuito.* Questa quantità  $\eta$  è uguale al prodotto  $It$  dell'intensità di corrente per il tempo. Misureremo tale quantità in coulomb e possiamo dire che a ogni coulomb che fluisce corrisponde una quantità ben determinata in peso di ioni che si separano.

Legge II. *Le quantità in peso di ioni differenti, che si separano agli elettrodi per il passaggio nel circuito di una stessa quantità di elettricità, sono proporzionali ai pesi equivalenti di questi ioni.*

Da queste due leggi deriva una serie di conseguenze molto importanti.

1. La quantità in peso dello ione, che si separa nell'elettrolisi, non dipende dall'elettrolita, nella cui composizione entra questo ione, purché la sua valenza rimanga la stessa in tutti i casi. Quando una determinata quantità di elettricità scorre nel circuito, si separa sempre la stessa quantità in peso di H, Ag, K, Na, Cl,  $SO^4$ , OH, ecc. Ma, ad esempio, la quantità di rame separata nell'elettrolisi di  $CuCl$  è doppia rispetto all'elettrolisi di  $CuCl^2$ , perché il peso equivalente è, nel primo caso, uguale a Cu (cioè peso atomico) e, nel secondo, a  $\frac{1}{2}Cu$ ; al contrario, la quantità di cloro rilasciata è la stessa in entrambi i casi.

2. Un grammo equivalente di uno ione qualsiasi si separa sull'elettrodo, quando fluisce nel circuito una ben determinata quantità di elettricità che si indica con la lettera F per richiamare il nome di FARADAY. Si ha:

$$F = 96540 \text{ coulomb} \quad (10.0.1)$$

3. La quantità di ioni separati non dipende dalla natura del solvente né della sostanza degli elettrodi; né dipende dai fenomeni secondari che possono accompagnare l'elettrolisi.

4. La quantità di ioni separati non dipende dallo stato in cui si trova l'elettrolita, se è fuso o disciolto.

5. La quantità di ioni separati non dipende dall'intensità  $I$  della corrente nel circuito, a condizione che il prodotto di questa intensità per il tempo, durante il quale avviene l'elettrolisi, rimanga lo stesso.

Sono stati intrapresi numerosi lavori per verificare le due leggi dell'elettrolisi; ma tutte queste ricerche sono ormai solo di interesse storico e ne citeremo solo alcune molto brevemente.

La questione seguente è particolarmente importante: esiste negli elettroliti una conducibilità metallica, anche molto debole, oltre alla conducibilità elettrolitica; in altre parole, parte della corrente, anche molto piccola, può attraversare l'elettrolita senza provocare la correlativa separazione degli ioni.

Gli accurati esperimenti di Buff hanno mostrato che l'intensità della corrente, entro ampi limiti (da 1 a 200) è proporzionale alla quantità di ioni separati, ma non ha potuto dare una risposta definitiva alla domanda. Lo stesso Faraday ammetteva la possibilità di una conducibilità metallica degli elettroliti e pensava che l'elettrolisi inizia solo con un'intensità di corrente superiore a un certo minimo. Tuttavia, il lavoro successivo ha stabilito la completa correttezza della prima legge e quindi l'assoluta assenza di conduttività metallica negli elettroliti. In un circuito comprendente un elettrolita non può esserci corrente senza elettrolisi, cioè senza comparsa di ioni sugli elettrodi a contatto con l'elettrolita. Ostwald e Nernst (1889) mostrarono, ad esempio, che nel passaggio della scarica di una bottiglia di Leida, contenente complessivamente circa  $5 \cdot 10^{-6}$  coulomb, attraverso una debole soluzione di acido solforico, si otteneva al catodo una bolla di idrogeno, di dimensioni perfettamente corrispondenti alla prima legge dell'elettrolisi.

Ma si trova una dimostrazione ancora più convincente nei fenomeni di polarizzazione, di cui abbiamo già parlato e sui quali torneremo più dettagliatamente in seguito. Un'importanza decisiva è qui attribuita agli esperimenti di Sokolow, che è riuscito a dimostrare che esiste già una polarizzazione per forze elettromotrici di 0,001 volt. Non c'è motivo di supporre che sia così raggiunto il limite al di sotto del quale cessa la polarizzazione.

Abbiamo parlato della relazione che esiste, secondo le ricerche di E. Cohn, tra la legge dell'elettrolisi e la legge di Ohm applicata agli elettroliti.

I fenomeni di elettrolisi naturalmente non dipendono in alcun modo dalla sorgente della corrente elettrica. Inoltre, la corrente estremamente debole che si ottiene quando i conduttori di una macchina elettrica ad attrito o influenza sono collegati tra loro, oppure quando i due conduttori sono messi a terra, dà anch'essa luogo a fenomeni elettrolitici. Ritter, Faraday, Riess, Andrews, Buff, Davy, Armstrong e altri lo hanno dimostrato per esperienza diretta. Ostwald e Nernst (1889) hanno mostrato che quando si produce induzione elettrostatica in un liquido, la comparsa delle due cariche sulla superficie del liquido è accompagnata da elettrolisi.

Le ricerche che molti scienziati hanno fatto con grande cura stabiliscono anche che la seconda legge dell'elettrolisi è abbastanza esatta. Abbiamo visto che, secondo questa legge, alla stessa quantità di elettricità  $F$  che percorre il circuito, corrisponde la separazione di un grammo equivalente di qualunque ione. *La quantità in peso dello ione che si separa su un elettrodo, quando un coulomb attraversa il circuito, si chiama equivalente elettrochimico di questo ione*; lo si esprime in milligrammi.

Se si indica il peso atomico o molecolare dello ione con  $m$ , la sua valenza con  $k$ , a  $F$  coulomb corrispondono  $m : k$  grammi; ciò dà per l'equivalente elettro-chimico  $p$  l'espressione

$$p = \frac{1000m}{kF} \text{ mg} \quad (10.0.2)$$

da cui

$$F = \frac{1000m}{kp} \quad (10.0.3)$$

Per le quantità in peso  $P_1$  e  $P_2$  di due ioni qualunque, che si separano con il passaggio nel circuito di uno stesso numero di coulomb, si ha

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{m_1}{m_2} \cdot \frac{k_2}{k_1} \quad (10.0.4)$$

L'ultima formula può servire per la verifica della seconda legge dell'elettrolisi, che esprime nella forma più semplice. La formula (2,a) permette di determinare la grandezza  $F$ , quando misure dirette hanno dato l'equivalente elettrochimico.

La quantità in peso  $p'$  dello ione, corrispondente a un ampère-ora (3600 coulomb), è uguale a 3600 $p$  o, in grammi, a

$$p' = \frac{3600m}{kF} g \quad (10.0.5)$$

Una verifica della seconda legge dell'elettrolisi usando la formula (2,b) è stata fatta per la prima volta da Lord Rayleigh (1884), Grey (1886) e Shaw (1887); essi hanno confrontato le quantità in peso  $P_1$  e  $P_2$  dell'argento e rame corrispondente allo stesso numero di coulomb. Ponendo  $H = 1,008$  e prendendo per argento  $m_1 = 107,93$ , per il rame  $m_2 = 63,604$  (secondo Richards), si ottiene  $P_1 : P_2 = 3,3942$  (si ha qui  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 2$ ). Gli autori citati hanno trovato per questo rapporto: Lord Rayleigh, 3,406; Gray, 3,413; Shaw, 3,3998. Il lavoro più recente, quello di Th. W. Richards e Heimrod (1902), ha dato un risultato così vicino al valore teorico, determinato con mezzi puramente chimici, che viceversa, partendo da questo risultato per valutare il peso atomico del rame, si ottiene  $Cu = 63,601$ . Questo importante lavoro dimostra definitivamente l'esattezza della seconda legge dell'elettrolisi, cioè la proporzionalità degli elettrochimici a pesi equivalenti.

Dalla seconda legge segue che basta conoscere l'equivalente elettrochimico  $p$  di uno ione qualsiasi per avere la stessa grandezza per tutti gli ioni. Le misure più importanti della grandezza  $p$  si riferiscono all'argento; è stato determinato anche per il rame e per l'idrogeno.

L'equivalente elettrochimico dell'argento è stato determinato in diverse occasioni e con la massima cura (mediante l'elettrolisi di una soluzione di  $AgAzO^3$ ). Fino a tempi recenti, i seguenti valori erano considerati i più esatti:

	$p$
Mascart (1882)	1,1156 $mg$
F. e W. Kohlrausch (1884)	1,1183
Lord Rayleigh e Mrs. Sigdwick (1884)	1,1179

Dando più credito agli ultimi due numeri, si potrebbe prendere  $p = 1,118 mg$ , da cui si deduce, usando la formula (2,a), ponendo  $k = 1$ ,  $m = 107,93$ , il valore  $F = 96538$ , invece di quello adottato sopra  $F = 96540$ . Le successive determinazioni di Potier e Pellat (1,1192), Patterson e Guthe (1,1192), Kahle (1,1183), furono effettuate fino al 1900. Tutti questi lavori, così come i precedenti, sono stati sottoposti a revisione critica da parte di Leduc. Dopo il 1900 furono pubblicate la seguenti ricerche. Dapprima quelle di Th. W. Richards e Heimrod (1902), che hanno dato per l'Ag il valore  $p = 1,1175 mg$  e per il rame

$$p = 0,32929 mg (Cu) \quad (10.0.6)$$

Pellat e Ledec (1903) hanno trovato per l'argento  $p = 1,1195 mg$ ; infine Dijk e Kunst (1904) hanno ottenuto il valore  $p = 1,11823 mg$ .

Dijk ha mostrato che riscaldando il voltmetro fino al rosso, la grandezza  $p$  non viene influenzata. In un lavoro pubblicato più tardi, (1906), Dijk è arrivato al risultato che il valore più probabile è

$$p = 1,1180 mg (Ag) \quad (10.0.7)$$

Gethe ha dato simultaneamente il valore  $p = 1,11773\text{ mg}$ , che differisce molto poco dal precedente. Recentemente, sono state pubblicate misure precise per l'Ag. F- Kohlrausch (1908) ha confermato il valore  $p = 1,1183\text{ mg}$ , ottenuto in precedenza (1884) da lui e da W. Kohlrausch; Smith, Mather e Lowry (1908, National physical Laboratory) hanno trovato  $p = 1,11827\text{ mg}$ ; Janet, Laporte e de la Gorce (1908, Laboratoire Central d'électricité) sono giunti al valore  $p = 1,11821\text{ mg}$ ; gli ultimi due fisici (1910) al valore  $p = 1,11829\text{ mg}$ , che differisce molto poco da quello degli scienziati inglesi. Si può pertanto dire ora che 1 coulomb separa una quantità di argento assai poco differente da  $1,11828\text{ mg}$ .

Il Congresso degli elettrici di Londra (1908) si è messo da un altro punto di vista, come vedremo più avanti. Ha adottato il valore

$$p = 1,11800\text{ mg} \quad (10.0.8)$$

come equivalente elettrochimico dell'argento fissato una volta per tutte e allo scopo di definire con questo numero l'ampere e il coulomb; la primitiva convenzione che tale grandezza deve essere uguale a  $0,1\text{ C.G.S.}$  pertanto scompare. I due zeri alla fine del numero hanno lo scopo di indicare che questo valore non deve mai più essere cambiato.

Bose e Conrat (1908), Jäger e Steinwehr hanno studiato le proprietà del voltmetro in argento. Eisenwehr (1911) ha compiuto lo studio delle soluzioni di AgFl e le ha trovate comode.

Osserveremo ancora che, con il passaggio di 1 coulomb nel circuito, si liberano i volumi di gas seguenti (a  $0^\circ$  e a  $760\text{ mm}$  di pressione):

$$\begin{cases} \text{idrogeno} & 0,116\text{ cm}^3 \\ \text{gas detonante} & 0,174\text{ cm}^3 \end{cases} \quad (10.0.9)$$

Si ha, per l'equivalente elettrochimico dell'idrogeno  $p(H)$ , dalla formula (2), dove bisogna porre  $m = 1$  e  $k = 1$ ,

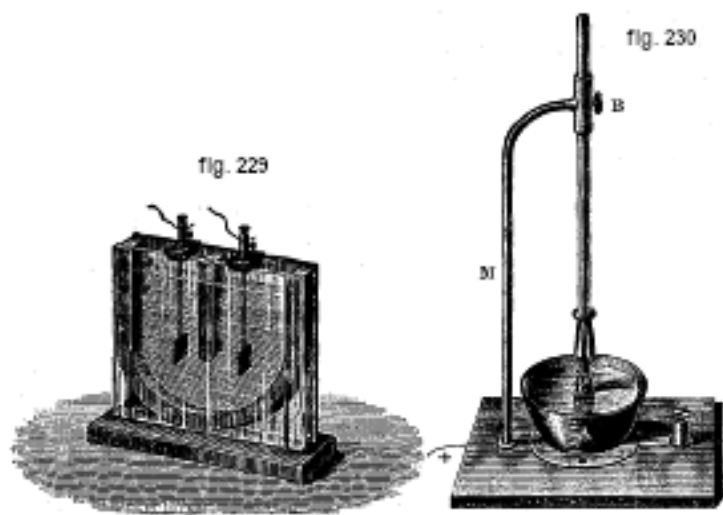
$$p(H) = \frac{1000}{F}\text{ mg} = \frac{1}{F}\text{ g} = 0,00001036\text{ g} \quad (10.0.10)$$

Lehfeldt (1908) ha trovato per il volume del gas detonante il valore  $0,17394\text{ cm}^3$  e  $F = 96590\text{ coulomb}$ .

F- Kohl rausch e H. Weber (1908) hanno cercato se l'equivalente elettrochimico dipende dalla temperatura. Hanno trovato che il coefficiente di temperatura di questa grandezza (tra  $10^\circ$  e  $70^\circ$ ), nell'elettrolisi di  $\text{NaAzO}^3$ ,  $\text{NaClO}^3$  e KBr, è certamente inferiore a  $10^{-6}$  e in quella di KI inferiore a  $10^{-7}$ . La questione se il coefficiente di temperatura sia realmente nullo non può naturalmente essere risolta sperimentalmente; la possibilità di una dipendenza dalla temperatura può essere assunta teoricamente, sulla base della nuova teoria dell'elettrone.

## 2. Alcuni casi particolari di elettrolisi

Considereremo dapprima alcuni strumenti che sono comunemente usati nell'elettrolisi. Per semplici esperimenti di lezione, può essere impiegato l'apparato rappresentato dalla fig. 229. La soluzione si trova in un tubo a U: si prendono come elettrodi dei fili o lastre di Pt o di un altro metallo, a seconda del tipo di elettrolisi voluta.



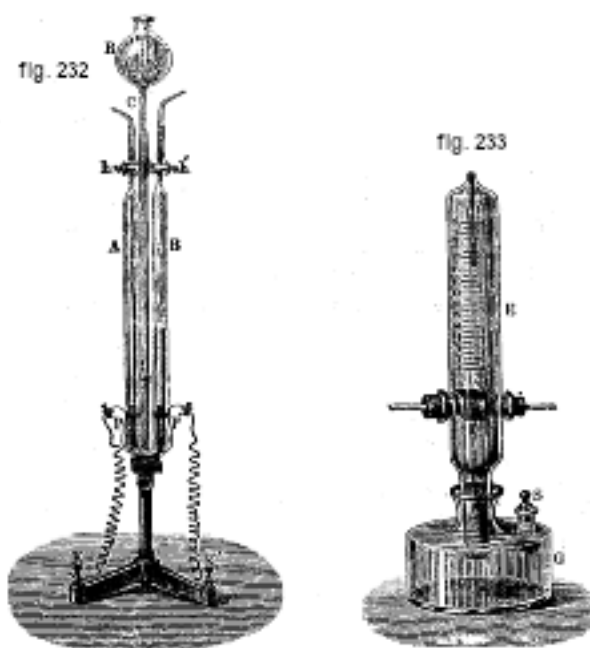
Per l'elettrolisi dell'azotato d'argento si utilizza uno strumento chiamato voltmetro ad argento; vedremo più avanti perché fu adottata questa denominazione. Esso è formato da un piatto di platino A (fig 230), contenente la soluzione di  $AgAzO^3$  e che funge da catodo. Nella soluzione, si immerge un'asta d'argento, fissata all'estremità inferiore, formando un morsetto a molla, di un'asta che può essere sollevata e abbassata. Gli estremi *b* e *c* servono ad introdurre lo strumento nel circuito. L'asta d'argento è circondata da un sacchetto di mussola, dove le particelle d'argento che si staccano dall'asta, corrose, rimangono insieme ad altri prodotti secondari che si formano all'anodo.



Se si desidera introdurre nel circuito più elettroliti uno dopo l'altro, questi vengono collegati, come mostrato in figura 231, mediante fili o sifoni riempiti di liquidi opportuni. Nell'elettrolisi di alcune soluzioni ( $H^2SO^4$ ,  $Na^2SO^4$ , KHO e altre ancora), ossigeno e idrogeno vengono rilasciati sugli elettrodi. Se si desidera raccogliere separatamente i due gas, si può utilizzare lo strumento di A. W. Hofmann (fig. 232), che consiste di tre tubi A, B e C comunicanti tra loro nella loro parte inferiore. Il tubo C di mezzo termina nella sua parte superiore in una sfera R, aperta e formante un serbatoio; i tubi laterali contengono gli elettrodi di platino P e P', collegati tramite fili alle viti di serraggio K e K'; questi tubi sono dotati di rubinetti *h* e *h'*. L'intero dispositivo è dapprima riempito con la soluzione da studiare, versata nel recipiente R, con i rubinetti *h* e *h'* aperti. Questi vengono poi chiusi e il dispositivo viene messo nel circuito. I gas si raccolgono nella parte superiore dei tubi A e B, facendo rifluire il liquido di A e B in R attraverso il tubo C. Si è rappresentato sulla figura il caso in cui P funge da anodo, P' da catodo, di modo che si raccoglie in A una certa quantità di ossigeno e in B un volume doppio di idrogeno. I tubi A e B sono graduati.

Per ottenere una miscela dei due gas, cioè il gas detonante, si può usare lo strumento di F. Kohlrausch (fig. 233), che consiste in un cilindro graduato E, nel quale vi sono gli elettrodi di platino  $p_1$  e  $p_2$ , e in alto un termometro. L'estremità inferiore del cilindro è rastremata e inserita in un vaso G, che presenta un'apertura laterale con tappo S, che deve essere tolto quando lo strumento viene introdotto nel circuito.





Per raccogliere grandi quantità di gas detonante, può essere utilizzato anche il dispositivo mostrato in fig. 234, parzialmente in sezione. Il coperchio A è attraversato dai fili *c* e *d* che conducono a due grandi piastre costituenti gli elettrodi, nonché dal tubo *b* che serve a condurre i gas all'esterno del dispositivo.

Descriveremo in seguito alcuni strumenti meno semplici, che servono allo studio dei diversi strati dell'elettrolita sottoposto ad elettrolisi.

Prima di passare all'esame di alcuni casi particolari di elettrolisi, faremo alcune osservazioni generali.



Quando su uno degli elettrodi si deve formare uno ione sotto forma di corpo solido aderente all'elettrodo, la densità di corrente, che dipende sia dall'intensità della corrente nel circuito che dalla quantità di elettrodi, non deve superare certi limiti. Limitiamoci a un esempio. Nell'elettrolisi di una soluzione  $\text{CuSO}_4$ , il rame si separa sul catodo. Se la densità di corrente è piccola (bassa corrente, grande catodica), il rame precipita in strati molto compatti; ma se, al contrario, la densità della corrente è grande (corrente intensa, piccola superficie del catodo), si ottiene uno strato di rame a grani grossi, poco compatto, che si sbriciola.

Le proprietà fisiche dello ione solido che si separa sono inoltre fortemente influenzate dalla concentrazione della soluzione, dalla temperatura e inoltre da diverse miscele di altre sostanze. Ultimamente sono state eseguite esperienze che hanno mostrato che agitando l'elettrodo, la densità di corrente può essere notevolmente aumentata senza pregiudicare lo strato che precipita.

Si pensava altre volte che l'elettrolisi fosse possibile solo con i liquidi. Tuttavia un certo numero di fenomeni mostrano che l'elettrolisi può avvenire anche in sostanze solide e a temperature che rimangono molto lontane da quella della loro fusione. Così il solfuro di rame (CuS), il solfuro di tallio, il cloruro, il bromuro e lo ioduro di piombo (E. Wiedemann), lo ioduro d'argento possono essere sottoposti all'elettrolisi allo stato solido o leggermente ammorbiditi.

L'elettrolisi del vetro, studiata da Warburg, presenta un particolare interesse. Si pone una provetta piena di mercurio in un largo recipiente di vetro, contenente mercurio con un poco di sodio; il catodo si trova nel recipiente interno, l'anodo in quello esterno. A 300° (il vetro non fonde al di sotto di 700°) si produce l'elettrolisi del vetro, separandosi Na da silicato di soda come catione nel recipiente interno e in quantità corrispondente rigorosamente al numero di coulomb che hanno attraversato il circuito.

La stessa quantità di Na passa dal recipiente esterno nel vetro. Se c'è mercurio puro su entrambi i lati, l'intensità della corrente nel circuito scende, alla fine di un'ora, a 0,001 del suo valore iniziale, perché precipita dal lato dell'anodo, come prodotto di elettrolisi, uno strato cattivo conduttore di acido silicico. Nuove ricerche sull'elettrolisi del vetro sono state fatte da Tegetmeyer (1890), Roberts-Austen (1891, 1895), Heydweiller e Kopperman (1910), Leblanc e Kerschbaum (1910).

Warburg e Tegetmeyer (1887) hanno mostrato che il quarzo può anche essere decomposto elettroliticamente a 225°, ma solo nella direzione del suo asse ottico; ora il quarzo fonde a una temperatura non inferiore a 1500°. F. M. Exner (1901) ha riconosciuto che il quarzo amorfo, ottenuto per fusione, conduce già la corrente sensibilmente da 100 a 150°; è molto probabile che ci sia anche in questo caso elettrolisi. Uno studio molto approfondito della questione è stato fatto da Saposchnikow (1910, 1911). Ha trovato che il quarzo cristallino, nella direzione dell'asse, segue la legge di Ohm solo per correnti deboli di breve durata. Se il campo è più intenso, di 4000 volt centimetri per esempio, le variazioni diventano tanto maggiori quanto più il campo è più intenso e la sua azione più lunga. Si arriva infine a una corrente di saturazione, come nei gas come vedremo. Le radiazioni viola, i raggi Röntgen e il radio hanno la stessa azione ionizzante sul quarzo. Jaffé (1911) ha mostrato anche l'esistenza di una corrente di saturazione per diversi corpi cattivi conduttori. Un gran numero di elettroliti solidi è stato studiato da Haber (1908) e dai suoi studenti, ad esempio  $BaCl^2$ , sali di K e Na, AgCl,  $Cu^2Cl^2$ , porcellana, ecc. Bose (1902) ha scoperto un caso notevole di elettrolisi di sostanza solida, quello degli ossidi portati al rosso, che costituiscono il filamento della lampada ad incandescenza di Nernst. Si constata che quando una tale lampada viene accesa, cioè quando viene portata all'incandescenza dalla corrente nel vuoto, avviene una separazione del metallo al catodo; la resistenza dei filamenti si abbassa a 0,1 del suo valore iniziale. Il filamento, invece di essere portato al rosso bianco, è semplicemente rovente e l'ampolla si riempie di un bagliore bluastrò, dovuto probabilmente alla diffusione della luce nel mezzo torbido prodotta dalle particelle del metallo incandescente (vedi Volume II). Nella combustione in aria, questo fenomeno non si verifica. Il metallo si ossida nuovamente, per cui all'interno del filamento incandescente vi è una corrente di ossigeno assorbita dal lato del catodo e che viene rilasciata all'anodo. Quando si utilizza la corrente alternata, la lampada brucia uniformemente anche nel vuoto e non si verificano i fenomeni precedenti.

Si è già accennato che la prima comparsa degli ioni sugli elettrodi è molto spesso accompagnata da fenomeni secondari che hanno carattere puramente chimico. OSTWALD (*Allgem. Chem.* II, 1, p. 968, 1893) distingue, in questi fenomeni secondari di elettrolisi, cinque casi:

1. *Gli ioni sono polimerizzati*, Esempi:  $2H = H^2$ ;  $2Cl = Cl^2$ ; eccetera
2. *Gli ioni sono scomposti*. Esempi: nell'elettrolisi dei sali ammoniacali, sul catodo compare l'ammonio  $AzH^4$ , che si scompone in  $AzH^3$  che rimane in soluzione e in idrogeno che viene liberato. Ma, quando il mercurio funge da catodo, non avviene alcuna scomposizione e si forma un amalgama di ammonio. Nell'elettrolisi degli acetati compare l'anione  $C^2H^3O^2$ , che si scompone in etano e acido carbonico secondo l'equazione  $2C^2H^3O^2 = C^2H^6 + 2CO^2$ . Simili

azioni secondarie in generale accompagnano molto spesso l'elettrolisi degli acidi organici e dei loro sali.

3. *Gli ioni agiscono sul solvente.* Abbiamo già parlato dell'elettrolisi di  $Na^2SO^4$ , in cui si ottengono le seguenti azioni secondarie: sul catodo,  $Na^5 + 2H^2O = 2NaHO + H^2$ ; sull'anodo,  $2SO^4 + 2H^2O = 2H^2SO^4 + O^2$ . Nell'elettrolisi di  $Na^2SO^3$ , non si libera ossigeno all'anodo;  $SO^3$  si combina con  $H^2O$  per dare acido solforico.

4. *Gli ioni agiscono sull'elettrolita.* Qui sono possibili diverse circostanze:

a) l'anione si combina con l'elettrolita:  $SnCl^2$  dà all'anodo la reazione  $SnCl^2 + Cl^2 = SnCl^4$ ;  
b) il catione si unisce all'elettrolita:  $CuCl^2$  dà al catodo la reazione  $Cu + CuCl^2 = Cu^2Cl^2$ ;  
c) gli ioni danno con l'elettrolita una reazione più complicata: nell'elettrolisi di  $HAzO^3$ , si ha al catodo la reazione  $4H^2 + HAzO^3 = AzH^2 + 3H^2O$ ; l'azotato di piombo dà ossigeno all'anodo, che scompone il sale con la formazione di perossido di piombo e acido nitrico con l'acqua.

5. *Gli ioni agiscono sugli elettrodi.* La circostanza più semplice è la combinazione dell'anione con l'anodo e quindi si forma il sale del metallo che costituisce l'anodo. Gli stessi anodi di Pt e Au sono talvolta soggetti a questa azione.  $SO^4 + Cu = CuSO^4$ ,  $2Cl + Zn = ZnCl^2$  possono servire da esempio dell'azione degli ioni sugli elettrodi. Nell'elettrolisi del cloruro di ammonio  $AzH^4Cl$ , si produce, quando  $MnO^2$  funge da anodo (elemento Leclanché), la reazione  $2AzH^4 + 2MnO^2 = 2AzH^3 + MnO^3 + H^2O$ . L'elettrolisi di  $ZnCl^2$  offre un esempio interessante, quando il catodo è di zinco, l'anodo di cloruro di argento  $AgCl$  (elemento di Warren de la Rue): all'anodo si ha la reazione  $Cl^2 + Zn = ZnCl^2$ ; al catodo, la reazione  $2AgCl + Zn = 2Ag + ZnCl^2$ .

Particolare interesse rivestono i fenomeni che si verificano in quella che viene chiamata l'elettrolisi dell'acqua o più esattamente, come vedremo in seguito, nell'elettrolisi delle soluzioni acquose, tali che il risultato delle azioni secondarie è l'idrogeno al catodo, l'ossigeno all'anodo (soluzioni di  $H^2SO^4$ ,  $Na^2SO^4$ ,  $KHO$ , ecc.), un volume di ossigeno corrispondente a due di idrogeno. In effetti, si osservano talvolta deviazioni molto notevoli per questo rapporto (che arriva fino a 1 : 3,5 invece di 1 : 2); inoltre le quantità dei due gas sono inferiori a quelle che ci si dovrebbe aspettare dalla teoria, cioè quelle che corrispondono alla quantità di elettricità che è passata attraverso il circuito. Supponiamo che l'acqua contenga  $H^2SO^4$  e che gli elettrodi non si ossidino. Le seguenti circostanze possono allora influenzare le quantità di gas che vengono rilasciate.

1. Quando la soluzione è nuova, cioè non è stata ancora sottoposta ad elettrolisi, i gas si dissolvono e l'ossigeno si dissolve due volte più dell'idrogeno (a 0°).

2. Alcuni metalli assorbono idrogeno. Senza parlare del palladio, che assorbe fino a 900 volumi di  $H^2$ , una certa quantità di questo gas viene assorbita anche dagli elettrodi di platino solitamente impiegati; lo stesso vale per il Ni, in particolare il nichel poroso.

3. Parte dell'anione O si condensa in ozono ( $O^3$ ), in modo che il volume del gas diminuisce all'anodo. Soret ha mostrato che si può formare fino al 2% di ozono.

4. Può formarsi all'anodo dell'acido persolforico, la cui anidride è  $S^2O^7$ .

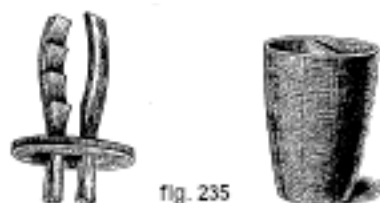
5. Si produce all'anodo del perossido di idrogeno  $H^2O^2$ ; Richarz ha mostrato che il perossido di idrogeno si ottiene per decomposizione dell'acido persolforico che compare all'inizio.

6. Quando c'è aria disciolta in acqua, parte dell'ossigeno che si libera si unisce all'azoto disciolto per formare acido nitrico.

Come si vede da quanto precede, quasi tutti i fenomeni indicati manifestano una diminuzione del volume visibile di ossigeno gassoso. Engelhardt (1902) ha esposto, in una monografia molto dettagliata, tutto ciò che riguarda l'elettrolisi dell'acqua e le sue varie applicazioni tecniche.

Abbiamo già ricordato che l'elettrolisi degli elettroliti fusi segue le stesse leggi dell'elettrolisi delle soluzioni. Tuttavia, nell'elettrolisi dei sali fusi, ad esempio composti di metalli pesanti con elementi alogenati, è estremamente difficile ottenere ioni in quantità corrispondenti alle leggi dell'elettrolisi. Questo perché gli ioni si dissolvono nella massa fusa; ciò è particolarmente vero con i metalli che diffondono fino all'anodo, dove si riuniscono parzialmente con l'elemento

alogeno. Inoltre, i metalli vaporizzano parzialmente. C'è quindi da stupirsi che Faraday sia riuscito a scoprire proprio sui sali fusi le leggi dell'elettrolisi; ci riuscì solo grazie alla scelta, come anodo, del metallo che si separa al catodo ( $PbCl^2$ ). Fu solo nel 1900 che Helfenstein riuscì a dimostrare che l'elettrolisi di  $PbCl^2$ ,  $PbBr^2$ ,  $PbI^2$ ,  $SnCl^2$ ,  $ZnCl^2$ ,  $CdCl^2$ ,  $BiCl^3$  e  $AgCl$  fusi segue rigorosamente le leggi di Faraday. Per questo ha dovuto preventivamente saturare il sale fuso con la miscela corrispondente e separare completamente l'uno dall'altro il catodo e l'anodo, interponendo fra loro dei diaframmi porosi.



Bunes ha mostrato come alcuni metalli, ad esempio Mg e Li, possono essere ottenuti mediante elettrolisi dei loro sali fusi. La figura 235 rappresenta la strumentazione utilizzata per ottenere il magnesio. Consiste in un crogiolo di porcellana diviso, quasi fino al fondo, da un tramezzo. In questo crogiolo sono posti degli elettrodi di carbone, che passano attraverso il coperchio di porcellana. Si fonde, nel crogiolo,  $MgCl^2$ , che poi si mette in circuito. Al catodo di carbonio viene data la forma dentellata mostrata in figura; con questa disposizione, il magnesio che si deposita sul catodo non sale alla sommità del crogiolo e può essere raccolto dopo che l'intera massa si è raffreddata. Da allora molti fisici hanno ottenuto vari altri metalli (Rb, Cs, Be, Ca, Sr, Ba, Al, Ce, La) e metalloidi (Be, Si, Fl), per elettrolisi dei loro sali fusi. Un resoconto dettagliato di questi lavori si troverà nel capitolo I dell'opera di Bogorodski (Parte I, Kazan, 1900, in russo). Parleremo di alcuni casi speciali di elettrolisi che sono di particolare interesse.

L'opera di Davy (1807) ha una grandissima importanza dal punto di vista storico. Davy ha infatti dimostrato, mediante l'elettrolisi di potassa caustica e soda caustica fusa, che questi corpi erano composti chimici; fu il primo ad estrarne nuovi metalli, il potassio e il sodio. Seebeck ha fornito la seguente procedura per ottenere questi metalli: un pezzo umido di alcali è posto su una lastra di platino che funge da anodo; vi viene ricavata una cavità, riempita di mercurio, nella quale è immerso un filo di platino, che funge da catodo. Si ottiene così l'amalgama del metallo corrispondente. È ancora più semplice versare il mercurio in un vaso e su questo mercurio una soluzione concentrata di alcali; l'anodo è immerso nella soluzione e il catodo, isolato, nel mercurio. Davy ha ottenuto anche il bario metallico, con una miscela pastosa di carbonato di barite, di barite e acqua, con il metodo di Seebeck.

Uno studio molto completo dell'opera relativa all'elettrolisi delle sostanze inorganiche fuse si trova nell'opera citata sopra di Bogorodski (Cap. II, pagg. da 40 a 63), che ha eseguito egli stesso l'elettrolisi di  $KAzO^3$ ,  $NAzO^3$ ,  $LiAzO^3$  fuso. La stessa questione è ampiamente trattata nel libro di R. Lorenz, *Die Elektrolyse geschmolzener Salze*, Halle a. S. 1905. L'interessante questione dell'elettrolisi delle leghe metalliche e degli amalgami è stata accennata solo in poche opere di Obach (1876), Elsässer (1879) e Jenkins; l'ultimo di questi autori ha cercato di dimostrare l'impossibilità dell'elettrolisi delle leghe.

Moissan (1886) ha ottenuto il fluoro per elettrolisi dell'acido fluoridrico.

I metalli, separandosi al catodo per elettrolisi dei sali, formano talvolta arborescenze molto graziose; tale è, per esempio, l'albero di Saturno, che si produce nell'elettrolisi dell'acetato o del nitrato di piombo.

L'elettrolisi del solfato di rame è stata oggetto di molte ricerche, poiché svolge un ruolo importante nella tecnica (galvanoplastica). Förster e Seide (1897) hanno mostrato che può formarsi, in questa elettrolisi, vicino al catodo, un solfato ( $Cu^2SO^4$ ), in cui il rame è monovalente;

questo composto, in soluzione acquosa non acida, dà protossido di rame che precipita sul catodo. Nell'elettrolisi di una soluzione di solfato di ferro, si separa sull'anodo del ferro spugnoso e dal protossido di ferro.

Masse consistenti di ferro si ottengono utilizzando, in particolare, una soluzione di due parti di solfato di ferro e una parte di sale ammoniacale. Il ferro elettrolitico contiene quasi sempre idrogeno, monossido di carbonio e altri gas. Le proprietà di questo ferro sono state studiate in particolare da Houllevigue (1897).

Nell'elettrolisi degli acidi, come  $H^2SO^4$ , ecc., generalmente non compare idrogeno al catodo, all'anodo  $SO^3+O$ , l'acido si riforma e l'idrogeno si libera. Inoltre Geuther (1859) e Warburg (1868) hanno anche notato che, in determinate condizioni, ad esempio sotto un'alta concentrazione o un'alta temperatura, si separa al catodo, nell'elettrolisi dell'acido solforico, dello zolfo e dell'idrogeno solforato. Gehrcke (1903) ha mostrato che S e  $SH^2$  si producono anche nell'elettrolisi di una soluzione diluita e a temperatura ordinaria, quando uno degli elettrodi ha una superficie molto piccola. A bassa temperatura e per un'alta densità di corrente, si forma all'anodo dell'acido persolforico  $H^2S^2O^8$ .

Nell'elettrolisi di alcuni composti dell'uranio si manifesta uno strano fenomeno. Nell'elettrolisi dell'ossicloruro di uranio  $UO^2Cl^2$  in particolare, si ottiene all'anodo  $Cl^2$  e il gruppo  $UO^2$  (uranile) al catodo, che qui svolge il ruolo di un metallo (catione).

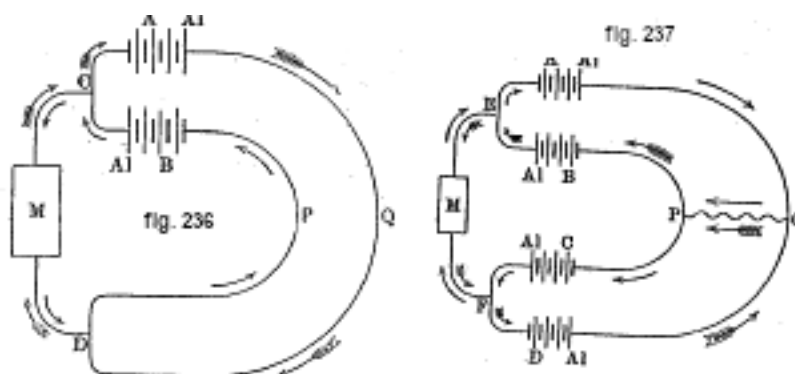
Un fenomeno notevole si osserva nell'elettrolisi dell'acqua acidulata, quando si usa come anodo una lastra o un filo di alluminio. Questo fenomeno è stato studiato per la prima volta da Beetz, che ha scoperto che su un anodo di alluminio parte dell'ossigeno ossida il metallo; si ha produzione di ossido di alluminio, e in aggiunta di un altro ossido inferiore, che forma sulla superficie del metallo uno strato grigio che conduce molto male l'elettricità. Lecher ha misurato la resistenza di questo strato, introducendo nel circuito una soluzione di allume, uno degli elettrodi essendo di Pt, l'altro di Al. In uno degli esperimenti, l'intensità della corrente era di 2 ampere, quando Al fungeva da il catodo e solo 0,01 ampere per la direzione inversa della corrente. La resistenza dello strato era quindi pari a 880 ohm. Cook (1904) ha osservato che, quando la differenza di potenziale applicata ad un voltmetro di alluminio aumenta, si produce un brusco aumento dell'intensità della corrente; ciò avviene a  $1^\circ$  per  $V = 47 \text{ volt}$ , a  $48^\circ$  per  $V = 22 \text{ volt}$ . Oltre i  $55^\circ$  il fenomeno non si verifica più; è accompagnato da un cambiamento di aspetto dello strato che si forma all'anodo, che si trasforma in cristalli microscopici colorati, essendo parte della superficie metallica a nudo. Corbino e Maresca (1906) hanno trovato che quando si usano soluzioni, il fenomeno della formazione dell'anodo dipende dalla natura dell'anione. Gli anioni  $AzO^3$ ,  $CO^3$ ,  $CH^2$ ,  $COO$  non danno alcuna formazione; la più forte avviene nelle soluzioni di tartrato, dove la tensione può raggiungere i 150 volt. Lo spessore dello strato isolante è quindi pari a 0,05 micron; il campo elettrico in questo strato è di 3 milioni di volt per millimetro e la pressione dovuta all'attrazione elettrostatica è di 2000 atm.

Altri esperimenti sono stati fatti in tempi recenti da Zimmermann (1905), da Jacobs (1906) e molto particolarmente da G. Schulze (1906, 1907). Schulze ha riconosciuto che lo strato realmente attivo non è quello solido, ma uno strato estremamente sottile di ossigeno ( $5 \mu\mu$ ), che si forma tra lo strato solido poroso. Valuta a 5500 atm. la pressione elettrostatica e a 8200 volt per  $1 \mu$  la caduta di tensione.

Il magnesio, studiato da Campetti (1901) e Maresca (1906), così come il tantalio, il columbio o niobio, e il vanadio, danno luogo a fenomeni analoghi a quelli esibiti dall'alluminio. G. Schulze (1907) ha studiato in particolare il tantalio e scoperto che i suoi elettrodi si formano più rapidamente di quelli di alluminio e questo per tutti i 47 elettroliti testati. La caduta di tensione all'anodo può raggiungere i 1000 volt. Recentemente sono stati pubblicati molti lavori; essi sono dovuti principalmente a G. Schulze (1907-1911), Bolton (1907), Pierce (1907-1909), Athanasiadis (1909), Flowers (1909), Taylor (1909), Walter (1909), Carman e Bales (1909) e ad altri ancora. Parleremo prima dei risultati ottenuti da G. Schulze. Egli ha studiato (1907) Mg, Bi e Sb e

trovato, per Mg, l'effetto valvola nelle soluzioni KOH,  $K^2CO^3$  e  $Na^2HPO^4 + AzH^3$ , con una caduta di tensione di 350 volt all'anodo; lo stesso vale per Sb in quasi tutti gli elettroliti. (700 volt) e per Bi (600 volt in soluzione KHO). Si forma prima l'ossido del metallo anodo e poi una combinazione del metallo con l'anione dell'elettrolita. In seguito (1908), G. Schulze ha svolto le sue ricerche sul Niobio, il cui effetto valvola era già stato precedentemente riconosciuto da Bolton (1907, 120 volt). Ha scoperto che il Nb godeva di proprietà simili a quelle del tantalio. G. Schulze (1908) ha osservato poi che Zn e Cd, in soluzioni di  $K^2CO^3$ , Ag in soluzioni di HCl, HBr e HI, Cu in soluzioni di HFl manifestano effetti di valvola. Nel suo ultimo lavoro (1911), ha cercato quale dipendenza esistesse tra il voltaggio massimo e la natura degli elettroliti. Walter (1909) ha studiato l'effetto valvola del tungsteno, le cui proprietà sono intermedie tra quelle dell'alluminio e del tantalio. Indicheremo in seguito i notevoli fenomeni che Pierce e Flowers hanno osservato in alcuni cristalli.

Nel 1897 Grätz ha mostrato che l'effetto valvola può essere utilizzato per trasformare una corrente alternata in una corrente di direzione costante. A tale scopo ha collegato in serie vasi contenenti una soluzione di allume in cui lastre di carbonio e alluminio svolgevano il ruolo di elettrodi. Ciascuno di questi vasi ha una conducibilità unipolare, purché la forza elettromotrice non superi i 22 volt; in altre parole, una corrente passa liberamente attraverso il recipiente in una direzione, ma non nella direzione opposta, quando l'alluminio è impiegato come anodo. Si osserva che la conducibilità ionica di un tale vaso si stabilisce istantaneamente, non appena compare nel circuito una forza elettromotrice di opportuna direzione. Sono rappresentati, nelle figure 236 e 237, due accorgimenti adottati da Grätz per raddrizzare una corrente alternata. Nello schema di figura 236 si ottengono correnti pulsanti di direzione costante nei due conduttori P e Q; M designa l'alternatore, A e B due batterie dei vasi sopra descritti, la linea più lunga rappresenta una lastra di alluminio. Le correnti di direzione MC possono solo passare attraverso A e quindi seguire il percorso MCAQDM: le correnti in direzione opposta non possono passare attraverso A e seguono il circuito MDPBCM. Nello schema di figura 237, si ottiene una corrente di direzione costante nel conduttore QP; qui si hanno quattro serie di vasi A, B, C, D. Come indicano le frecce, una delle correnti segue la direzione MEAQPCFM, l'altra la direzione MFDQPBEM. Entrambe le correnti scorrono attraverso QP nella stessa direzione. Il metodo di Grätz è stato studiato in dettaglio da Campetti, Norden, Mayrhofer, Lecher, Bartorelli, Cook (1905), Charters (1905) e altri. Norden ha scoperto che  $Al^2(OH)^6$  si produce sull'elettrodo di alluminio, che si trasforma in  $Al^2O^3(SO^3)^3$  in presenza di  $H^2SO^4$ .



W. Mitkiéwitsch (1901) ha migliorato il raddrizzatore ad anodo di alluminio di Grätz. Impiega, invece dell'allume, una soluzione di bicarbonato di sodio, che ha il vantaggio che un elemento, costruito secondo lo schema alluminio piombo-soda, può raddrizzare una corrente di 150 volt.

Mitkiéwitsch ha anche fornito una teoria del raddrizzatore di corrente in alluminio, in cui identifica i fenomeni che hanno luogo all'anodo di alluminio con quelli che hanno luogo all'anodo dell'arco voltaico. Conclude dalle sue osservazioni che la corrente passa dal liquido ai luoghi

denudati dell'alluminio sotto forma di piccoli archi voltaici, il fenomeno stesso possiede la massima analogia con quello dell'arco. Gli schemi da lui proposti per raddrizzare completamente una corrente alternata saranno indicati più avanti, quando ci occuperemo delle correnti alternate.

Invece dell'alluminio, si possono prendere anche elettrodi di tantalio e niobio per raddrizzare correnti alternate, così come alcuni corpi cristallini, come hanno mostrato Pierce e Flowers. Pierce ha scoperto che la conduttività dei cristalli di carborundum aumenta con una corrente alternata e che può essere 4000 volte maggiore in una direzione che nell'altra. In seguito ha osservato proprietà analoghe in cristalli di molibdenite, anatasio, brookite e pirite di ferro, Flowers in cristalli di solfuro di piombo. Non si è ancora trovata la spiegazione di questi singolari fenomeni.

L'elettrolisi dei sali doppi presenta, come vedremo in seguito, un grandissimo interesse teorico, perché la questione di sapere in quali ioni si decompongono i sali doppi può avere un'importanza decisiva nella scelta tra le varie teorie dell'elettrolisi. Questa questione è stata chiarita per la prima volta da Hittorf, che ha mostrato che si devono distinguere tre casi nell'elettrolisi dei sali doppi.

1. Ci sono sali doppi che sono solo una miscela di due sali, il che dà, in elettrolisi, due metalli al catodo. Tali sono  $KAl(SO_4)^2$ ,  $K^2Mg(SO_4)^2$ ,  $K^2Zn(SO_4)^2$ , ecc. Ciò concorda perfettamente, col fatto che, nella diffusione di questi sali attraverso setti porosi, ciascuna delle parti costitutive diffonde separatamente, con il coefficiente di diffusione che le è proprio.

2. In un secondo tipo di sali doppi, uno dei metalli, il metallo alcalino o alcalino-terroso, compare come catione, mentre tutti gli altri, l'altro metallo e l'acido libero, fungono da anione. Si trova che questi sali doppi subiscono proprio quella scomposizione nelle reazioni di doppio scambio con altri sali. Così il sale  $KAg(CAz)^2$  dà dapprima al catodo K, all'anodo  $Ag(CAz)^2 = AgCAz + CAz$  ed è solo mediante reazioni secondarie che l'argento viene separato al catodo; il sale  $Na^2PtCl_6$  si scompone nel catione  $Na^2$  e nell'anione  $PtCl_6 = PtCl_4 + Cl_2$ ; il sale  $NaAuCl_4$  dà il catione Na, l'anione  $AuCl_4$ , ecc. È interessante osservare che i sali  $K^4Fe(CAz)^6$  e  $K^3Fe(CAz)^6$  conferiscono al catodo  $K^4$  e  $K^3$  e all'anodo lo stesso gruppo  $Fe(CAz)^6$ , che nel primo caso è tetravalente e nel secondo trivalente. Questa scomposizione dei sali doppi ha portato Ostwald ad ammettere l'esistenza di acidi come  $HAg(CAz)^2$ ,  $H^2PtCl_6$ ,  $H^4Fe(CAz)^6$ , ecc.

3. Un terzo tipo è formato da sali per così dire intermedi tra i sali dei primi due tipi. Tali sono i sali  $KAuCl_4$ ,  $KHgCl_3$ ,  $K^2CdI$ . In soluzione concentrata, il catione è K, tuttavia questo sposta il metallo pesante dal sale, così che sul catodo compaiono Au, Hg o Cd. In soluzione diluita, il doppio sale si scompone e solo il sale di potassio è sottoposto all'elettrolisi; all'anodo non compare affatto il gruppo che contiene il metallo pesante.

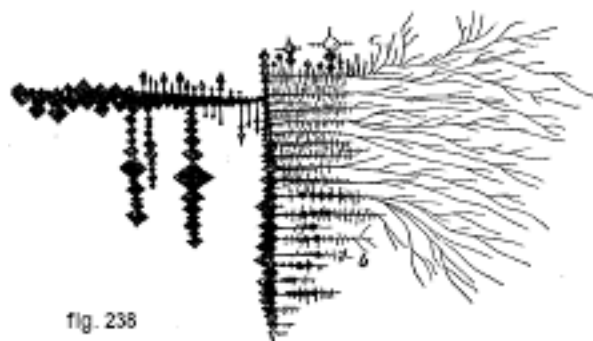
L'elettrolisi dello ioduro di cadmio  $CdI_2$  presenta un fenomeno molto interessante. Il cadmio si separa al catodo e non solo l'eccesso di iodio non appare all'anodo, ma vi si deposita anche il cadmio. Bisogna quindi ammettere che nella soluzione si forma una specie di sale doppio, il polimero  $Cd^2I_4$ , i cui ioni sono Cd e  $CdI_4$ . Con soluzioni di ioduro di cadmio in alcoli etilici e amilici si forma anche  $Cd^2I_6$  i cui ioni sono Cd e  $Cd^2I_6$ . Dopo Hittorf, Lenz ha studiato l'elettrolisi dei sali di cadmio. La spiegazione dell'elettrolisi dei sali doppi data da Hittorf ha trovato una conferma lampante nelle ricerche di Kistiakowski sull'abbassamento della temperatura di congelamento e l'innalzamento del punto di ebollizione delle soluzioni di questi sali.

Ci sono elettroliti, che possono essere scomposti in ioni in due modi diversi; Bredig li ha chiamati elettroliti anfoteri. Tale è, per esempio,  $Pb(OH)^2$ , che dà il catione Pb e l'anione  $2OH$  o il catione  $2H$  e l'anione  $PbO^2$ . La teoria dell'elettrolita anfotero è stata sviluppata da Walker (1905); è stata studiata da Lundén (1906), ecc.

Molto lavoro è stato recentemente dedicato all'elettrolisi dei composti organici, ma non possiamo avvicinarci a questo campo senza allontanarci dallo scopo di questo lavoro.

L'elettrolisi di soluzioni di più elettroliti, cioè miscele, è stata studiata da molti autori. Quando due sali dello stesso acido sono contenuti in una soluzione, solo uno dei metalli si separa in una debole corrente; il secondo appare solo per una maggiore densità di corrente. Nella serie dei metalli Au, Ag, Bi, Cu, Sn, Pb, Cd, Zn, ognuno si separa prima di quello che lo segue. Allo stesso modo, di due anioni solo uno si separa in una corrente debole; per esempio, una miscela di KO e KI, si separa solo lo iodio. Hittorf ha mostrato che si tratta di una reazione secondaria: sull'elettrodo compaiono gli ioni dei due sali, ma uno sposta l'altro del suo sale. Oltre alla densità di corrente, anche le aggiunte di corpi estranei giocano un ruolo importante. Così, da una soluzione di sali di rame e zinco si separa solo il rame; ma se alla soluzione si aggiunge KCAz, i due metalli si separano sul catodo sotto forma di ottone.

O. Lehmann ha osservato al microscopio alcuni fenomeni interessanti. Da una soluzione di cloruri di stagno e zinco si separano al catodo catene di cristalli tetragonali di stagno, prolungati da fili irregolari (dendriti) di zinco, come mostrato nella figura 238. Buff, Paalzow, Arrhenius e, Ultimamente, Chassy, Schrader, Hopfgarten e Wolf si sono occupati della questione dell'elettrolisi delle miscele.



Non ci soffermeremo sui fenomeni che si osservano quando nel circuito vengono introdotti successivamente più elettroliti a contatto tra loro, perché questi fenomeni si risolvono in gran parte con facilità e non presentano alcun interesse particolare. Sono trattati in dettaglio nell'opera di G. Wiedemann, *Die Lehre von der Elektrizität*, T. II, pagine da 593 a 608, 1894. Un nuovo studio di alcuni dei fenomeni connessi con questo soggetto è stato realizzato da Nernst e Riesenfeld.

Per concludere, indicheremo ancora un fenomeno singolare, talvolta osservato nell'elettrolisi: gli ioni solidi esercitano, depositandosi sull'elettrodo, una pressione su questo, che può raggiungere un valore molto elevato, ma anche essere negativa. Mills (1877) ha introdotto, come catodo, la sfera d'argento di un termometro, in una soluzione di solfato di rame. Quando il rame precipita sulla sfera, il termometro inizia a indicare una temperatura più alta di quella reale e questo fenomeno scompare, quando il rame viene allontanato per dissoluzione. La pressione esercitata dal rame supera le 100 atmosfere. Con una corrente debole, si osserva una pressione negativa; il metallo, in un deposito molto compatto, esercita, per così dire, una trazione sul serbatoio del termometro. Bouty ha studiato questo fenomeno in dettaglio e ha dato la seguente spiegazione. La temperatura della miscela che precipita può essere diversa dalla temperatura media del liquido sulla superficie del termometro. Se la prima è più alta della seconda, il precipitato comprime il serbatoio mentre si raffredda. Se è più bassa, lo strato di metallo che aderisce fortemente al serbatoio esercita una trazione su di esso.

L'elettrolisi trova numerose applicazioni pratiche, il cui esame ci porterebbe troppo lontano. Tale è la galvanoplastica, che permette di ottenere copie metalliche esatte di oggetti in rilievo (monete, medaglie, targhe tipografiche, ecc.). La galvanoplastica è stata inventata dall'accademico Jacobi di San Pietroburgo e quasi contemporaneamente da Spencer in Inghilterra. Essa ha avuto per scopo anche quello di ricoprire oggetti con uno strato sottile di qualsiasi metallo, ad



esempio nella doratura, argentatura, nichelatura, ecc. Il corpo, sul quale si desidera già ottenere il metallo, viene posto in una soluzione di opportuna composizione, dalla quale questo metallo viene separato durante l'elettrolisi sul corpo che funge da catodo. Va inoltre menzionata la raffinazione dei metalli, ad esempio il rame. Pezzi di rame (in particolare rottami) vengono posti in una soluzione di solfato di rame e utilizzati come anodo; il rame si scioglie e precipita allo stato puro sul catodo.

Si può anche menzionare il trattamento elettrico dei minerali, che costituisce la elettrometallurgia, e molte altre applicazioni industriali.

### 3. Conducibilità degli elettroliti

L'attuale sviluppo della teoria dell'elettrolisi ha portato alla spiegazione dello stretto legame che esiste tra la conducibilità degli elettroliti e alcune grandezze che giocano un ruolo particolarmente importante nel fenomeno stesso dell'elettrolisi. Inoltre, riteniamo necessario parlare ora dei risultati della misura della conducibilità degli elettroliti, sebbene i metodi impiegati per essa non dovrebbero essere considerati solo più tardi.

La conducibilità di un elettrolita in soluzione dipende dalla sostanza disciolta, dalla concentrazione della soluzione, dalla temperatura ed infine dal solvente, considerando come appartenenti a quest'ultimo anche le sostanze estranee in esso disciolte.

Occupiamoci anzitutto dei lavori intrapresi per scoprire la connessione che può esistere tra la conducibilità elettrolitica delle soluzioni e le loro altre proprietà fisiche, in particolare il loro attrito interno. La possibilità di un tale collegamento fu indicata per la prima volta da Hankel (1846) e poi da G. Wiedemann (1856), che si esprime molto precisamente su questo punto, sulla base di ricerche da lui personalmente effettuate con la massima cura.

Le ragioni, che portano ad ammettere un legame tra la conducibilità elettrolitica e l'attrito interno o viscosità (volume I) di una soluzione sono le seguenti. Qualunque idea ci si faccia del meccanismo interno dell'elettrolisi, si tratta certamente di un movimento di materia (ioni) all'interno della soluzione, in direzione degli elettrodi. A questo movimento si oppone l'attrito delle particelle in movimento contro quelle della soluzione; maggiore è questo attrito, maggiore è la forza elettromotrice necessaria per muovere gli ioni verso gli elettrodi, in altre parole, maggiore deve essere la differenza di potenziale degli elettrodi o, più semplicemente, la caduta di potenziale all'interno dell'elettrolita per una data intensità di corrente nel circuito. Ma ciò equivale a dire che all'aumentare dell'entità di questo attrito, deve aumentare anche la resistenza della soluzione. Tuttavia, l'attrito che gli ioni subiscono nel loro movimento all'interno della soluzione e l'attrito interno stesso della soluzione, che si misura con uno dei metodi indicati nel volume I, non sono identici, sebbene si possa ammettere che deve esistere una relazione tra loro e forse, in molti casi, che sono proporzionali tra loro. Maggiore è la viscosità di un liquido, maggiore è anche la resistenza che incontra un corpo a muoversi al suo interno e di conseguenza anche gli ioni.

Ci si deve quindi aspettare una certa relazione tra la resistenza e la viscosità di una soluzione, ma non possiamo in alcun modo concludere che queste quantità siano strettamente proporzionali. Le ricerche di G. Wiedemann, Grotrian, R. Lenz, Stephan, e Wiedemann, Arrhenius, Boltzmann, Walden e altri ancora hanno confermato, in molti casi, l'esistenza di tale relazione, o almeno hanno dimostrato che la dipendenza della forza su vari fattori è analoga a quella della viscosità sugli stessi fattori. Una rassegna di tutte le opere relative a questo argomento è stata data da Gouré de Villemontée (1901). I risultati più importanti sono i seguenti.

G. Wiedemann, (1856) ha studiato le soluzioni di  $CuSO_4$ ,  $Cu(AzO_3)^2$ ,  $AgAzO_3$  e KHO e ha riconosciuto che, per ciascuna di esse, la conducibilità  $k$  è proporzionale alla concentrazione  $p$  e inversamente proporzionale alla viscosità  $\eta$  della soluzione. Grotrian (1876) ha studiato le soluzioni di KCl, NaCl,  $CaCl_2$ ,  $MgCl_2$ ,  $BaCl_2$ ,  $MgSO_4$  e  $ZnSO_4$ ; ha trovato che la conducibilità

$k$  è inversamente proporzionale alla potenza  $n$ -esima della viscosità  $\eta$ , oscillando  $n$ , per le diverse soluzioni tra 0,7513 e 0,4554. R. Lenz ha concluso dalle sue osservazioni che le resistenze  $w$  e  $\eta$  variano in modo analogo in funzione della concentrazione  $p$ ; si può porre  $w = a(1 - bp^m)$ ,  $\eta = a_1(1 - b_1p^m)$ , ma  $b$  non è uguale a  $b_1$ .

Gli esperimenti di Fousereau (1885) e di L. Poincaré (1890) hanno mostrato che, per i sali fusi  $NaAzO^3$ ,  $KAzO^3$ ,  $AzH^4AzO^3$ , il rapporto delle grandezze  $w$  e  $\eta$  cambia poco, al variare della temperatura tra 162° e 360°. Grotrian e Kohlrausch hanno studiato come le quantità  $w$  ed  $\eta$  variano in funzione della temperatura nelle soluzioni e hanno trovato, per gli acidi cloridrico, nitrico e solforico e per la soda, un'analogia quasi completa nella dipendenza dei due coefficienti di temperatura (a 18° rispetto alla concentrazione. Pertanto, per soluzioni di acido solforico, i due coefficienti presentano dei massimi allo stesso grado di concentrazione. Bouty ha anche notato che per soluzioni molto diluite di sali, i coefficienti di temperatura delle quantità  $w$  e  $\eta$  sono uguali. E. Wiedemann, Arrhenius, C. Stèphan, Massoulier, Rolland e altri hanno stabilito una relazione che determina l'influenza delle aggiunte di sostanze estranee (glicerina, alcool, gelatina) su  $w$  ed  $\eta$ . Nuove ricerche si devono ad Arndt (1907), Dutoit e Duperthuis (1908), Chanoz (1909), Walden (1911) e soprattutto a H. C. Jones che, con i suoi allievi, ha pubblicato fino al 1908, più di 10 memorie. Non entreremo nei dettagli e ci limiteremo ad indicare che gli esperimenti confermano, come ci si potrebbe aspettare da quanto sopra esposto, l'esistenza di una relazione tra le variazioni delle grandezze  $w$  e  $\eta$ , ma che non si può parlare né di uguaglianza né di proporzionalità delle grandezze caratteristiche, in ciascuno dei casi considerati. Parleremo poi delle ricerche di Walden.

Ci sono anche motivi per aspettarsi una relazione tra la conducibilità elettrolitica delle soluzioni e il coefficiente di diffusione della sostanza disciolta, poiché il fenomeno della diffusione e il movimento degli ioni all'interno delle soluzioni di caratteri comuni. La possibilità di una tale relazione fu indicata per la prima volta da G. Wiedemann (1858). Gli esperimenti di Long (1880) hanno mostrato che i sali che si diffondono più rapidamente nell'acqua danno soluzioni acquose che possiedono la massima conduttività. R. Lenz ha studiato le soluzioni alcoliche di KI, NaI e  $CdI^2$ . Ha trovato che per le soluzioni KI e NaI, la conducibilità elettrolitica e la velocità di diffusione variano esattamente nello stesso modo, al variare del contenuto alcolico e della concentrazione della soluzione; per  $CdI^2$ , non ha osservato una tale concordanza. L'aggiunta di una certa quantità di petrolio alla soluzione alcolica di KI (alcool 73%) diminuisce parimenti la conducibilità elettrolitica e la velocità di diffusione.

Prima di affrontare la questione della dipendenza che esiste tra la conducibilità elettrolitica delle soluzioni e la concentrazione, la temperatura e il solvente, dobbiamo far sapere quali sono le unità che vengono utilizzate quasi sempre, dopo i lavori di F. Kohlrausch, considerando i risultati della misura della conducibilità dei liquidi. Inoltre, bisogna menzionare anche un gruppo di unità che molti studiosi hanno usato in passato, Ostwald per esempio. Si tratta qui di due grandezze principali e di una terza, che è il rapporto delle prime due. Le due grandezze principali sono la conducibilità e la concentrazione.

La conducibilità è o è stata in precedenza misurata nel modo seguente:

1. Si prende come unità la conducibilità del mercurio a 0°. Indicheremo con  $k$  il valore numerico della conducibilità così misurata. Per molti metalli, si ha  $k > 1$ ; per le soluzioni,  $k$  è sempre una frazione molto piccola.

2. Si prende, come unità di conducibilità, quella di una sostanza, un centimetro cubo della quale ha una resistenza di un ohm (Kohlrausch). Si ha l'abitudine di designare con  $\chi$  il valore numerico della conducibilità così misurata. Le soluzioni di alcuni acidi possiedono una conduttività approssimativamente unitaria. Dalla definizione dell'ohm (colonna di Hg di 106,3 cm di lunghezza e di sezione 1 mm), risulta che un centimetro cubo di mercurio possiede una resistenza di  $\frac{1}{106,3 \times 100} = \frac{1}{10630}$  ohm. Si ha quindi  $\chi = 10630$  per il mercurio; in altri termini, l'unità di Kohlrausch è 10630 volte più piccola dell'antica misura a mercurio, con la quale si

aveva  $k = 1$  per il mercurio. Si ha in modo generale

$$\chi = 10630k \quad (10.0.11)$$

3. Ostwald prese, per unità di conducibilità, quella di una sostanza, di cui un centimetro cubo ha una resistenza pari all'unità di Siemens (colonna di Hg di 100 *cm* di lunghezza e di 1 *mm*<sup>2</sup> di sezione a 0°). Indicheremo con  $\chi'$  i corrispondenti valori numerici delle conducibilità. L'unità di Ostwald è uguale a 1,063 volte quella di Kohlrausch e quindi

$$\begin{cases} \chi = 1,063\chi' \\ \chi' = 10000k \end{cases} \quad (10.0.12)$$

Passiamo ora alla concentrazione delle soluzioni.

La concentrazione era altre volte misurata dalla percentuale in peso della sostanza contenuta nella soluzione. Kohlrausch impiega due metodi per esprimere numericamente la concentrazione di una soluzione:

1. (Kohlrausch). La concentrazione è determinata dal numero  $\eta$  di grammi equivalenti della sostanza, contenuti in un centimetro cubo di soluzione. Kohlrausch chiama  $\eta$  la concentrazione equivalente. Il valore inverso

$$\varphi = \frac{1}{\eta} \quad (10.0.13)$$

è la misura del grado di diluizione della soluzione; questo grado di diluizione è numericamente uguale al volume (espresso in centimetri cubi) della soluzione, che contiene un grammo equivalente di sostanza disciolta;  $\eta$  può essere solo una piccola frazione.

2. (Kohlrausch) La concentrazione è determinata dal numero  $m$  di grammi equivalenti della sostanza, contenuti in un litro della soluzione; questo numero si chiama anche la concentrazione equivalente. L'inverso del suo valore

$$v = \frac{1}{m} \quad (10.0.14)$$

è il volume (in litri) della soluzione, che contiene un grammo equivalente della sostanza disciolta. Se la soluzione contiene  $\eta$  grammi equivalenti in 1 *cm*<sup>3</sup>, ci sono evidentemente 1000 $\eta$  grammi equivalenti in un litro; ne consegue quindi che

$$\begin{cases} m = 1000\eta \\ v = 0,001\varphi \end{cases} \quad (10.0.15)$$

3. Si prende, per unità di concentrazione, quella di una soluzione normale, che contiene una grammo-molecola della sostanza in un litro di soluzione. Indicheremo con  $m'$  il valore numerico della concentrazione. Sia  $s$  l'equivalenza della sostanza disciolta (per NaCl, ad esempio, si ha  $s = 1$ ; per  $H^2SO^4$ ,  $CuSO^4$  si ha  $s = 2$ ). La grammo-molecola contiene  $s$  grammi-equivalenti; di conseguenza, la terza unità di concentrazione è  $s$  volte maggiore della seconda e si ha

$$m' = \frac{m}{s} \quad (10.0.16)$$

4. Se, invece di un litro, si prende di nuovo un centimetro cubo, si ottiene la grandezza

$$\eta' = \frac{\eta}{s} \quad (10.0.17)$$

Consideriamo una soluzione di  $H^2SO^4$ . Il suo peso molecolare è uguale a 98,08, la sua equivalenza  $s = 2$ , il suo peso equivalente è 49,04; la grammo-molecola contiene 98,08 *g*, il grammo-equivalente è 49,04 *g*. Supponiamo allora che un centimetro cubo della soluzione contenga 0,4904 di  $H^2SO^4$ ; in questo caso,  $\eta = 0,01$ ,  $m = 10$ ,  $m' = 5$ ,  $\eta' = 0,005$ .

Il rapporto tra conducibilità e concentrazione fornisce le seguenti quantità:

1. Kohlrausch chiama conducibilità equivalente la grandezza

$$\Lambda = \frac{\chi}{\eta} = \chi\varphi \quad (10.0.18)$$

2. Nei lavori precedenti, Kohlrausch prese per conducibilità equivalente la grandezza

$$\lambda = \frac{k}{m} = kv \quad (10.0.19)$$

Dalle formule (4) e (5,b), si ha  $\chi = 10630k$  e  $\eta = 0,001m$ ; le formule (6) e (6,a) danno pertanto

$$\Lambda = 1,063 \cdot 10^7 \lambda \quad (10.0.20)$$

3. Se si introduce la concentrazione  $\eta'$  e se, con Ostwald, si esprime la conducibilità con  $\chi'$ , il rapporto

$$\mu = \frac{\chi'}{\eta'} \quad (10.0.21)$$

si chiama conducibilità molecolare.

Ponendo  $\chi' = 10000k$  e  $\eta' = \frac{\eta}{s} = \frac{0,001m}{s}$ , si ottiene

$$\mu = 10^7 \frac{ks}{m} = 10^7 \lambda s \quad (10.0.22)$$

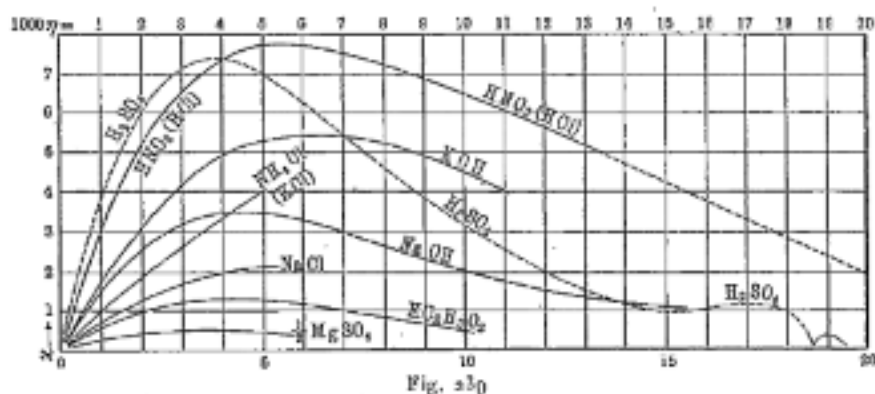
$$\Lambda = 1,603 \frac{\mu}{s} \quad (10.0.23)$$

Nel seguito ci occuperemo principalmente delle grandezze  $k, \chi, \eta, m, \Lambda, \lambda$ .

Esiste una letteratura molto ricca sulla resistenza degli elettroliti, che contiene una grandissima quantità di materiali importanti. Una bibliografia completa fino all'anno 1898 si troverà nell'opera di F. Kohlrausch e L. Holborn, *Das Leitvermögen der Electrolyte*, Leipzig 1898, pagine 137-143; contiene tabelle dei risultati delle misure, pagine da 145 a 201. Si potranno anche consultare le opere di W. Ostwald, *Lehrbuch der allgemeinen Chemie*, vol. II, 1 (*Chemische Energie*), 2a ed., pagine da 721 a 772, Lipsia 1893, di Whetham, *Solution and Electrolysis*, 1895, di Landolt e Börnstein, *Physikalisch-chemische Tabellen*. Una bibliografia dettagliata, con l'indicazione dei risultati delle misure, è contenuta nell'opera di G. Wiedemann, *Die Lehre von der Elektrizität*, T. II, pagg. 567-665, Braunschweig 1894. Ci limiteremo a fornire alcuni risultati particolarmente interessanti.

Occorre distinguere tra i risultati delle misure, che sono state ottenute per soluzioni di media o alta concentrazione, e quelli che si riferiscono alla conducibilità elettrolitica di soluzioni molto diluite. Vedremo che sono proprio i lavori che riguardano soluzioni molto diluite, che attualmente presentano il maggiore interesse teorico.

Non è stata trovata alcuna legge o rapporto semplice per soluzioni non diluite. In generale, quando la concentrazione aumenta, la conducibilità elettrolitica  $k$  delle soluzioni acquose inizia ad aumentare, raggiunge un certo massimo e poi diminuisce. Esprimendo la concentrazione con la percentuale  $p$  in peso della sostanza disciolta, la dipendenza tra  $k$  e  $p$  è stata rappresentata da formule empiriche, come  $k = \alpha p - \beta p^2$ , essendo  $k$  preso uguale a zero per il solvente stesso ( $p = 0$ ). Beetz (1862) ha utilizzato la formula più complessa  $k = a + bp - cp^2 + dp^3$  e ha determinato i valori numerici dei coefficienti che essa contiene, per soluzioni di  $ZnSO_4$ .



Un'idea più chiara della dipendenza tra la conducibilità elettrolitica delle soluzioni e la loro concentrazione si ottiene mediante una rappresentazione grafica. Nella figura 239, che presentiamo per gentile autorizzazione di F. Kohlrausch e dell'editore Teubner, dall'opera di F. Kohlrausch e L. Holborn, sono rappresentate le curve costruite da F. Kohlrausch. Si è presa per ascissa la quantità  $10000\eta = m$ , si veda (5,b), cioè il grammo equivalente per litro della soluzione, e per ordinata la conducibilità elettrolitica  $\chi$ . Riportiamo i numeri trovati da Kohlrausch (1876), per la percentuale  $p$  in peso di alcuni acidi corrispondente a un massimo della conducibilità elettrolitica  $10^4\chi$ ; indichiamo, contemporaneamente, i valori massimi, così come la densità  $\delta$  delle soluzioni.

Acidi	$p\%$	$10^4\chi$	$\delta$
Acido azotico	29,7	7793	1,185
Acido cloridrico	18,3	7626	1,092
Acido solforico	30,4	7350	1,224
Acido fosforico	46,8	2086	1,307
Acido ossalico	9,4	835	1,045
Acido tarttrico	22,4	100	1,107
Acido acetico	16,6	16,1	1,022

Le soluzioni di acido solforico sono di particolare interesse. La loro conducibilità ha tre massimi e due minimi, come si vede in Fig. 239. Il primo massimo corrisponde a  $m = 1000\eta = 3,9$  (30,4% di  $H^2SO^4$ ); poi arriva il primo minimo per  $m = 15,25$  ( $H^2SO^4 + H^2O$ ), quindi il secondo massimo per  $m = 17,2$ , il secondo minimo per  $H^2SO^4$  puro. Oltre a ciò, si ha già una soluzione dell'anidride  $SO^3$  in  $H^2SO^4$ ; la conducibilità dapprima aumenta rapidamente e alla fine diventa quasi uguale a zero per l'anidride pura  $SO^3$ .

Alcuni gruppi di elettroliti possiedono una conducibilità equivalente pressoché costante, mentre la loro concentrazione varia entro ampi limiti. Tali sono gli acidi monoequivalenti HCl, HBr, HI,  $HAzO^3$ ; inoltre i sali aloidi di K e  $AzH^4$ , i solfati di K e  $AzH^4$ , i cloruri di Ba, Sr e Ca, i solfati di Mg, Zn e Cu. Per lo stesso anione, la conduttività diminuisce per i sali di K,  $AzH^4$ , Na, Li, seguendo l'ordine di questi ultimi.

Per lo stesso catione, gli anioni dei sali di I, Br, Cl, Fl,  $AzO^3$ ,  $C^2H2O^2$  hanno conducibilità decrescente nell'ordine indicato.

Quando la temperatura aumenta, la quantità  $k$  aumenta rapidamente. I coefficienti di temperatura (intorno ai  $20^\circ$ ) oscillano tra 0,0087 e 0,072. L'ultimo numero (7% per  $1^\circ$ ) si riferisce ad una soluzione al 43% di NaHO. Per i sali neutri, i valori estremi di questi coefficienti sono 0,0141 e 0,412. I coefficienti di temperatura della conducibilità  $k$  delle soluzioni dei sali degli acidi monobasici dapprima diminuiscono all'aumentare della concentrazione; ma, per gli acidi stessi, i coefficienti non dipendono in alcun modo dalla concentrazione.

Quando la temperatura varia, il grado di concentrazione  $p$ , per il quale  $k$  è massimo, varia pure. Così, per l'acido solforico a  $0^\circ$ , si ha  $p = 30,2$  ma a  $70^\circ$  si ha  $p = 35,4$ .

Si trova, in generale, che i coefficienti di temperatura sono tanto maggiori quanto minore è la conducibilità delle soluzioni, cosicché sotto questo aspetto la differenza tra le proprietà delle diverse sostanze diminuisce all'aumentare della temperatura. Ma questa regola non si applica a soluzioni cattivi conduttrici, né a soluzioni molto concentrate.

Arrhenius (1889) ha previsto, con considerazioni teoriche su cui ritorneremo, che possono esistere soluzioni per le quali il coefficiente di temperatura è negativo, per le quali la conducibilità  $k$  diminuisce all'aumentare della temperatura. Tali sono le normali soluzioni di acido fosforico ( $H^3PO^4$ ) e acido ipofosforico ( $H^3PO^2$ ). Per il primo,  $k$  ha un massimo a  $72^\circ$ ; per il secondo, a  $54^\circ$ ; quest'ultimo ha la stessa conducibilità a  $25^\circ$  e a  $90^\circ$ .

Noyes e Coolidge (1903) hanno studiato, in un notevole lavoro, la conducibilità elettrolitica di soluzioni acquose di NaCl e KCl, fino alla temperatura di  $306^\circ$ .

Passiamo ora alla conducibilità delle soluzioni diluite. F. Kohlrausch si è occupato in modo particolare di questa questione; si spinse fino a considerare soluzioni che non contenevano più di  $10^{-5}$  grammo molecola della sostanza in un litro di soluzione, cosicché  $\eta$  scendeva a  $10^{-8}$  e a valori anche inferiori. F. Kohlrausch ha calcolato le tabelle della conducibilità equivalente, cioè della grandezza  $\Lambda = \frac{\chi}{\eta} = \frac{\chi}{0,001m}$ , vedi (6) e (5,b), per differenti valori diversi di  $\eta$  e  $m$ . Ha anche rappresentato graficamente la quantità  $\Lambda$  in funzione di  $100\eta = m$ . Ha trovato che la conducibilità elettrolitica equivalente aumenta contemporaneamente alla diluizione della soluzione e tende, per soluzioni infinitamente diluite, verso un certo valore limite che indicheremo con  $\Lambda_0$ . La dipendenza tra la conducibilità equivalente e la concentrazione  $\eta$  è espressa, per le soluzioni più diluite, da una formula empirica come

$$\Lambda = \Lambda_0 - a\eta^{\frac{1}{3}} \quad (10.0.24)$$

$\Lambda$  appare come una funzione lineare della grandezza  $\eta^{\frac{1}{3}}$ , che può ancora essere considerata come una funzione lineare della concentrazione. Se determiniamo  $\Lambda$  per i valori più piccoli di  $\eta$ , possiamo ottenere la magnitudine  $\Lambda_0$  mediante calcolo. Kohlrausch ha trovato, ad esempio nelle soluzioni di KCl e NaCl, i seguenti valori di  $\Lambda$ :

$1000\eta = m$	0,0001	0,0002	0,0005	0,001	0,002	0,005	0,01	0,05	0,1
KCl	129,5	129,1	128,3	127,6	126,6	124,6	122,5	115,9	111,9
NaCl	109,7	109,2	108,5	107,8	106,7	104,8	102,8	95,9	92,5

Per i due sali, si ottiene per  $a$  circa il valore 400; inoltre, per KCl, il valore  $\Lambda_0 = 131$ , ma, per NaCl,  $\Lambda_0 = 111$ . Indichiamo i valori di  $\Lambda$  trovati per  $1000\eta = m = 0,0001$ , cioè per le soluzioni più deboli.

$\Lambda = \frac{\chi}{\eta}$ per $1000\eta = m = 0,0001$ (grammo-equivalente per litro)							
KCl	NaCl	LiCl	$AzH^4KCl$	KI	$KAzO^3$	$NaAzO^3$	$AgAzO^3$
129,5	109,7	100,7	129,2	130,3	124,7	103,7	115,5
$KClO^3$	$KC^2H^2O^2$	$NaC^2H^3O^2$	$\frac{1}{2}K^2SO^4$	$\frac{1}{2}Na^2SO^4$	$\frac{1}{2}LiSO^4$	$\frac{1}{2}BaCl^2$	
120,2	100,0	76,8	133,5	110,5	100,9	120,5	
		$\frac{1}{2}ZnCl^2$	$\frac{1}{2}BaAz^2O^6$	$\frac{1}{2}ZnSO^4$	$\frac{1}{2}CuSO^4$		
		110	117,2	109,3	113,3		
$\Lambda = \frac{\chi}{\eta}$ per $1000\eta = m = 0,001$							
KOH	NaOH	HCl	$HAzO^3$	$\frac{1}{2}H^2ZSO^4$	$\frac{1}{2}H^3PO^3$		
234	208	377	375	361	106		

Uno sguardo a questi numeri mostra regola di una semplicità significativa.

1. Per ogni coppia di cationi, la differenza nei valori di  $\Lambda$  è approssimativamente la stessa, qualunque siano gli anioni.

2. Per ogni coppia di anioni, la differenza dei valori di  $\Lambda$  è approssimativamente la stessa, qualunque siano i cationi. Dimostriamolo con alcuni esempi.

1. Differenza per i cationi			2. Differenza per gli anioni			
	K-Na	Na-Li		Cl- $AzO^3$	$Cl - C^2H^3O^2$	$\frac{1}{2}SO^4 - Cl$
Cl	19,8	9,0	K	4,8	29,5	4,0
$AzO^3$	21,0	—	Na	6,0	32,9	0,8
$C^2H^3O^2$	23,2	—	Li	—	—	0,2
$SO^4$	23,0	9,6	Zn	—	—	0,7

Bisogna tener conto che i valori di  $\Lambda$  sono molto difficili da determinare per cui potrebbero non essere del tutto esatti; inoltre sono stati presi i valori di  $\Lambda$  invece dei valori limite  $\Lambda_0$ , per i quali ci si dovrebbero aspettare molto di più leggi e rapporti semplici. Posto che le due regole di cui sopra valgano anche per i valori limite  $\Lambda_0$ , esse possono ovviamente essere sostituite dalla seguente legge unica.

*Il valore limite  $\Lambda_0$  della conducibilità elettrolitica equivalente di una soluzione è pari alla somma di due grandezze caratteristiche per i due elementi costitutivi (catione e anione) dell'elettrolita; in altre parole, per ciascuno dei due elementi tale grandezza caratteristica è indipendente da quella dell'altro elemento.* Queste grandezze rappresentano quindi in un certo senso la conducibilità equivalente limite delle parti costitutive dell'elettrolita, cioè del catione e dell'anione. Se designiamo simbolicamente l'elettrolita con CA, il catione con C, l'anione con A, la legge precedente è espressa dalla seguente formula di facile interpretazione:

$$\Lambda_0 = \Lambda_0(C) + \Lambda_0(A) \quad (10.0.25)$$

Il valore limite della conducibilità equivalente di una soluzione risponde ad una proprietà additiva (Volume I). Indicheremo in seguito il reale significato fisico delle grandezze  $\Lambda_0(C)$ ,  $\Lambda_0(A)$ ; tuttavia, citeremo ora alcuni numeri dati da Kohlrausch nel 1902.

	H	K	Na	$AzH^4$	Ag	$\frac{1}{2}Ba$	$\frac{1}{2}Mg$	$\frac{1}{2}Zn$
$\Lambda_0(C) =$	318	64,7	43,5	64,4	54,0	56,3	46,0	43,6
	$HO$	$Cl$	$I$	$AzO^3$	$\frac{1}{2}SO^4$	$\frac{1}{2}CO^3$		
$\Lambda_0(A)$	174	65,4	66,4	61,8	68,7	70		

Da questi numeri si deducono, per semplice addizione, le conducibilità  $\Lambda_0$  delle soluzioni dei composte corrispondenti.

Anche l'influenza della temperatura sulla conducibilità elettrolitica delle soluzioni diluite è più semplice che nel caso delle soluzioni non diluite. Il coefficiente di temperatura è quasi lo stesso per tutte le soluzioni diluite di sali. È mediamente uguale a 0,025 e oscilla tra 0,0216 e 0,0265. Per soluzioni di acidi forti ( $HAzO^3$ ,  $HSO^4$ ,  $HCl$ ), anche i coefficienti sono quasi uguali, ma raggiungono solo il valore 0,016; per gli alcali hanno valori intermedi, ad esempio 0,0194 per KHO e 0,0174 per NaHO. Quando la concentrazione aumenta fino a un certo valore limite, i coefficienti di temperatura diminuiscono. Per soluzioni diluite, meglio ancora che per soluzioni concentrate, si conferma la regola che *il coefficiente di temperatura è tanto maggiore quanto più debole è la conducibilità elettrolitica della soluzione*. Déguisne (1895) ha scoperto che si possono porre, per i valori di  $m = 0,0001$  a 0,05 (grammo-equivalente per litro):

$$\chi_t = \chi_{18} \left[ 1 + \alpha(t - 18) + \beta(t - 18)^2 \right] \quad (10.0.26)$$

Per temperature comprese tra  $-35^{\circ}$  e  $-41^{\circ}$ , si ha  $\chi = 0$ . Più tardi (1903), ha trovato che l'attrito interno  $\eta$  dell'acqua è espresso anche da un'analoga formula che dà  $\eta = 0$  a  $-34^{\circ}$ ;

La conducibilità elettrolitica dei sali fusi è stata determinata da Braun, Fousserieau, W. Kohlrausch (1882), Bouty e L. Poincaré, Grätz, Colridge, Brown, Bogorodski, Arndt (1906), Goodwin e Wentworth (1907), Lorenz e Kalmus (1907) e altri. Una rassegna dettagliata del lavoro di questi autori si troverà nel lavoro di Bogorodski (vedi § 2).

La conducibilità elettrolitica  $k$  di miscele di due elettroliti è stata misurata da Paalzow, Bouchotte, Bender, Bouty, Kurouschtschow e Paschkow, Klein, Arrhenius e altri. L'interesse principale qui risiede nella ricerca di soluzioni tali che, per le loro miscele,  $k$  possa essere calcolato usando la formula  $(V_1 + V_2)k = V_1k_1 + V_2k_2$ , dove  $V_1$  e  $V_2$  sono i volumi delle parti costitutive della miscela,  $k_1$  e  $k_2$  le loro conducibilità.

Kurouschtschow e Paschkow hanno trovato le miscele  $\frac{1}{2}KCl + ZnCl^2$ ,  $K^2SO^4 + MgSO^4$ , ecc. costituiscono tali soluzioni. Arrhenius, che ha studiato soluzioni di acidi, le ha chiamate isoidriche. Ha scoperto che quando due soluzioni sono isoidriche per volumi uguali, sono anche isoidriche per tutti i volumi e inoltre che se due soluzioni sono isoidriche separatamente con una terza, lo sono anche l'una con l'altra. Per ogni coppia di acidi, possiamo trovare soluzioni isoidriche; osserviamo che queste soluzioni hanno approssimativamente le stesse conducibilità  $k_1$  e  $k_2$ .

I liquidi chimicamente puri possiedono generalmente una notevole resistenza. Questa circostanza è molto importante da un punto di vista teorico. Occupiamoci prima della conduttività elettrolitica dell'acqua pura. La determinazione di questa conducibilità è estremamente difficile, a causa della grande difficoltà che si incontra nell'ottenere acqua pura. Prima di Kohlrausch, i seguenti valori erano stati trovati per  $10^{10}k$ , prendendo, come prima,  $k = 1$  per Hg:

Pouillet	80	Oberbeck	15	Quincke	2,16
Becquerel	70	Rosetti	4,5	Magnus	1,33

Nei suoi primi lavori, Kohlrausch (1878) aveva mostrato l'impossibilità di ottenere, per distillazione all'aria libera, dell'acqua la cui conducibilità sia inferiore a  $\chi = 0,7 \cdot 10^{-6}$  o  $k = 0,7 \cdot 10^{-10}$  (Hg); questo numero è due volte più piccolo di quello di Magnus. In un lavoro successivo (1885), ha distillato l'acqua nel vuoto, adottando tutta una serie di precauzioni. Riuscì in questo modo a raggiungere  $\chi = 0,26 \cdot 10^{-6}$  a  $18^{\circ}$ . Infine, in un ultimo lavoro, svolto in comune con Heydweiller (1894), è riuscito ad ottenere il più alto grado di purezza dell'acqua che sia mai stato raggiunto. Si ha per quest'acqua alla temperatura di  $18^{\circ}$ :

$$\chi = 0,043 \cdot 10^{-6} \quad k = 0,040 \cdot 10^{-10} \text{ (Hg)}$$

Kohlrausch ha dedotto con il calcolo, per la conducibilità dell'acqua assolutamente pura  $\chi$  (a  $18^{\circ}$ ), i valori

$$\chi = 0,040 \cdot 10^{-6} \quad k = 0,036 \cdot 10^{-10} \text{ (Hg)}$$

Il coefficiente di temperatura della conducibilità elettrolitica dell'acqua pura è molto grande; si ottiene

$$a 0^{\circ}, \chi = 0,01 \cdot 10^{-6} \quad a 18^{\circ} \chi = 0,04 \cdot 10^{-6} \quad a 50^{\circ} \chi = 0,17 \cdot 10^{-6}$$

Quando si studia  $\chi$  per soluzioni acquose diluite, si deve tenere conto della conducibilità dell'acqua, se la concentrazione  $m$  è molto piccola, cioè se  $m < 0,001$  per gli acidi e le basi, ad esempio, o  $m < 0,0001$  per sali neutri.

Oltre all'acqua, molti altri elettroliti chimicamente puri conducono corrente molto male o non conducono affatto corrente. Ciò fu indicato, per la prima volta, da F. Kohlrausch (1876). Gore



aveva precedentemente notato che gli acidi anidri liquidi HCl e HFl non conducono corrente. Bleckhode (1878), Hittorf (1878) e altri ancora hanno confermato questo fatto per i seguenti liquidi: acidi anidri HCl, HBr, HI, HFl,  $H^2S$  e  $H^3As$ ; anidridi  $SO^2$ ,  $CO^2$ ,  $B^2O^3$ ,  $CrO^3$ ,  $As^2O^3$ ,  $SO^3$ ; acidi organici anidri, quali acido acetico, benzoico, malico, butirrico, ecc.; inoltre CAz,  $CS^2$ ,  $C^2Cl^4$ ,  $C^2Cl^6$ ,  $CCl^4$ . Ai cattivi conduttori appartengono anche molti composti metallo-organici, carburi di idrogeno, oli grassi ed eterei, alcoli, eteri, ecc.

Sebbene finora abbiamo usato semplicemente la parola soluzione, abbiamo visto solo soluzioni acquose. Tuttavia, la conducibilità delle soluzioni di elettroliti in altri solventi non è di minore interesse teorico. A questo proposito, sono stati studiati moltissimi liquidi; su questa questione i lavori più importanti sono stati realizzati in Russia: Kabloukow, R. Lenz, Walden, Tsentschwer, Zélinisky e Krapiwine, Plotnikow, e altri studiosi russi se ne sono occupati; tra gli altri autori possiamo citare Franklin e Krauss, Carrara, Hartwig, Di Ciommo, Vicentini, Fitzpatrick, Stéphan, ecc. Faremo prima alcune considerazioni generali. Le soluzioni acquose di elettroliti possiedono generalmente una maggiore conducibilità rispetto alle soluzioni in altri liquidi. Tuttavia, ci sono eccezioni. Così, Franklin e Kraus hanno trovato che certe soluzioni di sali in acetone, acetonitrile e  $AzH^3$  liquido, possiedono maggiore conduttività rispetto alle soluzioni degli stessi sali in acqua. Ecco una piccola tabella dei valori limite della conducibilità elettrolitica equivalente:

	Acetone	Acetomitrile	$AzH^3(-34^\circ)$	Acqua
NaI	140	160	—	121
KI	154	—	340	143
KBr	—	—	340	144
$AzH^4Cl$	—	—	304	144
$AgAzO^4$	—	160	280	121

Walden e Tsentschwer (1901) hanno trovato che la conducibilità elettrolitica delle soluzioni dei sali  $Az(CH^3)^4I$  e  $Az(C^2H^6)^4I$  nella  $SO^2$  liquida è fino a tre volte maggiore che nell'acqua. Tsentschwer, (1902) ha ottenuto lo stesso risultato con soluzioni di molti sali in HCy liquido.

Si è anche notato che le semplici leggi trovate dalle soluzioni acquose da Kohlrausch per le soluzioni acquose non si applicano alle soluzioni in altri liquidi. Così Kabloukow ha trovato che la conducibilità equivalente delle soluzioni di HCl in etere diminuisce con la concentrazione, che però prima aumenta e poi diminuisce in alcool isoamilico. Inoltre, diminuisce anche la conducibilità equivalente di NaI e NaBr nel benzonitrile, di  $AgAzO^3$  nella piridina e di  $FeCl^3$  nella piridina e nella benzaldeide, insieme alla concentrazione. Per molte soluzioni in acetone e  $SO^2$  liquida, essa aumenta al diminuire della concentrazione, ma non sembra tendere verso un determinato valore limite.

Abbiamo visto che il coefficiente di temperatura della conducibilità elettrolitica è quasi sempre positivo per le soluzioni acquose. Per le soluzioni non acquose, si osserva molto più spesso un coefficiente negativo; questa è la regola, al di sopra di una certa temperatura, per le soluzioni in  $SO^2$  liquida, come mostrato da Walden e Tsentschwer. Pertanto, la conducibilità di una soluzione di KI in  $SO^2$  aumenta da  $-78^\circ$  (temperatura di solidificazione di  $SO^2$ ) a  $-20^\circ$ , ma poi diminuisce costantemente fino alla temperatura critica di  $SO^2$  ( $+157^\circ$ ), alla quale è praticamente nulla. Inoltre, la conducibilità di una soluzione di  $AzH^4CazS$  in  $SO^2$  ha il suo massimo a  $-48^\circ$ , quella di una soluzione di  $S(CH^3)^3I$  a  $+5^\circ$ , ecc. Qualcosa di analogo si osserva anche per una soluzione in  $AzH^3$  liquido.

Cattaneo ha mostrato che è possibile preparare miscele di alcool ed etere, in cui la conducibilità delle soluzioni di alcuni sali ( $FeCl^3$ ,  $AuCl^3$ , ecc.) è indipendente dalla temperatura. È il caso, ad esempio, di una soluzione di 1,019% di  $FeCl^3$  in una miscela di 100 parti di etere e 66,5 di alcool.

Le soluzioni di sali in alcoli (R. Lenz, Kablounow, Carrara, ecc.) possiedono una conducibilità minore rispetto alle soluzioni acquose ed è diverso anche l'ordine in cui esse variano, a seconda della loro conducibilità. La conducibilità equivalente diminuisce, in molti casi, contemporaneamente alla concentrazione, Walden ha trovato che le soluzioni in  $BCl^3$ ,  $PCI^3$ ,  $PBr^3$ ,  $SbCl^5$ ,  $SiCl^4$ ,  $SnCl^4$ ,  $SO^3$  e  $Br^2$  non possiedono una conducibilità significativa. I seguenti solventi danno soluzioni la cui conducibilità aumenta nell'ordine  $S^2Cl^2$ ,  $SO^2$ ,  $Cl^2$ ,  $SOCl^2$ ,  $POCl^3$ ,  $AsCl^3$ ,  $SbCl^3$ . Ciommo (1901) ha studiato la conducibilità di soluzioni di KOH e NaOH in 96% di glicerina. Si osservano massimi per queste soluzioni (5% di KOH; 7,03% di NaOH), come nelle soluzioni acquose. Il coefficiente di temperatura è estremamente elevato: 0,21 per NaOH e 0,17 per KOH.

Le indagini più estese sulla conducibilità delle soluzioni acquose sono state fatte da Walden dal 1900 al 1907. Dapprima ha studiato (1903) i solventi inorganici e numerosi solventi organici. Sfortunatamente, queste notevoli ricerche esulano dall'ambito di un Trattato di Fisica, e dobbiamo quindi limitarci a dire solo poche parole su di esse. Molte sostanze, che non possono in alcun modo essere considerate sali o acidi, si comportano come elettroliti nella  $SO^2$  liquida (a  $-10^\circ$ ). Tali sono per esempio gli aloidi, i composti aloidi tra loro e con P, Sb e Sn; inoltre  $AzOCl$ ,  $POCl^3$ ,  $SOCl^2$ ,  $SO^2Cl^2$ , ecc. In tutta una serie di lavori importanti, Walden (dal 1903 al 1906) ha studiato le soluzioni in 50 liquidi organici, utilizzando, per il confronto dei solventi, la sostanza disciolta  $Az(C^2H^5)^4I$ . Walden ha determinato la conducibilità di questo sale in diversi solventi e ne ha dedotto il grado di dissociazione (vedi oltre). Walden (1906) ha determinato anche il coefficiente di viscosità dei solventi puri. Ha trovato che, per lo stesso elettrolita  $Az(C^2H^5)^4I$ , il prodotto della viscosità del solvente e del valore limite  $\Lambda_0$  è una grandezza che ha lo stesso valore per tutti i solventi studiati ed è indipendente dalla temperatura. Walden (1910) studiò anche la conducibilità di soluzioni non acquose a basse temperature. Egli ha riconosciuto che, in 12 solventi organici, la conducibilità è tanto maggiore, quando la temperatura si abbassa, quanto maggiore è l'attrito interno. Il punto di solidificazione della soluzione non è in alcun modo un punto particolare e la conducibilità non subisce discontinuità in questo punto; si avvicina asintoticamente all'asse della temperatura.

Plotnikow ha anche studiato la conducibilità elettrolitica in diversi solventi (bromo, etere, ecc.). Le soluzioni di bromo sono di particolare interesse. Esiste tutta una serie di sostanze le cui soluzioni nel bromo conducono la corrente; la soluzione  $PBr^5$  è un conduttore particolarmente buono e la sua conducibilità ha un massimo per la concentrazione di  $PBr^5 + 20Br$ . La conducibilità specifica delle soluzioni concentrate è generalmente una grandezza anormale; supera fino a 1000 volte la conducibilità specifica delle soluzioni diluite.

Lewis e Wheeler (1906) hanno trovato che soluzioni concentrate di KI nello iodio liquido, tra  $120^\circ$  e  $160^\circ$ , si comportano come le migliori soluzioni acquose. Nelle soluzioni diluite, la conducibilità molecolare aumenta linearmente con la concentrazione fino a un massimo, per poi diminuire.

Steele, McIntosh e Archibald (1905) hanno studiato l'elettrolisi in gas liquefatti HCl, HBr, HI,  $SH^2$  e  $PH^3$  impiegati come solventi; tra i corpi citati  $PH^3$  non possiede alcun potere ionizzante.

Parleremo più avanti della relazione che esiste tra la costante dielettrica del solvente e la conducibilità elettrolitica di una soluzione.

La conducibilità delle soluzioni acquose, alle quali sono state aggiunte sostanze cattive conduttrici, è stata studiata da E. Wiedemann (glicerina), Lüdeking (gelatina), Arrhenius (alcoli, etere, acetone) e altri ancora. Arrhenius ha trovato che la conducibilità  $k$  di una tale soluzione è rappresentata dalla formula  $k = k_0 (1 - ax)^2$  dove  $k_0$  si riferisce alla soluzione acquosa e  $x$  è la percentuale in volume della sostanza aggiunta.

Nichols e Merritt (1904) hanno osservato che la conducibilità delle soluzioni alcoliche di alcune sostanze fluorescenti (eosina, ecc.) diminuisce quando esse sono illuminate e si produce fluorescenza.

Concludendo questo paragrafo sulla conducibilità delle soluzioni elettrolitiche aggiungeremo alla nostra esposizione alcune applicazioni.

1. Kistiakowski (1890) ha dimostrato che misurando la conducibilità della soluzione di un sale doppio si può riconoscere se questo sale appartiene a miscele (allume) o a tipici sali doppi come  $K^3Fe(CAz)^6$ . A tale scopo viene determinato il valore limite  $\Lambda_0$  della conducibilità equivalente della soluzione che, come mostrano le tabelle, oscilla generalmente, per i diversi sali, tra i numeri 100 e 135 a 18°. Se  $\Lambda_0$  è compreso tra questi limiti, siamo giustificati nell'assumere che il sale sia un tipico sale doppio; al contrario, se  $\Lambda_0$  è approssimativamente uguale alla somma delle grandezze  $\Lambda'_0$  e  $\Lambda''_0$ , relative alle parti costitutive del sale, questo sale è una miscela.

2. Kohlrausch e Rose (1893), così come Hollemann (1893) hanno indicato come si possa dedurre, da osservazioni sulla conducibilità, la solubilità di sostanze difficilmente solubili, quali  $AgCl$ ,  $AgBr$ ,  $Ag$ ,  $BaSO_4$ ,  $BaC_2O_4$ , vari silicati, ecc. La formula (6),  $\Lambda = \chi : \eta$ , dà

$$\eta = \frac{\chi}{\Lambda}$$

La quantità  $\Lambda$  può essere calcolata utilizzando la formula (8), che vale anche per soluzioni molto diluite;  $\chi$  si determina sperimentalmente, sottraendo alla conducibilità osservata della soluzione quella dell'acqua. Quindi per  $AgCl$  danno i numeri della tabella danno

$$\Lambda(AgCl) = \Lambda(Ag) + \Lambda(Cl) = 54,0 + 65,4 = 119,4$$

La misurazione ha dato  $1000\eta = 0,00001$  grammi equivalenti per litro = 0,01 milligrammi equivalenti per litro = 1,46 milligrammi per litro.

La solubilità di sostanze scarsamente solubili è stata determinata utilizzando questo metodo da J. Kohlrausch e Dolezalek (1901) per  $AgBr$  e  $AgI$ . Inoltre, nel 1903 sono apparsi due importanti articoli, uno di F. Kohlrausch (in collaborazione con F. Rose e Dolezalek), che ha studiato 41 soluzioni, l'altro di Böttger che ne ha studiate 31. Infine Gardner e Guerassimow (1904) determinarono anche con questo metodo la solubilità di alcuni sali di acidi deboli.

3. Quando sono disponibili tabelle o curve per la conducibilità elettrolitica  $\chi$  della soluzione di una data sostanza a vari gradi di concentrazione, si può naturalmente ricavare, misurando  $\chi$ , il grado di concentrazione, se non è noto. Quando una data soluzione contiene due elettroliti, è anche possibile, come ha dimostrato Erdmann (1897), determinare in molti casi la concentrazione delle parti costituenti la miscela disciolta.

4. Una stima approssimativa della quantità di sali sconosciuti disciolti in acqua può essere ottenuta con la seguente regola; la conducibilità  $\chi$  a temperatura ordinaria moltiplicata per 10000 è approssimativamente uguale al numero di milligrammi equivalenti in un litro di soluzione. Ci si può facilmente convincere della correttezza di questa regola, assumendo che  $\Lambda = 100$ . Se nella soluzione sono presenti solo sali degli acidi  $HCl$ ,  $H^2SO_4$  e  $H^2CO_3$  e se sono presenti anche sali di metalli non nobili, il peso equivalente oscilla tra 60 e 90. Prendendolo uguale a 75, si ottiene la seguente regola: *il numero  $0,75\chi \cdot 10^6$  è approssimativamente uguale al numero di milligrammi di sali, che si sciolgono in un litro d'acqua.*

#### 4. Teoria dell'elettrolisi. Opere anteriori a quelle di F. Kohlrausch

Una teoria dell'elettrolisi deve risolvere due problemi:

1. In cosa consiste il meccanismo dell'elettrolisi, cioè come avviene la comparsa degli ioni sugli elettrodi, potendo questi essere a grande distanza l'uno dall'altro? Nella soluzione c'è un elettrolita, che rappresenta un composto chimico di ioni. Dove avviene la scomposizione dell'elettrolita e perché gli ioni diventano visibili solo sugli elettrodi?

2. Che ruolo gioca la corrente elettrica nel circuito in cui deve essere introdotto l'elettrolita? Qual è l'azione dell'elettricità in generale?

Si noti che all'incirca fino al 1888, vale a dire fino alla comparsa dell'opera di Arrhenius, si ritrovava, alla base di tutte le considerazioni teoriche sull'elettrolisi, la stessa idea che può essere espressa brevemente come segue: "la corrente scompone l'elettrolita". La scomposizione per corrente si presentava come un fatto evidente, di cui non si poteva dubitare; i fisici hanno solo cercato di spiegare perché e come la corrente scompone l'elettrolita.

Prenderemo in considerazione, in ordine storico, lo sviluppo di nozioni teoriche che si sono progressivamente formate sull'elettrolisi. Un'azione chimica dell'elettricità, la scomposizione dell'acqua, fu osservata per la prima volta da Paetz von Troostwyk e Deimann (1789), facendo passare attraverso l'acqua la scarica di una bottiglia di Leida. Ritter (1799) fu il primo a scomporre l'acqua, mediante la corrente galvanica; indipendentemente da lui, ma certamente più tardi, Nicholson e Carlisle (1800) osservarono lo stesso fenomeno. Poi, i fenomeni fondamentali dell'elettrolisi furono scoperti dal lavoro di molti fisici, in particolare quelli di Davy.

Grothius (1805) ha dato la prima spiegazione del meccanismo dell'elettrolisi e del ruolo delle forze elettriche che entrano in azione in questo fenomeno: La teoria che ha dato è la seguente. Le parti costitutive della molecola di qualsiasi elettrolita sono legate con cariche elettriche uguali e di nomi opposti; per esempio, nella molecola di NaCl, l'atomo di Na è legato alla carica  $+e$ , l'atomo di Cl alla carica  $-e$ . Quando la soluzione viene introdotta in un circuito, tutte le molecole si orientano in modo tale che tutti gli atomi di Na siano rivolti verso il catodo, tutti gli atomi di Cl verso l'anodo. Poi tutte le molecole si scompongono, l'atomo di Na della prima molecola si separa con la sua carica, al catodo, l'atomo di Cl della prima molecola si combina con l'atomo di Na della seconda, l'atomo di Cl della seconda con l'atomo di Na della terza, ecc., infine l'atomo di Cl dell'ultima molecola che si separa con la sua carica all'anodo. Le molecole di NaCl appena formate ruotano immediatamente di  $180^\circ$ , in modo che tutti gli atomi di Na siano nuovamente orientati verso il catodo, tutti gli atomi di Cl verso l'anodo. Tutte le nuove molecole si scompongono a loro volta, gli atomi estremi Na e Cl si separano con le loro cariche sugli elettrodi, gli altri si uniscono a due a due formando nuove molecole, che ruotano di  $180^\circ$ , si scompongono, ecc. Il fatto che gli ioni appaiano solo sugli elettrodi e non manifestino la loro presenza all'interno dell'elettrolita è, in questo modo, del tutto escluso. È molto interessante vedere che questa vecchia teoria dell'elettrolisi porta già alla nozione di una corrente di ioni, che si muovono verso gli elettrodi in due direzioni opposte. L'aspetto più caratteristico della teoria di Grothius è l'assunzione di una scomposizione ininterrotta e di una nuova formazione di molecole da ioni in movimento.

La teoria di Grothius fu generalmente accettata per tutta la prima metà del secolo precedente. In questo periodo, abbiamo solo cercato di completarla in vari modi. Ci limiteremo a dare un'esposizione molto succinta delle teorie più complesse che sono state proposte.

Va menzionata soprattutto la famosa teoria elettrochimica di Berzelius (1812), leggermente modificata successivamente da Fechner (1838). I punti più essenziali di questa teoria sono i seguenti: ogni atomo è legato a due cariche elettriche di nomi opposti; quando due atomi entrano in combinazione, una delle cariche si separa in ogni atomo in tutto o in parte, così che, nel composto, ogni atomo contiene un eccesso di una delle due cariche. Le due cariche, che sono separate, rimangono libere secondo Berzelius, si uniscono tra loro secondo Fechner.

De la Rive (1856) suppone anche che, in una molecola, ad esempio in KCl, ciascuno dei due atomi sia legato a due cariche di nomi opposti; la carica positiva del cloro e la carica negativa del potassio sono ai lati opposti degli atomi, la carica negativa del cloro e la carica positiva del potassio occupano, per così dire, i lati esterni della molecola.

Ampère (1821) ammette che ogni atomo possiede una sola carica, che gli è propria, e che è circondato da una carica dello spazio circostante di uguale grandezza ma di nome opposto. Quando due atomi si combinano, queste cariche indotte si liberano e passano nello spazio circostante.

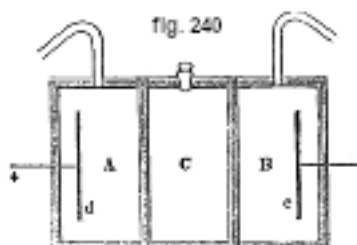
Non ci soffermeremo sulle teorie piuttosto complicate di Schönbein (1857) e Magnus (1857),

che riguardano i dettagli del meccanismo dell'elettrolisi. È sorprendente che Faraday, che ha comunque scoperto le leggi dell'elettrolisi, non abbia proposto nulla di nuovo su questo meccanismo. Nella quinta serie delle sue *Esp. Res.* (§§ 158, 524, 826 a 832), dice solo che le forze chimiche, sotto l'influenza della corrente, subiscono una modifica che le fa agire più fortemente in una direzione che in quella opposta, cosicché gli ioni sono, per così dire, spinti nel verso determinato in cui si muovono, mentre si combinano e si separano costantemente.

Con la seconda metà del secolo scorso è iniziata una nuova era, nella storia della ricerca teorica sui fenomeni di elettrolisi. Le opere classiche che lo caratterizzano sono alcune di ordine prettamente sperimentale, altre di ordine teorico.

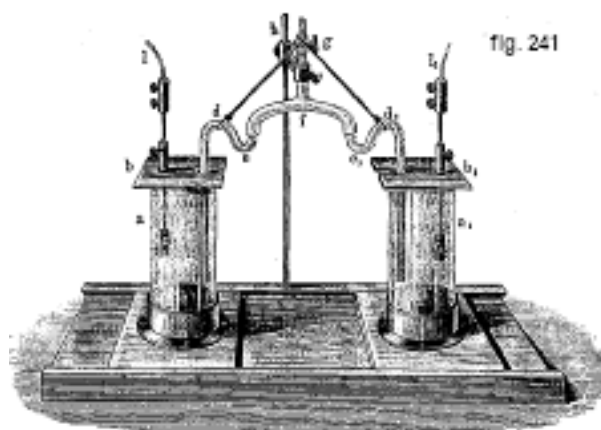
Alla serie di opere di carattere sperimentale sono allegati i titoli di Daniell e Miller (1839, 1844), G. Wiedemann (1856), Hittorf (1853-1859), F. Kohlrausch (1876) e Ostwald (1888). La seconda serie comprende ricerche teoriche dove incontriamo i nomi di Clausius (1857), Helmholtz (1880), Arrhenius (1888) e Ostwald (1888). L'esperienza e la teoria sono così progredite parallelamente, completandosi a vicenda, e hanno permesso di costruire l'attuale teoria dell'elettrolisi. Ci atterremo al corso storico dello sviluppo di questa teoria e studieremo le opere che l'hanno stabilita nell'ordine in cui sono apparse.

Le ricerche sperimentali, di cui ci occuperemo per prime, hanno avuto soprattutto per oggetto la determinazione delle modifiche che si producono nella distribuzione dell'elettrolita all'interno della soluzione, durante l'elettrolisi. Gmelin (1838) e Pouillet (1845) avevano osservato che la decolorazione delle soluzioni, durante l'elettrolisi, avviene soprattutto intorno al catodo; ma i primi studi precisi si devono a Daniell e Miller. Si sono serviti di uno strumento in cui si possono studiare separatamente i diversi strati della soluzione elettrolitica, dopo che quest'ultima è stata sottoposta per un certo tempo ad elettrolisi. La figura 240 rappresenta uno di questi dispositivi; si compone di tre vasi contigui, separati da tramezzi porosi; gli elettrodi si trovano nei due vasi estremi.

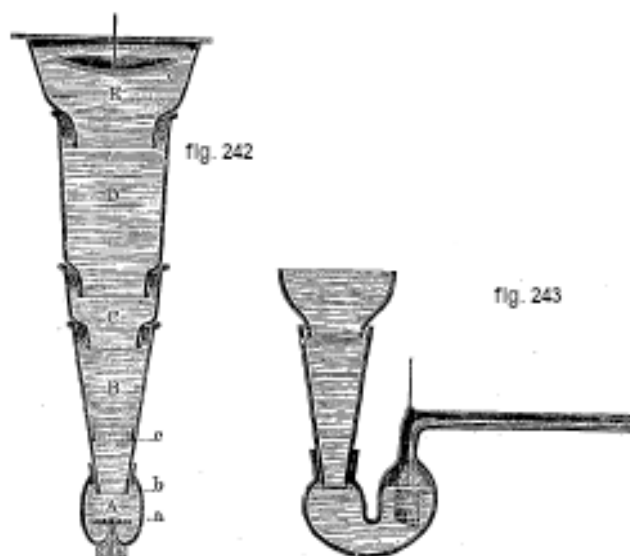


Uno svantaggio di questo dispositivo è che i setti non si oppongono alla diffusione; i risultati ottenuti da Daniell e Miller erano, per questo motivo, inesatti. Studiando il contenuto dei tre vasi dopo l'elettrolisi, hanno osservato che, nell'elettrolisi di  $\text{CuSO}_4$ ,  $\text{ZnSO}_4$  e  $\text{AzH}^4\text{Cl}$  per esempio, le quantità totali di Cu e Zn nel vaso contenente il catodo, così come la quantità totale di Cl nel recipiente contenente l'anodo sono rimaste invariate. Hanno concluso che, nell'elettrolisi, gli ioni Cu e Zn, ad esempio, rimangono stazionari, mentre lo ione  $\text{SO}_4$  si sposta passando davanti ad essi.

G. Wiedemann (1856) e il suo allievo Kirmis (1878) usarono uno strumento meglio organizzato. Due vasi  $a$  e  $a_1$  (fig. 241), contenenti gli elettrodi, sono collegati da un tubo  $dfd$ , provvisto di un rubinetto  $g$ . I due vasi, così come il tubo di comunicazione, sono riempiti con l'elettrolita. I risultati ottenuti da G. Wiedemann concordano bene con quelli che Hittorf ha trovato, nelle ricerche svolte dal 1853 al 1859, e che ora presentiamo.



Questi notevoli lavori hanno completamente chiarito la questione di quello che viene chiamato il trasporto di ioni nell'elettrolisi. Per avere un'idea la più chiara possibile del modo in cui varia la distribuzione dell'elettrolita, Hittorf ha diviso l'intera colonna liquida in strati, tra i quali non si poteva quasi produrre diffusione e che erano facilmente separabili. La figura 242 rappresenta uno degli strumenti impiegati; è formato da una serie di recipienti montati gli uni negli altri; il fondo di ciascuno di essi è formato da una membrana (pergamena, vescica) o da una sottile lastra porosa di argilla. Al termine dell'elettrolisi, si può smontare lo strumento e studiare separatamente ognuno degli strati dell'elettrolita; A e E sono gli elettrodi. La figura 243 rappresenta la parte di uno di questi strumenti, impiegata nel caso in cui all'elettrodo inferiore viene emesso un gas.



Per comprendere l'importanza delle quantità che Hittorf chiama fattori di trasporto degli ioni e che designa con  $n$  e  $1 - n$ , consideriamo la figura 244, che rappresenta il vaso con l'elettrolita disciolto;  $k$  è il catodo,  $a$  l'anodo. Supponiamo che l'intera colonna di liquido sia divisa in tre parti A, B, C, essendo quelle estreme A e C contigue agli elettrodi; sia  $F$  la quantità di elettricità, cioè 96540 coulomb che passa attraverso il recipiente. In questo caso si separa su  $k$  e su  $a$  un grammo equivalente di catione e anione. Questi si sono spostati all'interno della soluzione, verso gli elettrodi, in due direzioni opposte. Ora sorge la domanda: da dove vengono i grammi equivalenti degli ioni, cioè in quali punti si trovavano nella soluzione prima dell'elettrolisi, quando ancora formavano le parti costituenti delle molecole dell'elettrolita o almeno sembravano tali? Supponiamo che, durante l'elettrolisi, la concentrazione della soluzione non sia cambiata nella parte B; l'ampiezza di questa parte non avendo alcun ruolo nei nostri ragionamenti, potremmo anche prenderla come nulla.

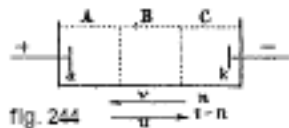


fig. 244

Le velocità con cui si muovono gli ioni dipendono, in primo luogo, dalle forze elettriche che agiscono su di essi. Se ammettiamo che il moto degli ioni ha lo stesso carattere di quello dei corpi piccolissimi in un mezzo resistente, le velocità, ma non le accelerazioni, devono essere proporzionali alle forze agenti. In secondo luogo, le velocità degli ioni devono dipendere dagli ioni stessi, cioè dalla loro capacità di muoversi all'interno di una soluzione avente determinate proprietà. Caratterizzeremo questo potere con una grandezza particolare, che chiameremo *mobilità* degli ioni; designeremo la mobilità del catione con  $u$ , quella dell'anione con  $v$ . Queste grandezze sono proporzionali alle reali velocità di trasporto degli ioni sotto l'influenza di una data forza elettrica, la stessa ovviamente per ogni ione (stessa caduta di potenziale).

Siano  $p_a$  e  $p_c$  il numero di grammo-equivalenti di ciascuno ione dell'elettrolita che sono scomparsi nelle regioni  $a$  e  $k$ . Si deve avere

$$p_a + p_c = 1 \quad (10.0.27)$$

poiché, nell'intera soluzione, è scomparso 1 gr. eq. dell'elettrolita, quando  $F$  coulomb di elettricità hanno attraversato la soluzione.

Supponiamo prima di avere  $u = v$ , cioè che i due ioni abbiano la stessa mobilità e di conseguenza anche la stessa velocità. In questo caso, un numero  $n$  di grammo-equivalenti dell'anione è passato da C in A, verso verso l'anodo  $a$ , un numero  $n$  di grammo-equivalenti di catione che hanno raggiunto il catodo  $c$  passando da A a C. Come si vede facilmente, si ha allora  $n = 1/2$ . Infatti, da A sono usciti  $n$  gr. eq. del catione e di conseguenza  $n$  gr. eq. dell'anione sono stati rilasciati sull'anodo; inoltre,  $n$  altri gr. eq. degli anioni sono passati all'anodo C, sul quale sono apparsi  $2n$  gr. eq. di anione. Ma sappiamo che sull'anodo formato si è formato un gr. eq. dell'anione; si ha quindi  $2n = 1$  o  $n = 1/2$ . Ne segue che, in questo caso, una sezione qualunque di B è stata attraversata da  $1/2$  gr. eq. di ciascuno ione. Nello stesso tempo, in A e in C è scomparso  $1/2$  gr. eq. di elettrolita, di modo che  $p_a = p_c = 1/2$ . La diminuzione della concentrazione in A e in C, cioè in prossimità dei due elettrodi, è la stessa, quando le mobilità  $u$  e  $v$  degli ioni sono le stesse.

Siano ora  $u$  e  $v$  mobilità differenti; il numero  $n_c$  di gr. eq. di cationi passati da A a C è quindi diverso dal numero  $n_a$  di gr. eq. dell'anione che sono passati da C ad A. Si vede dapprima che i numeri  $n_c$  e  $n_a$  devono essere proporzionali alle velocità e di conseguenza anche alle mobilità  $u$  e  $v$  degli ioni, per cui si ha

$$\frac{n_a}{n_c} = \frac{v}{u} \quad (10.0.28)$$

Si ha inoltre  $n_c + n_a = 1$ . Infatti, da A sono usciti  $n_c$  gr. eq. di catione e conseguentemente  $n_c$  gr. eq. di anioni sono stati rilasciati, che si sono separati sull'anodo; inoltre,  $n_a$  gr. eq. dell'anione è passato da C sull'anodo, così che in totale  $(n_c + n_a)$  gr. eq. dell'anione si sono separati sull'anodo; ora questo numero deve, come sappiamo, dare 1 gr. eq. Introduciamo di conseguenza una nuova notazione e scriviamo  $n$  invece di  $n_a$  e  $1 - n$  invece di  $n_c$ . B è allora attraversato, in due direzioni opposte, da  $n$  gr. eq. dell'anione e da  $(1 - n)$  gr. eq. del catione. Sono questi numeri  $n$  e  $1 - n$  che Hittorf chiama i fattori di trasporto dell'anione e del catione. Invece della (11) abbiamo ora

$$\frac{n_a}{n_c} = \frac{n}{1 - n} = \frac{v}{u} \quad (10.0.29)$$

da cui

$$n_a = n = \frac{v}{u + v} \quad (10.0.30)$$

$$n_c = 1 - n = \frac{u}{u + v} \quad (10.0.31)$$

Realizziamo infine che  $n (= n_a) = p_c$  e  $1 - n (= n_c) = p_a$ . Infatti se da C sono usciti  $n (= n_a)$  gr. eq. dell'anione, altrettanti gr. eq. ( $p_c$ ) dell'elettrolita sono scomparsi da C, cioè attorno al catodo, poiché gli  $n$  gr. eq. corrispondenti del catione si sono separati sul catodo e gli  $(1 - n)$  gr. eq. del catione, che sono venuti da A e si precipitano anche sul catodo, non hanno alcuna influenza sulla concentrazione della soluzione attorno al catodo. Si ha allora che  $n = p_c$  e si dimostrerà allo stesso modo che  $1 - n (= n_c) = p_a$ .

Se fossero passati attraverso la soluzione, non  $F$ , ma un numero qualsiasi di coulomb, si otterrebbero i altri valori per le diminuzioni  $P_a$  e  $P_c$  delle concentrazioni attorno all'anodo e al catodo; ma si avrebbe

$$P_c : P_a = p_c : p_a = n_a : n_c = n : (1 - n)$$

da cui, dalla (12)

$$\frac{n}{1 - n} = \frac{v}{u} = \frac{P_c}{P_a} \quad (10.0.32)$$

$$\begin{cases} n_a = n = \frac{P_c}{P_a + P_c} \\ n_c = 1 - n = \frac{P_a}{P_a + P_c} \end{cases} \quad (10.0.33)$$

Le ultime formule indicano un modo pratico per determinare i fattori di trasporto degli ioni: il fattore  $n$  di trasporto dell'anione è uguale al rapporto tra la variazione  $P_c$  della concentrazione al catodo e la variazione totale  $P_a + P_c$  della concentrazione della soluzione; il fattore di trasporto  $1 - n$  del catione è uguale al rapporto tra la variazione  $P_a$  della concentrazione all'anodo e la variazione  $P_a + P_c$  della concentrazione della soluzione.

È un fatto molto importante che basti ricercare la concentrazione a uno degli elettrodi, per ottenere i fattori di trasporto degli ioni, poiché la variazione totale  $P_a + P_c$  della concentrazione è immediatamente determinata dalla quantità di ione equivalente che si separa su questo stesso elettrodo; possiamo ancora ottenere questa variazione totale con il calcolo, quando conosciamo l'intensità della corrente e la durata della sua azione, vale a dire il numero di coulomb, o infine impiegare uno qualsiasi dei metodi che consentono la valutazione della quantità di ioni liberati o di elettrolita scomparso. In pratica si determina mediante l'analisi chimica la quantità di uno degli ioni chiave su uno degli elettrodi, cosicché vi sono quattro metodi per la determinazione del numero  $n$ .

Il grande merito di Hittorf è quello di aver introdotto la nozione di fattori di trasporto  $n$  e  $1 - n$  dell'anione e del catione e di aver indicato la via da seguire per determinarli. Hittorf ha determinato i fattori di trasporto ionico del solfato di rame; interpose nello stesso circuito un voltmetro d'argento, nel quale si precipitava 1,008 g d'argento; corrispondono a questa quantità di argento, 0,2955 g di Cu, che deve precipitare sul catodo posto nella soluzione di  $CuSO^4$ . Questo numero 0,2955 corrisponde alla diminuzione totale della concentrazione  $P_a + P_c$ , che compare nelle formule (14). La soluzione, che circonda il catodo, perde durante l'elettrolisi 0,2112 g di rame, numero che serve come misura della diminuzione  $P_c$  della concentrazione attorno al catodo. Il rapporto

$$n = \frac{0,2112}{0,2955} = 0,715$$

fornisce il fattore di trasporto  $n$  dell'anione  $SO^4$ . Ne deduciamo, per il fattore di trasporto del Cu nella soluzione data, il valore  $1 - 0,715 = 0,285$ . Nel caso considerato, a 0,715 gr. eq. dell'anione  $SO^4$ , che attraversa la sezione mediana del vaso in direzione dell'anodo, corrisponde quindi a 0,28 gr. eq. di Cu che viene trasportato nella direzione opposta. La formula (12) dà

$$\frac{v}{u} = \frac{\text{velocità di } SO^4}{\text{velocità di } Cu} = \frac{0,715}{0,285} = 2,5$$



L'anione  $SO^4$  si sposta pertanto, nella soluzione del solfato di rame studiato, 2,5 volte più velocemente del catione Cu.

L'esempio seguente è ancora dovuto a Hittorf. Si sottopone all'elettrolisi una soluzione al 4% di  $AgAO^3$  a  $18,4^\circ$ . Sul catodo precipitano 0,3208 g di argento. L'elettrodo perde, durante l'elettrolisi, attorno al catodo, 0,1691 g di argento. Ne segue che  $0,1691 : 0,3208 = 0,527$  è il fattore di trasporto dell'anione  $AzO^3$  e  $1 - 0,527$  quello dell'Ag. Si potrebbe anche fare il ragionamento seguente: precipitano al catodo 0,3208 g di argento, e tuttavia ne scompaiono attorno al catodo solo 0,1691 g; pertanto,  $0,3208 - 0,1691 = 0,1517$  g di argento passano dalla soluzione, che circonda l'anodo, sul catodo. Il numero  $0,1517 : 0,3208 = 0,473$  è quindi il fattore di trasporto dell'argento e  $1 - 0,473 = 0,527$  quello di  $AzO^3$ . In questo caso, la differenza delle velocità  $u$  e  $v$  è piccola; il loro rapporto è uguale a 1,11.

Bogdan ha fornito un esempio della misura di  $n$ , per una soluzione diluita di KCl; una lastra di zinco funge da anodo, in modo che  $ZnCl^2$  si formi nella soluzione attorno all'anodo. Si analizza il liquido dell'anodo, che contiene, prima dell'elettrolisi, 0,084011 g di KCl per 100 g della soluzione. Precipitano, nel voltmetro d'argento, 0,2887 g d'argento, che corrisponde a  $0,2887 : 107,93$  gr. eq. Un numero uguale a  $0,2887 : 107,93$  grammi equivalenti di C passano dal liquido dell'anodo sul catodo. Poiché precipitano, nel voltmetro, 0,2887 g d'argento, appaiono sull'anodo 0,09483 g di cloro, che dà 0,182300 g di  $ZnCl^2$ . 660,42 g del liquido dell'anodo vengono sottoposti all'analisi; si trovano, in 100 g di questo liquido, 0,047106 g di cloro e quindi, nell'intero liquido dell'anodo, 0,31110 g di cloro; su questo numero, 0,09483 g si trovano uniti allo zinco di modo che  $0,31110 - 0,09483 = 0,21627$  g di cloro sono uniti a K, ciò che corrisponde a 0,45511 g di KCl. e si aggiungono 0,18230 g di  $ZnCl^2$ , si vede che 660,42 g di liquido dell'anodo contengono 0,64 g di sali e 659,78 g di  $H^2O$ . In questo peso d'acqua, erano contenuti prima dell'elettrolisi

$$659,78 \cdot \frac{0,084011}{100 - 0,084011} = 0,55475 \text{ di } KCl$$

Se si sottraggono da questo peso 0,45511 g si trova che 0,09964 g di KCl sono scomparsi del liquido dell'anodo, ciò che corrisponde a  $0,09964 : 74,6$  gr. eq. di KCl. Un uguale numero di grammi-equivalenti di K sono passati del liquido dell'anodo al catodo. Si deduce da ciò il fattore di trasporto  $1 - n$  del catione K:

$$1 - n = \frac{0,09649}{74,6} : \frac{0,2887}{107,93} = 0,499$$

Si ottiene 0,501 per il fattore di trasporto  $n$  dell'anione Cl. I due ioni si muovono con velocità quasi uguali.

Come esempio di velocità di ioni molto diversi, si può prendere una soluzione di  $H^2SO^4$  (1 g di  $H^2SO^4$  per 5,415 g di  $H^2O$ ), per la quale si ha

$$n = 0,174 \quad 1 - n = 0,826$$

il catione H si sposta qui 5,4 volte più velocemente dell'anione  $SO^4 = SO^3 + O$ . Per HBr, si ottiene  $n = 0,174$ ,  $1 - n = 0,826$ . Per  $(UO)^2 Cl^2$ , si ha  $n = 0,132$ ,  $1 - n = 0,868$ ; il catione Cl si sposta quasi 6,6 volte più velocemente dell'uranile  $UO^2$ . Infine, per  $HIO^3$ , il catione H si sposta quasi 9 volte più velocemente dell'anione  $IO^3$  ( $n = 0,102$ ).

Studiando i sali doppi, Hittorf ha scoperto la separazione in ioni già trattata in precedenza.

Nello studio di soluzioni concentrate di  $CdI^2$ , Hittorf ha ottenuto per Cd valori negativi; ad esempio, per una soluzione di 1 g di  $CdI^2$  in 1,8313 g di  $H^2O$ , ha trovato i valori  $n = 1,258$ ,  $1 - n = -0,258$ ; per una soluzione di 1 g di  $CdI^2$  in 3,179 g di alcool amilico, ha ottenuto addirittura  $n = 2,3$ ,  $1 - n = -1,3$ . Il fattore di trasporto negativo significa che dal liquido catodico è scomparso più cadmio di quello che si è separato al catodo. Hittorf ha spiegato

completamente questo fatto, ammettendo che, in questo caso, non ci sono affatto ioni I e  $\frac{1}{2}Cd$ ; si formano  $2CdI^2$  nella soluzione e  $\frac{1}{2}Cd$  appare come anione,  $\frac{1}{2}(CdI^2 + I^2)$  come catione.

Non va dimenticato che una misura del fattore  $n$ , studiando la concentrazione della soluzione attorno all'anodo o al catodo, è possibile solo se è presente uno strato neutro, la cui concentrazione non varia durante l'elettrolisi.

Hittorf ha anche studiato come i fattori di trasporto dipendano dall'intensità della corrente nel circuito, dalla temperatura e dalla concentrazione della soluzione. Ha trovato che  $n$  è indipendente dall'intensità di corrente, cioè dall'entità della caduta potenziale nell'elettrolita. Ciò mostra che il rapporto delle velocità degli ioni è indipendente dall'intensità della forza che agisce su di essi. Questo risultato era prevedibile; concorda con l'ipotesi che le velocità degli ioni siano proporzionali alle forze che agiscono su di essi.

Hittorf non ha osservato (tra 4° e 21°) alcuna influenza della temperatura sui fattori di trasporto. Successivamente Loeb e Nernst (1888) e in particolare Bein (1892) hanno trovato che all'aumentare della temperatura il fattore  $n$  varia, avvicinandosi al valore 0,5. Ma questa variazione è molto lenta; è impercettibile, ad esempio, per  $AgAzO^3$ ,  $CuSO^4$  e  $CdI^2$  e non supera il 10% per una variazione di temperatura di 70° (per  $NaCl$  e  $CaCl^2$ ).

L'influenza del grado di concentrazione della soluzione sui fattori di trasporto è molto grande, come ha già osservato Hittorf. Non c'è motivo di essere sorpresi; la concentrazione della soluzione deve agire sulla mobilità degli ioni che essa contiene e poiché questa può non essere la stessa per i due ioni, il rapporto delle mobilità e di conseguenza anche i fattori di trasporto devono variare contemporaneamente al grado di concentrazione. Daremo alcuni esempi.  $CuSO^4$  dà, in soluzioni diluite, 0,356 per il fattore di trasporto  $n_c = 1 - n$  del rame, 0,276 in soluzioni concentrate; la mobilità del rame rispetto a quella dell'anione  $SO^4$  diminuisce, all'aumentare della concentrazione della soluzione. Il risultato opposto si ottiene per il catione  $Ag$  in  $AgAzO^3$ ; per soluzioni diluite abbiamo qui  $n_c = 0,474$ , per soluzioni concentrate 0,532. La dipendenza dei fattori di trasporto dalla concentrazione è particolarmente grande per  $HSO^4$ . Nelle soluzioni concentrate si ottiene, come fattore dell'anione ( $SO^4$ ), il numero  $n = 0,400$ ; quando la diluizione della soluzione viene aumentata, prima diminuisce a 0,174, per poi aumentare a 0,212. Al contrario, per  $NaCl$  ad esempio, il fattore  $n$  dipende poco dalla concentrazione: in soluzioni diluite, si ha  $n = 0,622$ ; nelle soluzioni concentrate,  $n = 0,648$ . Questa dipendenza è ancora meno marcata per  $KCl$ ; la concentrazione agisce in modo quasi identico sulla mobilità dei due ioni. Nelle soluzioni concentrate di  $CdI^2$ , si ha  $n = 1,258$ ; nelle soluzioni diluite,  $n = 0,613$ ; ma, in questo caso, la composizione dell'elettrolita e gli ioni stessi cambiano con la concentrazione. Quando la diluizione della soluzione aumenta, le molecole doppie  $2CdI^2$  si scompongono e gli ioni  $\frac{1}{2}Cd$  e  $\frac{1}{2}(CdI^2 + I^2)$  sono sostituiti dagli ioni  $\frac{1}{2}Cd$  e  $I$ .

## 5. Teoria dell'elettrolisi. Lavori di F. Kohlrausch

Dopo Hittorf, il progresso più importante fu compiuto da F. Kohlrausch che, nel 1876, scoprì la legge del trasporto indipendente degli ioni e dimostrò la dipendenza che esiste tra la mobilità degli ioni dell'elettrolita e la conducibilità della soluzione sottoposta a elettrolisi.

La legge di F. Kohlrausch si enuncia così: *la mobilità di un determinato ione, in una soluzione molto diluita, non dipende dalla natura dell'altro ione, o, che è la stessa cosa, non dipende dall'elettrolita nella cui composizione entra lo ione considerato*. Ogni anione ha una propria mobilità  $v$ ; analogamente, ogni catione ha una mobilità  $u$  in qualche modo specifica. Si comprende facilmente che questa legge può riferirsi solo a soluzioni molto diluite; in tali soluzioni solo il solvente, che si può considerare puro, si oppone al movimento dello ione. Dalla legge di Kohlrausch non segue che i fattori di trasporto  $n_a = n$  e  $n_c = 1 - n$  siano anch'essi costanti per gli ioni dati, perché questi fattori, come mostrano le formule (12,a) e (12,b), dipendono da  $u$  e  $v$ ,

cosicché il fattore  $n$ , ad esempio, dipende, per lo stesso anione, dal catione con cui è combinato nell'elettrolita.

F. Kohlrausch ha collegato questa legge ad un'altra secondo la quale la conducibilità limite equivalente  $\Lambda_0$  della soluzione di un elettrolita è una grandezza additiva, uguale alla somma delle conducibilità limite equivalenti dell'anione e del catione. Queste ultime due grandezze dipendono rispettivamente solo dalla natura dell'anione o del catione. Abbiamo già espresso simbolicamente questa legge con la formula (8), che diventa, togliendo gli indici,

$$\Lambda = \Lambda(C) + \Lambda(A) \quad (10.0.34)$$

La quantità  $\Lambda$  è determinata dalla formula (6), dove  $\chi$  è la conducibilità della soluzione in unità di Kohlrausch e  $\eta$  la concentrazione, cioè il numero di grammi equivalenti in  $cm^3$  della soluzione. Invece di  $\Lambda$ , si potrebbe prendere anche la quantità  $\lambda = k : m$ , essendo  $k$  la conducibilità elettrolitica rispetto al mercurio e  $m$  la concentrazione, cioè il numero di grammi equivalenti in un litro di soluzione. Si otterrebbe, in questo caso, invece della formula (15), la formula simbolica

$$\lambda = \lambda(C) + \lambda(A) \quad (10.0.35)$$

La formula (6,b) dà

$$\begin{cases} \Lambda(C) = 1,063 \cdot 10^7 \lambda(C) \\ \Lambda(A) = 1,063 \cdot 10^7 \lambda(A) \end{cases} \quad (10.0.36)$$

La relazione tra le quantità  $\Lambda$  o  $\lambda$  da un lato e la mobilità degli ioni dall'altro è stata stabilita da Kohlrausch utilizzando le seguenti considerazioni. Ritagliamo un cubo nella soluzione, i cui bordi sono uguali all'unità di lunghezza. Se la conducibilità della soluzione è  $k$  (rispetto a Hg a  $0^\circ$ ), la resistenza di tale cubo è  $1 : k$ . Sia  $m$  la concentrazione della soluzione; supponiamo che contro due facce opposte del cubo siano applicati degli elettrodi la cui differenza di potenziale sia uguale all'unità. Per la legge di Ohm si ottiene, in questo caso, per l'intensità  $I$ , l'espressione  $I = k$ . Ma l'intensità della corrente è uguale alla somma delle quantità di elettricità, che vengono trasportate nell'unità di tempo dai cationi e dagli anioni, in direzioni opposte, attraverso la sezione trasversale della soluzione. La quantità di elettricità trasferita dai cationi deve essere proporzionale al grado di concentrazione  $m$  e alla mobilità  $u$  dei cationi, in modo che possa essere espressa da  $Bmu$ , essendo  $B$  un fattore di proporzionalità che dipende dalla scelta dell'unità di mobilità; anche gli anioni trasportano la quantità di elettricità  $Bmv$ . L'intensità della corrente è quindi pari a  $I = Bm(u + v)$ ; ora abbiamo  $I = k$  e conseguentemente  $k = Bm(u + v)$ . Dividendo su entrambi i lati per  $m$  e tenendo conto della formula  $\lambda = k : m$ , si trova

$$\lambda = B(u + v) \quad (10.0.37)$$

*La conducibilità equivalente  $\lambda$  si compone di due parti proporzionali alle mobilità degli ioni.* Confrontando la (18) alla (16), si può porre

$$\begin{cases} \lambda(C) = Bu \\ \lambda(A) = Bv \end{cases} \quad (10.0.38)$$

La conducibilità limite equivalente dello ione è misurata dalla sua mobilità. Ponendo  $B = 1$ , viene

$$\lambda = u + v \quad (10.0.39)$$

$$\lambda(C) = u \quad \lambda(A) = v \quad (10.0.40)$$

*Quando si prende come unità di mobilità, quella di uno ione la cui conducibilità limite equivalente è uguale a uno, si ottiene il seguente risultato: il valore limite della conducibilità equivalente di uno ione è numericamente uguale alla mobilità di tale ione; la conducibilità limite*

equivalente della soluzione di un elettrolita è uguale alla somma delle mobilità degli ioni di questo elettrolita.

Le formule (20) e (21) non sono comode nella pratica; infatti la conducibilità  $k$  della soluzione rispetto a Hg è una quantità molto piccola; lo stesso vale per  $\lambda, u, v$ . Con F. Kohlrausch, utilizzeremo le grandezze  $\Lambda = \chi : \eta, \lambda(A), \lambda(C)$ , che sono rispettivamente  $1,063 \cdot 10^7$  volte più grande rispettivamente delle grandezze  $\lambda = k : m, \lambda(A), \lambda(C)$ . Allo stesso modo introdurremo una nuova unità, per la mobilità, che sarà l' $1,063 \cdot 10^7$  -esima parte dell'unità che ci ha dato i valori numerici  $u$  e  $v$  per le mobilità. Designeremo con  $l_a$  e  $l_c$  i valori numerici delle mobilità espresse con questa nuova unità, in modo da avere

$$\begin{cases} l_a = 1,063 \cdot 10^7 v \\ l_c = 1,063 \cdot 10^7 u \end{cases} \quad (10.0.41)$$

Invece delle (20) e (21), si ha ora

$$\Lambda = l_a + l_c \quad (10.0.42)$$

$$\lambda(C) = l_c \quad \lambda(A) = l_a \quad (10.0.43)$$

e invece delle (12), (12,a) e (12,b), si deve scrivere

$$\frac{n_a}{n_c} = \frac{n}{n-1} = \frac{l_a}{l_c} \quad (10.0.44)$$

$$\begin{cases} n_a = n = \frac{l_a}{l_a + l_c} \\ n_c = 1 - n = \frac{l_c}{l_a + l_c} \end{cases} \quad (10.0.45)$$

Con le formule (23) e (24), si ha allora

$$n_a = n = \frac{\Lambda(A)}{\Lambda} = \frac{\Lambda(A)}{\Lambda(A) + \Lambda(C)} \quad (10.0.46)$$

$$n_c = 1 - n = \frac{\Lambda(C)}{\Lambda} = \frac{\Lambda(C)}{\Lambda(A) + \Lambda(C)} \quad (10.0.47)$$

$$\frac{n_a}{n_c} = \frac{n}{1-n} = \frac{\Lambda(A)}{\Lambda(C)} \quad (10.0.48)$$

Queste notevoli formule traducono la relazione tra due tipi di grandezze, a prima vista completamente diverse, cioè i fattori di trasporto, misurati dalla variazione della concentrazione agli elettrodi, e i valori limite delle conducibilità equivalenti degli ioni, che si ottengono misurando la conducibilità delle soluzioni. Questa relazione è espressa in modo particolarmente chiaro dalla formula (28). Gli esperimenti danno direttamente i fattori di trasporto  $n_a$  e  $n_c$  e la conducibilità  $\chi$  della soluzione. Con l'ausilio di queste tre grandezze, si possono calcolare le mobilità  $l_a$  e  $l_c$  degli ioni o i valori limiti  $\Lambda(A), \Lambda(C)$  delle loro conducibilità equivalenti; le formule (25,a) e (23) danno

$$\begin{cases} l_a = \Lambda(A) = n_a \frac{\chi}{\eta} \\ l_c = \Lambda(C) = n_c \frac{\chi}{\eta} \end{cases} \quad (10.0.49)$$

dove  $\eta$  indica la concentrazione della soluzione. Abbiamo già dato alcuni valori numerici delle conducibilità equivalenti limite degli ioni. È ormai chiaro che questi numeri danno anche le mobilità degli stessi ioni. La tabella seguente mostra le mobilità  $l$  di vari ioni a 18°; questi valori numerici sono dovuti a Kohlrausch. Poiché lui stesso ha corretto più volte i suoi numeri, abbiamo aggiunto l'anno in cui sono stati pubblicati.

Ioni	$l$	Anni	Ioni	$l$	Anni	Ioni	$l$	Anni
Li	33, 44	1902	SCAz	1902	56, 63	$C^5H^9O^2$	25, 7	1902
Na	43, 55	“	$AzO^3$	“	61, 78	$C^6H^{11}O^2$	24, 3	“
K	64, 67	“	$ClO^3$	“	55, 03	$\frac{1}{2}Zn$	45, 6	“
Rb	67, 6	“	$IO^3$	“	33, 878	$\frac{1}{2}Mg$	46, 0	“
Cs	68, 2	“	$BrO^3$	“	46, 2	$\frac{1}{2}Ba$	56, 3	“
$AzH^4$	64, 4	“	$ClO^4$	“	64, 7	$\frac{1}{2}Pb$	61, 5	“
Tl	66, 00	“	$IO^4$	“	47, 7	$\frac{1}{2}SO^4$	68, 7	“
Ag	54, 02	“	$MnO^4$	“	53, 4	H	318	1901
Fl	46, 64	“	$CHO^2$	“	46, 7	OH	174	“
Cl	65, 44	“	$C^2H^3O^2$	“	35, 0	$\frac{1}{2}Sr$	53, 0	“
Br	67, 63	“	$C^3H^5O^2$	“	31, 0	$\frac{1}{2}Cu$	49, 0	“
I	66, 40	“	$C^4H^7O^2$	“	27, 6	$\frac{1}{2}Ca$	53, 0	1898

Bredig (1874) ha determinato le mobilità di vari ioni organici. La tabella precedente mostra che la maggiore mobilità appartiene al catione H; poi viene l'anione OH, la cui mobilità è quasi due volte minore; tutti gli altri ioni si muovono molto più lentamente. I numeri nella nostra tabella corrispondono ai valori limite di mobilità, in soluzioni infinitamente diluite. Formando la somma dei due numeri, si ottiene la conducibilità limite equivalente del corrispondente elettrolita; si ha, ad esempio, per NaCl, il valore  $\Lambda = 43, 55 + 65, 44 = 108, 99$ . Nelle soluzioni che non sono infinitamente diluite, si trovano valori della mobilità  $l$  più piccoli. Ecco alcuni esempi tratti dai dipinti di F. Kohlrausch (1898). Nella prima riga è stato indicato il grado di concentrazione; la temperatura è di 18°.

$m = 1000\eta$	0	0, 00001	0, 001	0, 005	0, 1
H	318	316	314	302	296
HO	174	172	171	161	157
$\frac{1}{2}Zn$	47, 5	45, 1	42, 3	27, 9	24, 0
$\frac{1}{2}Ca$	53, 0	50, 6	47, 8	33, 4	29, 4
$\frac{1}{2}Sr$	54, 0	51, 7	48, 9	34, 4	30, 5
$\frac{1}{2}SO^4$	69, 7	67, 2	64, 0	46, 1	41, 9

Noyes e Sammet (1902) hanno trovato, per H a 18°, il valore limite di 329, 8.

Conoscendo le grandezze  $l_a, l_c$  si possono anche determinare le velocità assolute degli ioni per una data caduta di potenziale. Indichiamo con  $U$  e  $V$  le velocità reali del catione e dell'anione, espresse in centimetri al secondo, nel caso in cui la caduta di potenziale sia di 1 volt per centimetro. Consideriamo  $1\text{ cm}^3$  della soluzione, alle cui due facce opposte è applicata una differenza di potenziale di 1 volt. Supponiamo che  $\eta$  gr. eq. dell'elettrolita siano contenuti in questo centimetro cubo di soluzione.

Se la conducibilità della soluzione in unità di Kohlrausch è uguale a  $\chi$  ohm, la resistenza del centimetro cubo considerato è uguale a  $1/\chi$  ohm. Secondo la legge di Ohm, l'intensità  $I$  della corrente è uguale a  $1 : 1/\chi$  ampère; quindi  $\chi$  coulomb attraversano la sezione trasversale ogni secondo. In un secondo, tutto il catione, che si trova in uno strato di spessore  $U$ , attraversa la sezione. Il volume di questo strato è pari a  $U\text{ cm}^3$ ; questo strato contiene quindi  $U\eta$  gr. eq. di catione, legati a  $U\eta F$  coulomb, dove  $F = 96540$ . Si troverebbe allo stesso modo che l'anione trasporta in un secondo  $V\eta F$  coulomb. Dobbiamo quindi avere

$$\chi = (U + V) \eta F$$

da cui

$$U + V = \frac{\chi}{\eta} \cdot \frac{1}{F} = \frac{\Lambda}{F} \quad (10.0.50)$$

Ma le velocità degli ioni sono rispettivamente proporzionali alle loro mobilità  $l_c$  e  $l_a$ , di modo che si ha,

$$\frac{V}{U} = \frac{l_a}{l_c} = \frac{\Lambda(A)}{\Lambda(C)} = \frac{n_a}{n_c} \quad (10.0.51)$$

Poiché  $\Lambda = \Lambda(A) + \Lambda(C) = l_a + l_c$ , si ha

$$\begin{cases} V = \frac{l_a}{F} = \frac{l_a}{96540} = 0,00001036 l_a \\ U = \frac{l_c}{F} = \frac{l_c}{96540} = 0,00001036 l_c \end{cases} \quad (10.0.52)$$

Le velocità assolute degli ioni si ottengono in  $\text{cm/s}$ , per una caduta di potenziale di  $1 \text{ volt}/1 \text{ cm}$ , dividendo le mobilità o le conducibilità equivalenti  $l_a$  e  $l_c$  per  $F = 96540$ , o moltiplicandole per l'equivalente elettrochimico dell'idrogeno espresso in grammi, vedi (3,c). Gli esperimenti danno la conducibilità  $\Lambda$  della soluzione e i fattori di trasporto  $n_a = n$  e  $n_c = 1 - n$ . Se si esprime  $V$  e  $U$  con queste grandezze, si trova

$$\begin{cases} V = \frac{\Lambda n_a}{96540} = 0,00001036 n \Lambda \\ U = \frac{\Lambda n_c}{96540} = 0,00001036 (1 - n) \Lambda \end{cases} \quad (10.0.53)$$

Le formule (30,b) e i valori di  $l_a$  e  $l_c$  forniscono, per le velocità reali degli ioni a  $18^\circ$  e per una caduta di potenziale di  $1 \text{ volt}/1 \text{ cm}$ , i valori seguenti:

	$U$		$V$
K	0,000676 $\frac{\text{cm}}{\text{s}}$	Cl	0,000683 $\frac{\text{cm}}{\text{s}}$
Na	0,000460	$\text{AzO}^3$	0,000630
Li	0,000368	$\text{ClO}^3$	0,000582
$\text{AzH}^4$	0,000665	$\text{OH}$	0,001802
Ag	0,000577		
H	0,003294		

È il catione H che ha la velocità più alta  $U = 0,033 \text{ mm/s}$ . Quando la temperatura aumenta, le velocità degli ioni aumentano.

Kohlrausch (1879) ha mostrato che, conoscendo le velocità  $U$  e  $V$ , si può calcolare l'intensità della forza  $f_0$  che deve agire su una data quantità di ione, ad esempio su 1 gr. eq., per comunicargli una data velocità all'interno del liquido, in particolare una velocità di  $1 \text{ cm/s}$ . Si sa che un coulomb-volt è uguale a un joule o a  $0,102 \text{ kgm} = 10,2 \text{ kgcm}$ . Ciò significa che con una caduta potenziale di  $1 \text{ volt/cm}$ , è necessario spendere un lavoro di  $10,2 \text{ kgcm}$  per trasportare 1 coulomb a  $1 \text{ cm}$  di distanza. Ne consegue che, nel caso delle condizioni in cui abbiamo ottenuto le velocità  $U$  e  $V$ , su ogni coulomb di elettricità agisce una forza di  $10,2 \text{ kg}$ . Ma il grammo-equivalente dello ione contiene  $F = 96540$  coulomb e quindi, su 1 gr. eq. dello ione agisce una forza di  $96540 \times 10,2 = 984700 \text{ kg}$ . Sotto l'influenza di questa forza, il grammo-equivalente si muove con una velocità  $U$  o  $V \text{ cm/s}$ . La forza  $f_c$  o  $f_a$ , che deve agire su 1 gr. eq. di catione o anione, per comunicargli all'interno della soluzione una velocità di  $1 \text{ cm/s}$ , è uguale a

$$\begin{cases} f_c = \frac{984700}{U} \text{ kg} \\ f_a = \frac{984700}{V} \text{ kg} \end{cases} \quad (10.0.54)$$

dove  $U$  e  $V$  devono essere espressi in  $\text{cm/s}$ . In soluzioni molto diluite, si ottengono a  $18^\circ$  i seguenti valori (arrotondati) della forza  $f$ , che comunica a un grammo equivalente di ione una velocità di  $1 \text{ cm/s}$ :

	$f$		$f$
K	$1470 \cdot 10^6 \text{ kg}$	Ag	$1720 \cdot 10^6 \text{ kg}$
Na	$2180 \cdot 10^6$	Cl	$1450 \cdot 10^6$
Li	$2830 \cdot 10^6$	I	$1430 \cdot 10^6$
$AzH^4$	$1490 \cdot 10^6$	$AzO^3$	$1540 \cdot 10^6$
H	$300 \cdot 10^6$	OH	$552 \cdot 10^6$

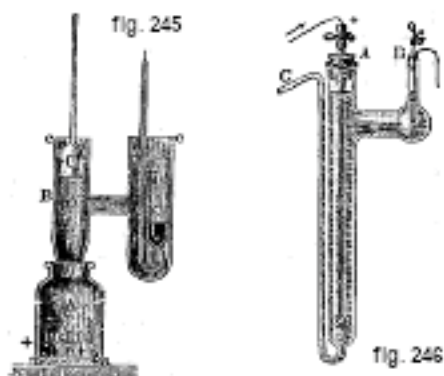
Pertanto, la forza cercata è generalmente di diversi miliardi di chilogrammi. Viene impiegata per vincere l'attrito interno del fluido, che si oppone al movimento degli ioni. L'enormità di questa forza non dovrebbe sorprendere. Abbiamo stabilito nel Vol. III (Cap. XIV, §6), la formula di Nernst che determina la forza  $K$ , che deve agire su un grammo-molecola di una sostanza affinché essa si sposti nella soluzione con una velocità di  $1 \text{ cm/s}$ . Per un gr. mol. di urea, si ha  $K = 2500 \cdot 10^6 \text{ kg}$ , cioè una quantità dello stesso ordine dei valori appena indicati. All'aumentare della temperatura, diminuisce la forza  $f$ , ciò che è facilmente spiegabile con la diminuzione dell'attrito interno, nel movimento di ioni attraverso la soluzione.

Possiamo fermarci in questa esposizione dei lavori di Hittorf, che ha introdotto la nozione di fattori di trasporto, e di Kohlrausch, che ha trovato la relazione tra la mobilità degli ioni e la conducibilità della soluzione, nonché la legge dello spostamento indipendente di ioni. A seguito di queste ricerche fondamentali, un gran numero di memorie sono state pubblicate da vari autori sui fattori di trasporto e sulle velocità degli ioni. Parleremo molto brevemente di alcuni di questi studi. Il lavoro di G. Wiedemann è già stato citato. Un riassunto di tutte le misure sperimentali dei fattori di trasporto effettuate fino al 1893 è stato dato da Fitzpatrick e riprodotto nell'opera di Wheatham, *Solution and Electrolysis*, 1895.

Citeremo solo le opere di Welske, Bourgoin, Kuschel, Lussana, ecc.

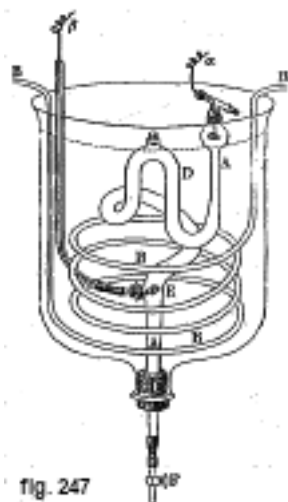
R. Lenz (1882) ha determinato i fattori di trasporto per varie soluzioni alcoliche. Il dispositivo da lui utilizzato è mostrato nella figura 245. L'anodo  $bb$  (griglia) è nel recipiente A, il catodo (mercurio) nel recipiente D. C è un tappo di vetro, mediante il quale il recipiente A viene chiuso dopo l'elettrolisi; i liquidi modificati durante l'elettrolisi in prossimità degli elettrodi risultano così separati tra loro. Lenz ha scoperto, per una soluzione di  $Cdl^2$ , che il fattore di trasporto dello iodio diminuisce dapprima, quando il contenuto alcolico aumenta, e poi aumenta.

Ostwald (1888) ha determinato i fattori di trasporto di un gran numero di anioni organici e ne ha dedotto una serie di leggi. In primo luogo ha mostrato che gli anioni isomerici hanno la stessa mobilità. Ha inoltre osservato che la mobilità dell'anione è tanto minore quanto più è di struttura complessa, cioè contiene più atomi. Quando il numero di atomi è piccolo, la mobilità dell'anione dipende dalla natura di questi atomi; ma, quando il numero di atomi è maggiore di 12, la mobilità è completamente determinata dal numero di atomi. Bredig (1892) ha continuato le ricerche di Ostwald, studiando la mobilità dei cationi organici. Ha trovato che anche i cationi isomerici possiedono la stessa mobilità e che questa diminuisce in generale, quando il numero di atomi aumenta; ha altresì scoperto un certo numero di leggi relative ai casi in cui vi è aggiunta di  $CH^2$ , H,  $CAz^2$  e in cui l'idrogeno è sostituito da cloro, bromo o gruppo ammidico, ecc. Walden ha riconosciuto che la mobilità diminuisce anche, all'aumentare del numero di atomi, negli anioni degli acidi della serie grassa.



Loew e Nernst (1888) hanno usato il dispositivo in figura 246. Nella boccia laterale c'è il catodo (argento); in fondo al lungo tubo, l'anodo. Insufflando aria in B dopo l'elettrolisi, è possibile ricacciare attraverso il tubo C eventuali strati della colonna di liquido, a cominciare dal più basso, per sottoporli ad analisi. Gli strati superiori dovranno rimanere invariati. Questi due fisici si sono assicurati che nella soluzione non si verificasse alcun mescolamento, né per diffusione né per convezione. Hanno misurato i fattori di trasporto per 8 sali d'argento e quindi determinato con grande precisione la mobilità del catione Ag.

Kistiakowski (1890) e Bein (1892) hanno usato strumenti simili in linea di principio a quello appena descritto. Kistiakowski è stato il primo a costruire un dispositivo, nel quale il prelievo degli strati della colonna liquida viene effettuato direttamente per mezzo di un rubinetto posto nella parte inferiore di questa colonna. Ha studiato in particolare i sali complessi e ha mostrato che la legge di Kohlrausch è applicabile anche ad essi quando si tratta di soluzioni molto diluite. Nel dispositivo di Bein, la soluzione da studiare riempie un tubo ADEF piegato più volte (fig. 247): il catodo si trova in A e l'anodo in B; i campioni di liquido sono raccolti separatamente dal rubinetto F e poi analizzati. L'intero tubo è posto in un recipiente pieno d'acqua, la cui temperatura è mantenuta costante da una corrente di aria fredda o di vapore acqueo, portato dalla serpentina BB. Altre misure dei fattori di trasporto e della mobilità degli ioni sono dovute a Kümmerle e in particolare a Jahn e ai suoi studenti Hopfgartner, Metelka, Bogdan, ecc. Parleremo in seguito dei lavori di Abegg e Steele. Hittorf (1902) ha confrontato i risultati di queste ultime ricerche con quelli da lui ottenuti quaranta anni prima e ha spiegato il motivo dell'inesattezza dei suoi valori. F. Kohlrausch ha proseguito i suoi studi in una serie di memorie, fino a questi ultimi tempi.





## 6. Teoria dell'elettrolisi. Clausius, Helmholtz e Arrhenius

Abbiamo già detto che, parallelamente alle ricerche sperimentali, si sono sviluppati una serie di lavori teorici relativi al meccanismo dell'elettrolisi. Passiamo ora allo studio di questi ultimi; essi hanno portato alla teoria della *dissociazione elettrolitica*, già descritta in più occasioni.

Tutte le teorie precedenti partivano dall'idea che le forze elettriche scompongono l'elettrolita, cioè separano gli ioni sovrastando l'affinità chimica. Clausius (1857) ha per primo osservato che se questo modo di vedere fosse corretto, bisognerebbe, per ogni composto chimico, una minima stabilita forza elettrica, per vincere l'affinità chimica. In realtà, la più piccola forza elettromotrice produce già l'elettrolisi, in ogni elettrolita. Clausius è stato portato quindi all'ipotesi che, in ogni soluzione di un elettrolita, una parte delle molecole è dissociata in ioni. La scomposizione delle molecole avviene per urti nell'incontro delle molecole tra loro o con quelle del solvente, ma forse anche per altre cause. Questa scomposizione avviene sosta sosta; per contro, gli ioni si combinano anche di nuovo costantemente, nei loro incontri fortuiti. Uno stato di equilibrio statistico si stabilisce così nella soluzione. La corrente agisce semplicemente sugli ioni già esistenti, che spinge in direzioni opposte.

È giusto ricordare che prima che di Clausius, Williamson (1851) aveva già avanzato l'idea di una dissociazione spontanea della sostanza contenuta in una soluzione. Ammetteva che, nell'acido cloridrico, le molecole  $\text{HCl}$  sono tutte in costante scomposizione e riformazione. Hittorf (1853) si è a poco a poco adeguato all'idea di Clausius e ha mostrato che i migliori elettroliti sono proprio i composti di sostanze tra le quali l'affinità chimica è particolarmente forte.

L'idea dell'esistenza di una dissociazione degli elettroliti nelle soluzioni è dovuta a Clausius; ma, secondo la sua teoria, questa dissociazione avrebbe una durata estremamente breve; gli ioni esistono separati solo per intervalli molto brevi. Va notato che questa dissociazione ha un carattere completamente diverso da quello di cui abbiamo parlato nel volume III, che si verifica quando una sostanza è allo stato gassoso. Così, il vapore del sale ammonio si scompone, sotto una debole pressione, secondo la formula  $\text{AzH}^4\text{Cl} = \text{AzH}^3 + \text{HCl}$ ; in una soluzione di sale ammonio, al contrario, la dissociazione in ioni avviene secondo la formula  $\text{AzH}^4\text{Cl} = \text{AzH}^4 + \text{Cl}$ .

L'ulteriore sviluppo che ebbe l'idea di Clausius si deve a Helmholtz (1880). Egli in particolare ha soprattutto precisato il ruolo della corrente elettrica: e spiegato per cosa è veramente spesa l'energia della corrente, che è evidentemente consumata nell'elettrolisi ed è numericamente uguale all'energia liberata nella combinazione chimica degli ioni, cioè nella formazione dell'elettrolita da questi ioni. Questa uguaglianza sembra anzitutto condurre all'idea che la corrente scompone l'elettrolita; ma Helmholtz parte dall'ipotesi che l'elettrolita sia in soluzione, in uno stato di completa dissociazione in ioni, ciascun ione essendo legato ad una determinata quantità di elettricità positiva o negativa. In ogni volume elementare della soluzione si trovano le stesse quantità di anione e di catione, cosicché la loro azione elettrica non si rivela in alcun modo all'esterno. Gli ioni sono completamente liberi e, a parte le forze elettriche, nessun'altra forza, chimica per esempio, agisce tra di loro. Sotto l'influenza della più piccola forza elettrica, che sorge come la conseguenza dell'esistenza di una differenza di potenziale tra gli elettrodi, inizia il movimento di ioni con nomi opposti in direzioni opposte. L'elettricità legata agli ioni dà a questi ultimi proprietà diverse da quelle delle sostanze ordinarie. L'elemento semplice Na non può trovarsi nell'acqua senza scomporla; ma il catione Na, cioè  $\text{Na} \cdot e^+$ , rappresenta qualcosa di essenzialmente diverso dall'atomo Na e può muoversi liberamente nell'acqua. Quando il catione ha raggiunto il catodo e gli ha ceduto la sua carica, si trasforma in un certo senso nella sostanza comune, con tutte le sue proprietà; Na privato della sua carica scompone l'acqua.

L'energia della corrente non viene impiegata nella scomposizione dell'elettrolita; ma; se così si può dire, con la scomposizione degli ioni, cioè con la separazione delle cariche elettriche di questi ioni. La dissociazione stessa, cioè, la scomposizione dell'elettrolita in ioni avviene sotto l'influenza del solvente ed è accompagnata da un certo dispendio di energia. La teoria di Helmholtz non porta ad alcuna contraddizione ed è in perfetto accordo con il principio di

conservazione dell'energia. Prendiamo, ad esempio, l'elettrolita NaCl. Abbiamo, in primo luogo, l'uguaglianza termochimica

$$Na + Cl = NaCl + q \quad (10.055)$$

essendo  $q$  l'energia liberata nella formazione di NaCl a partire dal sodio e dal cloro. La scomposizione dell'elettrolita in ioni, che avviene con una spesa di energia  $q'$ , può essere espressa dalla seguente uguaglianza:

$$NaCl + e^+e^- = Na \cdot e^+ + Cl \cdot e^- - q' \quad (10.056)$$

Qui  $q'$  è piccolo rispetto a  $q$ . Il lavoro della corrente, che scompone gli ioni, richiede un consumo di energia  $q - q'$  e si esprime con l'uguaglianza

$$Na \cdot e^+ + Cl \cdot e^- = Na + Cl + e^+e^- - (q - q') \quad (10.057)$$

Non solo le tre uguaglianze precedenti non si contraddicono, ma ciascuna di esse è la necessaria conseguenza delle altre due.

La teoria di Helmholtz, nella quale si ammette che in ogni soluzione di un elettrolita tutte le molecole sono dissociate, non ha successivamente ricevuto alcun nuovo sviluppo.

Un ultimo commento è stato fatto da Arrhenius, che può essere chiamato il fondatore della moderna teoria della dissociazione elettrolitica. Egli espose le basi della sua teoria negli anni 1887 e 1888; esse consistono nelle seguenti proposizioni:

*In ogni soluzione di un elettrolita, una parte delle molecole di quest'ultimo è dissociata. Il grado di dissociazione, cioè il rapporto tra il numero di molecole dissociate e il numero totale di molecole nella soluzione, dipende dalla concentrazione di quest'ultima: aumenta quando la concentrazione diminuisce.*

Designeremo il grado di dissociazione con  $\alpha$ . Per una certa concentrazione, sufficientemente piccola, che differisce a seconda degli elettroliti, si ha  $\alpha = 1$ ; in altre parole, la dissociazione è completa, tutte le molecole dell'elettrolita vengono scomposte in ioni.

Ogni grammo equivalente di ione è correlato a  $F$  (96540) coulomb. Si sa che la grammo-molecola di qualsiasi sostanza contiene lo stesso numero  $N$  di molecole o atomi. Ne consegue che qualsiasi ione monovalente (H, K, Na, Cl, Br, OH,  $AzO^3$  ecc.) è correlato alla quantità di elettricità  $F : N$ , che forma un elettrone; uno ione bivalente (Ba,  $SO^3$ , ecc.) è legato a due elettroni, uno ione trivalente a tre, ecc. Gli ioni si muovono liberamente nella soluzione e si muovono verso gli elettrodi sotto l'azione di forze elettriche. Abbiamo considerato la teoria della dissociazione elettrolitica come qualcosa di definito, indipendentemente dal modo in cui ha preso gradualmente origine a partire dai fenomeni di elettrolisi. Come abbiamo visto, un elettrone è approssimativamente uguale a  $6,6 \cdot 10^{-10}$  unità el.-st. C.G.S. di elettricità. Conoscendo le dimensioni approssimative degli atomi e supponendo che siano sferici, si può calcolare almeno l'ordine di grandezza del potenziale di un atomo. Lodge (1885) ha effettuato per la prima volta un tale calcolo; ha riconosciuto che questo potenziale non è alto e che raggiunge solo pochi volt.

La teoria della dissociazione elettrolitica abbandona completamente l'idea di una corrente che, attraversando l'elettrolita, scompone la sostanza di quest'ultimo. Nell'elettrolisi avviene esclusivamente un movimento di ioni già liberi; la corrente elettrolitica all'interno della soluzione di un elettrolita consiste solo nel movimento delle elettriche trasportate dagli ioni.

Arrhenius non si è affatto limitato a sviluppare l'idea di Clausius. Il suo grande merito è quello di aver potuto confermare, sperimentalmente, una serie di conseguenze, che scaturiscono dal principio fondamentale della sua teoria, secondo cui il grado di dissociazione  $\alpha$  dipende dalla concentrazione della soluzione; egli ha nello stesso tempo indicato la relazione che esiste tra grandezze tanto dissimili come la conducibilità di una soluzione, da un lato, e il punto di congelamento, il punto di ebollizione, la pressione del vapore della soluzione, la sua pressione osmotica, dall'altra.

Abbiamo visto nel Volume I, e più dettagliatamente nel Volume III, che l'equazione  $pv = RT$ , dove  $p$  indica la pressione osmotica,  $R$  la costante dell'equazione di Clapeyron, è applicabile a soluzioni di non elettroliti (zucchero per esempio). Ma, per gli elettroliti, questa equazione deve essere sostituita con  $pv = iRT$ , dove  $i$  è un fattore che indica di quante volte è aumentato il numero di molecole della sostanza disciolta, per dissociazione. Lo stesso fattore  $i$  entra anche nelle formule che determinano l'abbassamento del punto di congelamento, l'innalzamento del punto di ebollizione e la diminuzione della tensione di vapore. Esiste tutta una serie di metodi per la determinazione sperimentale del fattore  $i$ . La relazione tra il fattore  $i$  e il grado di dissociazione  $\alpha$  si stabilisce facilmente. Sia  $N$  il numero di molecole dell'elettrolita in un volume qualsiasi della soluzione; una parte  $\alpha$  di queste molecole si è dissociata, ciascuna molecola essendosi scomposta in  $p$  ioni. Si ha, ad esempio,  $p = 2$  per  $KCl$ ,  $p = 3$  per  $H^2SO^4$ ,  $Ba(AzO^3)^2$ ,  $CuCl^2$ ,  $p = 5$  per  $FeCy^6K^4$ . Le molecole dissociate hanno allora dato  $pN\alpha$  molecole attive, che con  $N(1 - \alpha)$  molecole non dissociate danno in tutto  $N(1 - \alpha) + pN\alpha = N\{1 + (p - 1)\alpha\}$  molecole. Da ciò si deduce

$$i = 1 + (p - 1)\alpha \quad (10.0.58)$$

Ma se la teoria di Arrhenius è esatta, se realmente il trasporto di elettricità nelle soluzioni è dovuto agli ioni liberi, la conducibilità equivalente  $\lambda$  o  $\Lambda$  deve aumentare, almeno per le soluzioni diluite, contemporaneamente al numero di molecole attive, cioè col numero di ioni  $pN\alpha$ . La teoria di Arrhenius spiega quindi perfettamente perché la conducibilità equivalente aumenta quando si continua a diluire le soluzioni deboli. Si può assumere, per soluzioni diluite, che  $\lambda$  è proporzionale al numero  $pN\alpha$  degli ioni; in altre parole, la conducibilità equivalente è proporzionale al grado di dissociazione  $\alpha$ . Se si indica con  $\lambda_0$  il valore limite (per  $\alpha = 1$ ) della conducibilità equivalente, si ottiene

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \alpha \quad (10.0.59)$$

Portando  $\alpha$  nella (33), si ha l'espressione

$$i = 1 + (p - 1) \frac{\lambda}{\lambda_0} \quad (10.0.60)$$

Questa significativa espressione dà la relazione, menzionata sopra, tra la conducibilità della soluzione e le quattro grandezze a cui è legata: la pressione osmotica, la diminuzione della tensione di vapore, l'abbassamento del punto di congelamento e l'innalzamento del punto di ebollizione. Arrhenius ha verificato la formula (34) e, in due notevoli memorie (1887, 1888), ne ha mostrato la correttezza per un grandissimo numero di soluzioni. Ha determinato la quantità  $i$ , utilizzando la formula (34), prima con osservazioni sulla conducibilità delle soluzioni e poi con osservazioni crioscopiche, cioè cercando il punto di congelamento di una soluzione. Abbiamo stabilito, nel volume III, cap. IV, § 10, le formule che si applicano a questo caso. Le ricerche di Van't Hoff e di Reicher (1889) hanno dato un'altra conferma della formula (34). Si è però osservato che, per certe soluzioni, il valore di  $i$  calcolato dalla formula (34) differisce notevolmente da quello trovato direttamente per via crioscopica; questo è il caso, in particolare, delle soluzioni di  $CaCl^2$ ,  $MgCl^2$ ,  $CuCl^2$ ,  $SrCl^2$ . L'origine dei notevoli scarti osservati in queste soluzioni non è ancora nota. È possibile che una parte delle molecole di  $CaCl^2$ , ad esempio, non si scomponga in  $Ca + Cl + Cl$ , ma fornisca ioni  $CaCl + Cl$ . La grandezza  $i$ , calcolata usando la formula (34), è inferiore alla sua vero valore. La legge di Kohlrausch sullo spostamento indipendente degli ioni porta alla formula (18), per la quale  $\lambda$  è proporzionale alla somma  $u + v$  delle mobilità degli ioni. La teoria di Arrhenius porta ad ammettere che  $\lambda$  è anche proporzionale al grado di dissociazione  $\alpha$ . Si ottiene quindi, con opportuna scelta dell'unità di mobilità, invece della formula (20), l'espressione

$$\lambda = \alpha(u + v) \quad (10.0.61)$$

Nel caso limite  $\alpha = 1$ , si ha  $\lambda = \lambda_0$ ; ma si hanno anche altre mobilità  $u_0$  e  $v_0$ , di modo che

$$\lambda_0 = u_0 + v_0 \quad (10.0.62)$$

È certo che  $u_0 + v_0 > u + v$ , poiché la mobilità cresce con la diluizione della soluzione; ne segue che si ha  $\alpha > \frac{\lambda}{\lambda_0}$  e quindi il valore vero di  $i$ , dato dalla formula (33), è maggiore di quello calcolato mediante la formula (34). Abegg (1892) ha tenuto conto di questa circostanza e ha cercato di introdurre una corrispondente correzione; ha, infatti, osservato un accordo molto migliore tra la teoria e i risultati sperimentali. Non è questo il luogo per soffermarsi sui risultati ottenuti nel tentativo di stabilire come il grado di dissociazione  $\alpha$  dipenda dalla concentrazione  $m$  nelle varie soluzioni. Ci limiteremo a dire che, per concentrazioni molto deboli, quando per esempio  $m = 0,0001$ , la grandezza  $\alpha$  è prossima a 1 in soluzioni di sali, acidi forti e basi forti; al contrario, il valore di  $\alpha$  è piccolo per acidi e basi deboli. Naturalmente, in tutte le soluzioni non elettrolitiche, si ha  $\alpha = 0$ .

Quando la temperatura sale, la mobilità degli ioni aumenta; ma il grado di dissociazione diminuisce, per molti acidi e sali, quando la temperatura aumenta, come ha mostrato Arrhenius (1892) (vedi oltre). È così visibile che la conducibilità, che è proporzionale alla mobilità degli ioni e al grado di dissociazione, può talvolta anche diminuire, all'aumentare della temperatura, come previsto per primo da Arrhenius.

La teoria della dissociazione elettrolitica ha fatto un nuovo importante progresso con Ostwald (1888) e contemporaneamente con Planck. Questi scienziati hanno stabilito una formula, che rappresenta la legge della diluizione delle soluzioni, cioè il rapporto tra la conducibilità equivalente di una soluzione e la concentrazione  $m$  (numero di grammo-molecole per litro di soluzione), ad una data temperatura  $t$  e per una data pressione  $p$ . Nel volume III, cap. XIV, è stata data una formula relativa alla scomposizione nei suoi due costituenti A e B di una sostanza (AB) che si trova in soluzione. Abbiamo indicato con  $n$  il numero di grammo-molecole della sostanza (AB), cioè della sostanza non dissociata, con  $n_2$  il numero di grammo-molecole delle sostanze A e B, che si sono formate in seguito alla dissociazione, e infine con  $n_0$  il numero di grammo-molecole del solvente. Introducendo la quantità  $n = n_0 + n_1 + n_2 + n_2$ , si ottengono le concentrazioni  $h_1 = n_1 : n$  e  $h_2 = n_2 : n$ . Basandoci sulle formule generali di Planck, abbiamo stabilito che

$$\frac{h_2^2}{h_1} = K(p, t) \quad (10.0.63)$$

dove il secondo membro è una funzione di  $p$  e  $t$ , che si riduce a una costante, quando  $p$  e  $t$  sono dati. Le concentrazioni  $h_1$  e  $h_2$  determinano le quantità relative delle sostanze (AB), A e B, contenute nella miscela di queste tre sostanze e del solvente stesso. È facile esprimere  $\alpha$  e  $m$  usando le quantità  $n_0$ ,  $n_1$  e  $n_2$ . La dissociazione  $\alpha$ , per un elettrolita binario, è uguale a

$$\alpha = \frac{n_2}{n_1 + n_2} \quad (10.0.64)$$

poiché il numero di molecole dell'elettrolita sarebbe uguale a  $n_1 + n_2$  in assenza di dissociazione. Si hanno inoltre  $n_0$  grammo-molecole di solvente; supponiamo che una grammo-molecola abbia un volume di  $\omega$  litri (per l'acqua, si ha  $\omega = 0,018$ ); allora  $n_1 + n_2$  grammo-molecole di elettrolita vengono sciolte in  $\omega n_0$  litri di solvente; ne consegue che, per soluzioni sufficientemente diluite, si può assumere il numero  $m$  di grammo-molecole, disciolte in un litro di soluzione, uguale a

$$m = \frac{n_1 + n_2}{\omega n_0} \quad (10.0.65)$$

E portando nella (36) i valori di  $h_1$  e  $h_2$ , si ha

$$\frac{h_2^2}{h_1} = \frac{n_2^2}{n_1(n_0 + n_1 + 2n_2)} = \frac{n_2^2}{n_1 n_0} = K(p, t) \quad (10.0.66)$$

potendo trascurare la quantità  $n_1 + 2n_2$ . Inoltre, si deducono dalla (36,a) e dalla (36,b) le espressioni

$$n_2 = (n_1 + n_2) \alpha \quad n_1 = (n_1 + n_2) (1 - \alpha) \quad n_0 = (n_1 + n_2) : \omega m$$

Portando questi tre valori nella formula (36,c) e mettendo in evidenza il fattore  $\omega$  nell'espressione della funzione  $K(p, t)$ , si ha

$$\frac{\alpha^2 m}{1 - \alpha} = K(p, t) \quad (10.0.67)$$

Questa equazione mostra come, non variando  $p$  e  $t$ , la dissociazione  $\alpha$  varia in funzione della concentrazione  $m$ . Essa non ci dà nulla di nuovo, perché è solo una trasformazione dell'equazione (36). Ma, introducendo il valore  $\lambda : \lambda_0$  di  $\alpha$ , vedi (33, a), si ha l'equazione di Ostwald

$$\frac{\lambda^2 m}{\lambda_0 (\lambda_0 - \lambda)} = K(p, t) \quad (10.0.68)$$

che esprime la dipendenza tra la conducibilità equivalente  $\lambda$  della soluzione di un elettrolita binario e la sua concentrazione, per  $p$  e  $t$  invariati. Le prime osservazioni dello stesso Ostwald come pure quelle di Van't Hoff e Reicher (1888) hanno fornito una notevole conferma di questa equazione per le soluzioni di 9 acidi organici. Ricerche successive hanno mostrato che solo gli acidi e le basi deboli seguono la legge di Ostwald. Per soluzioni di sali, acidi forti e basi forti, l'equazione (37) non è più applicabile. Ostwald ha determinato nel 1889 il valore di  $K$ , per più di 200 acidi organici. Le importanti conseguenze derivanti da questo vasto insieme di misure sono soprattutto di interesse chimico e non possiamo qui entrare più nel dettaglio.

Per le soluzioni alle quali la formula (37) non è applicabile, sono state proposte varie formule empiriche; tale è la formula di Rudolph

$$\frac{\lambda^2 \sqrt{m}}{\lambda_0 (\lambda_0 - \lambda)} = \text{cost} \quad (10.0.69)$$

e quella di Van't Hoff

$$\frac{\lambda^3 m}{\lambda_0 (\lambda_0 - \lambda)^2} = \text{cost} \quad (10.0.70)$$

Altre formule sono state date da Storch, Bakcroft, Barmwater e in particolare da Jahn e Kohlrausch. Quest'ultimo ha svolto tutta una serie di ricerche che sono diventate dei classici sul rapporto tra la conducibilità e la concentrazione delle soluzioni diluite.

Arrhenius (1889) ha compiuto un altro passo importante nella teoria dei fenomeni elettrolitici. Abbiamo stabilito, nel volume III, cap. XIV, la formula

$$\frac{\partial \log K}{\partial t} = \frac{q}{HT^2} \quad (10.0.71)$$

dove  $q$  è il calore latente di dissociazione di una grammo-molecola dell'elettrolita,  $T$  la temperatura assoluta,  $H$  la costante dell'equazione  $pv = HT$ , relativa alla grammo-molecola della sostanza. Arrhenius ha potuto, conoscendo i valori di  $K$  per due temperature, determinare il calore latente di dissociazione elettrolitica  $q$  di otto acidi, tra gli altri di acido fosforico, acido ipofosforico, acido acetico, propionico, fluoridrico e succinico. Per sette degli acidi studiati  $q$  è risultato negativo; è positivo solo per l'acido succinico. Quando  $q < 0$ , ciò significa che la dissociazione elettrolitica è, in molti casi, un fenomeno esotermico, cioè un fenomeno legato alla cessione di calore. L'equazione (36,d), che si può, per una debole dissociazione, scrivere nella forma  $\alpha^2 m = K$ , così come l'equazione (37,c), mostrano che si ha pure  $\frac{\partial \alpha}{\partial t} < 0$ , per  $q < 0$ , cioè, per gli elettroliti molto deboli ricordati, la dissociazione diminuisce al crescere della temperatura.

Si spiega, come si è già notato, che la conducibilità delle soluzioni di  $H^3PO^4$  e  $H^3PO^2$ , a partire da certe temperature, diminuisce all'aumentare della temperatura.

Tutto ciò che è stato esposto finora sulla questione della dissociazione elettrolitica si riferisce solo alle soluzioni acquose. Per le soluzioni non acquose, molte delle conseguenze dedotte dalla teoria di Arrhenius si verificano molto male o per niente. Ciò è dovuto principalmente al fatto che altri solventi producono una dissociazione molto più debole e, nella maggior parte dei casi, estremamente debole dell'elettrolita disciolto; in secondo luogo, la mobilità degli ioni potrebbe non essere la stessa in diversi solventi. Solo CyH liquido ha un potere dissociante anche maggiore di quello dell'acqua, come mostrato da Tsentnerscwer. Walden (1911) ha scoperto che anche la formammide  $HCOAzH^2$  ha, per certi elettroliti, un potere dissociante maggiore di quello dell'acqua; allo stesso modo  $H^2SO^4$ , nitrosodimetilammina  $(CH^3)^2Az \cdot AzO$ , l'acido formico, gli alcoli metilici ed etilici. J. J. Thomson e Nernst hanno riconosciuto che il potere dissociante di un solvente è tanto maggiore quanto maggiore è la sua stessa costante dielettrica. Anilina, cloroformio, benzina, etere hanno un basso potere induttivo e si osserva infatti che gli elettroliti che vi sono disciolti sono poco dissociati e che le soluzioni stesse hanno una bassa conduttività. Timmermans (1906) ha confermato questa regola; ha trovato anche che i corpi fortemente polimerizzati hanno un grande potere dissociante. È notevole che alcuni elettroliti disciolti in acido formico, per esempio HCl, abbiano una bassa conducibilità. Al contrario, certe soluzioni di sali in  $AzH^3$  e  $SO^2$  liquefatti, in acetone, acetonitrile hanno una conducibilità maggiore rispetto alle corrispondenti soluzioni acquose. Qui si fa sentire l'influenza della mobilità degli ioni, che è maggiore in questi solventi che nell'acqua.

Abbiamo già citato il lavoro di Walden (1903-1907), che ha studiato la conducibilità dei liquidi organici e la loro azione dissociante. Ha determinato anche le costanti dielettriche di questi liquidi e scoperto che a una maggiore costante dielettrica corrisponde anche un maggiore potere dissociante. Quando una sostanza ha lo stesso grado di dissociazione in diversi solventi, il prodotto della costante dielettrica del solvente e la radice cubica del grado di diluizione ha lo stesso valore per tutte le soluzioni. Le sostanze sopra indicate, che hanno un elevato potere dissociante, si distinguono per un valore molto elevato della costante dielettrica  $K$ . Per CyH si ha  $K = 95$ ; per la formammide,  $K > 84$ ; per  $H^2SO^4$ ,  $K > 84$ ; per la nitrosodimetilammina,  $K = 53,3$ . In una conferenza molto interessante tenuta alla Faraday Society, Walden (1910) ha trattato la questione se l'acqua sia un elettrolita ed è giunto alla conclusione che è solo in solventi fortemente acidi o basici che l'acqua si dissocia e assume le proprietà di un elettrolita; negli altri solventi l'acqua non è apprezzabilmente dissociata, pur possedendo una costante dielettrica molto elevata.

La teoria della dissociazione elettrolitica spiega il fatto che la dissoluzione è spesso accompagnata da una contrazione. Drude e Nernst (1894) hanno rilevato che la contrazione avviene proprio in soluzioni di elettroliti e l'hanno spiegata con un'elettrostrizione di natura particolare, cioè come risultato di un'azione meccanica delle cariche ioniche sul solvente. Se questa spiegazione è corretta, la contrazione deve essere una proprietà additiva per soluzioni acquose fortemente diluite; in altre parole, deve essere una funzione lineare di due grandezze dipendenti dalla natura degli ioni. Carrara e Levi (1900) hanno studiato la contrazione che si manifesta nella dissoluzione con diversi solventi organici e hanno trovato che esiste anche per questi, secondo la teoria di Drude e Nernst, una relazione tra contrazione (elettrostrizione) e dissociazione elettrolitica in soluzione.

Esiste tutta una serie di metodi per la misura diretta delle velocità degli ioni. Lodge ha proposto per primo i più numerosi di questi metodi. Due recipienti separati A e B contengono soluzioni dello stesso elettrolita o di due diversi elettroliti; in ciascuno di questi vasi immerge uno dei due elettrodi. I vasi sono uniti da un tubo C, che contiene un'altra soluzione a cui in alcuni casi è stata aggiunta gelatina o agar-agar. Facendo passare una corrente attraverso ACB, si può osservare direttamente come uno o entrambi gli ioni penetrano dai vasi nel tubo

C. Lodge ha riempito, per esempio, A e B, con una soluzione diluita di  $H^2SO^4$ , ma il tubo C con gelatina contenente NaCl e fenolftaleina, un poco colorata da una soluzione di natron. Nel passaggio della corrente si origina lo ione  $H^2$ , quando penetra nel tubo C, a  $HCl$ , in modo che la gelatina si decolora. La velocità con cui si propaga la decolorazione è la velocità cercata dello ione. In un altro esperimento, A e B contenevano una soluzione di  $BaCl^2$  e il tubo C gelatina con acido acetico e solfato d'argento. I precipitati  $BaSO^4$  e AgCl formati indicano le velocità degli ioni Ba e Cl. In altri casi i vasi contenevano  $CuSO^4$  e NaHO, il tubo C gelatina con NaCl e fenolftaleina incolore; lo ione HO, scomponendo NaCl, colorava la ftaleina del fenolo. Quando i vasi contenevano  $Na^2SO^4$  e  $BaCl^2$  si formava una lamella trasversale di  $BaSO^4$  in un determinato punto del tubo C, dove si incontravano gli ioni  $SO^4$  e  $BaCl^2$ ; dalla posizione di quest'ultimo, si potevano determinare le velocità relative degli ioni.

Whetham (1892) modificò il metodo di LODGE. Porta una sopra l'altra, in un vaso, soluzioni di due elettroliti (AC) e (BC), aventi uno ione G in comune e diversamente colorati. Facendo passare una corrente, C si muove in una direzione, A ed E nella direzione opposta, in modo che la superficie che separa i due liquidi si muova. La velocità di questo spostamento è determinata dalla velocità dello ione da cui dipende la colorazione. Nernst (1897) colloca, nella parte inferiore di un tubo a forma di U, una soluzione concentrata, colorata in rosso, di  $KMnO^4$  e di  $H^3BO^3$ , e sopra, nei due rami, soluzioni di  $KAzO^3$  che contengono gli elettrodi. Facendo passare la corrente, lo ione  $MnO^4$  si sposta verso l'anodo, la colorazione nei due rami si sposta con la velocità del movimento dello ione.

Altri metodi sono stati proposti da Masson (1889), Noyes e Blanchard e altri. Il più preciso e il più conveniente è quello di Abegg e Steele (1901); è un miglioramento del metodo Whetham. Consideriamo tre soluzioni, a contatto tra loro, di elettroliti (AC), (BC) e (BD), di cui le prime due sono lo ione A in comune, le ultime due il catione B. Supponiamo che gli anioni C e D si muovano nella direzione dalla prima soluzione (AC) verso la terza (BD), che contiene l'anodo, e i cationi A e B in senso opposto, verso il catodo che è nella soluzione (AC). Si può dimostrare che la superficie di separazione di due soluzioni rimane sempre molto nitida e facilmente osservabile, sebbene le due soluzioni siano incolore; se, dei due ioni, quello che si muove per primo ha la mobilità maggiore, non è possibile una diffusione delle soluzioni. Le rispettive velocità di movimento delle due superfici di separazione della soluzione sono tra loro come le mobilità degli ioni B e C dell'elettrolita intermedio. Questo notevole metodo permette quindi di determinare direttamente il rapporto  $u : v$  delle mobilità dei due ioni. Denison e Steele (1905) lo hanno utilizzato.

CONCLUSIONE. Abbiamo esposto in dettaglio, nei paragrafi precedenti, la teoria della dissociazione elettrolitica. Abbiamo visto che permette di avvicinarsi fruttuosamente allo studio di tutta una serie di fenomeni osservati in soluzioni acquose. Ma il quadro che abbiamo tracciato sarebbe viziato da un ristretto esclusivismo, se non aggiungessimo che c'è un folto gruppo di autori che non sono seguaci della teoria della dissociazione nelle soluzioni e se tacciamo i lati deboli di questa teoria. In Russia, Mendéléieff, D. Konowalow, Flawitzki, Chrooschtschow, Bogorodski, e, tra gli autori di altri paesi, Armstrong, Crompton, Reichler, Helfenstein, Kahlerberg, Traube, ecc., non accettano la teoria della dissociazione elettrolitica delle soluzioni. Come abbiamo visto, i risultati di questa teoria non concordano in molti dettagli con le osservazioni, ed è più o meno applicabile a soluzioni non acquose. Essa è stata indubbiamente molto utile come ipotesi di lavoro; ma c'è motivo di pensare che subirà nel tempo modifiche molto importanti, che forse la trasformeranno completamente. È quanto indicato da Bancroft, in un discorso da lui pronunciato lasciando la vicepresidenza della sezione Chimica di Filadelfia nel 1904, nonché Bogorodski (1906), nella prefazione al suo lavoro sull'elettrolisi delle sostanze inorganiche fuse, che abbiamo già citato più volte.

Tra i tentativi fatti per perfezionare la teoria della dissociazione elettrolitica, citiamo un'opera di Malmström (1905), dove ha preso come punto di partenza delle sue considerazioni l'equazione

di Van der Waals relativa alle miscele e riguardante l'energia elettrica degli ioni liberi. Tuttavia, anche le formule da lui stabilite non sono verificate dagli elettroliti altamente dissociati. Brillouin (1906) ha dato una spiegazione teorica della relazione che esiste tra l'entità della dissociazione e il potere dielettrico del solvente. Steele, Mc Intosh e Archibald hanno cercato di confutare le obiezioni di Kahlerberg, ipotizzando che la sostanza disciolta acquisisca, in molti casi, la facoltà di scomporsi in ioni, solo dopo essersi unita ad una o più molecole del solvente, come si vede chiaramente con  $AzH^3$ , che unendosi con una molecola di  $H^2O$  dà gli ioni  $AzH^4$  e  $HO$ .

M. Planck (1902) ha mostrato, in un lavoro molto interessante, quali proprietà delle soluzioni (comprese quelle relative all'elettrolisi) possono essere stabilite rigorosamente, indipendentemente dalla teoria della dissociazione, usando i principi della Termodinamica e non possono, quindi, essere messe in dubbio.

Gli esperimenti di Durrant (1907), che hanno mostrato che gli ioni possiedono anche, nella diffusione ordinaria, velocità diverse, depongono a favore della teoria della dissociazione; più veloce di tutti gli altri, si muove lo ione idrogeno.

## 7. Polarizzazione elettrolitica

Abbiamo già brevemente descritto, nel primo in questo volume, Cap. II, § 7., il fenomeno della polarizzazione elettrolitica. Esternamente, questo fenomeno si manifesta nel modo seguente. Chiamiamo, in modo generico, voltmetro, un vaso contenente due elettrodi, immersi o nello stesso liquido, oppure in due liquidi diversi disposti uno sopra l'altro o separati da un setto poroso. Quando si applica agli elettrodi del voltmetro una certa differenza di potenziale, inserendoli nel circuito di una corrente elettrica, si genera al primo momento, nel circuito, una corrente la cui intensità  $I$  è determinata dalla legge di Ohm, cioè dalla forza elettromotrice  $E$  agente all'esterno del voltmetro, dalla forza elettromotrice  $E'$  agente all'interno del voltmetro stesso e dalla resistenza  $r$  del voltmetro, nonché dalla resistenza  $R$  delle altre parti del circuito oltre al voltmetro. Quindi si ha

$$I = \frac{E + E'}{R + r} \quad (10.0.72)$$

Nel caso particolare in cui  $E' = 0$  (elettrodi identici in uno stesso liquido), si ha

$$I = \frac{E}{R + r} \quad (10.0.73)$$

o, indicando la differenza di potenziale degli elettrodi in questo caso con  $V_1 - V_2$ ,

$$I = \frac{V_1 - V_2}{r} \quad (10.0.74)$$

Si nota che spesso si ottiene una tale intensità di corrente solo al primo momento, e che poi diminuisce molto rapidamente, a volte quasi fino ad annullarsi. In un piccolo numero di casi eccezionali,  $I$  aumenta lentamente.

Non c'è dubbio che questa variazione dell'intensità della corrente sia essenzialmente dovuta ai fenomeni elettrolitici che si producono nel voltmetro quando viene immerso nel circuito. Ma l'effetto di questi fenomeni può essere duplice: può consistere in una variazione della resistenza  $r$  del voltmetro o nella comparsa di una nuova forza elettromotrice.

Una variazione di resistenza del voltmetro avviene nelle seguenti circostanze:

1. Quando gli ioni che si separano agli elettrodi conducono molto male l'elettricità; ad esempio, se vi è separazione dello zolfo.
2. Quando gli ioni formano, con la loro azione sugli elettrodi, uno strato scarsamente conduttivo, ad esempio uno strato di ossido; tale è il caso di un elettrodo di alluminio che si ossida.



3. Quando si formano nella soluzione stessa, a seguito dell'elettrolisi, nuove sostanze, la cui conduttività (mobilità degli ioni) differisce dalla conduttività dell'elettrolita iniziale. Si possono anche citare qui i rari casi in cui l'intensità della corrente aumenta con il tempo. Così, in una soluzione di  $CuSO^4$ , si forma  $H^2SO^4$  tra gli elettrodi di Pt; poiché la mobilità di H è maggiore di quella di Cu, la resistenza  $r$  interna del voltmetro diminuisce nel tempo. Un cambiamento nella concentrazione della soluzione, come risultato dell'elettrolisi, può comportare anche un cambiamento nella resistenza  $r$ .

Ma, oltre alla variazione di intensità della corrente, si osserva ancora, in molti casi, una rapida diminuzione di questa intensità. Questa diminuzione può derivare dalla comparsa, all'interno del voltmetro, di una particolare resistenza che non è identica a nessuna di quelle che abbiamo enumerato, oppure dal sorgere in esso di una nuova forza elettromotrice  $e$ , di verso opposto a quello della forza  $E$ . È infatti da tempo ammesso che tra gli elettrodi ed il liquido appare, nell'elettrolisi, una resistenza di passaggio di natura particolare. Si deve tuttavia oggi considerare dimostrato l'assenza di una resistenza di questo tipo, ma che l'elettrolisi fa sorgere nel voltmetro una nuova forza elettromotrice, che può essere chiamata *forza elettromotrice di polarizzazione* o semplicemente *polarizzazione*.

Supponiamo innanzitutto che prima dell'introduzione del voltmetro nel circuito, non esiste alcuna forza elettromotrice in questo esso. Le formule (38,a) e (38,b) si riferiscono a questo caso. Quando appare la polarizzazione  $e$ , l'intensità  $I$  della corrente è espressa da una delle seguenti nuove formule:

$$\begin{cases} I &= \frac{E-e}{R+r} \\ I &= \frac{V_1-V_2-e}{r} \end{cases} \quad (10.0.75)$$

Quando il voltmetro viene tolto dal circuito, dopo che in esso si è verificata la polarizzazione, e lo si collega poi direttamente ad un galvanometro, quest'ultimo mostra che, nel nuovo circuito così formato, esiste una corrente, la quale, nel voltmetro, ha un direzione opposta a quella della corrente  $I$ . L'intensità  $I_p$  di questa corrente di polarizzazione è data al primo momento dalla formula

$$I_p = -\frac{e}{r + R_1} \quad (10.0.76)$$

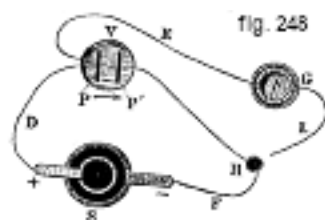
dove  $R_1$  indica la resistenza di tutte le parti esterne del circuito. L'intensità  $I_p$  cala rapidamente fino ad annullarsi.

La comparsa della polarizzazione  $e$  può essere dovuta a due cause. In primo luogo, gli elettrodi, originariamente identici, possono cessare di esserlo, per effetto dell'azione degli ioni su di essi; in questo caso il voltmetro diventa una sorta di elemento galvanico con due diversi elettrodi nello stesso liquido. Questo è il caso in cui gli elettrodi sono inizialmente ricoperti da strati identici di un ossido metallico, ad esempio di litargirio, e sono immersi in una soluzione diluita di acido solforico. Nell'elettrolisi uno strato si ossida (quello dell'anodo) con formazione di perossido, l'altro (quello del catodo) si riduce ad ossidi inferiori o addirittura completamente in metallo. La corrente di polarizzazione, nell'elemento di polarizzazione (*accumulatore*) così formato, va dalla direzione della superficie ridotta verso la superficie ossidata; l'elettrodo ricoperto di perossido è l'elettrodo positivo.

In secondo luogo, gli ioni, senza esercitare alcuna azione chimica sugli elettrodi, possono, per la loro sola comparsa sulla superficie di questi ultimi, produrre già una polarizzazione. Questo caso è il più importante e lo affronteremo per primo.

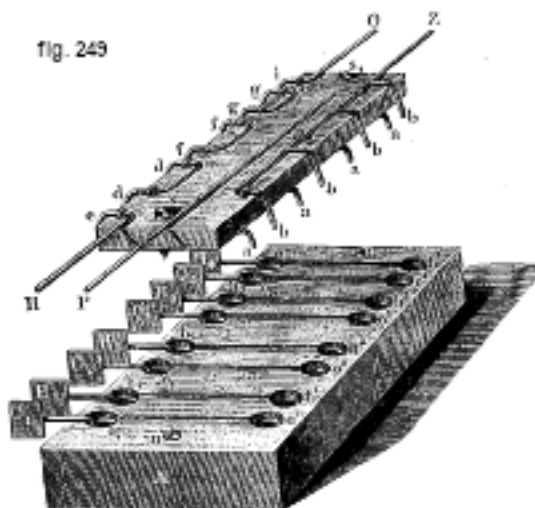
Assumeremo gli ioni gassosi. Un tipico esempio è il seguente: il voltmetro contiene due lamine di platino, che sono immerse in una soluzione di acido solforico o altro elettrolita, nella cui elettrolisi si sprigionano idrogeno e ossigeno. Considereremo prima questa polarizzazione dovuta all'idrogeno e all'ossigeno.

Il fenomeno della polarizzazione sembra essere stato osservato per la prima volta da Gautherot (1802); fu poi studiato da Ritter (1803), Marianini, de la Rive, Matteuci, ecc.



Per rendere manifesto il fenomeno della polarizzazione, possiamo utilizzare il dispositivo rappresentato schematicamente in figura 248; S è un elemento, V il voltmetro con elettrodi P e P', G un galvanoscopio, H una tazza di mercurio. La corrente scorre attraverso il voltmetro da P a P'; se l'estremità del filo F viene estratta dalla coppa H e se l'estremità del filo L viene immersa in H, l'esistenza della corrente di polarizzazione, che attraversa V da P' a P, è rilevata dal galvanoscopio G.

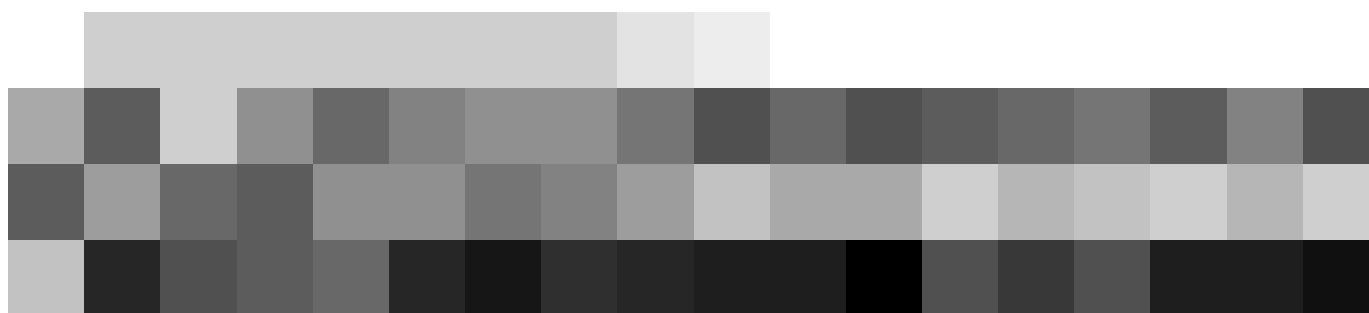
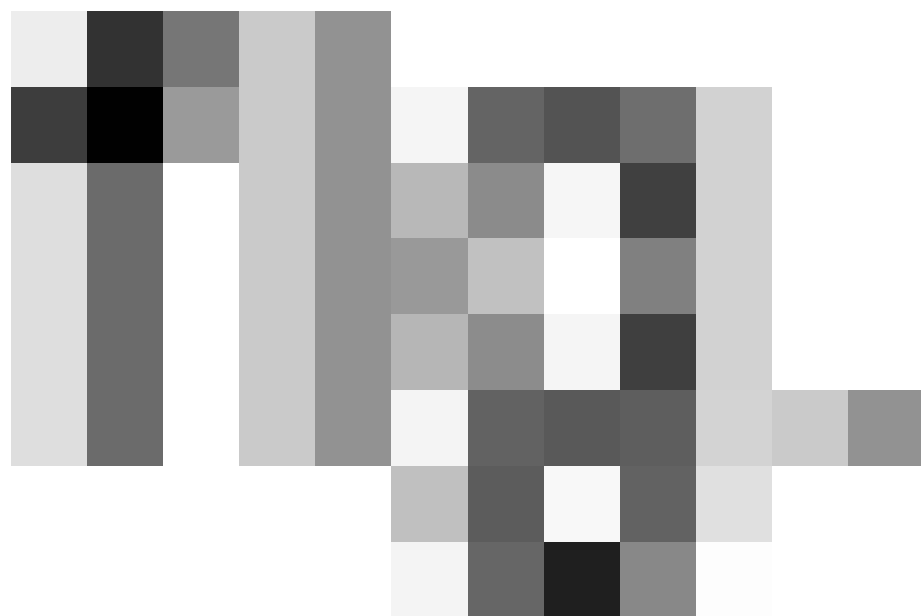
Poggendorf (1844) ha costruito una sorta di bilancia molto semplice, mediante la quale si possono caricare rapidamente e ripetutamente quattro voltametri collegati in parallelo e poi scaricarli attraverso un galvanometro, dopo averli collegati in serie, il che dà una forza elettromotrice quadrupla. Il dispositivo è composto da un piatto di legno A (fig. 249), nel quale sono praticate otto coppie di cavità riempite di mercurio. Le cavità  $o_1$  e  $o^1$ ,  $h_1$  e  $h^1$ , ecc. sono unite tra loro da fili; le cavità  $o_1, h_1, o_2, h_2$  ecc. sono unite rispettivamente alle piastre  $O_1, H_1, O_2, H_2$ , ecc.. Sulla piastra A è posto un coperchio, mostrato a parte, appoggiato sulle punte di due viti  $s, s_1$  sulle lamine  $n$  e  $n_1$  dotate di piccoli fori. Sul coperchio sono fissati dei fili, come indica la figura; i fili  $a, a...$  sono collegati al filo P. I fili P e Z sono collegati al circuito polarizzante (una batteria idroelettrica); O e H sono collegati al circuito di polarizzazione (galvanometro o altro dispositivo). Quando il coperchio è inclinato verso destra, i fili  $a$  e  $b$  si immergono nel mercurio delle cavità  $o^1, h^1$ , ecc. e tutti i voltametri sono disposti in parallelo sul circuito; se poi si inclina il coperchio verso sinistra, i voltametri sono disposti in serie, poiché i fili  $e, dd, ff$ , ecc. pescano nel mercurio delle cavità  $o_1, h_1$ , ecc. Basculando rapidamente il coperchio con la mano si ottiene una forte corrente di polarizzazione, ma discontinua. La figura 250 mostra una sezione trasversale del dispositivo; i fili  $a$  e  $b$  non sono nel piano della stessa sezione trasversale. Altri strumenti sono stati costruiti per lo stesso scopo da Siemens, J. Müller., Bohn e altri.



Le prime ricerche precise sulla polarizzazione sono dovute a Fechner (1831) e Poggendorf (1841); non ci soffermeremo sul loro lavoro, che aveva come oggetto, tra l'altro, quello di determinare l'assenza di una particolare resistenza di passaggio.

Uno studio della polarizzazione divenuto classico è quello di E. Lenz (1843), che ha messo perfettamente in luce il carattere di questo fenomeno e ha scoperto le leggi più importanti

a cui è soggetto. Ha trovato in particolare che la polarizzazione, cioè l'intensità della forza elettromotrice  $e$ , aumenta con l'intensità della corrente polarizzante, o più esattamente, con la forza elettromotrice  $E$  applicata al voltmetro. Ma questo aumento non fa superare un certo limite  $e_m$ ; la polarizzazione non aumenta oltre questo limite, qualunque siano le grandezze della forza elettromotrice  $E$  e dell'intensità  $I$  della corrente che attraversa il voltmetro. Il massimo  $e_m$  dipende dalla sostanza dell'elettrodo e dalla natura del gas che si libera sulla sua superficie.



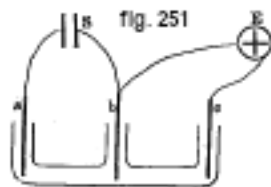
Lenz ha inoltre riconosciuto che la polarizzazione  $e$  consiste di due parti, che hanno origine separatamente ai due elettrodi. Se si sostituisce uno degli elettrodi polarizzati con un nuovo elettrodo non polarizzato, si manifesta una polarizzazione  $e_1$ , minore di  $e$ ; lo stesso vale per la polarizzazione  $e_2$  che compare quando l'altro elettrodo viene sostituito da uno non polarizzato; si ha  $e = e_1 + e_2$ . Supponiamo, per fare un esempio, che gli elettrodi siano di Pt e che i gas polarizzanti siano O e H; indichiamo con  $Pt_O$  e  $Pt_H$  gli elettrodi polarizzati; allora si ha

$$Pt_O|Pt_H = Pt_O|Pt + Pt|Pt_H = Pt_O|Pt - Pt_H|Pt$$

Infine E. Lenz ha mostrato anche per primo che non è necessario ricorrere a una particolare resistenza di passaggio per spiegare il fenomeno della polarizzazione.

Abbiamo già parlato di elettrodi non polarizzabili; questi sono metalli che si trovano in soluzioni dei loro sali, per esempio Cu in una soluzione di  $CuSO^4$ , Zn in una soluzione di  $ZnCl^2$ , ecc.

Non considereremo in dettaglio i metodi di misura della polarizzazione  $e$ . Questi metodi sono generalmente confusi con i metodi generali di misura delle forze elettromotrici che descriveremo in seguito. I metodi di compensazione sono principalmente utilizzati qui. Citeremo solo il metodo Fuchs, appositamente destinato alla misura della polarizzazione. Tralasciando i dettagli, ci limiteremo alla figura schematica 251. Un tubo orizzontale porta tre tubi verticali, nei quali si trovano gli elettrodi  $a$  e  $b$ , di cui si desidera misurare la polarizzazione, e un ulteriore elettrodo  $c$ , che è collegato all'elettrometro E; il secondo terminale dell'elettrometro è collegato ad uno dei due elettrodi  $a$  o  $b$ , in modo tale che lo strumento misuri la differenza di potenziale tra  $c$  e l'elettrodo che gli è associato. Supponiamo di misurare la differenza di potenziale tra  $b$  e  $c$ . Se si collega  $a$  e  $b$  alla batteria S, l'indicazione dell'elettrometro cambia di una quantità uguale alla polarizzazione dell'elettrodo  $b$ . Si può porre  $a$ ,  $b$  e  $c$  in contenitori diversi, collegati con dei sifoni, e scegliere per elettrodo  $e$  dello zinco amalgamato, immerso in una soluzione di solfato di zinco; l'elettrodo  $c$  è in questo caso non polarizzabile. F. E. Neumann, Föppl e altri hanno proposto diversi metodi speciali per la misura di  $e$ . Pirani ha fatto uno studio critico di tutti questi metodi.



L'intensità della polarizzazione dipende in modo assai complesso dalla forza elettromotrice  $E$  applicata agli elettrodi o dalla intensità  $I$  della corrente che attraversa il voltmetro. Le ricerche di Crova (1863) e di F. Exner (1878) hanno mostrato che, per un aumento graduale della grandezza  $E$ , partendo da zero,  $e$  è uguale all'inizio a  $E$  in valore assoluto, ma naturalmente in direzione opposta;  $I$  è allora nullo, non c'è corrente e nessuna emissione osservabile di gas, sotto forma di bolle. Partendo da un certo valore  $E = e'$  si ha  $e < E$  e nello stesso tempo una corrente  $I$  si stabilisce e si ha un elettrolisi osservabile. A partire da questo momento, inizia per così dire un secondo periodo; Crova ha determinato come, in questo secondo periodo, la polarizzazione  $e$  dipenda dall'intensità  $I$  della corrente. Ha trovato che  $e$  può essere espresso da una formula come

$$e = A - Be^{-\alpha I} \quad (10.0.77)$$

dove  $A, B, \alpha$  sono costanti. Per  $I = 0$ , si ha  $e = A - B$ ; per  $I = \infty$ ,  $e = A$ . Con elettrodi di platino, Crova ha ottenuto, per il valore di  $A$ , circa  $2,7 \text{ volt}$ ; per il valore di  $B$ , circa  $0,3 \text{ volt}$ . Si ha quindi, fino a  $E = E' = 2,4 \text{ volt}$ ,  $e = E$  e  $I = 0$ . Quando  $E > 2,4 \text{ volt}$ ,  $I > 0$  ed  $e$  aumenta

ancora di più, fino al valore limite di  $2,7 \text{ volt}$ . F. Exner è arrivato a un risultato leggermente diverso; ha trovato che  $e = E$ , fintanto che  $E$  non è maggiore di circa 2 volt;  $e$  poi aumenta, raggiunge il suo massimo  $e = 2,23 \text{ volt}$  (2,3 Daniells) per  $E = 2,5$  e non può più assumere un valore maggiore, qualunque aumento  $E$  riceva.

Buff, Raouli, Poggendorf, Fromme e, in particolare, Sawinoff (1891) hanno determinato il valore massimo di polarizzazione per diversi elettrodi ed elettroliti. L'ultimo di questi autori ha misurato la polarizzazione dell'anodo e del catodo, nel caso in cui i due elettrodi sono di platino; varie sostanze sono state scelte come elettroliti, ma in tutti i casi la polarizzazione è stata prodotta dall'idrogeno e dall'ossigeno liberati, in elettrolisi, sugli elettrodi. Sawinoff ha trovato i seguenti valori della polarizzazione espressa in Daniells:

	$H^2SO^4$	$NaHO$	$KHO$	$Na^2SO^4$	$K^2SO^4$	$MgSO^4$
Polarizzazione massima all'anodo	1,20	1,25	1,23	1,42	1,47	1,10
Polarizzazione massima al catodo	1,11	1,46	1,42	1,47	1,46	1,44

La dipendenza tra la polarizzazione massima e la sostanza degli elettrodi è stata studiata da Pirani, Sreintz, Tafel (1905) e altri. È stato riconosciuto che la sostanza svolge un ruolo estremamente importante. Così la polarizzazione degli elettrodi di rame, in una soluzione di acido solforico, non supera 0,5 volt, mentre può arrivare fino a 2,5 e anche 3 volt per gli altri elettrodi. Koch e Wüllner hanno ottenuto addirittura 3,5 volt con elettrodi di platino. La polarizzazione del platino platinato è di circa 0,5 volt inferiore a quella del platino lucido; questo fenomeno è interessante da un punto di vista teorico.

Beetz (1880) ha fatto uno studio particolarmente accurato della polarizzazione di vari elettrodi. Egli ha confermato i risultati già ottenuti in parte da E. Lenz. Ha trovato, con il metodo di Fuchs, che la polarizzazione di un elettrodo in platino da parte dell'idrogeno o dell'ossigeno, in una soluzione di  $H^2SO^4$ , non dipende né dalla sostanza dell'altro elettrodo, né dal liquido che lo circonda; l'intera polarizzazione del voltmetro è uguale alla somma delle polarizzazioni dei due elettrodi. L'entità della polarizzazione dipende dalle dimensioni dei due elettrodi; quando gli elettrodi hanno dimensioni molto diverse, la polarizzazione del più piccolo può raggiungere un valore notevole, mentre quella del più grande può essere molto piccola o addirittura poco sensibile. Se i due elettrodi sono molto piccoli, la polarizzazione può raggiungere anche valori molto maggiori che per elettrodi grandi.

Quando si chiude un circuito contenente un voltmetro, la polarizzazione di quest'ultimo non raggiunge istantaneamente il valore  $e$ , che corrisponde alla differenza di potenziale applicata agli elettrodi del voltmetro. F. Kohlrausch (1873) ha trovato che la polarizzazione  $e$  è proporzionale alla quantità  $q$  di elettricità che ha attraversato il voltmetro, quando la corrente era chiusa solo un tempo molto breve. Ma questo non si applica alle correnti polarizzanti deboli. Bartoli (1880) ha trovato che  $e$  può essere espresso dalla seguente formula

$$e = \frac{B}{2} \left(1 - 10^{-\alpha \frac{q}{s}}\right) + \frac{B_1}{2} \left(1 - 10^{-\alpha_1 \frac{q_1}{s_1}}\right) \quad (10.0.78)$$

dove  $s$  e  $s_1$  sono le aree dei due elettrodi,  $B$  e  $B_1$ ,  $\alpha$  e  $\alpha_1$  delle costanti. In molti casi, si può porre  $B = B_1$  e  $\alpha = \alpha_1$ . Quando le aree degli elettrodi sono uguali, si ottiene la formula

$$e = B \left(1 - 10^{-\alpha \frac{q}{s}}\right) \quad (10.0.79)$$

Kohlrausch ha determinato la quantità approssimativa di gas, che deve comparire agli elettrodi, affinché si raggiunga una data polarizzazione  $e$ . Ha trovato che, per la polarizzazione del platino da parte di idrogeno e ossigeno, si ha  $e = 1$  Daniel, quando su  $1 \text{ cm}^2$  della superficie di un elettrodo compaiono  $15 \cdot 10^{-8} \text{ mg}$  di idrogeno e contemporaneamente su  $1 \text{ cm}^2$  della superficie dell'altro elettrodo  $12 \cdot 10^{-7} \text{ mg}$  di ossigeno.

Il graduale aumento della polarizzazione  $e$ , dopo la chiusura del circuito, e la sua graduale diminuzione, dopo l'apertura del circuito, sono stati studiati da molti autori. Edlund (1852) ha mostrato che, 0,02 s dopo la chiusura del circuito, la polarizzazione del Pt, in acido solforico diluito, raggiunge un quarto del suo valore finale. Si può dire che in generale la polarizzazione si stabilisce molto velocemente. Ma, nella maggior parte dei casi, scende molto lentamente, quando il voltmetro viene lasciato aperto, dopo che il circuito è stato aperto. Anche dopo un mese sono ancora presenti tracce della forza elettromotrice che si era prodotta nel voltmetro. Quando, invece, il voltmetro è chiuso, per cui si genera una corrente di polarizzazione, la polarizzazione  $e$  e di conseguenza anche l'intensità di questa corrente diminuiscono rapidamente, più lentamente però di quanto avvenga la comparsa della polarizzazione, dopo la chiusura della corrente di polarizzazione. Questi fenomeni sono stati studiati in dettaglio da Fromme, Bernstein, Macaluso, Streintz, Helmholtz, Bouty, Salomon (1897) e altri. Bouty ha scoperto che la velocità con cui la polarizzazione aumenta non è la stessa per i due elettrodi; questo aumento avviene sull'anodo più lentamente che sul catodo. La somma  $e$  delle polarizzazioni dei due elettrodi è un po' minore di  $E$ , cioè della forza polarizzante. *Per questo passa sempre attraverso il voltmetro, anche per i più piccoli valori di  $E$ , una corrente, anche se molto debole.* Questa corrente, la cui esistenza era già stata notata in precedenza, è chiamata *corrente residua*.

Scosse date agli elettrodi producono una diminuzione della polarizzazione. Quando la temperatura aumenta, la polarizzazione diminuisce, come mostrato dagli esperimenti di Crova, Poggendorf, Beetz e altri. Per correnti deboli l'influenza della temperatura si fa sentire più sull'elettrodo ricoperto di idrogeno che su quello ricoperto di ossigeno. Torneremo più avanti sulla teoria di questo fenomeno. Una pressione non esercita alcuna azione sensibile sulla polarizzazione; si può però stabilire teoricamente che la polarizzazione deve aumentare, all'aumentare della pressione.

La maggior parte delle ricerche sulla polarizzazione prodotta dagli ioni gassosi riguarda la polarizzazione dovuta all'ossigeno e all'idrogeno. Tuttavia, esiste anche una serie di lavori relativi alla polarizzazione da parte di altri gas. I primi lavori su questo argomento si devono a E. Lenz e Sawelieff (1846), poi a Beetz, Raoult, ecc. Beetz ha studiato la polarizzazione del platino ad opera di cloro, bromo e iodio; ha trovato, per il cloro il valore 0,505 $D$ , per il bromo 0,33 $D$  e per lo iodio 0,17 $D$ , mentre, secondo le sue misure, la polarizzazione da parte dell'idrogeno è pari a 0,9 $D$ .

Dopo aver reso noto il carattere generale del fenomeno della polarizzazione, consideriamo cosa realmente accade alla superficie dell'elettrodo. Quando si introduce un voltmetro in un circuito e tra i suoi elettrodi si stabilisce una definita differenza di potenziale  $E$ , inizia immediatamente il movimento degli ioni verso gli elettrodi; contemporaneamente anche gli ioni si muovono le loro cariche. Quando gli ioni raggiungono la superficie degli elettrodi, non trasferiscono immediatamente su di essi le loro cariche, ma formano prima su di essi uno strato; per togliere allo ione la sua carica è necessaria una certa forza elettromotrice di grandezza determinata. La carica di uno degli ioni e quella che si trova sulla superficie di uno degli elettrodi formano un doppio strato elettrico, vale a dire qualcosa che ricorda molto un condensatore carico. Un voltmetro polarizzato può essere considerato come un sistema di due condensatori; la distanza tra le superfici (cariche) in ciascuno di essi è molto piccola, e, di conseguenza, la capacità di questi due condensatori, cioè la capacità del voltmetro polarizzato, è molto alta. Ad ogni doppio strato o ad ogni condensatore corrisponde una differenza di potenziale (salto di potenziale), che dipende dalla natura degli ioni e dalla loro quantità. Le due differenze di potenziale  $e_1$  ed  $e_2$ , che si producono così ai due elettrodi, costituiscono la cosiddetta polarizzazione degli elettrodi. Quando la somma  $e = e_1 + e_2$  diventa uguale alla differenza di potenziale  $E$  degli elettrodi, deve stabilirsi in tutto il circuito una distribuzione statica delle cariche; la somma delle forze elettromotrici (salti di potenziale) agenti in tutto il circuito chiuso si annulla e contemporaneamente si annulla l'intensità di corrente nel circuito.

Quando si aumenta  $E$  e di conseguenza anche le cariche degli elettrodi, nuove quantità di ioni vengono attratte dalle superfici degli elettrodi e le cariche dei due condensatori considerati aumentano, fintanto che la somma dei salti di potenziale, cioè la polarizzazione del voltmetro, non ha nuovamente raggiunto il valore  $E$ . Contemporaneamente all'aumento delle cariche e di conseguenza anche della differenza di potenziale delle due facce di ogni doppio strato, aumenta anche la forza elettrica  $F$ ; questa forza agisce tra la carica dello ione e quella dell'elettrodo e tende a togliere allo ione la sua carica, quindi anche a produrre una scomposizione dello ione, cioè appunto il fenomeno dell'elettrolisi. Si è quindi portati a immaginare che lo ione mantenga la propria carica con una forza determinata, che si potrebbe chiamare la sua tenacità. Non appena la forza elettrica  $F$  diventa uguale a questa tenacità, inizia un'elettrolisi sensibile. Le Blanc, il cui lavoro ha particolarmente contribuito a chiarire il fenomeno della polarizzazione, contesta l'esistenza di un massimo di polarizzazione, nel senso che abbiamo sopra attribuito a questa espressione. Per contro, introduce la nozione di *intensità di scomposizione*, intendendo con essa l'entità della forza elettromotrice che comincia a scomporre gli ioni, vincendo la tenacità degli ioni sui due elettrodi. Le Blanc ha determinato l'intensità di scomposizione e la tenacità di molti elettroliti. Ha trovato in particolare che la tenacità dello ione metallico, che si separa dalla soluzione del sale di un dato metallo, vale a dire il salto di potenziale al catodo per il quale avviene un continuo e regolare distacco del metallo, è appunto pari alla forza elettromotrice, cioè al salto di potenziale tra questo metallo e la soluzione del suo sale. Così, il Cd dà, in una soluzione (normale) di  $CdSO^4$  una forza elettromotrice di +0,16 volt, e, nell'elettrolisi di questa soluzione, la separazione di Cd inizia proprio quando la polarizzazione dell'elettrodo negativo diventa pari a 0,16 volt. Le Blanc è riuscito in questo modo a collegare la teoria delle forze elettromotrici di Nernst a quella del fenomeno opposto dell'elettrolisi.

Si noti inoltre che Le Blanc, partendo dalla nozione di tenacità degli ioni, ha fornito una nuova spiegazione del fatto che, nell'elettrolisi della soluzione di una miscela di diversi sali, i metalli non si separano tutti contemporaneamente, ma in uno dato ordine. Secondo lui, gli ioni si separano secondo l'ordine di grandezza della loro tenacità: prima di tutto, la carica viene rimossa dallo ione che ha meno tenacità, precipitando il metallo corrispondente sull'elettrodo; poi viene il turno dello ione che possiede, fra quelli che sussistono nella soluzione, la minor tenacia, ecc.

Le Blanc ha trovato che l'intensità della scomposizione, in soluzioni di numerosi acidi o basi, è approssimativamente pari a 1,67 volt. Le ricerche più recenti di Nernst (1897), Glaser e Bose (1898) hanno permesso di determinare più esattamente ciascuna delle due parti che costituiscono questa grandezza. Questi autori hanno preso un elettrodo con un'area molto grande, un altro con un'area molto piccola; si può supporre che la polarizzazione del primo sia uguale a zero. Hanno riconosciuto che la curva, che rappresenta l'intensità della corrente che attraversa il voltmetro in funzione di  $E$  (corrente residua menzionata sopra) presenta diverse interruzioni, dove il tasso di aumento dell'intensità della corrente aumenta bruscamente. Questa circostanza può essere spiegata da una scomposizione dell'elettrolita in ioni di varia natura, ad esempio  $H^2O$  in  $H^2$  e  $O$  o in  $HO$  e  $H$ ,  $HSO^4$  in  $H^2$  e  $SO^4$  o in  $H$  e  $HSO^4$ .

Come abbiamo detto, un voltmetro polarizzato può essere considerato come l'insieme di due condensatori; l'elettrolita e le due superfici interne sono allo stesso potenziale; l'elettrolito non può quindi in alcun modo essere paragonato ad un conduttore che unirebbe le superfici dei due condensatori. Ciò risulta già dal fatto che la scarica del voltmetro polarizzato non avviene bruscamente, ma relativamente molto lentamente. Colley (1879), Blondlot, Oberbeck, Collin, Bouty, Lietzau, F. Kohlrausch, M. Wien, Gordon (1897), Sokolow (1896) e Krüger (1903) si sono particolarmente interessati alla ricerca della capacità di un voltmetro. Colley ha mostrato che in nessun caso un voltmetro può essere considerato come un semplice condensatore, come si pensava in precedenza, ma che esso corrisponde, come sopra indicato, ad un sistema di due condensatori.



Siano  $q$  la capacità di un condensatore,  $\eta$  la sua carica,  $V$  la differenza di potenziale tra le due superfici di questo condensatore; nel caso considerato  $V$  non è altro che la forza elettromotrice  $e$  di polarizzazione del voltmetro. La capacità di un normale condensatore è una grandezza costante, che dipende, come sappiamo, solo dalla forma e dalle dimensioni del condensatore; è determinata dalla formula  $q = \eta : V$ . Per il voltmetro, dovremmo avere  $q = \eta : e$ ; ma, quando si misura, per diversi valori della polarizzazione  $e$ , la quantità di elettricità  $\eta$ , che scorre nel voltmetro, quando è carico, o che attraversa il circuito della corrente di polarizzazione quando il voltmetro è scarico, si trova che la capacità  $q$  del voltmetro non è una quantità costante, ma varia con la polarizzazione  $e$ . Vi è quindi ragione di parlare di una capacità  $q$  del voltmetro per la polarizzazione  $e$  e porre

$$q = \frac{d\eta}{de} = f(e) \quad (10.0.80)$$

Blondlot (1881) ha cercato dapprima come la capacità  $q$  dipende dalla polarizzazione  $e$ . Ha trovato che la capacità aumenta con la polarizzazione  $e$  e ha introdotto la nozione della capacità  $q_0$  per  $e$  infinitamente piccolo, chiamandola la capacità iniziale del voltmetro. Blondlot ha dedotto dalle sue osservazioni che la capacità iniziale  $q_0$ , con elettrodi di platino, non dipende dal segno della polarizzazione, né dalla natura dell'elettrolita, ma solo dalla quantità  $e$ . In valore assoluto, la più piccola capacità misurata in un voltmetro è uguale alla capacità di un condensatore piatto, le cui superfici sono distanti un milionesimo di millimetro. Oberbeck (1883) ha trovato un risultato diverso: la capacità di un voltmetro dipenderebbe tanto dall'elettrolita quanto dalla sostanza dell'elettrodo.

La variazione di capacità, all'aumentare della polarizzazione, cioè quando aumenta il tempo durante il quale la forza elettromotrice agisce sul voltmetro, è spiegata dai fenomeni secondari che accompagnano la polarizzazione. Questi fenomeni sono l'assorbimento di gas da parte della sostanza dell'elettrodo (occlusione), la dissoluzione e diffusione di gas  $e$ , in alcuni casi, l'azione di gas disciolti nell'elettrolita (ossigeno dell'aria o gas disciolto in esperimenti precedenti), infine i fenomeni chimici secondari sulla superficie degli elettrodi. Come risultato finale di tutti questi fenomeni si ottiene una depolarizzazione più o meno continua degli elettrodi, e ciò provoca un aumento della capacità, che viene misurata dalla corrente che carica o scarica il voltmetro.

Wiedeburg (1894) ha studiato teoricamente l'influenza dei fenomeni secondari sulla polarizzazione. Dà, per la capacità del voltmetro.

$$q = \frac{c}{1 - \frac{e}{e_m}}$$

dove  $c$  è una costante,  $e_m$  il valore massimo della polarizzazione, per la quale la capacità diventa teoricamente infinitamente grande. M. Wien (1896), Sokolow (1897) e Gordon (1897) hanno studiato sperimentalmente la capacità del voltmetro. Sokolow ritiene che la reale capacità di polarizzazione, che dipende solo dai doppi strati elettrici sulla superficie degli elettrodi, sia molto inferiore alla capacità determinata dalla misura della corrente di carica o scarica. Gordon ha misurato la capacità mediante il ponte di Wheatstone, con il metodo di Nernst, con correnti alternate. Ha osservato in particolare che il platino platinato dà una capacità molto maggiore del platino puro, il che concorda con quanto appena esposto.

La corrente residua sopra menzionata, che passa attraverso il voltmetro, anche per le forze elettromotrici più deboli ad esso applicate, è spiegata anche dalle precedenti azioni secondarie. Pertanto, l'ossigeno disciolto (non lo ione) può ricevere elettricità negativa dal catodo, cioè trasformarsi in uno ione e unirsi allo ione idrogeno per formare acqua. Gli altri fenomeni secondari citati possono ancora produrre una continua depolarizzazione, cioè una riduzione della polarizzazione, che viene anche continuamente ripristinata da nuove correnti di ioni che vanno verso gli elettrodi. Il movimento di questi ioni rappresenta la corrente residua.

La spiegazione del ruolo svolto nell'elettrolisi dai gas disciolti nell'elettrolita o assorbito dagli elettrodi, come pure i gas che si diffondono da un elettrodo all'altro, è dovuta a Helmholtz,

che ha chiamato corrente di convezione quella che attraversa il voltmetro, quando gli viene applicata una forza elettromotrice molto debole. Witkowski ha studiato in modo particolare, teoricamente e sperimentalmente, l'influenza dell'assorbimento dell'idrogeno da parte di un elettrodo di platino, trovando che l'intensità  $I$  della corrente, che passa attraverso il voltmetro dopo un tempo  $t$  trascorso dall'interruzione della corrente, è espresso da una formula del tipo

$$I = \frac{\alpha}{\sqrt{t}} + \beta$$

dove  $\alpha$  dipende tra l'altro dalla velocità con la quale l'idrogeno penetra nel platino. Quando il circuito di carica viene chiuso per il tempo  $\theta$  e poi viene chiuso il circuito del voltmetro, l'intensità  $I'$  della corrente di polarizzazione, al termine del tempo  $t$  dalla sua comparsa, è espressa dalla formula

$$I' = \frac{\alpha}{\sqrt{t}} - \frac{\alpha}{\sqrt{t} + \theta} - \delta$$

Gli esperimenti hanno confermato la correttezza di queste formule, dove  $\beta$  corrisponde alla corrente residua costante e dove  $\delta$  dipende dalle cariche precedenti del voltmetro.

Quando si chiude ermeticamente il voltmetro e si allontana completamente dal liquido e dagli elettrodi e dall'idrogeno per poi inserire il voltmetro in un circuito, dove agisce una debole forza elettromotrice, l'intensità della corrente cala rapidamente fino ad annullarsi: una corrente residua continua non può più, come ha mostrato Helmholtz, esistere in tali circostanze. Vedremo nel paragrafo successivo a quali risultati sia arrivato Helmholtz, applicando le considerazioni termodinamiche allo studio teorico dei fenomeni che avvengono nel voltmetro. A Sokolw (1896) si devono altre ricerche più approfondite in questo settore.

Ostwald ha sviluppato una rappresentazione molto dettagliata del meccanismo della polarizzazione, partendo dalla teoria della dissociazione elettrolitica. Egli distingue diversi casi particolari. Il più semplice è dove il metallo è nella soluzione di uno dei suoi sali. Esiste allora un doppio strato, che bilancia la differenza tra la tensione di dissoluzione e la pressione osmotica. Quando si aumenta il potenziale dell'elettrodo, il catione positivo esce da questo elettrodo: quando, al contrario, si diminuisce il suo potenziale, il catione passa dal liquido all'elettrodo. Le due azioni continuano finché non viene ripristinata la primitiva differenza di potenziale. Non c'è alcuna polarizzazione residua dopo il flusso di corrente. Se nell'elettrolisi non c'è affatto catione dalla sostanza dell'elettrodo (carbone di legna, platino) e se si dà a questo elettrodo un potenziale positivo, si forma un doppio strato elettrico, una faccia del quale è costituita dall'anione. Se invece l'elettrodo riceve un potenziale negativo o se il suo potenziale positivo viene ridotto, parte dell'anione si allontana dalla superficie degli elettrodi. Nasce così una nuova differenza di potenziale tra l'elettrodo e l'elettrolita, ed è in questo che consiste il fenomeno della polarizzazione.

Come già accennato, Nernst considera il voltmetro polarizzato come un elemento di concentrazione. La forza elettromotrice di polarizzazione è data dalla formula (42). Salomon (1897) ha sviluppato la teoria di Nernst e tenuto conto della diffusione che avviene all'interno dell'elettrolita. Ha stabilito, per l'intensità della corrente residua, una formula, di cui crede di poter spiegare l'incompleta concordanza con i risultati dell'esperimento con l'ipotesi che gli elettroliti posseggano una certa conducibilità metallica, anche se molto bassa, non superiore a  $2,4 \cdot 10^{-5}$  della loro conducibilità elettrolitica. Anche Rothé (1894) ha studiato sperimentalmente e teoricamente il fenomeno della polarizzazione.

È opportuno dire qui alcune parole del sorprendente fenomeno della passività di certi metalli, che sembrava abbastanza chiaro e semplice fino a tempi relativamente recenti e sembrava, in certe forme particolari, strettamente correlato al fenomeno della polarizzazione. Il fenomeno in questione consiste nel fatto che alcuni metalli, in particolare ferro, nichel, cobalto e cromo, si possono trovare in due diversi stati, che sono stati chiamati rispettivamente attivo e passivo.

La passività è stata osservata e studiata per la prima volta sul ferro. Il ferro passivo differisce da quello ordinario soprattutto per le seguenti due proprietà: in primo luogo, posto in una soluzione di acido solforico o di altro acido a lato del ferro ordinario (attivo), si presenta come elettropositivo, per cui si può ottenere una corrente che va, oltre al liquido, dal ferro passivo al ferro attivo; in secondo luogo, il ferro passivo non si dissolve in  $H_2SO_3$  diluito, la cui densità è di circa 1,3 e che esercita un'azione molto forte sul ferro attivo.

La trasformazione del ferro attivo in passivo avviene quando il primo viene immerso, per brevissimo tempo, in acido nitrico concentrato; inoltre, quando il ferro attivo svolge il ruolo di anodo su cui si libera l'ossigeno; infine, quando il ferro diventa rosso all'aria aperta. Tutte queste circostanze dimostravano perfettamente, a quanto pare, che la passività era dovuta ad un sottile strato di ossido, formatosi sulla superficie del metallo. Questo strato protegge il ferro dall'azione dell'acido e avvicina il ferro a sostanze elettropositive, come platino, perossidi, ecc. Questa spiegazione era in perfetto accordo con il fatto che la passività scompare quando il ferro passivo fungeva da catodo in un voltmetro, anche se solo per brevissimo tempo, cosicché si poteva produrre una deossidazione dello strato superficiale ad opera dell'idrogeno liberato. La scomparsa della passività, quando lo strato superficiale viene rimosso, ad esempio con carta vetrata, o quando il ferro passivo viene riscaldato in una corrente di idrogeno, sembrava ancora più convincente. Tuttavia, questa semplice spiegazione della passività del ferro e degli altri metalli non poteva essere mantenuta, quando tutta una serie di opere di Hittorf, Finkelstein, Micheli, W. Müller, W. Müller e Königsberger, Ostwald e altri. Nel suo primo lavoro sul cromo inattivo (passivo), Hittorf (1899) ha mostrato, con tutta una serie di esperimenti, che l'attività e la passività, che in qualche modo trasformano il cromo in un metallo prezioso, non potevano essere spiegate dalla presenza di una superficie strato di metallo ossidato. Ha trovato che il cromo appare attivo proprio quando è ricoperto da uno strato di ossido. In un secondo lavoro (1900), Hittorf ha studiato il ferro, confrontandone le proprietà con quelle del cromo e dimostrando che la passività del ferro non può dipendere neanche da uno strato superficiale ossidato. Bisogna ammettere che, in un metallo passivo, le molecole si trovano in un certo particolare stato di stress, la cui natura non è stata ancora del tutto dimostrata. Gli esperimenti di Finkelstein (1901) hanno confermato pienamente i risultati ottenuti da Hittorf. Micheli ha mostrato, mediante lo studio ottico della luce riflessa, che anche il ferro attivo è ricoperto da uno strato di ossido. Fredenhagen (1903, 1905) avanzò l'idea che la passività potesse essere una conseguenza dell'assorbimento (occlusione) di ossigeno da parte dello strato superficiale di ferro. Anche Muthann e Fraunberger (1904) sono giunti alla stessa conclusione; hanno scoperto che oltre a Fe, Ni, Cr e Co, Nb, V, Mo, W e Ru manifestano pure il fenomeno della passività. Hollis (1904) ha mostrato che esiste, per ogni metallo, una temperatura, al di sopra della quale lo stato passivo non si verifica per un acido (100° per Fe, 80° per Ni, ecc.). Haber e Goldschmidt, così come Gordon e Clark, si sono di nuovo pronunciati (1906) per lo strato di ossido. Negli ultimi anni è stato pubblicato un gran numero di altri lavori sulla passività, in particolare da Fredenhagen (1908), Sackur (1908), Ruer (1908), Byers (1908), Müller e Königsberger (1909), Alvares (1909), Kistiakowsky (1909), Krassa (1909), Manchot (1909), Flade (1911) e Grave (1911). Un'esposizione critica e dettagliata di queste diverse ricerche e delle varie teorie a cui hanno dato origine si trova in particolare nelle memorie di Fredenhagen (1908), Byers (1908) e Grave (1911). Ma, nonostante tutti questi sforzi, la questione rimane ancora irrisolta. Ruer arriva al risultato che il Pt passivo è dovuto a uno strato di superossido. Fredenhagen e Sackur difendono la teoria della velocità di reazione stabilita da Le Blanc (1904), secondo la quale si forma uno strato di gas all'anodo quando la reazione è lenta. Manchot è a favore dello strato di ossido, di cui dimostra l'esistenza con l'ozono, e analogamente Flade. Infine Grave giunge alla conclusione che Fe e Ni puri sono passivi e che lo stato attivo è dovuto all'idrogeno, che funge da catalizzatore.

Kistiakowsky ha immerso due lastre di ferro in una soluzione acida di bicromato di potassa

e chiuso l'elemento con un voltmetro, che per ore intere, per periodi di 20 secondi, mostrava pulsazioni di  $+0,4$  volt e  $-0,4$  volt, raggiungendo l'intensità della corrente  $0,15$  ampere. Questo elemento forniva quindi una corrente alternata.

Non ci soffermeremo sulle notevoli ricerche di Ostwald, relative ai fenomeni periodici che accompagnano la dissoluzione del cromo negli acidi e che sono connesse con quelle che abbiamo appena considerato, perché è necessario, come ha mostrato Ostwald, abbandonare l'idea che hanno uno stretto legame con i fenomeni elettrolitici.

Ricordiamo ancora, per concludere, la polarizzazione del mercurio e i fenomeni elettrocapillari.

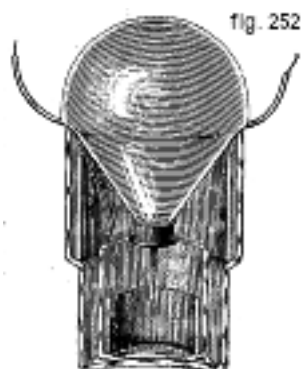
## 8. Elementi idroelettrici. Elementi normali

Studiando il contatto dei corpi come sorgente del campo elettrico, siamo stati portati ad introdurre la nozione di elemento voltaico, detto anche elemento idroelettrico. Abbiamo dato gli schemi delle diverse possibili combinazioni di conduttori di prima classe e di seconda classe, che possono costituire un elemento voltaico e abbiamo visto, in quale forma modificata, l'analogo della legge di Volta si applica a più elementi di natura diversa. Osserviamo qui che i conduttori della seconda classe, che entrano nella costituzione degli elementi, sono solitamente chiamati, per semplicità, liquidi, cosicché distinguiamo, in particolare, gli elementi con uno o due liquidi. Inoltre, la forza elettromotrice  $E$  di un elemento è numericamente pari alla differenza di potenziale ai capi di un circuito regolarmente aperto, cioè tale che ai suoi capi vi siano sostanze identiche (in pratica, comunemente di rame). La grandezza  $E$  è pari alla somma delle forze elettromotrici agenti sulle superfici di contatto delle sostanze di diversa natura, che costituiscono l'elemento. Come abbiamo mostrato, la questione del valore relativo delle forze parziali di cui  $E$  è composto non è ancora risolta. Considereremo in seguito i metodi di misura di  $E$ ; abbiamo reso note le sue proprietà che risultano dalla sua definizione, nonché quelle che possono essere stabilite termodinamicamente, quando si suppone che il passaggio di elettricità attraverso l'elemento sia accompagnato in questo da processi reversibili.

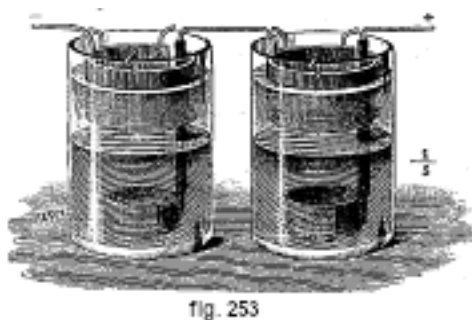
Abbiamo studiato in dettaglio, nei paragrafi precedenti, i fenomeni di elettrolisi che si osservano quando si inserisce nel circuito un elettrolita, cioè un conduttore della seconda serie. In un circuito chiuso, dove l'elemento è la sorgente della corrente, questa deve anche attraversare l'elemento stesso; devono quindi prodursi al suo interno tutti i fenomeni che accompagnano l'introduzione dell'elemento, come sistema di sostanze diverse, nel circuito di qualunque altra corrente. In altre parole, quando l'elemento è in funzione, lì devono avvenire i fenomeni di elettrolisi che abbiamo appena studiato. Come tutti i corpi introdotti nel circuito, l'elemento ha una determinata resistenza, a volte anche notevole. Il fenomeno di polarizzazione considerato nel paragrafo precedente può verificarsi anche all'interno dell'elemento. Nelle celle con un elettrolita, la polarizzazione e di conseguenza la riduzione della forza elettromotrice sono quasi inevitabili.

Oggi che la corrente delle macchine o degli accumulatori viene usata un po' ovunque, gli elementi non hanno più lo stesso ruolo di prima. Possiamo quindi limitarci a una breve carrellata degli elementi più interessanti; ci soffermeremo ancora un po' su quelli che vengono chiamati elementi normali e sugli elementi fotoelettrici; infine, diremo alcune parole sugli accumulatori.

Abbiamo già indicato le parti costitutive ( $\text{Cu} - \text{CuSO}_4 - \text{ZnSO}_4 - \text{Zn} - \text{Cu}$ ) dell'elemento Daniell. Lo zinco è, in questo elemento come in altri ancora, amalgamato vantaggiosamente. Abbiamo descritto e rappresentato in figura 77 una delle forme più usuali dell'elemento Daniell; quando è in funzione, il  $\text{CuSO}_4$  si scompone con separazione del Cu sul cilindro di rame;  $\text{SO}_4$  passa allo zinco, che reagisce formando  $\text{ZnSO}_4$ . La forza elettromotrice dell'elemento Daniell è poco più di un volt.



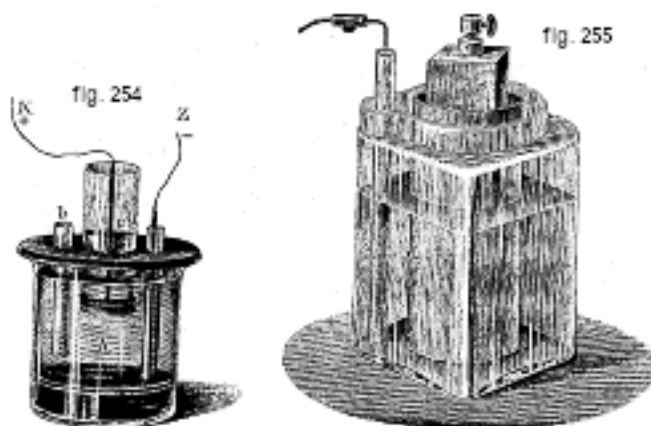
Ci sono un gran numero di modifiche dell'elemento Daniell, alcune delle quali sono usate in telegrafia. Molto spesso, il vaso poroso viene rimosso; la soluzione più pesante di solfato di rame è posta sul fondo del vaso, e subito sopra una soluzione diluita di acido solforico o solfato di zinco. Tra le batterie così modificate citiamo l'elemento Meidinger, particolarmente diffuso in Russia; la figura 252 lo rappresenta in sezione. Consiste in un grande vaso di vetro, la cui parte superiore è più larga di quella inferiore: in quest'ultima si trova un piccolo recipiente, che contiene una soluzione di  $CuSO^4$  e un cilindro di rame, da cui parte verso l'interno un filo di rame isolato. Sul bordo superiore della parte larga del vaso grande è appoggiata una fiaschetta di vetro, contenente acqua e una grande quantità di cristalli di  $CuSO^4$ , la cui soluzione salina scorre attraverso un tubo nel vaso piccolo inferiore, man mano che la soluzione si scompone in quest'ultimo. Il grande vaso è riempito con una soluzione di sale Epsom; un cilindro di zinco poggia sulla sua sporgenza interna. Gli elementi di Buff, Kramer, Carré, W. Thomson, Siemens e Halske, Varley, Minotto, Trouvé, Callaud, Krüger, ecc., sono ulteriori modifiche dell'elemento Daniell. La figura 253 rappresenta il semplicissimo elemento di Callaud, che è spesso impiegato in Francia; un recipiente di vetro contiene nella sua parte inferiore una soluzione di  $CuSO^4$  e una lamina di rame da cui parte un filo isolato con guttaperca; alla parte superiore del recipiente pende un anello di zinco, in una soluzione diluita di  $ZnSO^4$ . Interessante anche il vecchio elemento di Buff (fig. 254); contiene nella sua parte inferiore mercurio, nel quale si immerge l'estremità inferiore di una bacchetta di zinco posta in un tubo di vetro  $d$ ; sopra il mercurio c'è una soluzione di  $ZnSO^4$ . L'ampio tubo  $c$ , chiuso inferiormente da una vescica, contiene una soluzione di  $CuSO^4$  e un'asta di rame: il tubo  $b$  è aperto alle due estremità.



L'elemento Leclanché è diffuso in Francia; lo si costruisce in due forme. Le sue parti costitutive sono: zinco circondato da una soluzione di sale ammoniacale e carbonio a contatto con biossido di manganese. La Figura 255 mostra un elemento Leclanché del primo tipo; è costituito da un vaso poroso, in cui è posto un prisma di carbonio e una miscela di anidride carbonica e manganese; nel vaso di vetro esterno vi è una soluzione di sale ammoniacale e una bacchetta di zinco. Nell'elemento del secondo tipo, agglomerato e senza vaso poroso, il carbonio e la verga di zinco sono in una soluzione di sale ammoniacale; il carbonio è circondato da una massa di

biossido di manganese, carbonio (o grafite) e lacca, compressa a  $250^{\circ}$ . A volte lastre di questo agglomerato vengono fissate contro l'asta di carbonio, per mezzo di anelli di caucciù.

Quando l'elemento Leclanché è in funzione,  $2AzH^4Cl$  si scompone:  $Cl^2$  si libera sullo zinco, formando  $ZnCl^2$ , e  $aAzH^4$  si scompone in  $2AzH^3$ , che rimane in soluzione, e  $H^2$  che disossida il  $MnO^2$ , formando acqua e  $MnO$ ;  $MnO^2$  agisce quindi da depolarizzatore. La forza elettromotrice dell'elemento Leclanché è di circa 1,6 volt.



L'elemento di Lalande e Chaperon è costituito da un vaso grande ma basso, in lamiera di ferro, che funge da polo positivo. Sul fondo del recipiente è presente uno strato di ossido di rame nero ( $CuO$ ), che funge da depolarizzatore. Il vaso è riempito con una soluzione di  $KHO$  e contiene nella sua parte superiore una lamina orizzontale di zinco, che poggia su isolanti di terracotta posti agli angoli del vaso. Ci sono varie modifiche di questo elemento. Quando è in funzione, si verifica la seguente reazione:



l'ossido di rame si riduce, ma lo zinco dà il composto facilmente solubile  $K^2O^2Zn$ . La forza elettromotrice è di circa 1 volt. Questo elemento può essere utilizzato come accumulatore (vedi sotto): quando tutto il  $CuO$  è ridotto, può essere ricostituito e lo zinco precipitato, facendo passare attraverso l'elemento una corrente da un'altra sorgente, nella direzione del ferro verso lo zinco.

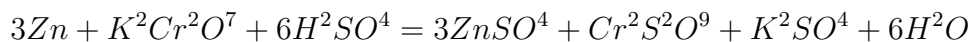
Warren de la Rue e Müller hanno costruito un elemento, dove  $AgCl$  funge da depolarizzatore. Consiste in un vasetto di vetro con una soluzione di  $NaCl$ , in cui pescano un'asta di zinco e un filo d'argento, la cui estremità inferiore è circondata da una bacchetta (54mm di lunghezza e 7,6mm di spessore) di cloruro d'argento, applicato contro di esso per fusione. Warren de la Rue e Müller hanno costruito una batteria di 11000 elementi di questo tipo. Quando l'elemento è attivo,  $2NaCl$  è scomposto;  $2Cl$  si sposta verso lo zinco, dove forma  $ZnCl^2$ , mentre il  $2Na$  forma con l'acqua  $2NaHO$ : i  $2H$ , che rimangono, danno acido cloridrico con  $2AgCl$  e si libera argento;  $HCl$  e  $NaHO$  formano nuovamente acqua e  $NaCl$ . Forse il  $Na$  che si separa agisce anche direttamente su  $AgCl$ , formando  $NaCl$  e  $Ag$ . La forza elettromotrice di questo elemento è di circa 1 volt.

L'elemento di Grove contiene zinco in una soluzione di  $H^2SO^4$  e  $Pt$  in acido nitrico, che funge da depolarizzatore. L'idrogeno, che si separa sul  $Pt$ , disossida l'acido nitrico, formando  $Az^2O^4$  che si dissolve nel resto dell'acido, così come altri ossidi. Poggendorff ha leggermente modificato la forma di questo elemento, la sua forza elettromotrice è pari a 1,6 volt.

Nell'elemento di Bunsen, il platino, che è costoso, è sostituito da un cilindro di carbone compresso.

Negli elementi di acido cromico, il depolarizzatore è l'acido cromico; ma questo non si usa allo stato puro, ed è sostituito da varie soluzioni di bicromato di potassa e di acido solforico,

potendo variare il rapporto in peso di queste due sostanze. Bunsen consiglia di assumere 3 parti di  $K^2Cr^2O^7$  e 4 parti di  $HSO^4 + H^2O$ , in 18 parti di acqua; altri consigliano di prendere 12 parti di sale e 20 parti di acido, per 100 parti di acqua. Bunsen ha costruito elementi con due liquidi: Zn in una soluzione di  $H^2SO^4$  e carbonio in una soluzione di cromo. Quando questo elemento è in funzione si producono reazioni molto diverse, a seconda della composizione del liquido cromatico e forse anche dell'intensità della corrente. Il depolarizzatore qui è l'acido cromatico, che si separa da  $K^2Cr^2O^7$ , con la formazione di cromati e talvolta allume di cromo. Tra le diverse reazioni, la cui esistenza si presume con più o meno ragione, citeremo le seguenti due:



L'elemento monoliquido di Grenet è ampiamente utilizzato; consiste in una bottiglia (fig. 256), in cui viene versata la soluzione cromica. Alla copertura, in gomma vulcanizzata, sono fissate due lamine in carbonio KK; la lamina di zinco Z è fissata ad un'asta che può essere sollevata ad un'altezza tale che lo zinco si trova al di sopra del liquido, quando l'elemento non è in funzione. Se si abbassa la lamina di zinco, l'elemento fornisce una grande forza elettromotrice (fino a 2 volt), che però diminuisce molto rapidamente. Questo elemento è conveniente quando si tratta di ottenere una forte corrente in un tempo piuttosto breve. Warren ha costruito un elemento, che ha una forza elettromotrice di 3 volt, (zinco, carbonio contenente boro e soluzione di un sale di manganese).



Lablotschkoff ha stabilito tutta una serie di elementi che sono, è vero, inutilizzabili nella pratica, ma interessanti dal punto di vista teorico. Così, ha formato un elemento con piastre di C e Na impilate l'una sull'altra, che entra in azione sotto l'influenza dell'umidità dell'aria e fornisce 4 volt. Ha fuso inoltre  $NaAzO^4$  in una pentola di ghisa e vi ha inserito una bacchetta di carbone; questo si ossida a spese dell'ossigeno del salnitro e fa la parte del polo negativo quando l'elemento è in azione, mentre il ferro costituisce il polo positivo. A. Becquerel aveva già costruito in precedenza (1855) un elemento analogo (Pt,  $KAzO^3$ , C). Successivamente sono stati costruiti molti elementi in cui il carbone viene ossidato ad alta temperatura, ad esempio quelli dovuti a Korda (1895) e a Jacques (1896); quest'ultimo impiegava  $C | NaOH | Fe$  e forniva aria al carbone con l' $NaOH$  fuso, cosa peraltro contestata da molti autori in quanto l'ossigeno deve essere aggiunto al Fe. Bechterew (1911) ha studiato in un ampio lavoro l'elemento di Jacques e altri analoghi fino a  $1400^\circ$ . Ha trovato, per l'elemento di Jacques, che la massima forza elettromotrice era uguale a 0,9 volt, poco al di sotto della temperatura di fusione di  $NaOH$ . Altri ricercatori hanno tentato di utilizzare l'ossidazione diretta del carbonio alla temperatura ordinaria. Così Tommasi (1904) ha stabilito un elemento dove il polo positivo è carbonio circondato da perossido di piombo e il polo negativo anch'esso carbonio, ma circondato da una soluzione concentrata di  $NaCl$ . Quando il circuito è chiuso, il carbonio scompone l'acqua ( $C + H^2O = CO^2 + 4H$ ) e l'idrogeno riduce il perossido ( $PbO^2 + 4H = Pb + 2H^2O$ ). Questo

elemento dà circa 0,7 volt. Jone (1905) ha costruito con del carbone un elemento che funziona ad alta temperatura.

Non ci soffermeremo sugli elementi gassosi, perché abbiamo già indicato i più essenziali. Aggiungeremo soltanto che le misure recenti di Lewis (1906) hanno dato, per la forza elettromotrice dell'elemento  $O^2 - H^2$ , con qualsiasi elettrolito, il valore di 1,217 v, che è molto maggiore di quello finora ammesso (1,07 v secondo Smale); ma concorda in modo notevole con il valore 1,23 v ottenuto teoricamente da Nernst (1905).

Gli elementi secchi, che si potrebbero del resto a più ragione chiamare elementi umidi, sono estremamente diffusi, soprattutto per usi domestici; l'elettrolita è una massa pulverulenta, a volte indifferente, imbevuta di un liquido adatto.

Parleremo più avanti dell'elemento a gravitazione del fisico russo Colley.

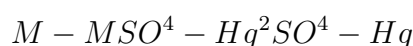
Affrontiamo ora l'importantissima questione degli elementi normali; se ne troverà una descrizione dettagliata nell'opera di Jäger, *Die Normalelemente*, Halle, 1902; un'esposizione del lavoro dedicato a questi elementi è data da questo autore, così come da Gouy in una delle sue memorie.

Gli elementi che possono servire come standard della forza elettromotrice sono chiamati elementi normali. È facile vedere quali condizioni devono soddisfare. Innanzitutto deve essere possibile costruirli secondo un piano definito, ben stabilito, comprendente anche precise indicazioni sul modo di preparare le sostanze che entrano nella loro costituzione. Un elemento costruito secondo questo schema deve possedere una forza elettromotrice (in volt) ben determinata e fissata con estrema precisione, essendo nota con tutta la precisione possibile la dipendenza di questa forza dalla temperatura; la forza elettromotrice dell'elemento non deve variare, quando esso è attraversato, in un senso o nell'altro, da una corrente la cui intensità non supera un certo valore massimo stabilito.

Quest'ultima condizione può essere soddisfatta solo se la composizione dell'elemento non subisce, durante il passaggio della corrente, alcun tipo di modifica, sia chimica che fisica, come, ad esempio, una variazione di concentrazione. L'elemento deve essere completamente reversibile; deve quindi costituire un sistema in equilibrio stabile, le cui fasi cambiano solo quantitativamente quando la corrente lo attraversa.

L'elemento Daniell soddisfa, in una certa misura, le condizioni indicate, se lo zinco è circondato da una soluzione satura di  $ZnSO^4$  e se vi è un eccesso di cristalli di  $CuSO^4$  e  $ZnSO^4$  (nel caso in cui la corrente attraversi l'elemento da Cu a Zn). L'elemento di Fleming (vedi avanti) è una variante dell'elemento Daniell; ma qui l'elevata solubilità del depolarizzatore ( $CuSO^4$ ) è un inconveniente, perché devono essere in contatto due liquidi, tra i quali è inevitabile una diffusione reciproca, che ovviamente si traduce in una variazione della composizione dell'elemento. Ne consegue che si deve impiegare come agente depolarizzante un corpo solido poco solubile e conduttore di corrente. I corpi  $AgCl$  (Warren de la Rue) e  $Hg^2Cl^2$  (Helmholtz) non sono molto adatti, perché queste sostanze conducono male la corrente, per cui solo una piccola quantità di sostanza disciolta agisce da depolarizzatore.

Il grande merito di Latimer Clark è stato quello di indicare  $Hg^2SO^4$ , come agente depolarizzatore che soddisfa davvero tutte le condizioni. Sia M un qualsiasi metallo; abbiamo il seguente schema, per un elemento normale contenente  $Hg^2SO^4$ :



Nell'elemento di Latimer Clark, M è zinco; in quello di Weston, cadmio: come vedremo, questi due elementi sono i soli che attualmente meritano la denominazione di elementi normali, quello di Weston avendo inoltre particolari vantaggi. Tuttavia, considereremo brevemente alcuni altri elementi, che in passato erano usati come elementi normali.

L'elemento Daniell potrebbe, come abbiamo visto, servire da elemento normale, se si riuscisse ad evitare completamente la diffusione reciproca dei liquidi. Raoult, Kittler, Lodge, Crova e Garde, Fleming, ecc. hanno costruito elementi normali, cercando di ridurre il più possibile questa



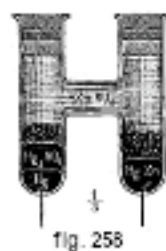
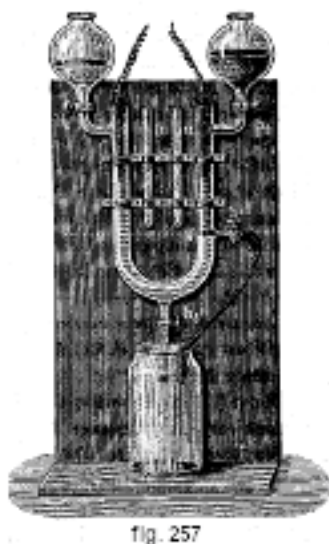
diffusione. L'elemento di Fleming (fig. 257) è stato particolarmente utilizzato per qualche tempo; è costituito da un tubo ad U, il cui ramo sinistro è completamente riempito da una soluzione di  $ZnSO^4$  (di densità 1,3); la parte inferiore del ramo destro è riempita con la stessa soluzione fino a  $g$  e contiene superiormente una soluzione di  $CuSO^4$  (densità 1,1). Facendo scorrere il liquido attraverso il tubo laterale  $h$ , è possibile mantenere una superficie di separazione completamente pulita tra i due liquidi. Quando l'elemento non funziona, le bacchette di Zn e Cu vengono rimosse e poste nei tubicini  $m$  e  $n$ .

L'elemento al calomele di Helmholtz è costituito dal mercurio, sul quale è presente uno strato di polvere di  $Hg^2Cl^2$  e una soluzione (da 5 a 10%) di  $ZnCl^2$ , in cui è immerso un'asta di zinco. La forza elettromotrice  $E$  è di 1,041 v. Negbauer ha dato a questo elemento una forma che lo rende particolarmente conveniente; Richards (1897) ha determinato il coefficiente di temperatura della grandezza  $E$ ; Ostwald e Schoop hanno determinato la concentrazione della soluzione di  $ZnCl^2$ , per la quale la forza elettromotrice  $E$  diventa uguale a 1 volt a 15°.

L'elemento di Gouy contiene Hg, HgO che funge da depolarizzatore,  $ZnSO^4$  e Zn;  $E$  è uguale a 1,4 v. Questo elemento è irreversibile, perché forma la nuova sostanza  $Hg^2SO^4$ .

Mauri (1898) ha costruito un elemento che contiene, sul fondo di un grande vaso di vetro, del mercurio dal quale esce un filo di platino isolato; dentro questo vaso di vetro se ne trova, ad una certa altezza, un altro più piccolo, che contiene una lamina di zinco; da esso parte un filo di zinco isolato. Sopra il mercurio vi è una miscela di sali di mercurio e di zinco e, nel piccolo recipiente, lo stesso sale di zinco, di cui una soluzione satura riempie l'elemento. Se prendiamo gli acetati, si ha  $E = 1,327$  v. Il coefficiente di temperatura di  $E$  è estremamente piccolo.

Consideriamo ora i due elementi normali più importanti, quello di Latimer Clark e quello di Weston. Abbiamo già indicato le parti costitutive dell'elemento Clark: Hg,  $Hg^2SO^4$ ,  $ZnSO^4$  e Zn. Esistono diversi tipi di questo elemento. La forma originaria proposta da Clark, che il Board of Trade aveva adottato in Inghilterra, consisteva in un bicchiere cilindrico, sul fondo del quale c'era del mercurio; su di esso si adagiava una pasta, ottenuta per triturazione di una miscela di  $Hg^2SO^4$ ,  $ZnSO^4$  e mercurio. Sopra c'era una soluzione satura di  $ZnSO^4$ , con eccesso di cristalli di solfato di zinco, poi uno strato di paraffina e un tappo di sughero, attraversato da un tondino di zinco immerso nella soluzione di  $ZnSO^4$ . Dal mercurio partiva, verso l'alto, un filo di platino isolato. Un'altra forma molto conveniente è dovuta a Lord Rayleigh. L'elemento (fig. 258) ha la forma di una H. In uno dei rami c'è mercurio puro e sopra la pasta; nell'altro ramo un amalgama di zinco (secondo Kahle, 10% di Zn). Il contenitore viene riempito con una soluzione satura di  $ZnSO^4$ ; i cristalli di questo corpo si trovano inoltre nei due rami, dove formano strati sopra la pasta e l'amalgama. Altre modifiche sono ancora proposte da Kahle, Feussner, Negbauer, Carhard, Callendar e Barnes, Perot e Fabry, ecc.



Le proprietà dell'elemento Clark sono state oggetto di attenti studi, dovuti in particolare a M. Iwanow, Kahle, Lindeck, Jäger, Callendar e Barnes, Alder Wright, Glazebrook e Skinner, Marek, Guthe e V. Ende (1907), ecc. Questi studi si applicano al grado di costanza dell'elemento, alla grandezza  $E$  e alla sua dipendenza dalla temperatura, ecc. Non ci soffermeremo sui vecchi lavori e ci limiteremo a indicare i risultati più recenti. Kahle ha scoperto che l'elemento di Clark può facilmente rigenerarsi e che  $E$  è costante entro lo 0,01%. Jäger e Kahle hanno fornito per  $E$  la seguente espressione (in volt):

$$R_t = 1,4328 - 0,00119(t - 15) - 0,000007(t - 15)^2$$

nella quale si suppone che 1 *amp* precipita in un secondo 1,118 *g* di argento. Callendar e Barnes hanno ottenuto

$$E_t - E_{15} = -0,001200(t - 15) - 0,0000062(t - 15)^2$$

M. Iwanow ha proposto la formula

$$E_t = 1,43289 - 0,0011975(t - 15) - 0,00000585(t - 15)^2$$

A 0°, si ha  $E_0 = 1,4493$  v. Guthe e v. Ende (1907) hanno trovato  $E = 1,4204$  v a 25°.

A 39°,  $ZnSO^4 + 7H^2O$  si trasforma nell'idrato più facilmente solubile  $ZnSO^4 + 6H^2O$ . Se l'elemento viene mantenuto, mediante riscaldamento prolungato, alla temperatura di 40°, rimane in uno stato anomalo dopo il raffreddamento: la grandezza  $E$  differisce dello 0,7% a 20° e dell'1% a 0°. L'elemento può essere rigenerato con cristalli e idrato normale.

Wulf ha osservato che la resistenza interna dell'elemento Clark dipende molto dalla temperatura.

Ora passiamo all'elemento cadmio di Weston; differisce dal Clark in quanto l'amalgama di zinco e di  $ZnSO^4$  sono sostituiti da un amalgama di cadmio e da  $CdSO^4$ . Occorre distinguere tra elementi Weston-C° ed elementi ordinari. Entrambi hanno la forma dell'elemento di Clark rappresentato nella figura 258. L'elemento Weston-C° contiene una soluzione satura di  $CdSO^4$  a 4°, in modo che a temperatura ordinaria la soluzione non sia completamente satura; all'interno dell'elemento sono inoltre presenti pareti in amianto e porcellana provvisti di canali, che ne consentono il trasporto. Nell'elemento ordinario la soluzione è satura, come nell'elemento Clark, e c'è un eccesso di cristalli di  $CdSO^4$ . L'amalgama di cadmio deve contenere dal 10 al 13% di cadmio, ma non di più. La pasta deve contenere anche  $CdSO^4$  invece di  $ZnSO^4$ . Molti autori, tra i quali citeremo Dearlove, Kohnstamm e Cohen, Taylor, Blondin, Henderson, Marek, Cohen, Barnes, Jäger, Wind, Hulett (1907) hanno studiato l'elemento di Weston; Jäger e Lindeck ne hanno fatto uno studio particolarmente accurato presso il Physikalische Reichsanstalt (Charlottenburg). Si noti che Czapski aveva già costruito nel 1884 un elemento di cadmio; ma Weston (1892) fu il primo a dargli la struttura adatta ad un elemento normale.

Cohen ha indicato alcune irregolarità esibite dall'elemento cadmio; ma gli studi di Jäger e Lindeck hanno portato al risultato che dobbiamo ora considerare questo elemento come meglio soddisfa le condizioni richieste per un elemento normale e che funziona abbastanza regolarmente tra 0° e 40°. Il valore di  $E$  è vicino a 1 volt, il che presenta anche alcuni vantaggi. La dipendenza di  $E$  dalla temperatura è, per gli elementi con un eccesso di  $CdSO^4$ , data dalla formula

$$E_t = 1,0186 - 0,000038(t - 20^\circ) - 0,00000065(t - 20^\circ)^2 \text{ volt}$$

Il coefficiente di temperatura a 20° è circa 20 volte inferiore a quello dell'elemento di Clark. Nell'elemento Weston-C°, si può considerare  $E$  come indipendente dalla temperatura, entro i limiti che si incontrano in pratica, e uguale a

$$E = 1,0190 \text{ v}$$

Klemencic ha mostrato che anche la resistenza interna dell'elemento Weston presenta una notevole costanza nel tempo. La Conferenza Internazionale, che si è riunita a Berlino nell'ottobre 1905 (dove purtroppo non erano stati invitati rappresentanti di tutti i paesi), si è dichiarata favorevole all'elemento cadmio con eccesso di  $CdSO^4$  e si è presentato come il miglior elemento normale attualmente esistente. Anche in Inghilterra un'apposita Commissione (1904) ha elaborato norme per la preparazione delle parti costitutive dell'elemento con il cadmio e per la sua buona costruzione.

Il rapporto delle forze elettromotrici degli elementi di Clark e Weston è stato spesso determinato. I migliori numeri sono:

$$\frac{\text{Clark } 0^\circ}{\text{Weston } 20^\circ} = 1,4228 \quad \frac{\text{Clark } 15^\circ}{\text{Weston } 20^\circ} = 1,4067$$

L'ultimo di questi valori è stato trovato in un modo indipendente, sia da Jäger e Lindeck, che da Barnes e Lucas.

Dal 1907 sono state pubblicate numerosissime ricerche sull'elemento Weston, che si devono in particolare a Janet, Laporte e Jouaust (1908-1910), Carhart (1908), Wolf e Waters (1907), F. E. Smith (1910), Cohen (1910), Baillehache (1911), Haga e Borrema (1910), e molti altri. L'interesse generale si è concentrato su questo elemento, dopo che il Congresso degli Elettricisti di Londra (1908) decise che il volt internazionale doveva essere definito dalla forza elettromotrice dell'elemento Weston. Parleremo in dettaglio di questa questione nel Capitolo X e qui diremo solo che nel 1911 fu pubblicato il risultato del lavoro di una riunione della Commissione Internazionale a Washington e che ha dato, per l'elemento Weston a  $20^\circ$ ,

$$E = 1,0183 v$$

Haga e Borrema hanno trovato  $E = 1,01835$  a  $17^\circ$ .

## 9. Elementi fotoelettrici. Accumulatori

Due corpi identici (elettrodi), posti in un elettrolita e che sono nelle stesse condizioni fisiche, non possono presentare differenza di potenziale; in un elemento formato con essi, la forza elettromotrice  $E = 0$  e, quando si chiude un circuito in cui l'elemento è inserito, non otteniamo alcuna corrente e abbiamo, di conseguenza,  $I = 0$ . Ma, se gli elettrodi non sono nelle stesse condizioni fisiche,  $E$  ed  $I$  possono essere diversi da zero. Così, ad esempio, la compressione di un elettrodo o la caduta su di esso di un flusso di energia radiante, che provoca una modifica della superficie dell'elettrodo, determina una differenza di potenziale degli elettrodi e il sorgere di una corrente, quando si chiude il circuito. Tale elemento è chiamato elemento fotoelettrico. Quando cessa l'irraggiamento sull'elemento, la forza elettromotrice  $E$  di questo elemento diminuisce rapidamente, in particolare se si trova in un circuito chiuso.

In questo settore, la prima ricerca piuttosto estesa fu quella di E. Becquerel, che ricoprì lastre d'argento con un sottile strato di  $AgCl$  e le pose in una soluzione diluita di  $H^2SO^4$ ; illuminandone uno si produce una corrente e le radiazioni dello spettro solare entrano nelle righe D ed E risultano essere le più attive. Iégoroff ha costruito, con due elementi di: questa natura, un fotometro differenziale, che abbiamo descritto e raffigurato nel Volume II, Chap. IX. Borgmann ha prodotto un dispositivo di corso molto conveniente; è costituito da sette tubi a forma di U, disposti parallelamente in una scatola di legno, annerita all'interno. Tra i rami dei tubi c'è un foglio di cartone. Questi tubi sono riempiti con una soluzione (al 2%) di  $H^2SO^4$ ; gli elettrodi sono lastre di argento iodato. Se alziamo la porta laterale della scatola e se illuminiamo gli elettrodi rivolti verso di essa si ottiene una deviazione del galvanometro.

I metalli completamente puri non sono impressionabili dalla luce, come hanno dimostrato Minchin, G. C. Schmidt, Pellat e altri. G. C. Schmidt ha scoperto che Zn, Cu e Pb assolutamente puri

sono insensibili alla luce. Quando le superfici dei metalli sono state precedentemente modificate chimicamente, generalmente diventano sensibili. Si tratta non solo di metalli sottoposti all'azione di alogenuri, ma anche di metalli ossidati, solforati, ecc. In questo caso le lamine potrebbero non essere più identiche; illuminandone una, si genera una forza elettromotrice, contemporaneamente ad una corrente di una certa intensità. Quando l'illuminazione è intermittente, si sente, con un telefono inserito nel circuito, un suono la cui intensità corrisponde al numero di interruzioni dell'illuminazione. È su questo fenomeno che si basa il radiofono di Chaperon e Mercadier, che hanno posto, in acqua acidulata, due lamine d'argento, una pura, l'altra ricoperta da uno strato di solfuro d'argento. Gouy e Rigollot hanno utilizzato rame puro e rame ossidato in una soluzione di NaCl.

G. G. Schmidt ha studiato molto attentamente l'influenza della luce sugli elettrodi di ossido di rame in una soluzione di NaHO o KHO. Ha trovato che l'influenza luminosa dipende, sia in grandezza che in segno, dal potenziale della lastra (rispetto al liquido) e dalla lunghezza d'onda della radiazione incidente. Simili studi si devono ad Hankel, Rigollot, Allegrtti ed altri. È interessante osservare che una lamina d'oro, che è servita da anodo nell'elettrolisi dell'acqua e si è ricoperta di un deposito bruno, probabilmente di ossido, diventa sensibile alla luce; questo fenomeno è stato studiato da Bose e Kochan; l'azione più forte è esercitata dalla radiazione con lunghezze d'onda comprese tra  $410\ \mu\mu$  e  $478\ \mu\mu$ .

Sabine ha scoperto che anche il selenio cristallizzato è sensibile alla luce nell'acqua; la differenza di potenziale tra la piastra non illuminata e quella illuminata è fino a  $0,1\ v$ . Pélaron (1910) ha costruito un elemento molto sensibile alla luce utilizzando Se e una lega di Se e Sb, in una soluzione di  $SbCl^3$  in acido cloridrico. Durante l'illuminazione, la forza elettromotrice sale molto rapidamente, raggiunge un massimo e scende, dopo alcune ore, al suo valore primitivo. Se l'illuminazione termina, la forza elettromotrice diminuisce gradualmente dalla grandezza a cui era salita prima, raggiunge un minimo e lentamente aumenta di nuovo al suo valore iniziale.

L'azione fotochimica dipende in modo diseguale, a seconda delle sostanze, dalla lunghezza d'onda. Rigollot ha osservato, ad esempio, l'azione più vivace con radiazioni infrarosse, per il solfuro d'argento, e con radiazioni ultraviolette, per lo ioduro di rame.

Una teoria degli elementi fotoelettrici è stata data da E. Becquerel, poi da Griveaux, Luggin, G. C. Schmidt e altri. H. Scholl (1905) ha studiato in modo particolarmente approfondito i fenomeni fotoelettrici su ioduro d'argento umido, riconoscendo che l'azione luminosa produce diversi fenomeni, uno dei quali può predominare a seconda delle circostanze. Da un lato c'è una dissociazione, in cui, oltre agli ioni dello ioduro d'argento, sembrano comparire elettroni negativi; dall'altro si forma un nuovo corpo instabile, eccitabile fotoelettricamente, che si trasforma facilmente nella sostanza iniziale. Wildermann (1905-1907) ha svolto ricerche teoriche basate sulla attuale degli elementi; ha trovato che, tra gli elementi fotoelettrici, ce ne sono alcuni che sono costanti o instabili, reversibili o irreversibili. Ha fornito, nei vari casi possibili, formule per la forza elettromotrice  $E$ . Ha pure studiato teoricamente e sperimentalmente i periodi della variazione di  $E$ , che hanno luogo all'inizio dell'illuminazione (periodo di induzione) e dopo che questa è cessata (periodo di deduzione).

Gli elementi fotoelettrici e gli accumulatori o elementi di polarizzazione, che ora consideriamo, possiedono determinate proprietà, che stabiliscono tra loro una sorta di relazione. Entrambi sono in uno stato inattivo, quando le due lamine sono il più possibile identiche o hanno una bassa differenza di potenziale  $E$ . Fornendo questa energia esterna si rendono le piastre dissimili al punto che l'elemento può possedere una notevole forza elettromotrice. Una fornitura di questa energia esterna viene, per così dire, immagazzinata (accumulata) sotto forma di energia chimica e consumata quando l'elemento è in funzione. Negli elementi fotoelettrici l'energia esterna è energia radiante; negli accumulatori è energia elettrica.

Abbiamo visto nel § 7 che un voltmetro polarizzato ha una forza elettromotrice  $E$  e può produrre una corrente (di polarizzazione); esso rappresenta, nella sua forma più semplice, un

accumulatore. Ma il valore di  $E$ , nel voltmetro, è molto incostante, e non è conveniente ottenere in questo modo una corrente duratura. Oggi il nome di accumulatore viene dato solo ad elementi che, una volta caricati, cioè polarizzati dal passaggio di una corrente, possono poi fornire essi stessi una corrente, per un intervallo di tempo notevole, la quantità  $E$  dovendo rimanere costante il più lungo tempo possibile.

Gli accumulatori rivestono attualmente un ruolo molto importante, sia in Elettrotecnica che nella pratica dei laboratori di Fisica, perché costituiscono la fonte più conveniente e più sicura per ottenere correnti costanti e, se necessario, correnti molto intense. Negli accumulatori oggi in uso,  $E$  è vicino a 2 volt; la resistenza interna è generalmente di pochi millesimi di ohm e raramente supera 0,01 ohm. La minore resistenza di una batteria di accumulatori collegati in serie è quindi generalmente molto bassa rispetto a quella di una batteria di celle ordinarie.

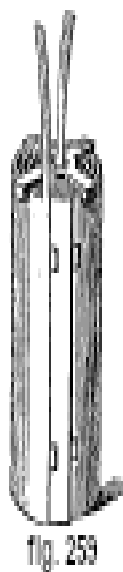
Esistono attualmente un gran numero di tipi di accumulatori, differenti per la loro costituzione interna, per le sostanze utilizzate per costruirli e per il metodo tecnico di preparazione di queste sostanze. In molti casi, queste particolarità costituiscono segreti commerciali. Lo studio degli accumulatori e del loro utilizzo, in funzione dell'obiettivo che si vuole raggiungere, costituisce un capitolo importante dell'Elettrotecnica; in questo Trattato di Fisica Generale, dobbiamo limitarci a brevissime indicazioni. Dettagli si trovano nei trattati generali di Elettrotecnica, oltre che in opere specialmente dedicate agli accumulatori; alcuni di questi sono citati in bibliografia.

A parte alcuni tipi eccezionali, il cui valore tecnico non è ancora oggi consolidato (1913), tutti gli accumulatori utilizzati nella pratica sono accumulatori al piombo. Sono costituiti da due lastre, di costruzione a volte molto complicata, nella cui composizione entra il piombo. Dopo la carica, cioè dopo un sufficiente passaggio della corrente in una opportuna direzione, la superficie di una delle piastre, quella negativa, è formata da una massa friabile e spugnosa di piombo; quella dell'altra, quella positiva, di un ossido superiore di piombo, soprattutto perossido di piombo ( $PbO^2$ ). Come liquido viene utilizzata una soluzione acquosa di acido solforico.

La storia degli accumulatori è, in poche parole, la seguente. I primi accumulatori furono costruiti nel 1860 da Gaston Planté; prese come materiale iniziale il piombo, cioè due lastre lisce di piombo, che portò, con un complicato modo di formazione e di lunghissima durata (di cui si parlerà più avanti), a uno stato tale che fossero, dopo la carica, ricoperte dagli strati superficiali di piombo spugnoso e perossido di piombo di cui abbiamo appena parlato. Nel 1881 Faure propose per primo di ricoprire le lastre di piombo con una pasta formata da ossidi di piombo, che dovevano essere trasformati dalla carica, in piombo spugnoso su una delle lastre, in  $PbO^2$  sull'altra. L'invenzione di Faure ha subito innumerevoli modifiche e miglioramenti. È molto interessante notare che, in tempi recenti, molte fabbriche di accumulatori hanno abbandonato l'uso della pasta e sono tornate al metodo Planté, modificando però sostanzialmente la costruzione e, in particolare, il processo di formazione delle lastre di piombo. I primi lavori in questa direzione furono pubblicati nel 1891 (Epstein); ma fu solo nel 1897 che si ottennero risultati soddisfacenti.

L'elemento primitivo di Planté è costituito da due fogli di piombo (lunghezza 0,600 m, 0,200 m di larghezza, 0,001 m di spessore), separati l'uno dall'altro da strisce di gomma e arrotolati a spirale (fig. 259); a ciascuno di essi è saldata una striscia di piombo. Il cilindro così formato viene posto in un vaso di vetro contenente una soluzione di acido solforico. La formazione dell'accumulatore, secondo l'espressione accettata, viene effettuata nel modo seguente. Una corrente viene fatta passare attraverso l'elemento, che produce  $PbO^2$  su una delle piastre e libera l'altra dalle tracce di ossido. L'elemento viene quindi scaricato, il  $PbO^2$  si trasforma in PbO, che si forma anche sull'altra piastra. Una corrente viene nuovamente inviata attraverso l'elemento e, per riduzione di PbO, si forma un sottile strato di piombo poroso sulla piastra negativa. Alla scarica successiva, l'ossidazione penetra più in profondità nella piastra, quindi la carica che segue produce uno strato ancora più spesso di piombo poroso. Contemporaneamente e ad ogni nuova carica, lo strato di perossido di piombo aumenta di spessore sull'altra lastra. Ripetendo un gran numero di volte la carica e la scarica, si possono infine ottenere sulle lastre, dopo l'ultima carica,

strati piuttosto spessi di piombo spugnoso o perossido di piombo. La formazione deve essere prolungata per diversi mesi, prima che l'accumulatore sia pronto per funzionare, cioè pronto a dare una corrente costante per un tempo sufficientemente lungo. Questo è ovviamente un grave inconveniente.



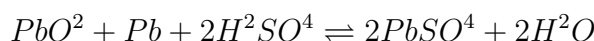
Nel 1881 Faure ha iniziato per primo a Parigi a ricoprire le lastre di piombo con del minio, che poteva essere trasformato, dopo una formazione relativamente breve (circa 100 ore), in  $PbO^2$  e piombo spugnoso. Va inoltre ricordato che già nel 1861 Charles Kiechhoff aveva brevettato a New York un elemento secondario, simile in linea di principio agli attuali accumulatori. I primi elementi di Faure erano molto imperfetti, perché gli strati attivi si staccavano facilmente. I primi miglioramenti furono apportati da Khotinski e poi da Sellon e Wolckmar: il lavoro di questi ultimi due ricercatori portò alla costruzione degli accumulatori dell'*Electric Power Storage Company*. Da allora, come abbiamo già detto, sono stati costruiti un gran numero di tipi di accumulatori, tra i quali citeremo i sistemi Tudor, Pollack, Oerlikon, Fulmen e quelli della Società per il lavoro elettrico dei metalli. L'ossatura di piombo è o centrale, e la massa attiva è allora appoggiata su di essa su entrambi i lati, o doppia, per portare questa massa ad esempio sotto forma di due griglie. La forma del telaio varia molto spesso e talvolta è piuttosto complicata. Il supporto della piastra positiva è in piombo puro; si aggiunge il 2% di antimonio a quello della lastra negativa. Anche la massa attiva viene preparata in vari modi; la sua parte costitutiva principale è il minio, ma a volte anche il litargirio con diverse aggiunte.

I numerosi inconvenienti insiti negli accumulatori di tipo Faure hanno portato i produttori a tornare agli elementi di tipo Planté; ma la forma delle lastre di piombo è stata modificata e la formazione, in particolare, è stata semplificata ed è diventata più veloce. Tali sono gli accumulatori dei sistemi Hagen, *Battery Company* (Londra), Franke, Tudor (Lille), Fulmen (Parigi), *Société pour le travail électrique des métaux* (Parigi), Monobloc (Bruxelles), Bary, ecc. La forma complessa, lamellare ad esempio, che viene data alle masse di piombo in modo che presentino la maggior superficie possibile, sembra essenziale, così come la formazione con l'ausilio di un elettrolita a cui vengono aggiunte sostanze corrosive, per aiutare il piombo a diventare poroso.

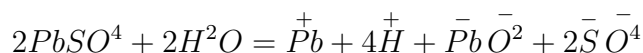
Le reazioni chimiche che avvengono negli accumulatori si possono considerare perfettamente spiegate. Nell'elemento carico abbiamo, su una delle piastre,  $PbO^2$ , sull'altra Pb. Alla scarica  $PbO^2$  è ridotto, il Pb si ossida, e  $H^+SO^4$  reagendo, si forma sulle due piastre di  $PbSO^4$ . Si hanno quindi le seguenti reazioni:

Alla carica	
Sull'anodo	$PbSO^4 + SO^4 + 2H^2O = PbO^2 + 2H^2SO^4$
Sul catodo	$PbSO^4 + H^2 = Pb + H^2SO^4$
Alla scarica	
Sull'anodo	$PbO^2 + H^2 + H^2SO^4 = PbSO^4 + 2H^2O$
Sul catodo	$Pb + SO^4 = PbSO^4$

Si può rappresentare simbolicamente l'intero processo nel modo seguente:



dove le frecce indicano la reversibilità. Le equazioni precedenti danno solo in via generale le sostanze che entrano nelle reazioni e i prodotti che ne risultano alla fine: ma non dicono nulla dei dettagli, cioè degli ioni, che, secondo la teoria della dissociazione elettrolitica, devono svolgere una parte nella carica dell'accumulatore, quando  $PbSO^4$  appare come elettrolita. Liebenow, Le Blanc, Elbs, Streintz, Dolezalek, ecc. si sono occupati di tale questione. Liebenow pensa che gli ioni si formino secondo l'equazione



cioè che  $PbO^2$  che si separa sull'anodo, appare principalmente come anione. Dolezalek si è completamente allineato a questo modo di vedere.

La forza elettromotrice  $E$  di un accumulatore carico è di circa  $2,3V$  a  $2,4V$ ; alla scarica,  $E$  scende abbastanza rapidamente fino a  $2V$  e poi rimane costante per un po' di tempo;  $E$  poi ricomincia a diminuire, ma lentamente. Il funzionamento dell'elemento deve essere interrotto non appena  $E$  scende al di sotto di  $1,9V$  o  $1,8V$ .

La caratteristica principale di un accumulatore è il suo coefficiente di effetto utile o il suo *rendimento*, cioè il rapporto tra l'energia elettrica che può essere disponibile alla scarica e quella che è stata spesa per la carica. Il rapporto tra queste energie, che sono misurate dal prodotto del numero di volt per il numero totale di ampere ora, oscilla generalmente tra  $0,70$  e  $0,80$ . Il rapporto tra la quantità di elettricità (numero di ampere-ora) fornita dall'accumulatore e quella che lo ha attraversato nella carica ha un altro valore: quest'ultimo rapporto, che è pari a circa  $0,9$ , si chiama *rendimento in quantità*, mentre il primo rapporto considerato è detto *rendimento in energia*. Particolare importanza riveste, infine, anche la capacità dell'accumulatore; è determinata dalla quantità di energia elettrica che l'accumulatore può fornire alla scarica. Chiamando  $Q$  questa quantità, l'intensità  $I$  della scarica e  $t$  la durata di quest'ultima, generalmente si ha

$$Q = \int I dt$$

Quando la scarica avviene ad intensità costante, è sufficiente calcolare il prodotto di tale intensità per il tempo espresso in ore, per ottenere la portata in ampere-ora. La capacità espressa in ampere-ora è spesso correlata al chilogrammo d'accumulatore.

Abbiamo considerato esclusivamente batterie al piombo; uno dei loro svantaggi è avere un peso considerevole. Si è tentato in varie occasioni di costruire accumulatori con altre sostanze: tra questi tentativi va citato l'accumulatore Edison, la cui idea risale a Jungener. Nell'accumulatore Edison, la piastra negativa contiene una miscela di ossido di ferro e grafite e la piastra positiva  $Ni(HO)^4$ . Durante la carica, l'ossido di ferro si riduce e si forma un ossido di nichel superiore. Come liquido viene impiegata una soluzione di KHO o NaHO. Zedner ha scoperto che  $Ni^2O^3$  si forma sull'anodo; in realtà è l'idrato  $Ni2O^3 \cdot 3H^2O$  o  $Ni(OH)^3$ ; la forza elettromotrice è uguale a  $1,305V$ .

## 10. Teoria degli elementi idroelettrici

Con l'ordine che abbiamo adottato nella nostra esposizione, abbiamo già dovuto far conoscere i fondamenti della teoria degli elementi idroelettrici: ci resta da fare una revisione sistematica, estendere lo studio di alcune questioni e considerare una serie di ricerche sperimentali, il cui esame non abbiamo ancora affrontato. Ma dobbiamo, prima di tutto, indicare chiaramente cosa ci si può aspettare da una tale teoria, a quali domande essa deve rispondere. Si può notare che la teoria degli elementi idroelettrici può essere affrontata in tre modi diversi o, in altre parole, a seconda di come si pone il problema, si arriva a tre tipi di teorie.

*In primo luogo*, si può considerare un elemento chiuso come un sistema, in cui avviene una trasformazione di energia, e chiedere alla teoria di stabilire le leggi quantitative che regolano tale trasformazione, la questione del meccanismo dei fenomeni che si verificano all'interno dell'elemento lasciato da parte. Una tale teoria, basata sui principi della Termodinamica, deve portare a risultati indipendenti da ogni ipotetica rappresentazione, toccando la struttura della materia, l'intima natura dell'elettrolisi, ecc.

*In secondo luogo*, si può intendere per teoria degli elementi idroelettrici, teoria che deve determinare il meccanismo dei fenomeni all'interno di un elemento e indicare la sorgente delle cariche elettriche.

*In terzo luogo*, si può considerare il problema che pone la teoria come uno studio ancora più approfondito dell'essenza stessa della corrente elettrica nei conduttori. Non ci avvicineremo in questo momento a una teoria di questa natura, che deve applicarsi ugualmente alle correnti elettriche di tutti i tipi nei conduttori, qualunque sia la loro sorgente.

Consideriamo dapprima la teoria relativa alle trasformazioni di energia che avvengono in un elemento.

Quando un elemento è in funzione, una certa quantità di energia potenziale chimica scompare; al suo posto si manifesta evidentemente, tra le altre, l'energia cinetica della corrente elettrica, che si trasforma in energia termica, purché non venga impiegata per compiere lavori risultanti in altre forme di energia. Abbiamo designato con  $q$  la quantità di elettricità espressa in joule (0,24 calorie-grammo), corrispondente alle reazioni chimiche che avvengono nell'elemento, quando è attraversato da un coulomb. Se  $Q$  coulomb passano attraverso un circuito chiuso, dove agisce una forza elettromotrice di  $E$  volt, il lavoro delle forze elettriche è uguale a  $QE$  joule, la somma delle cadute di potenziale nel circuito chiuso, essendo uguale a  $E$ . Quando  $Q = 1$  coulomb, si ottiene l'energia elettrica  $E$ . Se si ammette che tutta l'energia chimica si trasforma in energia elettrica, si ha l'uguaglianza

$$E = q \quad (10.081)$$

vedi (25,a), che esprime la regola di Thomson (1851), che anche Helmholtz (1847) aveva precedentemente ritenuto corretta. E. Becquerel (1843) aveva già formulato esplicitamente l'uguaglianza (42). Abbiamo riportato in precedenza un esempio di calcolo di  $E$  per l'elemento Daniell, che porta ad un risultato del tutto soddisfacente. Si trova che la formula (42) porta anche, per alcuni altri elementi, a risultati che concordano con la realtà.

Ricerche sperimentali, sul rapporto tra il calore rilasciato in un circuito chiuso e quello che corrisponde alle reazioni chimiche nell'elemento, è stata intrapresa per la prima volta da Favre. Ha introdotto sia l'elemento che i conduttori, che chiudono il circuito, all'interno del suo calorimetro a mercurio (Volume III) e ha fatto in modo che la quantità totale  $Q$  di calore, che si sprigiona in tutto il circuito, fosse esattamente uguale al calore delle reazioni chimiche che hanno luogo nell'elemento. Questo risultato significa che  $Q$  è indipendente da come avvengono queste reazioni, se in circuito aperto o chiuso, e che la resistenza totale di quest'ultimo non gioca alcun ruolo. Ma, quando ha misurato separatamente il calore di riscaldamento del circuito (effetto Joule), ha scoperto che è più piccolo di  $Q$ , che viene emesso più calore nell'elemento di quanto corrisponde alla sua resistenza relativa. Di conseguenza, non tutta l'energia chimica viene



trasformata in energia elettrica. Gli esperimenti di Raoult, Moser e Edlund hanno generalmente portato alla stessa conclusione.

Moltissime ricerche dovute a Braun hanno inoltre mostrato che  $E$  può essere non solo minore, ma anche maggiore di  $q$ ; in altre parole, l'energia elettrica che compare nel circuito, può essere maggiore dell'energia chimica spesa, cosa ovviamente possibile solo nel caso in cui si verifichi, all'interno dell'elemento stesso e accanto all'effetto Joule (riscaldamento), un raffreddamento, cioè un assorbimento di energia termica e la trasformazione di quest'ultima in energia elettrica. Indicheremo uno dei casi che ha studiato; è quello dell'elemento Cd -  $CdSO^4$  -  $FeSO^4$  - Fe. Se si pone, per l'elemento Daniell,  $E = 100$ , la formula (42) dà il valore  $E = 7,2$ , dovendo il Fe formare il polo negativo e la corrente andare nell'elemento dal Fe verso il Cd; troviamo però che  $E = -9,3$  e che quindi la corrente ha verso opposto. Alder Wright e C. Thomson, Herroun, Pagliani e altri hanno anche evidenziato casi in cui la formula (42) porta a risultati completamente in contrasto con la realtà. Chaperon e altri hanno cercato di spiegare teoricamente questa discrepanza.

Gibbs e Helmholtz hanno dato una risposta completa alla domanda. Abbiamo stabilito le formule a cui conduce la teoria termodinamica. Si riferiscono esclusivamente ad un elemento reversibile. Abbiamo dato due formule considerando un circuito aperto (fig. 81); ma poiché  $E$  non varia quando il circuito è chiuso, queste formule valgono ovviamente anche per la forza elettromotrice  $E$  agente in un circuito chiuso. La prima di queste formule, vedi (25), determina la vera relazione tra  $E$  e  $q$  e sostituisce la formula inesatta (42). Ha la seguente forma

$$E = q + T \frac{\partial E}{\partial t} \quad (10.0.82)$$

scrivendo  $T$  invece di  $l$  nella derivata. Secondo il segno di  $\frac{\partial E}{\partial t}$ ,  $E$  può essere maggiore o minore di  $q$ .



Veniamo ai lavori intrapresi per verificare la formula (43). Le prime ricerche si devono a Czapski (1884) e a Gockel (1885); hanno ottenuto una conferma qualitativa di questa formula, cioè hanno trovato lo stesso segno per le grandezze  $E - q$  e  $\frac{\partial E}{\partial t}$ ; la concordanza quantitativa non poteva essere soddisfacente, in assenza di dati esatti per il calcolo della quantità  $q$ . Ricerche più approfondite sono state poi effettuate da Jahn, che ha misurato la quantità totale di calore  $Q$  rilasciato nell'intero circuito chiuso, sotto l'intensità di corrente  $I$ , nel tempo  $t$ ; secondo il principio della conservazione dell'energia,  $Q$  deve essere uguale al calore corrispondente alle reazioni chimiche dell'elemento, come è stato verificato negli esperimenti di Favre.

Se  $Q$  è espresso in joule,  $I$  in ampere e  $t$  in secondi, si ha  $Q = qIt$ . Jahn ha determinato anche la quantità  $E$  e calcolato l'energia elettrica  $Q'$ , che appare nel tempo  $t$  e si trasforma in calore di Joule; si ha  $Q' = EIt$ . La differenza  $Q' - Q = (E - q)It$  deve, secondo la formula (43), essere

uguale a  $T \frac{\partial E}{\partial t} It$ ; per trovare quest'ultima grandezza è necessario conoscere il coefficiente termico  $\alpha$  di  $E$ . La Figura 260 rappresenta schematicamente la disposizione dei dispositivi di Jahn. L'elemento studiato è posto nel serbatoio di un calorimetro a ghiaccio di Bunsen; dall'elemento partono i fili di collegamento (di resistenza  $\rho$ ) ai punti A e B dove sono collegati un galvanometro T di bassa resistenza ed un voltmetro G (di 200.000 ohm di resistenza); quest'ultimo permette di misurare la differenza di potenziale tra i punti A e B (vedi sotto, ciò che si dice sui voltmetri). Sia  $W$  il calore liberato nel tempo  $t$  nel calorimetro. Si vede che il calore totale  $Q$  è dato dalla formule

$$Q = W + I^2 \rho t + Iet$$

Il calore rilasciato nel circuito AGB può essere trascurato. Si ha per  $Q'$  l'espressione  $Q' = lEt$ . L'intensità di corrente  $I$  è stata misurata mediante T, le grandezze  $e$  ed  $E$  per mezzo di G, essendo aperto il circuito ATB. Il coefficiente termico  $\alpha$  è stato determinato confrontando i valori di  $E$ , per due elementi a temperature diverse. Tutte le quantità che entrano nella formula di Helmholtz, che si scrive qui

$$IEt = W + I^2 \rho t + Iet + T \frac{\partial E}{\partial t} t$$

sono quindi note. Ponendo

$$T \frac{\partial E}{\partial t} It = Q_0 \quad (10.0.83)$$

si ha

$$Q' - Q = Q_0 \quad (10.0.84)$$

Jahn ha determinato sperimentalmente le quantità  $I, E, e, t$  (3600 sec),  $W, \rho$  (0, 1 ohm) e  $\alpha$ ; poi ha calcolato  $Q_0$  con le due formule (44) e (45). Ha ottenuto, per i sei elementi studiati, una concordanza quantitativa del tutto soddisfacente. In quattro casi,  $Q_0$  era negativo ( $E < q$ ), in due, positivo ( $E > q$ ). Questi ultimi, comprendevano l'elemento Daniell, dove l'energia elettrica di conseguenza supera l'energia chimica, per cui deve essere rilasciato, nell'elemento, meno calore di quanto non richiede la legge di Joule. Altre misure per la verifica della formula (43) sono state effettuate da Bugarszky, Chrouschtschow e Sitnikov, Loven, Klein, Zuppinger e altri ancora; Czepinsky e V. H. Weber ha studiato elementi con elettroliti fusi.

R. Gans (1901) ha generalizzato un po' la teoria di Helmholtz e ha mostrato che la formula (43) deve essere sostituita dalla seguente

$$E = q + T \frac{\partial E}{\partial T} - ET \frac{\partial \log k}{\partial T} \quad (10.0.85)$$

dove  $k$  denota una grandezza, che dipende dai fattori di trasporto; si ha, ad esempio, per l'elemento di concentrazione,  $k = 1 : n$ , essendo  $n$  il fattore di trasporto dell'anione; per tutti gli altri elementi sopra considerati si ha  $k = 1$ , e di conseguenza scompare il terzo termine dell'espressione di  $E$ .

Denizot (1904) ha tratto dalla formula (43) una serie di interessanti conseguenze; ha mostrato in particolare che le osservazioni sull'elemento reversibile possono essere utilizzate per stabilire una scala di temperature assolute.

Applicando la teoria dell'energia libera all'elemento reversibile, abbiamo ottenuto,

$$\frac{\partial E}{\partial p} = A(v_1 - v_2) \quad (10.0.86)$$

che si riferisce alla compressione isoterma dell'elemento;  $p$  è la pressione esterna,  $v_1 - v_2$  la variazione di volume che avviene nell'elemento, quando è attraversato da un coulomb. Se, ad esempio, il volume aumenta ( $v_2 - v_1$ ),  $E$  diminuisce, all'aumentare della pressione esterna.

La formula (47) è stata stabilita per la prima volta da Duhem; R. Gans l'ha generalizzata. Gilbaut (1891) ha misurato, in diversi elementi, la variazione  $\Delta E$  per un aumento di  $p$  fino a 100 atmosfere. Nell'elemento Daniell, si trova  $\Delta E = 5 \cdot 10^{-5}$  volt, in un accumulatore  $\Delta E = 12 \cdot 10^{-5}$  volt, nell'elemento Bunsen  $\Delta E = -405 \cdot 10^{-5}$  volt, nell'elemento a gas  $\Delta E = +845 \cdot 10^{-5}$  volt. Nuove misure sono state effettuate da R. Ramsey (1901), che ha sottoposto gli elementi di Weston, Clark, Helmholtz, Daniell e Warren de la Rue a una pressione fino a 310 atm. Nelle prime due si osserva un aumento regolare della grandezza  $E$ , nella terza l'aumento rallenta alle alte pressioni; l'elemento Daniell ha un coefficiente di pressione negativo molto piccolo; nella quinta si ottengono risultati diversi, a seconda dello stato di AgCl.

Le formule (43) e (47) sono puramente termodinamiche; per stabilirle, si parte semplicemente dal fatto che nell'elemento avvengono reazioni chimiche e l'energia elettrica appare nel circuito. Passiamo ora alle teorie in cui, oltre ai principi della termodinamica, la nozione del trasporto di ioni in due direzioni opposte gioca un ruolo importante, cioè dove si fa un'ipotesi sul meccanismo dell'elettrolisi. Questa è la teoria dell'elemento di gravitazione. Consideriamo una colonna verticale di elettrolita con elettrodi identici in alto e in basso, per esempio una soluzione di  $AgAzO^3$  tra elettrodi d'argento. Quando si fa attraversare tale colonna dalla corrente di un elemento qualunque, il catione Ag va verso l'alto quando c'è il catodo, e l'anione  $AzO^3$  verso il basso. Il catione  $Ag = 106$  è più pesante di dell'anione  $AzO^3 = 62$  e quindi parte dell'energia della corrente deve essere spesa nel lavoro per la risalita della differenza di peso. Ciò deve diminuire l'intensità della corrente  $I$ ; in altre parole, deve essere più piccolo rispetto alla posizione orizzontale della colonna. Il fenomeno è analogo alla polarizzazione e può essere considerato come la conseguenza della comparsa di una particolare forza elettromotrice e della gravitazione. Se la colonna viene capovolta o se la corrente viene fatta passare in senso contrario, la forza di gravità produce lavoro, il cui risultato deve essere l'aumento dell'intensità della corrente o la comparsa di una forza elettromotrice, avente anche senso di quello che già agisce nel circuito. È per questo motivo che tale colonna ricevette il nome di elemento di gravitazione. Maxwell (1873) ha indicato in poche righe (Treatise I, p. 317) la necessità del fenomeno appena descritto. Colley ha sviluppato in modo autonomo e approfondito la teoria dell'elemento di gravitazione e, fin dal 1872, ne aveva intrapreso la verifica sperimentale; ma la sua prima opera non poté essere stampata fino al 1876. Ha mostrato come si deve calcolare la grandezza e tenendo conto non solo della differenza dei pesi dell'anione e del catione, ma anche dei fattori di trasporto, da cui dipendono i cammini percorsi rispettivamente dall'uno e dall'altro ione. Considereremo  $e$  come positivo, quando  $I$  aumenta. È ovvio che, per  $AgAzO^3$ , la quantità  $e$  è positiva, quando la corrente va dall'alto verso il basso. Gli esperimenti di Colley hanno confermato questo risultato da un punto di vista qualitativo, ma non da un punto di vista quantitativo. Per soluzioni di  $ZnI^2$  e  $CdI^2$ , la direzione di  $e$  deve essere opposta; ciò è stato confermato anche dall'esperimento, ed è stato raggiunto anche un accordo quantitativo con il risultato teorico. Altre ricerche si devono a Pirani, Des Coudres ( $CdI^2$ ) e R. Ramsey ( $ZnSO^4$  e  $CdSO^4$ ).

Un altro esempio di teoria, non solo basata su considerazioni termodinamiche, ma anche riguardo al trasporto di ioni nell'elettrolita, è fornita da quella che Helmholtz ha dato per l'elemento di concentrazione. Abbiamo visto che quest'ultimo è composto da due metalli identici, immersi in due soluzioni dello stesso elettrolita, diversamente concentrate. Si tratta di determinare la forza elettromotrice di un tale elemento. Non presenteremo tutte le deduzioni di Helmholtz e ci limiteremo ad indicarne l'andamento generale. Siano  $m_1$  equivalenti d'acqua nella prima soluzione e  $m_2$  nella seconda, per un equivalente dell'elettrolita disciolto; queste grandezze caratterizzano le rispettive concentrazioni delle soluzioni. Quando l'elemento è chiuso, una corrente inizia a fluire attraverso di esso. Se si suppone che passi un coulomb; c'è uno spostamento dell'anione in una direzione, del catione nel verso opposto. Se supponiamo inoltre che l'intensità della corrente sia molto piccola, si può trascurare il calore di Joule rilasciato nel circuito e ammettere che il lavoro, che viene svolto nel circuito dal passaggio di un coulomb

da un elettrodo all'altro, è uguale a  $E$  joule. Il trasporto degli ioni produce una variazione di concentrazione delle due soluzioni, che non differisce in alcun modo da quella che risulterebbe dal trasporto di una certa quantità di acqua pura da una delle soluzioni nell'altra, poiché la quantità di sale disciolto non è variata. Al contrario, questa quantità di acqua può essere trasportata dalla soluzione la cui concentrazione è diminuita in quella in cui è aumentata. Supponiamo che la prima abbia la concentrazione  $m_1$ ; sia  $m$  la grandezza variabile della concentrazione, compresa tra  $m_1$  e  $m_2$ , e  $p_1$  e  $p_2$  le tensioni di vapore saturo al di sopra delle soluzioni  $m_1, m_2, e m$ . Immaginiamo che si vaporizzi isotericamente della soluzione  $m_1$  la quantità necessaria di acqua, trasformandola in vapore saturo di tensione  $p_1$ . Si separa allora questo vapore dalla soluzione, che evidentemente cessa di essere satura. Poi, lo si comprime o lo si espande (non sappiamo fino ad ora quale delle due operazioni si debba supporre) fino alla tensione  $p_2$ ; lo si mette a contatto con la soluzione, che lo satura nuovamente, e, per compressione, lo si porta allo stato liquido. Si vede facilmente che il lavoro che deve essere stato speso in questo trasporto è uguale a quello prodotto dalla variazione della pressione del vapore da  $p_1$  a  $p_2$ . Poiché l'intero sistema è tornato al suo stato primitivo, è chiaro che il lavoro totale del sistema deve essere zero. Helmholtz è così condotto alla formula

$$V_1 - V_2 = E = p_0 v_0 \int_{p_1}^{p_2} m (1 - n) \frac{dp}{p} \quad (10.0.87)$$

$V_1$  e  $V_2$  sono i potenziali degli elettrodi che sono rispettivamente nelle soluzioni  $m_1$  e  $m_2$ ;  $p_0$  è la tensione di vapore sopra l'acqua pura,  $v_0$  il volume dell'unità di peso di questo vapore e  $n$  il fattore di trasporto del catione, che dipende dalla concentrazione  $m$  o dalla tensione di vapore  $p$ . Per il calcolo della grandezza  $E$ , Helmholtz assume che la differenza di concentrazione sia piccola e che si possa porre  $1 - n = \text{cost}$ ; applica anche la formula di Wüllner

$$p_0 - p = \frac{b}{m}$$

dove  $b$  indica un numero costante. Se si pone  $b : p_0 = m_0$ , si ottiene

$$V_1 - V_2 = E = b v_0 (1 - n) \log \frac{m_2 - m_0}{m_1 - m_0} \quad (10.0.88)$$

dove  $p_1$  e  $p_2$  differiscono in generale poco da  $p$ , si può trascurare  $m_0$  e scrivere

$$V_1 - V_2 = b v_0 (1 - n) \log \frac{m_2}{m_1} \quad (10.0.89)$$

Come si vede, si ha  $V_1 > V_2$  per  $m_2 > m_1$ ; ne consegue che l'elettrodo, che si trova nella soluzione  $m_1$  più concentrata, è l'elettrodo positivo; la corrente, all'interno dell'elemento, va dalla soluzione più debole a quella più concentrata. Gli esperimenti di Moser hanno confermato pienamente questo risultato.

Abbiamo accennato all'elemento costituito da un unico liquido omogeneo e da due amalgami diversi solo per la concentrazione. Richards e Forbes (1907) hanno pubblicato un ampio studio su questo elemento; contiene una dettagliata esposizione storica, la quale stabilisce che la teoria degli elementi di questo tipo fu sviluppata per la prima volta dal v. Türlin (San Pietroburgo).

Altri esempi di ricerca teorica basata su considerazioni termodinamiche si possono trovare nei notevoli studi di Helmholtz sulla forza elettromotrice di polarizzazione nel voltmetro ordinario (scomposizione dell'acqua) e sul caso di due elementi reversibili, montati in serie, ma in opposizione, e differiscono solo nella concentrazione della soluzione dell'elettrolita. Ci limiteremo a citare una formula che indica come la forza elettromotrice di polarizzazione  $E$  dipende dalla pressione  $p$  (in atmosfere) del gas tonante, che si raccoglie sopra la superficie del liquido:

$$E = E_a + \frac{10^{-7} c T R}{6} \log p \quad (10.0.90)$$

$c$  indica l'equivalente elettrochimico,  $R$  la costante dei gas per l'idrogeno,  $E_a$  il valore di  $E$  per  $p = 1 \text{ atm}$ . Helmholtz fornisce il valore  $E_a = 1,6647 \text{ V}$ . Sokolow ha concluso dai suoi numerosi esperimenti che  $E_a$  non è una quantità costante nella formula (50), ma dipende dalla pressione; ha ottenuto, per il caso di una pressione molto debole, il valore  $E_a = 0,745 \text{ V}$  e pensa che siano possibili valori anche più piccoli.

Le ricerche di Streintz, Dolezalek, Fürster, ecc. sull'accumulatore al piombo (ordinario) sono strettamente connesse con il lavoro teorico di Helmholtz.

Streintz ha studiato gli accumulatori del sistema Tudor e ha mostrato che  $E$  cresce con la concentrazione della soluzione di acido solforico. Per una concentrazione  $c = 86,3 \text{ g}$  per litro, si ha  $E = 1,900 \text{ V}$ ; per  $c = 684,2 \text{ g}$ ,  $E$  raggiunge  $2,235 \text{ V}$ . Ha inoltre cercato come la grandezza  $E$  dipende dalla temperatura  $t$ . Ha trovato che  $dE : dt$  dipende dalla concentrazione della soluzione, e quindi anche di  $E$ . Per  $E = 1,9223 \text{ V}$  si ha  $dE : dt = 140 \cdot 10^{-6}$ ; quando  $E$  cresce fino a  $2,0031 \text{ V}$ ,  $dE : dt$  cresce fino a  $335 \cdot 10^{-6}$ ; poi  $dE : dt$  diminuisce fino a  $73 \cdot 10^{-6}$  per  $E = 2,2070 \text{ V}$ . Infine Streintz ha verificato, per l'accumulatore, la formula (43) di Helmholtz, servendosi, come Jahn, del calorimetro a ghiaccio; ma dispose in modo del tutto diverso le parti del suo strumento. Ha riconosciuto che la formula di Helmholtz rappresenta molto bene i risultati di osservazione; questi hanno dato  $E > q$ .

Dolezalek ha determinato teoricamente con due metodi la dipendenza tra  $E$  e la concentrazione. Consideriamo due accumulatori e supponiamo che per un grammo-molecola di acido abbiamo  $n_1 \text{ g}$  di acqua in uno e  $n_2 \text{ g}$  nell'altro. Se li si unisce con i poli omonimi, si ottiene una corrente, che produce un aumento della concentrazione in uno degli accumulatori, una diminuzione nell'altro. Lo stato originale può essere ripristinato mediante distillazione isoterma. Calcolando il lavoro necessario a questo effetto, si determina la differenza  $\Delta E$  delle forze elettromotrici dei due accumulatori. Siano  $p_1, p_2$  le tensioni del vapore acqueo al di sopra delle soluzioni  $n_1, n_2$  e  $n$ ; si ha allora:

$$\Delta E = 0,110 \cdot 10^{-4} T \left\{ n_2 \log p_2 - n_1 \log p_1 + 18 \log \frac{p_2}{p_1} - \int_{n_1}^{n_2} \log p \, dn \right\} \quad (10.0.91)$$

un secondo metodo di calcolo si basa sulla formula (43), che ha qui la forma seguente

$$\Delta E = q + T \frac{\partial E}{\partial t} \quad (10.0.92)$$

dove  $q$  è calcolato secondo l'effetto termico della variazione di concentrazione, e l'ultimo termine dalla dipendenza trovata da Streintz tra la grandezza  $E$  e la concentrazione. Le formule (51) e (52) hanno dato risultati che concordano pienamente tra loro e con le osservazioni.

La teoria degli elementi idroelettrici proposta dal Nernst ha un carattere completamente diverso da quelle che abbiamo considerato finora. I fondamenti di questa teoria, nonché le formule alle quali conduce nei diversi casi, sono già stati esposti in precedenza. Ci limiteremo a richiamare le formule (40), (43), (44), (45) e (46) che abbiamo poi dato. Planck ha generalizzato la teoria di Nernst; Johnson (1904) l'ha ulteriormente sviluppata.

Abbiamo ottenuto, per l'elemento di concentrazione, la formula (9-44). Tuttavia abbiamo appena indicato un'altra formula (49), data da Helmholtz per lo stesso elemento. Troviamo che, per soluzioni diluite, le due formule sono identiche. Tutta una serie di obiezioni sono state sollevate contro la teoria di Nernst; negli ultimi anni (a partire dal 1900) hanno dato vita a una polemica che dura tuttora e alla quale hanno preso parte Arrhenius, Jahn, Nernst, Sand, Kaulenberg e altri ancora. Questa polemica è nata con i dubbi che recentemente si sono cominciati ad avere sulla correttezza della teoria della dissociazione elettrolitica. Non ci soffermeremo sulle altre applicazioni ricevute dalla teoria di Nernst, ad esempio quelle che ne sono state fatte all'elemento di polarizzazione, all'elemento gas, ecc.



# 11. Fenomeni termoelettrici all'interno di un circuito

## 1. Introduzione

Abbiamo enumerato nel libro I, cap. II, le sorgenti del campo elettrico, cioè i fenomeni o le operazioni che si accompagnano all'apparire dell'elettrizzazione di qualsiasi corpo. Dopo aver approfondito tre di queste sorgenti, l'induzione elettrostatica, il contatto e l'attrito, abbiamo dato al § 15 dello stesso Capitolo alcune indicazioni sulle varie altre sorgenti di elettricità. Nel Libro II, abbiamo fatto conoscere il fenomeno del campo magnetico costante, che nasce con una fonte continua di elettricità e un circuito chiuso; abbiamo considerato la corrente elettrica dovuta al contatto o all'azione chimica, e menzionato ancora, nel libro II, capitolo IV, § 2., quella che si chiama corrente capillare.

Tra le altre fonti di energia elettrica, possono produrre corrente elettrica anche: l'induzione elettrostatica, l'attrito, il campo magnetico variabile e la forza termoelettromotrice. È sull'attrito o sull'induzione elettrostatica che poggia la costruzione delle macchine elettriche, i cui conduttori manifestano enormi differenze di potenziale, che possono arrivare fino a centinaia di migliaia di volt. Queste macchine forniscono una corrente elettrica ininterrotta, quando i conduttori sono uniti da una serie continua di sostanze conduttrici. In questo modo però si ottiene solo una corrente estremamente debole, ma che possiede tutte le proprietà proprie della corrente idroelettrica: è circondata da un campo magnetico, produce elettrolisi, ecc. La differenza tra una macchina elettrica e una batteria di elementi consiste nel fatto che la prima manifesta alti potenziali ai capi di un circuito aperto, ma dà una corrente molto debole, cioè mette in circolazione piccolissime quantità di elettricità, mentre le batterie forniscono piccoli potenziali, ma grandi quantità di elettricità. Quando, in entrambi i casi, si è in presenza di un circuito chiuso, si può considerare la macchina elettrica come una parte del circuito dotata di altissima resistenza.

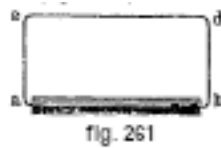
Le correnti prodotte da un campo magnetico variabile, la cui intensità e direzione sono funzioni del tempo, saranno studiate nel Volume V. Non ci resta quindi qui che considerare la corrente prodotta da una forza termoelettromotrice; si chiama corrente termoelettrica. La produzione di tale corrente è strettamente legata ad altri due fenomeni: il fenomeno Peltier, di cui abbiamo già avuto modo di parlare e l'effetto Thomson, che consiste in una variazione della distribuzione del calore in un conduttore non uniformemente riscaldato, quando questo è attraversato da una corrente elettrica. Nel senso stretto del termine, di solito si chiama termoelettrico solo il fenomeno in cui ha origine una corrente termoelettrica. Si possono tuttavia comprendere, nel Capitolo della Termoelettricità, i fenomeni Peltier e Thomson, se si considerano termoelettrici tutti i fenomeni nel circuito, dove esiste una relazione tra elettricità e calore, ad eccezione però della trasformazione dell'energia elettrica in energia termica, che abbiamo studiato nel capitolo IV e che obbedisce alla legge di Lenz-Joule.

Broniewski ha compilato una bibliografia sulla Termoelettricità (1882-1909) in *Revue de Métallurgie* 7, p. 360, 1910.

## 2. Corrente termoelettrica. Corpi solidi

Abbiamo già parlato della corrente termoelettrica nel volume II, quando abbiamo indicato i metodi impiegati per lo studio della radiazione infrarossa, e nel volume III, quando abbiamo descritto i metodi di misura delle temperature, in particolare delle alte temperature (pirometri termoelettrici). Un resoconto storico della ricerca sui fenomeni termoelettrici si troverà nelle memorie dello Streit.

Consideriamo i fenomeni termoelettrici che si producono in un circuito chiuso costituito soltanto da due metalli. Abbiamo visto che, dalla legge di Volta, la somma delle forze elettromotrici è nulla in un circuito chiuso formato solo da conduttori della prima classe, cioè non contenenti elettroliti. Si è tuttavia supposto che tutte le parti del circuito si trovassero alla stessa temperatura. Seebeck ha scoperto nel 1823 che la legge di Volta cessa di essere vera, quando le saldature, cioè i punti in cui sono unite le diverse parti del circuito, si trovano a temperature differenti. Prendiamo il caso molto semplice in cui il circuito comprende solo due metalli, per esempio un'asta di bismuto  $ab$  (fig. 261) e un filo di rame  $aedb$ , saldati tra loro in  $a$  e  $b$ .



Quando la temperatura  $t_2$  della saldatura  $b$  diviene superiore alla temperatura  $t_1$  della saldatura  $a$ , si manifesta una corrente nel circuito chiuso, che è diretta dal bismuto al rame attraverso la saldatura alla temperatura più elevata. Chiameremo positivo (termoelettricamente) il metallo verso il quale si dirige la corrente attraverso la saldatura alla temperatura più elevata e negativo l'altro metallo. Nel sistema Bi-Cu, il rame è quindi positivo, il bismuto negativo. L'intensità della forza termoelettromotrice  $E$ , che agisce in un circuito chiuso formato da due metalli, dipende dalla natura di questi metalli, così come dalle temperature  $t_2$  e  $t_1$  delle loro saldature. Siano  $A$  e  $B$  due metalli, si può scrivere simbolicamente

$$E = A(t_1^0) B(t_2^0) A \quad (11.0.1)$$

o più semplicemente, quando le temperature  $t_1$  e  $t_2$  sono date

$$E = (A, B) \quad (11.0.2)$$

essendo  $A$  il metallo positivo, di modo che  $(A, B) = -(B, A)$ .

Quando, nella formula (1), si ha  $t_2 > t_1$ , e la corrente attraversa la saldatura ( $t^0$ ) andando da  $B$  verso  $A$ ,  $A$  è il metallo positivo,  $B$  il metallo negativo. Per capire come appare  $E$ , bisogna supporre che la forza elettromotrice  $e = A|B$ , è una funzione della temperatura  $t$ . Ponendo

$$e = A|B = f(t) \quad (11.0.3)$$

si ha

$$E(t_1, t_2) = e_2 - e_1 = f(t_2) - f(t_1) \quad (11.0.4)$$

Dopo Seebeck, i fenomeni termoelettrici sono stati studiati in modo approfondito da Becquerel, che ha trovato la legge seguente: per due metalli dati, la grandezza  $E$  alle temperature  $t_1$  e  $t_2$  delle saldature è uguale alla somma algebrica dei due valori di  $E$  corrispondenti la prima alla temperature  $t_1$  e  $t$ , la seconda alle temperature  $t$  e  $t_2$ , indicando  $t$  una terza temperatura qualsiasi. Si può scrivere simbolicamente

$$E(t_1, t_2) = R(t_1, t) + E(t, t_2)$$



relazione che risulta immediatamente dalla formula (4). Serve, nella somma, prestare attenzione ai segni dei valori di  $E$ , cioè al verso della corrente.

Una combinazione di due metalli o altri corpi (vedi sotto), che dà una corrente termoelettrica, è chiamato elemento o coppia termoelettrica, o semplicemente termoelemento.

In un circuito chiuso, contenente un solo metallo, si ha  $E = 0$ , qualunque sia la distribuzione delle temperature lungo il circuito. Troviamo allo stesso modo che in un circuito costituito da due metalli,  $E$  dipende solo dalle temperature  $t_1$  e  $t_2$  delle saldature; non dipende in alcun modo dalla distribuzione delle temperature nei due metalli. Questo è stato rivelato da Magnus.

Seebeck, combinando i diversi metalli, ha scoperto che possono essere disposti in una serie analoga a quella di Volta. Quando i metalli di questa serie sono combinati a due a due, quello che precede l'altro è sempre negativo, quello che segue positivo. Dopo Seebeck, serie analoghe furono stabilite da Becquerel, Hankel, W. Thomson, Erhard, Bachmétieff e altri ancora. Pertanto, Hankel dà la serie: (—) Na, K, Bi, Ni, Co, Pd, Hg, Pt, Au, Cu, Sn, Al, Pb, Zn, Ag, Cd, Fe, Sb (+), e W. Thomson la seguente: (—) Bi,  $Pt_1$ , Al, Sn, Pb,  $Pt_2$ , Cu,  $Pt_3$ , Zn, Ag, Cd, Fe (+), dove  $Pt_1$ ,  $Pt_2$  e  $Pt_3$  sono diversi tipi di platino; quest'ultima serie è valida per temperature comprese tra  $10^\circ$  e  $32^\circ$ . La non concordanza dei risultati a cui sono pervenuti vari osservatori si spiega con il fatto che la posizione di un metallo nella serie cambia a seconda delle sostanze estranee che contiene e secondo il suo modo di fabbricazione. È poi un altro fatto molto importante che l'ordine di successione dipende anche, come vedremo in seguito, dalle temperature  $t_1$  e  $t_2$  delle saldature.

Quando si confrontano i valori di  $E$  per diverse combinazioni di due metalli, prendendo alle saldature le stesse temperature  $t_1$  e  $t_2$ , si trova una legge analoga a quella di Volta. Con la notazione simbolica (2), si ha

$$(A, B) + (B, C) = (A, C) \quad (11.0.5)$$

relazione che può dedursi dalla formula (4). Si vede in effetti che si ha

$$\begin{aligned} (A, B) &= A|B(t_2) - A|B(t_1) \\ (B, C) &= B|C(t_2) - B|C(t_1) \end{aligned}$$

quando le temperature  $t_2$  e  $t_1$  sono uguali,  $A|B + B|C = A|C$ ; sommando le due uguaglianze precedenti e osservando che

$$(A, C) = A|C(t_2) - A|C(t_1)$$

si ottiene la relazione (5). Da quest'ultima risulta che, dati i valori di  $t_2$  e  $t_1$ , è sufficiente conoscere i valori di  $E$  corrispondenti alle combinazioni dei metalli considerati con un metallo M arbitrariamente scelto, per calcolare i valori di  $E$  relativi a tutte le possibili combinazioni dei metalli tra loro; conoscendo, ad esempio, i valori di  $(A, M)$  e  $(B, M)$ , s ha

$$(A, B) = (A, M) + (M, B) = (A, M) - (B, M)$$

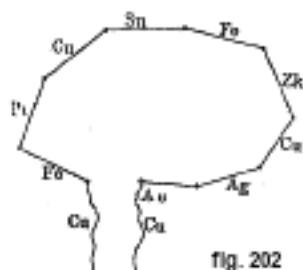
Consideriamo ora un circuito formato da tre metalli. Si considerino i metalli A e B, le cui saldature sono rispettivamente a temperature  $t_1$  e  $t_2$ ; se il metallo C, le cui due estremità sono alla temperatura  $t_2$ , è interposto nella saldatura alla temperatura  $t_2$ ,  $E$  non varia; ciò si può esprimere simbolicamente come segue:

$$A(t_1) B(t_2) A = A(t_1) B(t_2) C(t_2) A$$

Infatti,  $B(t_2) C(t_2) A = B(t_2) A$ ; più semplicemente, si ha, alla temperatura  $t_2$ ,  $B|C + C|A = B|A$ . Invece di un solo metallo C, si può interporre tra B e A un numero qualsiasi di metalli, a condizione che tutte le saldature tra B e A siano alla stessa temperatura  $t_2$ . Il ragionamento si può presentare anche in un altro modo. Sia  $E = A(t_1) B(t_2) D(t_2) F(t_2) \dots (t_2) M(t_2) A$ ; si può scrivere  $e = A|B(t_1) + B|C(t_2) + C|D(t_2) + D|F(t_2) + \dots M|A(t_2)$  e, sottraendo l'uguaglianza

$0 = A|B(t_2) + B|C(t_2) + C|D(t_2) + D|F(t_2) + \dots + M|A(t_2)$ , si ottiene  $E = A|B(t_1) - A|B(t_2) = A|B(t_1) + B|A(t_2) = A(t_1) B(t_2) A$ .

Becquerel ha formato un circuito con un certo numero di metalli diversi saldati insieme (fig. 262) e trovato che quando tutte le saldature erano alla stessa temperatura  $t_1^0$ , tranne una tra i metalli M e N che era portata alla temperatura  $t_2^0$ , si ottiene per  $E$  lo stesso valore nel circuito  $M(t_1) N(t_2) M$ .



Tra i tanti lavori che sono stati fatti sulla grandezza  $E$ , si possono citare anche quelli di Matthiessen (1808), E. Becquerel (1864) e Bachmétieff (1886-1891). Nelle ricerche più recenti, che si sono concentrate sui metalli più puri possibile, vanno ricordati gli accuratissimi esperimenti di Holborn e Day (1899), nonché quelli di Jäger e Diesselhorst (1900), tutti condotti al *Physikalische Reichsanstalt* a Charlottenburg. Bachmétieff ha ottenuto una relazione tra la direzione della forza  $E$  e la distribuzione in serie di metalli o altri elementi con peso atomico crescente. Quando si determina il verso di  $E$  per ciascun gruppo di sostanze correlate, si osserva nella serie un regolare cambiamento di significato; quindi  $E$  avendo due volte lo stessa direzione verso la sostanza di peso atomico inferiore, ha quindi due volte il verso opposto, come mostrato nel diagramma seguente:



Seebeck ha studiato le proprietà termoelettriche delle leghe e ha riconosciuto che, in molti casi, una lega di due metalli non si colloca nella serie termoelettrica tra i metalli di cui è composta. Questo risultato è stato confermato da numerose ricerche dovute a Rollmann, E. Becquerel (1866), Matthiessen, Hutchins (1894), ecc. Gli amalgami sono stati studiati da C. L. Weber (1884), des Coudres (1891), Bachmétieff (1891) English (1893). Quest'ultimo ha confrontato amalgami di diversi metalli con leghe di piombo e di stessi metalli; ha trovato, per gli amalgami, le serie termoelettriche: (-) Li, Na, K, Tl, Cu, Ag, Sb, Zn, Cd, Sn, Pb, Bi (+), e, per le leghe di piombo, la serie: (-) Sn, Tl, Sb, Zn, Cd, Bi (+), dove i metalli non si susseguono nello stesso ordine. Bachmétieff ha osservato che gli amalgami dei metalli Zn, Sn, Pb, Cd, Cu, ecc., sono posti nella serie tra Hg e il metallo corrispondente, mentre gli amalgami di Bi, Tl, Na e Mg non sono tra Hg e metallo. Non possiamo soffermarci sugli altri numerosi e interessanti risultati a cui è arrivato.

Il palladio contenente idrogeno è termoelettricamente positivo rispetto al palladio puro.

Ricerche sistematiche sulle proprietà termoelettriche delle leghe furono pubblicate quasi contemporaneamente nel 1910 da Rudolfi, Haken e Broniewski. Mostrano che si deve distinguere tre tipi principali di leghe. Alla prima specie appartengono le leghe che consistono in una mescolanza meccanica di cristalli dei due metalli. In queste leghe la forza termoelettrica obbedisce alla regola delle miscele; la curva che traduce la dipendenza esistente tra la forza termoelettrica e la percentuale di composizione è una retta. Al secondo tipo appartengono le leghe che formano soluzioni solide e cristalli misti; la curva ha una forma ad U, in altre parole, la forza termoelettrica è minore per la lega che per i suoi costituenti. Infine il terzo genere comprende le leghe di metalli che possono dar luogo ad una o più combinazioni; in questo caso la curva ha spesso una

forma molto complicata, con diversi minimi e massimi e punti angolosi che corrispondono alle combinazioni. Come lega del primo tipo si può menzionare Sn-Cd; nel secondo genere, Au-Ag, Cu-Ni, Sb-Bi; nel terzo genere, Sb-Fe, la cui curva ha un'inversione per  $Sb^2Fe^3$ , inoltre Cd-Sb e Al-Cu, la cui curva ha tre massimi e tre minimi. Broniewski distingue 6 forme principali di curve e 7 forme secondarie, in tutto 13 forme diverse e altrettante specie di leghe; tra queste si possono citare, ad esempio, le leghe che presentano non un minimo, ma un massimo della forza termoelettrica (Pb-Bi, Sn-Bi, Cd-Bi, Sn-Cd). Haken ha studiato soprattutto le leghe di tellurio con Sb, Sn, Bi e Pb, che appartengono tutte al terzo genere. Considera lo studio della forza termoelettrica un processo molto delicato per scoprire combinazioni. Trovò inoltre che in generale la forza termoelettrica è tanto maggiore quanto minore è la conducibilità. Wedert (1905) aveva precedentemente osservato che la forza termoelettrica del selenio diminuisce durante l'illuminazione, il che concorda con l'opinione di Haken.

Braun ha mostrato che esistono anche forze termoelettriche tra metalli fusi.

Si possono costituire circuiti termoelettrici, non solo con metalli, ma anche con altri conduttori solidi, in particolare con certi minerali (ossidi, piriti, ecc.), i quali, associati ai metalli, danno talvolta forze termoelettriche molto notevoli. Stephan, E. Becquerel, Groth e altri hanno studiato sistemi di questo tipo.

Lussana (1893) si occupava di sali solidi, ed in particolare di combinazioni di  $NaAzO^3$  con  $KAzO^3$ ,  $KClO^3$ ,  $ZnCl^2$ ,  $HgCl^2$ ,  $AzH^4AzO^3$ : ha misurato la differenza di potenziale ai capi di una catena aperta, perché, a causa della scarsa conducibilità dei sali, si ottiene una corrente troppo bassa in un circuito chiuso. Ha trovato valori piuttosto alti di  $E$ ; la temperatura gioca lo stesso ruolo dei metalli (vedi sotto). Quando un sale subisce delle trasformazioni ( $AzH^4AzO^3$  a  $35^\circ$ ,  $86^\circ$  e  $125^\circ$ , vedi Volume III), si nota una discontinuità nell'andamento della grandezza  $E$ .

Fenomeni termoelettrici piuttosto complessi si verificano nelle sostanze conduttrici cristalline; W. Thomson ne ha fornito una teoria. Ha trovato che, nei cristalli uniassiali, l'intensità della forza elettromotrice  $E$ , in una direzione che forma l'angolo  $\alpha$  con l'asse, è data dalla seguente formula:

$$E = E_1 \cos^2 \alpha + E_2 \sin^2 \alpha \quad (11.0.6)$$

L. Perrot ha studiato il bismuto cristallizzato, ritagliando piccole aste aventi l'asse parallelo o perpendicolare all'asse ottico, oppure formando con esso un angolo  $\alpha = 40^\circ$ . Il cristallo era posto tra due strisce di rame e i punti di contatto mantenuti a temperature  $t_1$  e  $t_2$ . Nel primo caso (parallelismo),  $E$  era molto più grande che nel secondo (perpendicolarità). Così, per  $t_1 = 11^\circ$  e  $t_2 = 30^\circ$ , si aveva, nel primo caso,  $E = 0,00190 V$ , e nel secondo,  $E = 0,00084 V$ . La terza asta ( $\alpha = 40^\circ$ ) ha pienamente confermato la formula (6).

Il valore assoluto della forza termoelettromotrice  $E$  per i metalli è in generale molto piccolo, rispetto alla forza elettromotrice degli elementi idroelettrici. Se gli elementi termoelettrici non danno comunque corrente non sufficientemente intensa, ciò è dovuto alla bassissima resistenza del circuito termoelettrico, formato solo da metalli, cioè buoni conduttori di corrente. Daremo alcuni numeri come esempio.

L'elemento Bi-Cu dà, per  $t_1 = 0^\circ$  e  $t_2 = 100^\circ$ ,  $E = 0,003 V$ ; l'elemento Cu-argentana,  $E = 0,001 V$ . Dalle ricerche di Chassagny e Abraham, Fe-Cu dà, nelle stesse condizioni,  $E = 0,00109 V$ ; Fe-Pt,  $E = 0,00168 V$ ; Cu-Pt,  $E = 0,00059 V$ . Mathiessen ha determinato  $E$  per un gran numero di elementi formati dal piombo e altri metalli, dove si aveva  $t_1 = 19^\circ$  e  $t_2 = 20^\circ$ ; ha ottenuto, ad esempio,  $(Pb, Bi) = 0,000097 V$ ;  $(Sb, Pb) = 0,000030 V$ ; da cui si deduce  $(Sb, Bi) = 0,00012 V$ . Elementi, contenenti certi minerali, danno valori molto maggiori di  $E$ . Bunsen ha trovato, con alcuni minerali di rame associati al rame,  $E = 0,07 V$ , per  $t_2 - t_1 = 100^\circ$ . Stefan ha pure ottenuto il valore  $E = 0,17 V$ ; ma non indica la differenza di temperatura  $t_2 - t_1$  corrispondente.

Occupiamoci ora delle circostanze interessanti in cui una corrente termoelettrica ha origine in un circuito chimicamente omogeneo, le cui parti sono tutte formate da uno stesso metallo, ma possono differire nel loro stato fisico. Distingueremo cinque casi.

I. Le parti del circuito hanno una struttura, determinata dal modo in cui è fatto il metallo, che è diversa. Già Seebeck aveva notato che i metalli temprati sono più negativi degli stessi metalli ammorbiditi mediante ricottura. Magnus (1851) ha preso un filo di ottone temprato e ha ricotto metà di questo filo; riscaldando il luogo dove c'è il passaggio dalla parte indurita alla parte rammollita, otteneva una corrente termoelettrica. E. Becquerel (1864), Barus (1879), Oberbeck (1884), G. Wiedemann e altri ancora hanno studiato vari casi particolari di questo fenomeno. Barus si è occupato delle proprietà termoelettriche dell'acciaio e ha anche scoperto che l'acciaio temprato è più negativo di quello ricotto.

II. L'influenza di azioni puramente meccaniche, come l'estensione, la compressione, ecc. cambia anche la posizione di un metallo nella serie termoelettrica. W. Thomson (1856) arrotolava il centro di un filo morbido attorno a un'asta di legno orizzontale e lasciava pendere liberamente un'estremità del filo, mentre attaccava un peso all'altra. Riscaldando la parte avvolta sull'asta, si manifestava una forza elettromotrice  $E$ , nel verso dalla parte tesa alla parte indeformata. Diversi casi particolari sono stati poi studiati da Le Roux (1867), Tunzelmann (1878), E. Cohn (1879), Ewing (1881), Bachmetieff (1889), Des Coudres (1890), G. S. Meyer (1896) e altri ancora.



Quando si fa un nodo in un filo (fig. 263) e si scalda il filo con da un lato in prossimità del nodo, si ottiene ancora una corrente termoelettrica.

Le Roux ha scoperto che, nell'estensione, la corrente è diretta dalla parte allungata verso quella non deformata, per Pd, Fe, Pt, Ag, ottone e acciaio, ma in senso contrario per Zn e Cu. Tunzelmann ha mostrato che, per Fe, Cu e acciaio, il verso della corrente dipende dal grado di estensione. Bachmetieff ha riconosciuto che esiste, per il Fe, un'estensione in cui  $E$  diventa massimo; è proprio per questa estensione che la suscettività magnetica del ferro è massima. Des Coudres ha osservato che il mercurio compresso e quello non compresso possono dare una corrente termoelettrica, essendo il mercurio compresso positivo. Agricola (1902) ha confermato questo risultato fino ad una pressione di 100 atm; la forza termoelettrica è proporzionale alla pressione. Ulteriori ricerche sull'effetto della pressione rispetto alla posizione di un metallo nella serie termoelettrica sono state fatte da E. Wagner (1908) e Hörig (1909). Il primo ha studiato 15 metalli e 2 leghe e trovato che, per Mg, Sn, Al e manganina, la corrente passa dal punto riscaldato del metallo compresso verso quello non compresso; per Cu, Au, Pb, Ag, Ni, Fe, Pt, Pd, Cd, Zn, Hg, Bi e costantana nel verso opposto. La forza elettromotrice  $E$  è molto piccola; a una pressione di  $1 \text{ kg/cm}^2$  e per una differenza di temperatura di  $1^\circ$ , si ha, con il mercurio  $E = 2,18 \cdot 10^{-4} \mu V$ , con Al  $0,006 \cdot 10^{-4} \mu V$ ; si ottiene il valore massimo di  $E$ , cioè  $7,1 \cdot 10^{-4} \mu V$ , con Bi. Hörig ha studiato l'elemento Hg-Pt e l'elemento KNa-Pt, essendo KNa la lega eutettica (Volume III). L'elemento Hg-Pt ha mostrato un cambiamento  $\Delta E = 2,18 \cdot 10^{-10} V$  per un grado e per un aumento di pressione di  $1 \text{ kg/cm}^2$ . Con il secondo elemento abbiamo  $\Delta E = 2,13 \cdot 10^{-10} V$ . In entrambi i casi,  $\Delta E$  è proporzionale alla pressione fino a  $1400 \text{ kg/cm}^2$ .

G. S. Meyer ha trovato che, nell'estensione dei metalli magnetici, la variazione dello stato magnetico è di grande importanza; il risultato termoelettrico di questa variazione (vedi più avanti, IV) può mascherare completamente l'effetto dell'allungamento.

III. Becquerel, Magnus, Le Roux, Gaugain, Rosing, Egg-Sieberg e altri ancora hanno mostrato che il contatto di metalli identici, ma a temperature diverse, può produrre una corrente termoelettrica. L'esperimento si effettua unendo due fili identici ad un galvanometro e riscaldando l'estremità di uno dei fili; se questa estremità viene portata a contatto con l'estremità fredda dell'altro filo, si produce una corrente. È difficile dire se il ruolo principale non spetti in questo caso alla modifica della struttura dovuta al riscaldamento, il cui effetto sarebbe analogo alle modifiche prodotte dalle azioni meccaniche. Matteucci e Magnus hanno scoperto che nessuna corrente termoelettrica si ottiene mettendo in contatto il mercurio freddo con il mercurio caldo. Rosing ha osservato il fatto interessante che, nel piombo, il fenomeno effettivo è appena percettibile, anche se riscaldato a  $300^\circ$ ; in Au, Ag, Cu, Fe, Sn, Pt e in una lega di Pt con Ir la corrente va dall'estremità fredda alla calda; in Pd e argentana il verso della corrente è invertito, mentre in Al dipende dal grado di riscaldamento. Si trova che i metalli del primo gruppo hanno un potere termoelettrico positivo (vedi sotto) (rispetto al piombo); quelli del secondo, un potere negativo; per l'alluminio il segno dipende dalla temperatura.

IV. L'introduzione di un metallo in un campo magnetico cambia la sua posizione nella serie termoelettrica; quindi, il ferro magnetizzato è termoelettricamente positivo rispetto al ferro non magnetizzato. Considereremo questo tipo di fenomeno nel capitolo dedicato all'influenza del campo magnetico sulle proprietà fisiche delle sostanze.

V. Borgmann (1877) ha mostrato che il passaggio di corrente in un filo di ferro modifica la posizione di questo metallo nella serie termoelettrica. Ha costruito un ponte di Wheatstone, in cui i quattro rami e il ponte erano fatti di filo di ferro identico. Quando la condizione nota ( $r_2 r_3 - r_1 r_4 = 0$  è soddisfatta, i rami sono attraversati da una corrente intensa, mentre nel ponte non c'è corrente. Riscaldando una delle estremità del ponte, si può garantire che in questo punto si forma una nuova forza elettromotrice. Infatti, variando il verso della corrente nel circuito principale (mediante un interruttore), si ottengono nel ponte deviazioni di segno opposto, ma di diversa entità, il che è possibile solo se è presente una forza elettromotrice nel ponte stesso.

### 3. Ruolo della temperatura nei fenomeni termoelettrici

Abbiamo assunto, nel paragrafo precedente, che la forza elettromotrice  $e = A|B$ , al contatto di due metalli, è una certa funzione della temperatura  $t$ , e abbiamo posto

$$e = AB = f(t) \quad (11.0.7)$$

Se  $t_1$  e  $t_2$  sono le temperature delle saldature di due metalli A e B costituenti il circuito chiuso, una forza elettromotrice  $E = (A, B)$  ha origine in questo circuito e ha come valore

$$E = (A, B) = e_2 - e_1 = f(t_2) - f(t_1) \quad (11.0.8)$$

Sia  $t_2 - t_1$ . Per i due metalli dati,  $E$  dipende da  $t_2$  e  $t_1$ , essendo quest'ultima dipendenza determinata dalla forma della funzione  $e = f(t)$ . Se  $e$  non variasse del tutto con la temperatura, si avrebbe  $E = 0$ . La forma più semplice di  $f(t)$  è una funzione lineare

$$e = A|B = e_0 + at \quad (11.0.9)$$

che dà

$$E = (A, B) = a(t_2 - t_1) \quad (11.0.10)$$

In questo caso  $E$  cresce proporzionalmente alla differenza di temperatura delle saldature ed è indipendente dal valore assoluto di tali temperature. Esistono coppie di metalli, per i quali la formula (10) si verifica entro limiti abbastanza ampi. Tali sono, ad esempio, le coppie (Cu, Bi), (Ag, Cu) (Au, Cu) e (Pt, Fe), la prima delle quali è stata studiata da Pouillet, Regnault

e Gaugain e le due successive da Gaugaain, il quale ha trovato che, per (Au, Cu),  $E$  cresce proporzionalmente a  $t_2 - t_1$ , da  $t_1 = t_2 = 20^\circ$  fino a  $t_2 = 300^\circ$ . Per altre coppie, la relazione tra  $E$  e le temperature  $t_1$  e  $t_2$  è meno semplice. Quando, restando  $t_1$  invariata,  $t_2$  aumenta gradualmente,  $E$  non aumenta in proporzione alla differenza  $t_2 - t_1$ ; talvolta  $E$  aumenta più rapidamente di questa differenza, talvolta più lentamente. Talvolta si osserva un massimo di  $E$  per un determinato valore  $T$  di  $t_2$ ; per  $t_2 > T$ ,  $E$  decresce, e talvolta si annulla per poi cambiare segno; in altre parole, la corrente cambia verso.

Cerchiamo teoricamente a quali conseguenze porta la sostituzione alla formula (9) dell'espressione di secondo grado

$$e = A|B = e_0 + at + bt^2 \quad (11.0.11)$$

Da questa espressione si deduce

$$E = a(t_2 - t_1) + b(t_2^2 - t_1^2) \quad (11.0.12)$$

o

$$E = a(t_2 - t_1) \left[ 1 + \frac{b}{a}(t + t_2) \right] \quad (11.0.13)$$

Sono possibili due casi:  $b$  può essere positivo o negativo. Alle coppie, per le quali  $b$  è positivo, appartengono ad esempio (Pt, Zn), (Pt, Cu), (Pb, Cu), (Cu, Zn), (Cu, argentana), (Pt, Pd), ecc.

Rispetto alla coppia (Pt, Pd), Becquerel ha trovato che, se si prende  $E = 1$  per  $t_1 = 0^\circ$  e  $t_2 = 100^\circ$ , si ottiene  $E = 28,07$  per  $t_1 = 0^\circ$  e  $t_2 = 1400^\circ$ , invece del valore 14 che corrisponde a  $b = 0$ .

Considerando la quantità  $\eta = e - e_0 = at + bt^2$  come una funzione di  $t$ , la si può rappresentare con una parabola come ODF (fig. 264). Il vertice D di questa parabola ha ascissa

$$\tau = -\frac{a}{2b} \quad (11.0.14)$$

e per ordinata

$$\eta_m = -\frac{a^2}{4b} \quad (11.0.15)$$

Per caratterizzare la coppia con queste due grandezze, serve la sostituzione

$$a = +\frac{2\eta_m}{\tau} \quad b = -\frac{\eta_m}{\tau^2} \quad (11.0.16)$$

si ha allora

$$\eta = e - e_0 = +\frac{\eta_m}{\tau^2}t(2\tau - t) \quad (11.0.17)$$

$$E = +\frac{\eta_m}{\tau^2}(t_2 - t_1)[2\tau - (t_1 + t_2)] \quad (11.0.18)$$

La grandezza  $E$  è rappresentata graficamente nella figura 264, dalla differenza delle ordinate di due punti della parabola le cui ascisse sono  $t_1$  e  $t_2$ . Se questi punti sono A e B, si ha  $E = BC$ . Si vede facilmente ciò che succede quanto, per  $t_1$  invariato (si suppone sempre  $t_1 < \tau$ ), si fa crescere  $t_2$  gradualmente. La forza  $E$  raggiunge un massimo per  $t_2 = \tau$  per poi diminuire. Per un certo valore  $t_2 = t_1$ , che soddisfa l'uguaglianza

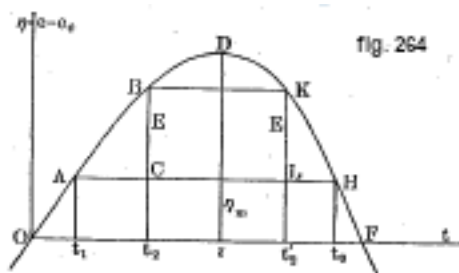
$$t_0 - \tau = \tau - t_1 \quad (11.0.19)$$

si ha  $E = 0$ ; inoltre

$$t_0 - t_1 = 2(\tau - t_1) \quad (11.0.20)$$

$$t_0 + t_1 = 2\tau \quad (11.0.21)$$

Per  $t_2 > t_0$  la corrente cambia verso.



Chiameremo  $\tau$  la temperatura del punto neutro. Indicheremo con  $t_i$  anche la somma delle temperature  $t_1$  e  $t_2$  delle saldature nel caso in cui  $E = 0$  (non per  $t_2 = t_1$ ) e  $t_1$  si chiamerà temperatura di inversione. Da quanto precede si possono dedurre tutta una serie di conseguenze.

Se si ammette l'esattezza della formula (11), si hanno le seguenti proposizioni:

I. Per ogni valore  $t_1 < \tau$ , la grandezza  $E$  raggiunge un massimo, quando  $t_2 = -a : 2bU$ , cioè quando  $t_2$  è uguale alla temperatura del punto neutro.

II. La grandezza  $E$  si annulla e la corrente cambia verso, per una differenza di temperatura tra le saldature doppia della differenza di temperatura a cui corrisponde il massimo di  $E$ .

III. La somma delle temperature delle saldature per le quali  $E$  si annulla nuovamente, cioè la temperatura di inversione  $t_i$ , è indipendente da  $t_1$  è una grandezza costante, per una data coppia, pari al doppio della temperatura del punto neutro.

La grandezza  $E$  assume lo stesso valore per due temperature  $t_2$  e  $t_2'$  della saldatura più calda, che sono equidistanti dalla temperatura del punto neutro, di modo che si ha

$$t_2' - \tau = \tau - t_2$$

Se si introduce  $t_I$ , si ottengono le espressioni seguenti:

$$t_1 + t_0 = t_i = \text{cost} \quad (11.0.22)$$

$$t_1 = 2\tau \quad (11.0.23)$$

$$t_2 + t_2' = 2\tau = t_i = \text{cost} \quad (11.0.24)$$

Consideriamo ora i risultati delle ricerche sperimentali e vediamo come concordano con le conseguenze che abbiamo appena dedotto dall'ipotesi che la formula (11) sarebbe conforme alla realtà.

La non proporzionalità tra  $E$  e  $t_2 - t_1$ , la crescita di  $E$  fino a un massimo seguito da una diminuzione fino a zero e il cambio di verso della corrente sono stati osservati da molti fisici, tra cui Cumming (1823), Becquerel (1826), Draper (1840), Hankel (1844), Regnault (1847) e in particolare Gauguin (1862).

La scomparsa della corrente fu studiata per la prima volta da W. Thomson (1856), il quale riconobbe che essa si verifica sempre, in una data coppia di metalli, per lo stesso valore medio delle temperature delle saldature; ma il primo studio completo si deve ad Avenarius (de Kieff, 1863), il quale ha mostrato che, in un gran numero di coppie diverse, la grandezza  $E$  è data dalla seguente espressione:

$$E = (t_2 - t_1) [a + c(t_1 + t_2)] \quad (11.0.25)$$

dove  $a$  e  $c$  sono costanti; questa è la famosa formula di Avenarius. Come si vede, è identica alle formule (13) e (17) e di conseguenza la teoria sopra esposta, che segue dalla formula (11), è applicabile a tutte le coppie che soddisfano la formula di Avenarius. Egli ha studiato tutta una serie di coppie di metalli, per alcuni, ad esempio per (Pt, Pb),  $a$  e  $c$  hanno lo stesso segno, per altri segni opposti. L'espressione  $-a : 2c$  dà la temperatura del punto neutro. Citiamo, come esempio, la formula relativa alla coppia (Ag, Fe):

$$E = (t_2 - t_1) [3,29424 - 0,00737(t_1 + t_2)]$$

Si ha  $E = 0$ , per  $(t_1 + t_2) : 2 = \tau = 223,5^\circ$ . Avenarius ha trovato inoltre  $\tau = 69,7^\circ$  per (Ag,Zn),  $\tau = 275,8^\circ$  per (Cu,Fe), ecc.

Molti fisici, tra i quali Tait, Kohlrausch e Ammann, Knott, Me Gregor, Tidblom, Naccari e Bellati, Noll e altri ancora si sono occupati della verifica della formula Avenarius. Tait ha determinato  $\tau$  per un gran numero di coppie di ferro con altri metalli; ha trovato in particolare  $\tau = 159^\circ$  per (Fe,Cd),  $\tau = 199^\circ$  per (Fe,Zn),  $\tau = 235^\circ$  per (Fe,Ag), ecc. Tidblom ha cercato i valori delle costanti  $a$  e  $c$  di formula Avenarius per 14 coppie del platino con Sn, Pb, Zn, Cd, Mg e varie leghe di due dei tre metalli Pb, Sn e Zn. Naccari e Bellati hanno trovato  $\tau = 187,8^\circ$  per (Pb,Na),  $\tau = 71,7^\circ$  per (Pb,K) e  $\tau = 71,8^\circ$  per (Pt,K). Noll ha determinato i valori di  $a$  e  $c$  per molte coppie di metalli della purezza massima possibile.

Al Reichsanstalt sono state condotte ricerche molto precise. Jäger e Diesselhorst (1900) trovarono che, per il termoelemento (Cu, constantana), la formula Avenarius è del tutto applicabile per piccoli valori di  $t_2 - t_1$ , (non superiori a  $37^\circ$ ). Holborn e Day hanno studiato gli elementi dove il platino è associato a Au, Ag, Rh, Ir, Pd,  $90Pt + 10Ru$ ,  $90Pt + 10Pd$  e  $10Pt + 90Pd$  e dove tutti i metalli erano quasi chimicamente puri. La formula di Avenarius è stata verificata entro ampi limiti, per  $t_1 = 0$ . Così, con (Ag,Pt), è stata valutata da  $t_2 = 0^\circ$  a  $t_2 = 950^\circ$ ; con (Ir,Pt), da  $t_2 = 100^\circ$  a  $t_2 = 1200^\circ$ . Per (Pd,Pt) rimane esatta da  $t_2 = 0^\circ$  a  $t_2 = 350^\circ$  e, introducendo altri valori per le costanti, da  $t_2 = 600^\circ$  a  $t_2 = 1200^\circ$ ; per (Au,Pt), da  $t_2 = 300^\circ$  a  $t_2 = 1000^\circ$ , ma è assolutamente inapplicabile per  $t_2 < 300^\circ$ .

Abt ha realizzato un semplice dispositivo per la rapida determinazione del punto neutro di termoelementi.

Da quanto precede risulta che, per molti termoelementi, è valida la formula (11), così come quella di Avenarius che ne risulta. Tuttavia, quest'ultimo non esprime esattamente la vera legge; è inapplicabile a certe coppie e non concorda con le osservazioni, quando  $t_2$  varia da temperature molto vicine a  $0^\circ$  a temperature molto alte. Holborn e Day hanno studiato anche i termoelementi che hanno considerato ( $t_1 = 0^\circ$ ) per  $t_2 = -80^\circ$  e  $t_2 = -185^\circ$ , e allora apparivano deviazioni di diversa natura; in ogni caso, la formula di Avenarius non è applicabile per qualsiasi elemento da  $t_2 = -185^\circ$  a  $t_2 = +950^\circ$ . Ecco alcuni dei valori dati da Holborn e Day per la grandezza  $E$  in microvolt ( $10^{-6} V$ ); si ha sempre  $t_1 = 0^\circ$  e il secondo metallo è costantemente il platino.

$t_2$	Au	Ag	Rb	Ir	Pd	$\frac{90 Pt}{10 Ru}$	$\frac{90 Pt}{10 Pd}$	$\frac{90 Pt}{90 Pd}$
+950°	15532	17484	12798	11688	10670	9814	4068	2566
+450°	5270	5320	4422	4146	3296	4102	1714	-290
-80°	-307	-302	-312	-320	-392	-388	-87	+146
-185°	-130	-160	-235	-283	-774	-534	-106	+240

Jäger e Diesselhorst hanno trovato che la formula di Avenarius non è applicabile a (Fe, constantana), quando per  $t_1 = 0^\circ$  si fa variare  $t_2$  da  $0^\circ$  a  $120^\circ$ ; di conseguenza hanno espresso i risultati delle loro osservazioni in una formula empirica meno semplice.

Deviazioni dalla formula Avenarius sono state studiate da Tait (Fe+Ni, Cu, lega di Pt e Ir), Chassigny e Abraham (Fe+Cu, Ag, Pt), Battelli (Ni+Pb), Harrison (Cu+Ni, Fe+ Cu), Barrett (Fe+ acciaio al nichel) e altri. Holman (1896) ha mostrato che in molti casi la formula

$$E = m (T_1^n - T^n)$$

è in miglior accordo con le osservazioni;  $T_1$  e  $T_2$  sono le temperature assolute delle saldature,  $m$  e  $n$  due costanti.

Sarebbe forse più razionale aggiungere ancora un termine  $ct^3$  alla formula (11); si avrebbe allora, invece della formula (13), l'espressione

$$E = (t_2 - t_1) \left[ a + b(t_1 + t_2) + c(t_1^2 + t_1 t_2 + t_2^2) \right] \quad (11.0.26)$$



I fenomeni termoelettrici sono stati studiati alle prime basse temperature da Dewar e Fleming (1895), Holborn e Day (vedi sopra) e in particolare da De Metz (1904). Quest'ultimo ha trovato che, per tutta una serie di elementi, le leggi II e III, e conseguentemente anche le formule (21) e (22), cioè  $t_1 + t_0 = t_i = \text{cost}$  e  $t_i = 2\tau$ , non sono soddisfatte quando  $t_2$  si abbassa alla temperatura dell'aria liquida, cioè fino a  $-184,4^\circ$ . Le due leggi sono confermate solo per (Pt,Zn); ma, per (Pt,Au), (Pt,Cu), (Pt,Pb), (Pt,Al), (Pt,ottone) e (Pt, Ag), De Metz ha riconosciuto che la somma  $t_i = t_1 + t_0$  aumenta al diminuire di  $t_1$  (e di conseguenza  $t_0$  aumenta); con (Ag,Zn),  $t_i$  diminuisce al contrario, quando  $t_1$  si abbassa. Riportiamo una tavola molto interessante, dove i numeri delle ultime tre colonne sono i valori di  $t_i = t_1 + t_0$  per i tre valori di  $t_1$  indicati in testa a queste colonne:

Elementi	$2\tau$	$t_1 = 16,1^\circ$	$t_2 = -79,1^\circ$	$t_1 = -184,4^\circ$
Pt-Au	$-4,4^\circ$	$-5,1^\circ$	$-3,9^\circ$	$+17,3^\circ$
Pt-Cu	$-13,0^\circ$	$-12,5^\circ$	$-4,5^\circ$	$+21,7^\circ$
Pt-ottone	$+52,0^\circ$	$+51,5^\circ$	$+54,8^\circ$	$+70,2^\circ$
Pt-Pb	$122,0^\circ$	$119,8^\circ$	$126,1^\circ$	$139,3^\circ$
Pt-Al	$167,4^\circ$	$167,4^\circ$	$188,2^\circ$	$237,6^\circ$
Ag-Zn	$81,0^\circ$	$80,0^\circ$	$72,5^\circ$	$26,4^\circ$
Pt-Ag	$-106,8^\circ$	"	$-110,7^\circ$	$-89,9^\circ$

Hamilton Dickson (1911), sulla base degli esperimenti di Dewar e Fleming, ha costruito, per un gran numero di metalli, le curve termoelettriche relative a temperature comprese tra  $-200^\circ$  e  $+100^\circ$ , in particolare per Ni, Ag, Pd, Pt, Al, Mg, Au, Zn, Cu, Sb e Cd. Lecheer (1908) ha tenuto i termoelementi chiusi per diversi mesi (Fe-Pt, Fe-Cu, Fe-Ni, Fe-costantana) a  $500^\circ$  trovando che la persistenza della corrente non ha alcuna influenza sulla forza elettromotrice.

Il selenio associato ai metalli conferisce una forza elettromotrice particolarmente elevata. Righi (1888) e Weidert (1906) hanno studiato l'elemento (Se,Pb); Weidert ha scoperto che l'illuminazione del selenio diminuisce la forza elettromotrice di circa il 5%.

Un fenomeno molto interessante è l'*isteresi termoelettrica*; consiste nel fatto che, per un valore invariabile di  $t_1$ , si ottengono diversi valori di  $E$  con lo stesso  $t_2$  a seconda che questa temperatura  $t_2$  sia raggiunta per riscaldamento o per raffreddamento. Un fenomeno di questo tipo fu osservato da Bachmétieff (1897) con (Cu,Zn), (Cu,Pb), (Cu,Ni), (Cu,argentana) e (Cu,Fe), nonché da Barrett (1900) con (Cu, acciaio al nichel), (Pt, acciaio), (Pt,Fe), e da altri. In tutti i casi,  $E$  è maggiore nel riscaldamento. Negli esperimenti di Barrett, la differenza osservata era talvolta notevole.

Possiamo ora introdurre la nozione di potere termoelettrico dei metalli, che si deve a W. Thomson, e rendere nota la rappresentazione grafica dei valori della forza termoelettrica  $E$ , in tutti i casi possibili, che ci è stata data da Tait. Abbiamo visto che, per una data coppia (A,B), la quantità  $E$  è funzione di  $t_1$  e di  $t_2$ , e che si può porre

$$E = e_2 - e_1 = f(t_2) - f(t_1)$$

dove si ha  $e = f(t)$ . Se si pone  $t_1 = t$  e  $t_2 = t + \Delta t$ , si ottiene per l'aumento  $\Delta e$  l'espressione

$$\Delta e = f(t + \Delta t) - f(t) = \frac{df}{dt} \Delta t$$

Al limite introducendo la nuova notazione  $\varphi(t)$ , si ha

$$\frac{de}{dt} = f'(t) = \varphi(t) \quad (11.0.27)$$

Poiché  $e = A|B$ , si può scrivere

$$\varphi(t) = f'(t) = \frac{de}{dt} = \frac{d(A|B)}{dt}$$

La grandezza  $\varphi(t)$ , che dipende dalla natura dei metalli A e B, si chiama potere termoelettrico della coppia di metalli A e B. La si può rappresentare simbolicamente nel modo seguente:

$$\varphi(t) = \frac{d(A|B)}{dt} = [A, B]$$

Si usa scrivere  $\frac{dE}{dt}$  invece di  $\frac{de}{dt}$ , ammettendo che  $dE$  è la forza termoelettromotrice, quando  $t_1 = t$  e  $t_2 = t + dt$ ; ma una tale notazione può indurre in errore, quando si affronta la questione per la prima volta, perché la quantità  $E$  è funzione di  $t_1$  e di  $t_2$  e non di  $t$ ; non è quindi corretto parlare di derivata di  $E$  rispetto a  $t$ . È opportuno ragionare così: supponiamo  $t_2 = t_1$ , si ha  $E = f(t) - f(t_1)$  e quindi  $E$  è una funzione di  $t$ , la cui derivata è uguale a quella di  $e = f(t)$ , cioè uguale a  $\varphi(t)$ ; si può allora possiamo quindi scrivere

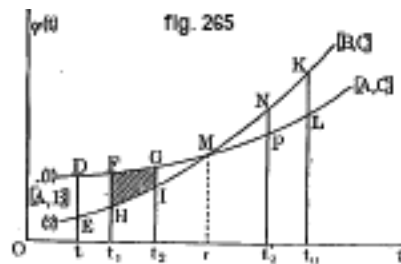
$$\varphi(t) = f'(t) = \frac{de}{dt} = \frac{dE}{dt} = \frac{d(A|B)}{dt} = [A, B] \quad (11.0.28)$$

Poiché  $A|B = A|C + C|B$  o  $A|B = A|C - B|C$ , si ha anche

$$[A, B] = [A, C] - [B, C] \quad (11.0.29)$$

Il potere termoelettrico di una coppia di metalli A e B a  $t^\circ$  è uguale alla differenza dei poteri termoelettrici delle coppie che si ottengono associando separatamente ciascuno dei metalli A e B ad un qualsiasi terzo metallo C alla stessa temperatura  $t^\circ$ .

Le formule (27) e (29) portano alla rappresentazione grafica seguente. Supponiamo che si rappresenti con curve (fig. 265) le due funzioni  $\varphi(t)$  relative a  $[A, C]$  e  $-[B, C]$ . Se  $Ot = t$ , la differenza DE delle ordinate dei punti D ed E delle due curve è uguale al potere termoelettrico  $[A, B]$  a  $t^\circ$  della coppia costituita con i metalli A e B.



Il punto M determina la temperatura  $\tau$  del punto neutro, dove si ha  $de/dt = 0$ . Quando  $t > \tau$ ,  $[A, B]$  cambia segno. La grandezza  $E = (A, B)$ , per le temperature  $t_1$  e  $t_2$  alle saldature, è misurata dall'area FGJH, vedi (29). Mantenendo  $t$  invariata, facciamo crescere  $t_2$ ,  $E$  assume il suo massimo valore FMH per  $t_2 = \tau$ . L'area a destra di M deve essere considerata come negativa. Per temperature  $t_1$  e  $t'_2$  alle saldature, dove  $t'_2 - \tau = \tau - t_2$ , si ottiene lo stesso valore per  $E$  che con le temperature  $t_1$  e  $t_2$ , poiché l'area FMH + MNP è uguale all'area FGJH. Per le temperature  $t_1$  e  $t_0$  alle saldature, dove  $t_0 - \tau = \tau - t_1$ , si ha  $E = 0$ ; infine, per  $t_2 > t_0$ ,  $E$  diviene negativo.

A parte la nozione di potere termoelettrico  $[A, C]$  di una coppia di metalli, si può anche introdurre la nozione di potere termoelettrico di un solo metallo A. Designeremo simbolicamente quest'ultimo potere con  $[A]$ ; non è altro che il potere termoelettrico di una coppia di metalli comprendente il metallo A e un determinato metallo C, al quale si confrontano tutti gli altri.

Per ragioni che verranno indicate in seguito, si sceglie il piombo come metallo di paragone, vale a dire si pone

$$[A] = [A, Pb] \quad (11.0.30)$$

La formula (28) dà ora

$$[A, B] = [A] - [B] \quad (11.0.31)$$

in altre parole, il potere termoelettrico  $[A, B]$  di una coppia di metalli è uguale alla differenza dei poteri termoelettrici  $[A]$  e  $[B]$  di questi metalli. Si ha  $[Pb] = 0$ , cioè il potere termoelettrico del piombo è nullo. Quando si suppone che, nella figura 265, il metallo C sia piombo, le due curve rappresentano i poteri termoelettrici  $[A]$  e  $[B]$ , restando vero quanto detto su questa figura. Quando  $e$  è una funzione quadratica come la (11), il potere termoelettrico  $\varphi(t)$  della coppia è una funzione lineare della temperatura  $t$ ,

$$\varphi(t) = [A, B] = a + 2bt \quad (11.0.32)$$

Le formule (15) danno

$$\varphi(t) = [A, B] = \frac{2\eta_m}{\tau^2} (\tau - t) \quad (11.0.33)$$

È chiaro che anche i poteri termoelettrici dei metalli presi isolatamente devono essere funzioni lineari di  $t$ , poiché si ha  $[A] = [A, Pb]$ .

Tait (1873) ha determinato la funzione  $\varphi(t)$  per molti metalli (rispetto al piombo) e scoperto che questa funzione è effettivamente lineare. Ha calcolato i valori numerici delle costanti  $a$  e  $2b$  della formula (31): Everett li ha misurati in unità el. mag. C.G.S. ( $10^{-8}$  volt) e ottenuto, ad esempio,  $[Fe] = 1734 - 4,87t$ ,  $[Zn] = 234 + 2,40t$ ,  $[Pd] = 625 - 3,59t$ , ecc. Si trova graficamente un sistema di linee rette, in cui la retta  $Pb] = 0$  coincide con l'asse delle ascisse. Anche Knott e Mc Gregor (1878) hanno determinate le costanti della funzione  $\varphi(t)$  e ottenuto valori numerici leggermente differenti. Quando si ammette che la funzione  $\varphi(t)$  è lineare, si devono sostituire le due curve di figura 265 con rette, i cui punti di intersezione determinano i punti neutri e le aree i valori di  $E$ , come già spiegato in precedenza. La determinazione delle costanti  $a$  e  $b$  della formula (31) è stata recentemente ripresa da molti fisici, in particolare da Noll (1894), Steele (1894), Jäger e Diesselhorst (1900), Holborn e Day (1900).

Non ci soffermeremo a descrivere pile e batterie termoelettriche. Abbiamo indicato nel Volume II, Cap. I, § 10, la costruzione di diverse batterie termoelettriche, tra le altre quella della sensibilissima batteria di Rubens. Le batterie termoelettriche sono insiemi di termoelementi, dove una serie di saldature può essere portata ad alta temperatura utilizzando bruciatori a gas o anche a carbone incandescente, e che forniscono una corrente sufficientemente intensa da essere utilizzata in tecnologia. Le saldature la cui temperatura deve essere elevata si trovano intorno alla fonte di calore, mentre le saldature intermedie sono il più lontano possibile da essa, verso l'esterno, dove vengono raffreddate dall'aria circostante. Tali sono le batterie di Noé (melchior e lega di Zn con Sb), di Clamond (Fe e lega di Zn con Sb), di Marcus (lega di Cu-Zn e lega di Zn-Pb). La forza elettromotrice di queste batterie può raggiungere diversi volt; furono costruite anche batterie dove  $E$  salì a 20 volt, per una resistenza interna di 4 ohm. L'efficienza delle batterie termoelettriche è generalmente molto bassa. Nell'apparato Clamond non supera 0,002. Hoffmann (1898) ha determinato l'efficienza  $\eta$  di numerosi termoelementi semplici; per l'elemento (Fe, lega di Cu-Ni), si ha a  $500^\circ$ ,  $\eta = 0,000134$ ; per (Fe, Ni), si ha, a  $500^\circ$ ,  $\eta = 0,0000385$ ; per (Fe, Cu), a  $300^\circ$ , si ha  $\eta = 0,0000304$ . Una monografia dettagliata sulle disposizioni e le applicazioni delle pile termoelettriche è stata pubblicata da Peters (1908).

#### 4. Fenomeni termoelettrici nei liquidi

Quando i metalli entrano in contatto con i liquidi, si osservano fenomeni termoelettrici. Intendiamo qui con liquidi le soluzioni di elettroliti; non includiamo mercurio e metalli fusi. Il mercurio

si comporta come tutti gli altri metalli. Noll ha determinato i valori di  $E$  per i sistemi (Au,Hg) e (Co,Hg); Braun e Burnie hanno studiato  $E$  per i metalli fusi. Cermak e H. Schmidt (1911) hanno studiato i fenomeni che si verificano negli elementi Sn-costantana, Sn-Fe e Pb-costantana, quando la temperatura sale in modo che Sn o Pb entrano in fusione. Si è scoperto che la fusione di un metallo non è accompagnata da alcun salto della forza termoelettrica.

I fenomeni termoelettrici, che avvengono tra metalli e liquidi, possono essere dimostrati in vari modi.

Nobili, Walker, Gore e altri ancora hanno osservato una corrente immergendo due lastre dello stesso metallo in un liquido, una fredda, l'altra calda. Faraday mise il liquido in un tubo a forma di U, riscaldò uno dei rami e introdusse elettrodi identici nei due rami del tubo. Bleckrode fece esperimenti analoghi. La direzione della corrente varia a seconda del liquido e del metallo, e anche in base all'entità della differenza di temperatura.

Bouty, riscaldando la superficie di contatto di uno degli elettrodi con il liquido, ha rilevato che, in molti casi, la forza termoelettromotrice  $E$  è proporzionale alla differenza  $t_2 - t_1$  delle temperature delle due superfici di contatto e indipendente, entro ampi limiti, dalla concentrazione della soluzione. Altre ricerche si devono a Ebeling, Brauder, Hagenbach (1894), Bagard, Emery, Henderson (1906), ecc. Hanno scoperto che per i sistemi formati da metalli e soluzioni dei sali di questi metalli,  $E$  cresce più velocemente della differenza  $t_2 - t_1$  e dipende anche in parte dalla concentrazione.

Andrews, Hankel e L. Poincaré hanno studiato i sali fusi. L. Poincaré ha scoperto che con Ag in  $AgAzO^3$ , l'elettrodo più caldo è negativo, ma con Zn in  $ZnCl^2$  è positivo. Il valore di  $E$  è all'incirca lo stesso di Bouty ottenuto per le soluzioni. Hagenbach (1898) si è occupato di amalgame e soluzioni elettrolitiche; tra  $0^\circ$  e  $70^\circ$ ,  $E$  è proporzionale a  $t_2 - t_1$ , ad eccezione dell'amalgama di piombo in  $PbCl^2$ , e aumenta con la concentrazione della soluzione.

Già Nobili (1828) aveva osservato fenomeni termoelettrici tra liquidi (soluzioni di elettroliti). Wild (1858) ed E. Becquerel (1866) furono i primi a fare uno studio approfondito di questi fenomeni. Wild si è servito di uno strumento simile a quello rappresentato in fig. 96, con la sola differenza che uno dei tubi verticali, nel punto in cui i diversi liquidi sono a contatto, era circondato da un manicotto attraverso il quale passava vapore di acqua bollente. Ha scoperto che  $E$  è approssimativamente proporzionale alla differenza di temperatura; inoltre che, nel caso di soluzioni diverse solo per concentrazione, si ottiene anche una corrente, essendo la soluzione più concentrata termoelettricamente positiva. Le soluzioni a contatto, che seguono la legge di Volta, possono essere disposte, come i metalli, in serie termoelettriche; per le altre ciò non è possibile. Altre ricerche si devono a Naccari e Battelli (1884), Donle (1886), Gockel (1890), Bagard (1892), Duane (1897), ecc. Bagard ha osservato un cambiamento di direzione della corrente, per  $t_1 = 0^\circ$  e  $t_2 = 70^\circ$ , con soluzioni di  $CuSO^4$  e  $ZnSO^4$ .

Nernst ha studiato la sua teoria degli elementi di concentrazione nel caso di un circuito termoelettrico, formato da soluzioni che non differivano per concentrazione. Abbiamo introdotto la formula

$$E = V_1 - V_2 = -\frac{u-v}{u+v}RT \log \frac{c_1}{c_2}$$

dove  $V_1$  indica il potenziale della soluzione più concentrata,  $V_2$  quello della meno concentrata,  $c_1$  e  $c_2$  ( $c_1 > c_2$ ) le concentrazioni,  $R$  la costante dei gas,  $T$  la temperatura assoluta,  $u$  e  $v$  le rispettive velocità del catione e dell'anione. Se ne deduce, per un circuito termoelettrico

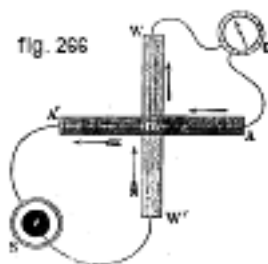
$$E = R \left( T_1 \frac{u_1 - v_1}{u_1 + v_1} - T_2 \frac{u_2 - v_2}{u_2 + v_2} \right) \log \frac{c_1}{c_2} \quad (11.0.34)$$

essendo  $u_1$  e  $v_1$  le velocità degli ioni alla temperatura  $T_1$ ,  $u_2$  e  $v_2$  quelle alla temperatura  $T_2$ . Una formula di Planck (1890), che non daremo, è relativa al caso delle soluzioni differenti aventi lo stesso grado di concentrazione. La formula (33) è stata verificata da Duane (1897),

che l'ha trovata perfettamente confermata con tutta una serie di soluzioni diluite (KCl, NaCl, HCl,  $H\text{AzO}^3$ ). Ha osservato, per due soluzioni di HCl (0,114 e 0,009 della soluzione normale) a  $t_1 = 12,5^\circ$ , un massimo molto netto di  $E$  verso  $t_2 = 50^\circ$ ; la formula (33) indica anche, per questa sostanza, un massimo prossimo alla stessa temperatura. La formula di Planck, invece, non è stata verificata per le coppie (HCl+NaCl, KCl+NaHO, HCl+KCl, NaCl+NaHO, NaCl+ $H\text{AzO}^3$ ). Bucherer (1900) ha mostrato come l'espressione di  $E$  possa essere stabilita per via puramente termodinamica e ha trovato in tal modo una delle formule di Duane. Podszus (1908) ha esteso la ricerca di Duane a molte soluzioni. Ha trovato che la forza termoelettrica tra soluzioni di elettroliti, è proporzionale alla differenza di temperatura e dipende poco dalla concentrazione. La corrente va, nella maggior parte dei casi, dal luogo più freddo al luogo più caldo, quando l'elemento è chiuso per un breve periodo. Negli elettroliti con lo stesso anione, le forze termoelettriche sono ordinate in una serie che corrisponde alla posizione del catione nel sistema periodico. La teoria di Nernst è stata verificata.

## 5. Il fenomeno di Peltier

Abbiamo già parlato del fenomeno scoperto da Peltier: quando una corrente passa attraverso la saldatura di due metalli, si verifica a questa saldatura, oltre al riscaldamento secondo la legge di Joule, il rilascio o l'assorbimento di una certa quantità di calore, a seconda della direzione della corrente. Si ha assorbimento di una certa quantità di calore  $q$ , quando la corrente va dal metallo termoelettricamente negativo a quello positivo, cioè quando ha la direzione della corrente termoelettrica che si otterrebbe se la saldatura avesse la temperatura più alta. Quando il verso della corrente è opposto, si produce in corrispondenza della saldatura una cessione di una identica quantità  $q$  di calore. L'assorbimento di calore si ottiene quando, ad esempio, la corrente va da Bi a Cu, e l'emissione quando va da Cu a Bi. Secondo il principio di Le Chetelier-Braun (Volume III, Cap. VIII, § 11), la corrente produce un'azione termica sulle saldature, che genera una corrente di verso opposto, e, viceversa, un'eventuale azione termica sulla saldatura produce una corrente che diminuisce questa azione. Peltier ha mostrato l'esattezza di questa regola in modo particolarmente chiaro mediante una croce così costituita.



Due verghe (fig. 266), una WW' di bismuto e l'altra AA' di antimonio sono legate insieme nel mezzo; due estremità W' e A' sono unite ad una batteria S e le altre due W e A ad un galvanometro G. Quando la corrente dell'elemento S attraversa la saldatura dal bismuto W' verso l'antimonio A' il galvanometro G indica una corrente che va dall'antimonio A verso il bismuto W attraverso la saldatura, ciò che denota il raffreddamento di questa. Quando la corrente parte da S nella direzione A'mW', si produce una corrente nell'altro circuito nella direzione WmA. Lenz praticava nella saldatura di Bi e Sb una piccola cavità, nella quale versava dell'acqua e immergeva il serbatoio di un termometro; circondava la saldatura stessa con ghiaccio fondente, in modo che il termometro segnasse  $0^\circ$ . Facendo poi passare una corrente da Bi a Sb, faceva scendere il termometro fino a  $-3,5^\circ$  e l'acqua si congelava. E. Becquerel (1847) ha mostrato che il valore di  $q$  è tanto maggiore quanto più i metalli sono distanti tra loro nella serie termoelettrica.

La dipendenza tra la quantità di calore  $q$  e l'intensità  $I$  della corrente è stata studiata da Quintus Icilius (1853), Frankenheim (1854), Le Roux (1867), Edlund, Sundell, Waltenhofen e altri ancora. I primi due di questi autori trovarono quasi contemporaneamente che la quantità di calore  $q$  è direttamente proporzionale all'intensità  $I$  della corrente. Facendo passare una corrente  $I$  prima in un verso, poi nell'altro, Frankenheim ha potuto misurare le quantità totali di calore  $Q_1 = q' + q$  e  $Q_2 = q' - q$  rilasciate nella piccola porzione di circuito contenente la saldatura;  $q'$  denota il calore di Joule. Calcolando  $q' = (Q_1 + Q_2) : 2$  e  $q = (Q_1 - Q_2) : 2$ , ha riconosciuto che  $q'$  è proporzionale a  $I^2$  e  $q$  a  $I$ . Edlund ha usato un termometro differenziale (Volume III), di cui ogni serbatoio conteneva una saldatura. Come si vede facilmente, le indicazioni del termometro sono proporzionali a  $Q_1 - Q_2$ , cioè misurano precisamente la quantità  $q$ . Le Roux ha posto le saldature nei due calorimetri e ha inviato una corrente  $I$  nel circuito, in un verso, poi nell'altro, durante intervalli di tempo uguali. Siano  $Q_1$  e  $Q_2$  le quantità di calore indicate dal calorimetro nel primo caso,  $Q'_1$  e  $Q'_2$  nel secondo. Nell'ipotesi in cui i calori di Joule  $q'_1$  e  $q'_2$  non sono gli stessi, si hanno le uguaglianze  $Q_1 = q'_1 + q$ ,  $Q_2 = q'_2 - q$ ,  $Q'_1 = q'_1 - q$ ,  $Q'_2 = q'_2 + q$ ; se ne deduce  $Q_1 - Q_2 = q'_1 - q'_2 - 2q$ ,  $Q'_1 - Q'_2 = q'_1 - q'_2 - 2q$  e infine  $q = \frac{1}{4} (Q_1 - Q_2 - Q'_1 + Q'_2)$ . Le esperienze di Edlund e di de Le Roux hanno confermato che  $q$  è proporzionale a  $I$ .

La quantità totale di calore  $Q$  liberata in una certa porzione del circuito contenente la saldatura, è determinata da una espressione della forma

$$Q = \alpha I^2 \pm \beta I \quad (11.0.35)$$

Quando si ha un assorbimento di calore alla saldatura, si ha

$$Q = \alpha I^2 - \beta I \quad (11.0.36)$$

Per piccoli valori di  $I$ ,  $Q$  è negativo, cioè si produce un raffreddamento alla saldatura, che è massimo quando  $I = \beta : 2\alpha$ . Per  $I = \beta : \alpha$ , si ha,  $Q = 0$  e per  $I > \beta$ , si ha  $Q > 0$ ; pertanto si ha riscaldamento alla saldatura.

Supponiamo ora che ci sia cessione o assorbimento della quantità  $q$  di calore alla saldatura, quando quest'ultima è attraversata dalla quantità unitaria di elettricità. Non sarebbe corretto prendere in considerazione  $q$  come l'energia termica equivalente al lavoro del passaggio dell'elettricità da un corpo all'altro, il cui potenziale è maggiore o minore della quantità  $e$ . Abbiamo stabilito, per via termodinamica, la formula (33)

$$q = \pm T \frac{de}{dT} \quad (11.0.37)$$

ne risulta che si ha

$$q = \pm e \quad (11.0.38)$$

soltanto quando

$$e = aT \quad (11.0.39)$$

cioè quando  $e$  è proporzionale alla temperatura assoluta, e quindi quindi la forza elettromotrice  $E$

$$E = a (T_2 - T_1) = a (t_2 - t_1) \quad (11.0.40)$$

cresce proporzionalmente alla differenza delle temperature delle saldature. Se per esempio,  $e$  è della forma

$$e = gT + hT^2 = T (g + hT) \quad (11.0.41)$$

si ha

$$\pm q = gT + hT^2 = T (g + 2hT) \quad (11.0.42)$$

Quando  $b < 0$ , si ottiene il massimo  $e = e_m = -g^2 : 4h$ , per  $T = T_m = -g : 2h$ . Introducendo le grandezze  $T_m$  e  $e_m$  al posto di  $g$  e  $h$ , viene

$$e = \frac{e_m}{T_m^2} (2T_m - T) T \quad (11.0.43)$$

$$q = \pm \frac{2e_m}{T_m^2} (T_m - t) T \quad (11.0.44)$$

dove  $T_m$  indica la temperatura assoluta del punto neutro. Quando ci si attiene all'espressione (11),  $e = e_0 + at + bt^2$ , si ha

$$q = \pm \frac{2\eta_m}{\tau^2} (\tau - t) T \quad (11.0.45)$$

si ha  $\tau - t = T_m - T$ , poiché  $T = t + 273$  e  $T_m = \tau + 273$ . Possiamo facilmente verificare l'identità delle formule (38,a) e (38,b), ponendo  $gT + hT^2 = e_0 + at + bt^2$  cioè  $a = g + 2273h$ ,  $b = h$ . Le formule (38,a) e (38,b) mostrano che  $q$  deve dipendere dalla temperatura della saldatura e che alla temperatura del punto neutro  $q = 0$  e cambia di segno; in altre parole l'assorbimento di calore si trasforma in rilascio di calore e viceversa.

La dipendenza tra il fenomeno Peltier e la temperatura è stata studiata da molti autori. Le Roux (1867) ha trovato per primo che  $q$  dipende da  $t$ ; con il termoelemento (Bi,Cu) ha ottenuto, per  $t = 100^\circ$ , un valore di  $q$  uguale a 1,28 volte il valore corrispondente a  $t = 25^\circ$ . Goke (1886) ha fatto un'analoga osservazione. Le Roux (1884) ha visto anche che con (Fe,Cu),  $q$  cambia segno ad alta temperatura. Skobeltsine e Tsinzerlig (1887) hanno fatto uno studio approfondito della saldatura (Fe,Cu) e hanno trovato che  $q$  diminuisce quando la temperatura aumenta. Battelli (1887) ha osservato per primo la scomparsa del fenomeno Peltier alla temperatura di punto neutro, nelle saldature di Pb con leghe  $Sb^{10}Sn$  e  $Sn^{18}Cd$ , e ha riconosciuto che, in sette coppie,  $q$  è espresso da una formula del tipo (38,a). Jahn (1888) ha trovato che con le saldature di Cu e Ag, Fe, Pt, Zn, Cd e Ni, la formula (35) fornisce, per la quantità  $q$ , valori numerici che concordano sufficientemente con quelli osservati direttamente. Si noti che il quoziente  $de/dt$  nella (35) non è altro che la differenza delle potenze termoelettriche dei metalli saldati, vedi (27) e (30). Bausenwein (1904) ha studiato molto attentamente le quantità  $E$  e  $q$  per (Fe,Cu) e (Fe,Ag) da  $20^\circ$  a  $800^\circ$ . Ha constatato che  $q = 0$  alla temperatura del punto neutro ( $330^\circ$  per la prima coppia,  $310^\circ$  per la seconda), come richiesto dalla teoria. Verso  $650^\circ$  cominciano a comparire deviazioni, probabilmente dovute a modifiche che avvengono nel ferro. La Rosa (1904) ha trovato che con (Zn,Fe) il fenomeno di Peltier scompare a  $36,5^\circ$ , mentre il punto neutro è a  $36,6^\circ$ . Alcuni autori hanno espresso dubbi sul rigore con cui è stabilita la formula (35). Lecher (1906) dapprima ha considerato possibile una non coincidenza esatta della temperatura, per la quale  $q = 0$ , con la temperatura del punto neutro; ma egli stesso ha dato più tardi (1906) una rigorosa dimostrazione della necessità di questa coincidenza. Lecher (1906) ha studiato anche l'elemento Fe-costantana e mostrato che cambiando la direzione della corrente, l'effetto Peltier cambia segno, rimanendo invariata la sua grandezza assoluta; la formula (34) è quindi esatta. Lo stesso elemento fu poi considerato da Cermak (1907) tra  $0^\circ$  e  $560^\circ$ ; con coulomb, si trovano i seguenti effetti in  $10^{-3}$  calorie chilogrammo e in un secondo

$0^\circ$	$20^\circ$	$130^\circ$	$240^\circ$	$320^\circ$	$560^\circ$
3,1	3,6	4,5	6,2	8,2	$12,5 \cdot 10^{-3} \text{ cal} \cdot \text{kg}$

Rziha (1907) ha osservato l'effetto Peltier con Ni-Cu da  $20^\circ$  a  $800^\circ$ ; a  $250^\circ$  compare un massimo, a  $350^\circ$  un minimo e a  $700^\circ$  un secondo massimo. Jordan (1911) ha studiato l'elemento Bi-Cu. Beck (1910) ha misurato l'effetto Peltier in Fe-costantana, Cu-costantana e Cu-Ni; ha ottenuto un'ottima conferma della formula (35).

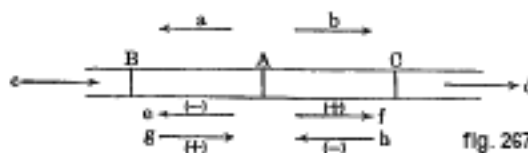
Il fenomeno Peltier si osserva anche sulla superficie di contatto dei metalli con i liquidi e tra i liquidi. Il primo caso fu considerato da Bouty (1880), Hoorweg, Jahn, Gill, Gockel e altri. Bouty e Gill hanno ottenuto risultati coerenti con la teoria generale che è stata esposta sopra. Al limite di separazione di due elettroliti, il fenomeno Peltier è difficile da dimostrare. Tuttavia è stato osservato da Schultz-Sellack (1870) e da Hoorweg (1880); Naccari e Battelli (1896), e soprattutto Bagard l'hanno studiata a fondo. Bagard ha mostrato che, anche in questo caso, la grandezza  $q$  cambia di segno alla temperatura del punto neutro.

## 6. L'effetto Thomson

Considerazioni teoriche, sulle quali si tornerà nel § successivo, hanno portato W. Thomson (Lord Kelvin) (1856) a pensare che debba esistere una differenza di potenziale non solo tra corpi di diversa natura a contatto, ma anche tra parti vicine dello stesso corpo, quando queste parti sono a temperature disuguali. Da ciò, una caduta di potenziale deve avvenire nelle parti di un conduttore dove c'è una caduta di temperatura, la direzione di queste due cadute può essere la stessa oppure no. In un circuito omogeneo chiuso la somma delle variazioni di potenziale è nulla e non si produce corrente per nessuna distribuzione di temperatura. Se una differenza di temperatura  $dt$  tra sezioni infinitamente vicine produce in esse una differenza di potenziale  $dV = f(t) dt$ ,  $f(t)$  dipendente dalla natura della sostanza, la differenza  $V_2 - V_1$  dei potenziali ai capi del conduttore, che sono alle temperature  $t_2$  e  $t_1$  è

$$V_2 - V_1 = \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt = \varphi(t_2) - \varphi(t_1) \quad (11.0.46)$$

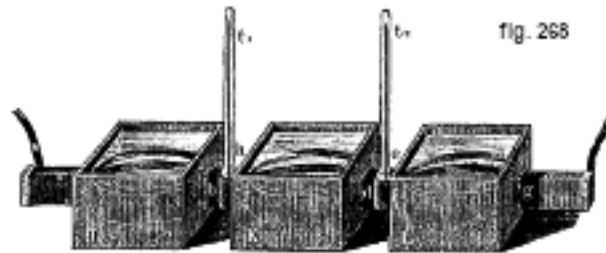
è ovviamente indipendente dalla distribuzione di temperatura lungo il conduttore. Supponiamo ora che al passaggio di una corrente attraverso una parte del conduttore, dove si ha un abbassamento di temperatura e di conseguenza anche una caduta di potenziale, si verifichi il fenomeno di Peltier, cioè che indipendentemente dalla cessione del calore di Joule, si ha un'altra cessione di calore, la corrente avente lo stesso verso nella parte considerata della caduta di potenziale, e un assorbimento, se la corrente e la caduta di potenziale sono di verso opposto. Cerchiamo di scoprire cosa deve poi accadere quando si riscalda nella parte centrale una lunga asta A (fig. 267) e poi si fa passare una corrente attraverso di essa. Siano B e C due sezioni del conduttore; le frecce  $a$  e  $b$  indicano il verso della caduta di temperatura e la corrente viene inviata nell'asta seguendo le frecce  $c$  e  $d$ .



Supponiamo innanzitutto che le cadute di potenziale abbiano il verso delle frecce  $e$  e  $f$ ; la corrente deve poi produrre nella parte BA (prescindendo dal riscaldamento dovuto al calore di Joule) un raffreddamento  $(-)$ , e nella parte AC un riscaldamento  $(+)$ . Il risultato è lo stesso come se una parte del calore fosse passata da BA in AC, ovvero come se la corrente avesse la facoltà di trasportare il calore nel suo stesso verso. Quando la direzione delle cadute di potenziale è quella delle frecce  $g$  e  $h$ , deve avvenire in BA una cessione di calore, in AC, al contrario, un assorbimento; la corrente effettuando, per così dire, un trasferimento di calore nel verso contrario al proprio. W. Thomson ha osservato infatti un apparente trasporto di calore prodotto dalla corrente. Questo trasporto è indicato come effetto Thomson. Le sostanze per le quali avviene il trasporto apparente nel verso della corrente sono dette sostanze positive; diciamo ancora, in



questo caso, che l'effetto Thomson è positivo. Quando il trasporto di calore ha verso opposto, le sostanze corrispondenti o l'effetto Thomson sono negativi. W. Thomson ha studiato Fe e Cu. Un fascio di lamine di ferro, in alcuni punti divergenti, in altri stretti, è disposto, come mostra la figura 268. La scatola K contiene acqua calda; nelle casse J e L scorre acqua fredda. I termometri  $t_1$  e  $t_2$  mostrano una certa differenza accidentale, comunque piccola, nelle temperature. Facendo passare una corrente prima in un senso, poi nell'altro, si ottengono differenze di temperatura disuguali, interpretate completamente da un apparente trasporto di calore in senso opposto a quello della corrente; il ferro è quindi una sostanza negativa. Con Cu si osserva il fenomeno opposto e il calore è, per così dire, trasportato dalla corrente; il rame è quindi una sostanza positiva.



Le Roux (1867) ha studiato con un metodo ingegnoso un gran numero di metalli puri e leghe. Due aste identiche AB e A'B' sono disposte parallelamente; le loro estremità A e A' si incontrano metallicamente e sono a 100°; le estremità B e B' sono poste in uno spazio a una temperatura di 0°. Nella parte mediana, protetta da uno schermo contro le estremità riscaldate, è interposto tra le aste una pila termoelettrica, le cui due estremità sono applicate contro le facce laterali delle aste una di fronte all'altra, per cui la pila misura la differenza di temperatura tra le parti centrali delle due aste. L'identità delle aste consente di ridurre a zero questa differenza; ma, quando le estremità B e B' sono unite ad una sorgente di corrente, la corrente evidentemente passando in una di esse nel verso dell'aumento della temperatura, e nell'altra nel verso della diminuzione della temperatura, la pila indica una differenza di temperatura, la cui entità e segno definiscono l'effetto Thomson per la sostanza di cui le aste sono formate. Le Roux ha scoperto che l'effetto Thomson è proporzionale all'intensità della corrente; ha riconosciuto inoltre che Sb, Cd, Zn, alluminio bronzo, Cu, Ag, ottone e la lega  $10Bi + 1Sb$  sono positivi; Bi, argento, Pt, Al, Sn, Fe e la lega  $5Sb + 5Cd + 1Bi$  sono negativi. Ha anche determinato i valori relativi dell'effetto, che è particolarmente grande nelle due leghe citate, in Bi, argentana, Pt, Cd, Fe e Sb. Le Roux ha osservato che l'effetto Thomson è nullo nel piombo. Hoorweg (1880), Trowbridge e Penrose (1882), così come Bidwell (1884) hanno effettuato ulteriori ricerche su vari metalli.

La quantità  $q$  di calore che si disperde in un secondo in una porzione del conduttore le cui estremità hanno una differenza di temperatura di 1°, mentre il conduttore è attraversato da una corrente  $i$  nel verso opposto al trasporto di calore, è uguale a

$$q = \sigma i \quad (11.0.47)$$

La quantità di calore  $\sigma$ , trasportata dall'unità di corrente nell'unità di tempo, in una parte del conduttore dove la caduta di temperatura è di 1°, è stato chiamato da W. Thomson il calore specifico dell'elettricità nella sostanza data. Questo calore specifico è positivo quando il metallo è positivo, cioè quando  $q$  scompare in presenza di una corrente che va dai luoghi più freddi ai luoghi più caldi.

Battelli (1886) ha dato per primo dei valori numerici della grandezza  $\sigma$  e ne ha determinato la dipendenza dalla temperatura. Ha usato il metodo di Le Roux, con la differenza che le parti centrali delle due aste (che erano laccate) passavano attraverso due calorimetri a mercurio

identici, permettendo di misurare il calore  $q$  di Thomson. Vengono misurate anche le rispettive temperature delle aste ai due lati dei calorimetri, con l'ausilio di elementi termoelettrici, per ottenere la temperatura media delle parti di tali aste all'interno dei calorimetri; l'entità dell'effetto Thomson è correlata a queste temperature. Battelli ha dedotto dai suoi esperimenti che  $q$  è proporzionale all'intensità  $i$  della corrente e, escluso il ferro, proporzionale alla temperatura assoluta  $T$ , per cui si ha

$$q = aTi \quad (11.0.48)$$

indicando  $a$  una costante dipendente dalla sostanza. Misurando  $i$  in unità C.G.S. e  $q$  in grammi-calorie, Battelli ha trovato i valori seguenti per la quantità  $10^8 a$  (intensità di corrente = 10 ampère):

Cd	Sb	Bi	Pb	Argentana	$10Bi + 1Sb$
3,678	7,081	-3,909	0,0433,	-2,560	10,002

Come si può vedere, Battelli ha osservato l'effetto Thomson nel piombo, anche se in misura molto ridotta. Confrontando la (40) e (40,a), si trova,

$$\sigma = aT \quad (11.0.49)$$

in altre parole, il calore specifico dell'elettricità è, per una data sostanza, proporzionale alla temperatura assoluta.

Haga (1887) ha studiato l'effetto Thomson in Pt, Pb e Hg. Con Pt, la formula (40,b) non è stata verificata. Con Pb,  $\sigma$  è negativo quando il metallo è puro, positivo invece nel metallo commerciale. È molto interessante notare che l'effetto Thomson si verifica anche nel mercurio, dove la comparsa di una differenza di potenziale non può essere attribuita a variazioni strutturali dovute a variazioni di temperatura. La quantità  $\sigma$  è negativa per il mercurio e circa 3 volte minore che per il Bi.

Laws (1903) ha considerato le leghe di Bi con Zn e ha scoperto che in queste leghe  $\sigma$  aumenta più velocemente che proporzionalmente alla temperatura assoluta. Passeremo sulle ricerche di King (1898) e di Hall (1905) e citeremo in particolare l'importante lavoro di Legier (1905), che ha determinato la dipendenza tra  $\sigma$  e la temperatura per Fe, Cu, Ag e costantana. Esprimendo, nella formula (40), l'intensità della corrente in ampere, la quantità di calore in grammi-caloria, Lecher ha ottenuto i seguenti valori numerici:

per il ferro tra  $91^\circ$  e  $441^\circ$ ,

$$\sigma = - \left( 1,860 + 0,02057t - 0,00005120t^2 \right) 10^{-6} \quad (11.0.50)$$

per il rame tra  $252^\circ$  e  $678^\circ$ ,

$$\sigma = + (3,01 + 0,00662t) 10^{-7} \quad (11.0.51)$$

per l'argento tra  $123^\circ$  e  $525^\circ$ ,

$$\sigma = + (7,363 + 0,00887t) 10^{-7} \quad (11.0.52)$$

per la costantana tra  $87^\circ$  e  $481^\circ$

$$\sigma = - \left( 4,73 + 6,10 \cdot 10^{-3}t - 2,40 \cdot 10^{-5}t^2 \right) 10^{-6} \quad (11.0.53)$$

Per nessuna di queste sostanze è confermata la formula (40,b). Per il ferro il valore assoluto ( $\sigma \cdot 10^{-6}$ ) aumenta dapprima con la temperatura da 3,23 a 3,92, raggiunge un massimo intorno a  $185^\circ$  e poi scende a 1,06 a  $440^\circ$ . Per la costantana,  $\sigma$  è anche una funzione non lineare della temperatura e la quantità  $-\sigma \cdot 10^{-6}$  diminuisce quando la temperatura aumenta. Per il rame e

l'argento,  $\sigma$  è una funzione linearmente crescente della temperatura, ma l'aumento è più lento della proporzionalità alla temperatura assoluta.

Più recentemente, l'effetto Thomson è stato studiato da Hall (1906), Schoute (1907), Berg (1910), W. König (1910), Cermak (1910), Aalderink (1910), Koenigsberger e Weiss (1911). Schoute si è occupato del mercurio e ha ottenuto una buona conferma della formula (40,b). Berg ha considerato l'effetto Thomson nel Cu, Fe e Pt; ha osservato nel Cu un piccolo effetto positivo con un piccolo coefficiente di temperatura, nel Pt un grande effetto negativo con una altrettanto piccola dipendenza dalla temperatura, nel Fe un grande coefficiente di temperatura, tale che a  $-50^\circ$  l'effetto è nullo e, al di sotto di questa temperatura, positivo; anche la formula (40,b) non è più approssimativamente verificata. Cermak ha constatato in Cd, Zn e Pb un effetto positivo, in Al, Sn e Hg un effetto negativo; questi effetti sono molto piccoli in Pb, Sn e Al, molto grandi nel Cd; ha studiato questi metalli a temperature variabili da  $0^\circ$  a  $35^\circ$ : quando la temperatura aumenta, l'effetto aumenta, ma non secondo la formula (40,b). Nel passaggio allo stato liquido del metallo, l'effetto Thomson non subisce brusche variazioni. Koenigsberger e Weiss hanno studiato Fe, Si, grafite e solfuro di molibdeno; hanno osservato nel silicio un effetto Thomson così forte che, in certe condizioni, una corrente elettrica può produrre freddo, invece che calore.

Bagard (1893) ha studiato l'effetto Thomson nei liquidi; è riuscito a dimostrare l'esistenza di questo effetto, nelle soluzioni di  $CuSO^4$ ,  $ZnSO^4$  e  $ZnCl^2$ , che sono tutte e tre positive.

## 7. Teoria dei fenomeni termoelettrici

Ci sono numerose ricerche teoriche sui fenomeni termoelettrici. Partendo da alcune ipotesi sulla causa delle differenze di potenziale in un circuito non omogeneo e non uniformemente riscaldato, costituito da conduttori appartenenti prevalentemente alla prima classe, gli autori delle varie teorie proposte hanno cercato di collegare tra loro il fenomeno della corrente termoelettrica, il fenomeno di Peltier e l'effetto Thomson, e di stabilire le leggi o le regole seguite da questi fenomeni. Un'esposizione dettagliata e molto completa di queste teorie, fino alle più recenti, si troverà nell'opera di Weinstein, *Thermodynamik und Kinetik der Körper*, Volume III, pagine 348-400, Braunschweig 1905. Un'altra esposizione è stata recentemente data di Cermak; in *Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik*, 8, pag. 241. 1911.

Parleremo qui brevemente delle sole teorie termodinamiche pure, senza considerare le teorie elettroniche che presenteremo nel volume seguente.

Le prime teorie termodinamiche furono pubblicate quasi contemporaneamente da Clausius (1853) e W. Thomson (1854). Clausius non conosceva ancora l'effetto Thomson, quindi non ha incluso quest'ultimo tra i fenomeni della sua ricerca. La teoria di Clausius è essenzialmente la seguente. Consideriamo un circuito chiuso, costituito da due metalli saldati nei punti A e B; le temperature delle saldature differiscono infinitamente poco, essendo  $t$  la temperatura della saldatura A,  $t + dt$  quella della saldatura B. Clausius ammette che il movimento termico che ha luogo nella saldatura dà luogo a una differenza di potenziale, questo movimento spingendo le elettricità di nomi contrari in versi opposti, fino a formare un doppio strato che bilancia l'azione del movimento termico. L'entità della differenza di potenziale che si verifica dipende dalla temperatura; supponiamola uguale a  $e$  in A, a  $e + de$  in B. Nel circuito chiuso agisce una forza elettromotrice infinitamente piccola  $dE = de$ . Sia  $\eta$  la quantità di elettricità che attraversa il circuito durante un certo intervallo di tempo. Clausius ammette che il lavoro delle forze elettriche alla saldatura, che è espresso dal prodotto di  $\eta$  e la differenza di potenziale, è equivalente al calore di Peltier. Abbiamo quindi alla saldatura A (in unità meccaniche) il calore di Peltier  $q_2 = e\eta$  e alla saldatura B il calore di Peltier  $q_1 = (e + de)\eta$ . Il calore  $q_1$  è assorbito alla saldatura più calda B; il calore  $q_2$  è rilasciato alla saldatura più fredda A. Notiamo che per  $\eta = 1$ , si ottiene, per il calore di Peltier,  $q = e$ ; ma, come abbiamo visto, questo risultato non è esatto, poiché  $q$  è espresso dalla formula meno semplice (35). Dal punto di vista di Clausius, si vede che

il passaggio della quantità di elettricità  $\eta$  nel circuito è accompagnato da un assorbimento di calore  $q_1 = (e + de)\eta$  alla giunzione calda B e da una cessione di calore  $q_2 = e\eta$  alla giunzione fredda A. Se  $dE = de$  è infinitamente piccolo, si ottiene una corrente infinitamente debole; si può quindi trascurare il calore di Joule, che è proporzionale al quadrato dell'intensità della corrente, il che permette di considerare l'intero processo come reversibile e di applicargli il secondo principio della termodinamica. Siano  $T = t + 273$  e  $T + dT$  le temperature assolute delle saldature; si ha, per ogni ciclo reversibile (Volume III, Cap. VIII, § 13),

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{T}{T + dT}$$

Sostituendo i valori  $q_1 = (e + de)\eta$  e  $q_2 = e\eta$ , viene

$$\frac{de}{e} = \frac{dT}{T}$$

o integrando

$$e = aT \quad (11.0.54)$$

con  $a$  un fattore costante. Clausius trova che la forza elettromotrice di contatto tra due conduttori è proporzionale alla temperatura assoluta, ciò che dà, per la forza termoelettromotrice  $E$ , l'espressione

$$E = e_2 - e_1 = a(T_2 - T_1) = a(t_2 - t_1) \quad (11.0.55)$$

cioè la formula (10). Abbiamo visto che la formula esatta (35) conduce, proprio nell'ipotesi che  $e = aT$ , all'uguaglianza  $q = e$ , vedi (35,a) e (36,a), cioè alla formula (42,a). Naturalmente, tale l'ipotesi, posta alla base della teoria di Clausius, porta inversamente all'uguaglianza  $e = aT$ . Clausius sapeva che l'uguaglianza (42,a) non è confermata dall'esperienza e già nel 1853 aveva indicato che questa discrepanza si poteva spiegare ammettendo che ci sono, in un metallo omogeneo, differenze di potenziale tra le parti disugualmente calde di questo metallo. Supponeva, tuttavia, che ciò fosse possibile solo nei metalli in cui un cambiamento di temperatura è accompagnato da un cambiamento di stato molecolare.

La teoria di Clausius fu sviluppata in questo senso da Budde (1874), le cui conclusioni lo stesso Clausius considerò successivamente molto valide (vedi la sua *Mecanische Wärmetheorie*, Vol. II, pp. 193-203, 1879). Va inoltre osservato che la teoria di Budde somiglia in molti punti alla teoria data precedentemente, nel 1854, da W. Thomson.

I ragionamenti di Budde sono sostanzialmente i seguenti. L'esistenza di una serie termoelettrica indica che si deve considerare la costante  $a$  nella (42) come la differenza di due grandezze  $\alpha$  e  $\beta$ , caratteristiche rispettivamente dei due metalli; si ha quindi

$$e = (\alpha - \beta) T \quad (11.0.56)$$

essendo  $\alpha$  e  $\beta$  funzioni della temperatura  $T$ . Una forza elettromotrice appare anche tra due strati adiacenti qualsiasi del conduttore; se uno di questi strati è caratterizzato dalla grandezza  $\alpha$ , quello adiacente dalla grandezza  $\alpha + d\alpha$ , e se la temperatura della superficie di contatto è  $T$ , la forza elettromotrice  $Td\alpha$  si genera tra i due strati considerati. Siano  $\alpha_1, \beta_1$  e  $\alpha_2, \beta_2$  i valori di  $\alpha, \beta$  alle saldature; la forza elettromotrice totale  $E$  nel circuito chiuso è uguale a

$$E = \int_{T_1}^{T_2} Td\beta + (\alpha_2 - \beta_2) T_2 + \int_{T_1}^{T_2} Td\alpha + (\alpha_1 - \beta_1) T_1 \quad (11.0.57)$$

Integrando per parti, si ha, ad esempio,

$$\int_{T_1}^{T_2} Td\beta = T_2\beta_2 - T_1\beta_1 - \int_{T_1}^{T_2} \beta dT$$

e si trova

$$E = \int_{T_1}^{T_2} (\alpha - \beta) dT \quad (11.0.58)$$

o, ponendo  $T_1 = T_0$  e  $T_2 = T$ ,

$$E = \int_{T_0}^T (\alpha - \beta) dT \quad (11.0.59)$$

Da ciò si deduce per il potere termoelettrico

$$\frac{dE}{dT} = \alpha - \beta \quad (11.0.60)$$

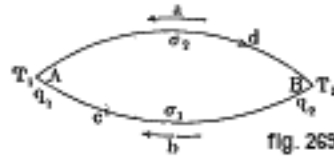
Le formule (42,b) e (44) danno

$$e = T \frac{dE}{dT} = (\alpha - \beta) T \quad (11.0.61)$$

Studiando  $E$  in funzione della temperatura, si trova la differenza  $\alpha - \beta$ , e, conoscendo una di queste quantità (per qualsiasi metallo) è possibile determinare l'altra. Se si pone, ad esempio,  $\beta = 0$  per il piombo, si ottiene  $\alpha$  per tutti gli altri metalli. Quando la quantità unitaria di elettricità passa attraverso la saldatura, si ha, secondo Budde, per il calore di Peltier

$$q = \pm e = \pm T \frac{dE}{dT} \quad (11.0.62)$$

Passiamo ora alla teoria di W. Thomson. Ha avanzato per primo (1802) l'ipotesi che una caduta di temperatura fosse legata a una caduta di potenziale nello stesso verso o in quello opposto, e che una corrente, scorrendo in un conduttore diversamente caldo, fosse accompagnata da un rilascio o assorbimento di calore; più tardi (1856), dimostrò con esperimenti diretti, come abbiamo visto, l'esistenza di questo fenomeno, che ricevette il nome di effetto Thomson. Una determinata sostanza è caratterizzata da una certa quantità  $\sigma$ , chiamata da Thomson calore specifico dell'elettricità. Ricorderemo che  $\sigma$  è positivo, quando il passaggio di elettricità dal luogo più freddo al luogo più caldo è accompagnato da un assorbimento di calore, cioè quando la corrente trasporta, per così dire, del calore. Abbiamo anche indicato le più recenti misure della grandezza  $\sigma$ , tra le quali le più importanti sono dovute a Battelli (1886) e Lecher (1905). Le considerazioni teoriche che hanno guidato W. Thomson possono essere così riassunte.



Siano A e B le saldature di due metalli (fig. 269),  $T_1$  e  $T_2$  le loro temperature ( $T_2 > T_1$ ), in modo che il movimento del calore avvenga nella direzione segnata dalle frecce  $a$  e  $b$ . Prendiamo come verso della corrente termoelettrica quello delle frecce  $c$  e  $d$  e indichiamo con  $E$  la forza elettromotrice totale agente nel circuito. Supponiamo che la quantità unitaria di elettricità passi attraverso il circuito; l'energia elettrica totale che appare nel circuito è quindi  $E$ . Deve essere uguale al calore disperso nel circuito. Sia  $q_1$  la quantità di calore che appare alla giunzione fredda A,  $q_2$  quella che scompare alla giunzione calda B: misureremo  $q_1$  e  $q_2$  in unità meccaniche. Nel conduttore ( $\sigma_2$ ) la corrente ha verso opposto a quello del movimento del calore; in ogni strato del conduttore ( $\sigma_2$ ) il calore  $\sigma_2 dT$  scompare; in ogni strato dell'altro conduttore ( $\sigma_1$ ) appare il

calore  $\sigma_1 dT$ , dovendosi sempre considerare  $dT$  positivo. Il principio di conservazione dell'energia dà quindi

$$E = q_2 - q_1 + \int_{T_1}^{T_2} (\sigma_2 - \sigma_1) dT \quad (11.0.63)$$

Inoltre, W. Thomson considera l'intero processo di trasporto del calore come un ciclo reversibile, il che è vero solo per un'intensità di corrente infinitamente piccola, mentre il calore di Joule può essere trascurato. Si ha, per la seconda legge della termodinamica,

$$\frac{q_2}{T_2} - \frac{q_1}{T_1} + \int_{T_1}^{T_2} \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{T} dT = 0 \quad (11.0.64)$$

Se si pone  $T_1 = T_0$ ,  $T_2 = T$ ,  $q_2 = q$ , le due equazioni (46) e (46,a) si possono scrivere

$$\frac{dE}{dT} = \frac{dq}{dT} + \sigma_2 - \sigma_1 \quad (11.0.65)$$

$$\frac{d\left(\frac{q}{T}\right)}{dT} + \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{T} = 0 \quad (11.0.66)$$

Differenziando, quest'ultima dà

$$\frac{q}{T} = \frac{dq}{dT} + \sigma_2 - \sigma_1 \quad (11.0.67)$$

e dalle (47) e (47,b) si deduce

$$\frac{dE}{dT} = \frac{q}{T} \quad (11.0.68)$$

cioè

$$q = T \frac{dE}{dT} \quad (11.0.69)$$

come espressione del calore di Peltier. Dalla (47,c), si ha

$$E = \int_{T_1}^{T_2} \frac{q}{T} dT \quad (11.0.70)$$

Se si porta la (47,d) nella (47,b), viene

$$\sigma_2 - \sigma_1 = -T \frac{d^2 E}{dT^2} \quad (11.0.71)$$

Le ultime tre formule esprimono le proposizioni più importanti della teoria di W. Thomson. Tait ha ammesso che la quantità  $\sigma$  è, per una data sostanza, proporzionale alla temperatura assoluta, cioè che si può porre

$$\sigma = aT \quad (11.0.72)$$

In questo caso, la (47,a) dà

$$\frac{d\left(\frac{q}{T}\right)}{dT} + a_2 - a_1 = 0$$

da cui

$$\frac{q}{T} + (a_2 - a_1) T + C = 0$$

Sia  $\tau$  la temperatura del punto neutro, per la quale  $q = 0$ ; si ha  $(a_2 - a_1)\tau + C = 0$  e pertanto

$$q = (a_2 - a_1)(\tau - T)T \quad (11.0.73)$$

Poniamo  $a_2 - a_1 = k$ ; portando la (49,a) nella (48), si ha

$$E = k(T_2 - T_1) \left[ \tau - \frac{T_1 + T_2}{2} \right] \quad (11.0.74)$$

questa formula è identica a quella di Avenarius, vedi (17). Abbiamo visto che Battelli ha dedotto dai suoi esperimenti la relazione  $\sigma = aT$ , ma che le ricerche più recenti di Lecher (1905) non concordano affatto con essa.

Tra le teorie termoelettriche proposte prima del 1885, va ricordata anche quella di F. Kohlrausch (1875). Si basa sul presupposto che qualsiasi flusso di calore sia accompagnato da un trasporto di elettricità e che viceversa qualsiasi flusso di elettricità in un conduttore uniformemente caldo sia accompagnato da un trasporto di calore; in altre parole, il calore porta con sé l'elettricità e l'elettricità porta con sé il calore. Questo punto di partenza permette a Kohlrausch di spiegare i fenomeni termoelettrici che abbiamo considerato.

Molte teorie termoelettriche furono pubblicate dal 1885. Le più importanti sono dovute a Lorentz (1885), Duhem (1886), Boltzmann (1887), Planck (1889), W. Voigt (1896), Riecke (1898), Liebenow (1899), Drude (1900), Wiedeburg (1900), Weinstein (1905), Lecher (1906), Krüger (1910), Bernoulli (1911), Königsberger e Weiss (1911), Altenkirch (1911) e altri. La presentazione di queste teorie, che si basano su ipotesi molto diverse e in parte molto complicate, andrebbero oltre lo scopo di questo libro. Noteremo solo che le teorie più recenti cercano di spiegare i fenomeni termoelettrici basandosi sulla teoria degli elettroni; abbiamo già detto che su questo nuovo punto di vista torneremo nel Volume successivo.





# 12. Azioni ponderomotrici del campo magnetico

## 1. Introduzione

Abbiamo considerato nei capitoli precedenti, le proprietà e le due sorgenti (magneti e correnti) del campo magnetico. Passiamo ora alle azioni di questo campo sui corpi che contiene e trattiamo anzitutto delle azioni puramente meccaniche, cioè delle forze che possono mettere in moto questi corpi.

Le forze magnetiche agiscono, per loro stessa definizione, sul magnetismo libero; agiscono anche sulla corrente. Sappiamo già che il magnetismo libero è semplicemente fittizio e non può essere separato dal magnete stesso. Abbiamo anche considerato finora la corrente elettrica come un fenomeno che si verifica in certi corpi, nei conduttori. Le forze magnetiche agiscono direttamente sul magnetismo e sulla corrente, ma questa azione si trasmette sempre, in qualche modo, al corpo, magnete o conduttore di corrente, al quale è legato l'oggetto dell'azione immediata. Dobbiamo quindi parlare delle azioni del campo magnetico che si chiamano ponderomotorici (per distinguerle dalle azioni elettromotrici), in primo luogo sui magneti, e in secondo luogo sui conduttori attraverso i quali passa una corrente elettrica. In quest'ultimo caso si dice solitamente per abbreviazione che c'è azione sulla corrente, intendendo con ciò l'azione sui conduttori percorsi dalla corrente.

Nello studio delle forze ponderomotrici, cui sono sottoposte le calamite e le correnti in un dato campo magnetico, si deve porre, in certi casi, una particolare attenzione alle connessioni che intervengono nell'equilibrio delle calamite o delle correnti, queste ultime possedendo solo una mobilità compatibile con questi collegamenti. Si possono considerare, ad esempio, le condizioni di equilibrio di magneti o di correnti soggette a rotazione attorno a determinati assi.

Come abbiamo visto, un campo magnetico può essere dovuto alla presenza di magneti o correnti; sembra quindi che ci troveremmo di fronte a quattro casi essenzialmente diversi di azioni ponderomotrici nel campo magnetico; possiamo infatti avere magneti in un campo di magneti, magneti in un campo di correnti, correnti in un campo di magneti e infine correnti in un campo di correnti. Se si immagina che la causa delle azioni ponderomotrici osservate sia trasportata dal campo stesso alla sorgente di questo campo, si possono quindi considerare le seguenti quattro azioni: magneti su magneti, magneti su correnti, correnti su magneti e correnti su correnti. Ma, poiché i magneti e le correnti, che subiscono azioni ponderomotrici, sono essi stessi sorgenti di campo magnetico, è chiaro che i magneti e le correnti che costituiscono le sorgenti del dato campo sono soggetti contemporaneamente ad azioni ponderomotrici. Dobbiamo quindi considerare le azioni reciproche tra le rispettive sorgenti di due campi magnetici, esistenti simultaneamente e, per così dire, sovrapposti. Secondo la terza legge di Newton, cioè secondo la legge dell'uguaglianza di azione e reazione, il problema delle azioni reciproche tra una corrente e un magnete non comprende due casi ben distinti, in uno dei quali si tratterebbe dell'azione di una corrente su un magnete, nell'altro dell'azione di un magnete su una corrente; queste azioni infatti si riducono entrambe, secondo la legge precedente, a forze della stessa grandezza, ma opposte. Dobbiamo quindi distinguere non quattro, ma solo tre casi essenzialmente diversi di azione reciproca:

1. Mutua azione dei magneti,

2. Mutua azione di magneti e correnti,
3. Mutua azione delle correnti.

In pratica, di solito si tratta di due corpi, uno dei quali ha una posizione invariabile, e si studiano solo le forze sotto l'azione delle quali l'altro corpo si mette in moto o assume una determinata posizione di equilibrio. Si possono quindi effettivamente considerare separatamente quattro casi di azione reciproca tra magneti e correnti; ma non bisogna dimenticare che in fondo due di questi casi non sono distinti. Naturalmente è anche di grande interesse considerare le circostanze in cui i due corpi che agiscono l'uno sull'altro sono mobili; queste circostanze si prestano a una facile realizzazione pratica. Approfondiremo i tre casi di azione reciproca che abbiamo enumerato.

## 2. Mutua azione dei magneti

Per sottoporre al calcolo le forze che agiscono su un magnete posto nel campo magnetico di un altro magnete, partiamo dalla legge di Coulomb, già utilizzata in diverse occasioni per stabilire varie formule. Misurando la quantità di magnetismo mediante l'unità elettromagnetica e assumendo che la permeabilità magnetica  $\mu = 1$  per il mezzo circostante, la legge di Coulomb è espressa dalla seguente formula, vedi (3),

$$f = \frac{mm'}{r^2} \quad (12.0.1)$$

dove  $m, m'$  sono due masse magnetiche distanti  $r$  e dove  $f$  è l'intensità della forza che agisce su  $m$  e  $m'$ . Questa forza è repulsiva quando  $m$  e  $m'$  hanno lo stesso segno, attrattiva quando hanno segno opposto.

Si può fare la verifica di questa legge di Coulomb in parte con i due metodi che si impiegano per essere sicuri dell'esattezza dell'altra legge di Coulomb relativa alle forze elettriche. Ma bisogna tener conto di due circostanze che complicano la questione, quando si ha a che fare con i magneti. Innanzitutto, nello studio alla superficie della Terra dell'azione di un magnete (o di una corrente) su un altro magnete, non bisogna perdere di vista il fatto che questo secondo magnete è sottoposto alla forza del magnetismo terrestre, effetto che si manifesta nei suoi movimenti, nella sua posizione di equilibrio, ecc. Una seconda circostanza, che ha qui un'importanza del tutto particolare, è che la distribuzione del magnetismo all'interno di un magnete e sulla sua superficie non può essere determinata esattamente; il calcolo non può quindi essere condotto in modo tale che l'azione reciproca osservata sia il risultato delle azioni reciproche di tutte le particelle di magnetismo libero di uno dei magneti su tutte le particelle di magnetismo libero dell'altro magnete. Ci sono solo due casi in cui si può supporre tutto il magnetismo libero di un magnete concentrato ai suoi poli; è quando il magnete si trova in un campo uniforme, e quando si considera l'azione di un magnete su punti, la cui distanza dal magnete è molto grande rispetto alle dimensioni lineari di quest'ultimo.

Indicheremo i due metodi con cui Coulomb ha verificato la parte della sua legge, secondo la quale l'azione reciproca  $f$  tra due masse magnetiche  $m$  e  $m'$  è inversamente proporzionale al quadrato della distanza  $r$  tra di esse.

Il primo di questi metodi, il metodo delle oscillazioni è quasi identico al metodo per determinare la distribuzione del magnetismo libero su un magnete. Un magnete il più lungo possibile è disposto verticalmente. Nel piano orizzontale, passante per uno dei suoi poli, c'è un ago magnetico, che può oscillare in questo piano; inoltre il piano passante per l'asse del magnete e per il centro dell'ago magnetizzato coincide con il piano del meridiano magnetico. Sia  $H_0$  la componente orizzontale dell'intensità del magnetismo terrestre,  $H_1$  e  $H_2$  le rispettive intensità del campo del magnete alle distanze  $r_1$  e  $r_2$  dal polo considerato,  $n_0$  il numero di oscillazioni dell'ago magnetizzato in assenza del magnete,  $n_1$  e  $n_2$  i numeri di oscillazioni di questo ago alle distanze

$r_1$  e  $r_2$ . Si ha allora  $H_0 = cn_0^2$ ,  $H_0 + H_1 = cn_1^2$ ,  $H_0 + H_2 = cn_2^2$ , essendo  $c$  un fattore di proporzionalità; se ne deduce  $H_1 = c(n_1^2 - n_0^2)$ ,  $H_2 = c(n_2^2 - n_0^2)$ . Se la legge è esatta, si deve avere  $H_1 : H_2 = r_2^2 : r_1^2$  e quindi

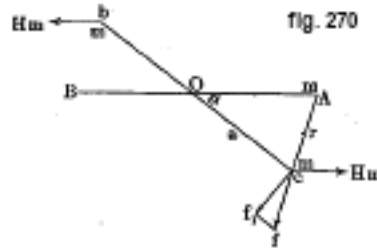
$$\frac{n_1^2 - n_0^2}{n_2^2 - n_0^2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \quad (12.0.2)$$

Gli esperimenti di Coulomb hanno confermato questa uguaglianza, sebbene con un'approssimazione piuttosto grossolana, per diversi valori di  $r_1$  e  $r_2$ .

Il secondo metodo di Coulomb si basa sull'uso della bilancia di torsione. Daremo a questo metodo una forma più generale di quella adottata dallo stesso Coulomb. Sia  $AB$  (fig. 270) la posizione del magnete mobile, che si trova nel meridiano magnetico quando il filo è senza alcuna torsione. Se si torce il filo di un angolo  $\varphi_0$ , il magnete è deviato di un certo angolo  $\alpha_0$ . Mediante la formula (11-12), nella quale si ha ora  $\varphi = \alpha_0$ , si ottiene l'uguaglianza

$$C\varphi_0 = MH \sin \alpha_0 \quad (12.0.3)$$

essendo  $C$  il coefficiente di torsione del filo,  $M$  il momento magnetico del magnete e  $H$  la componente orizzontale dell'intensità del magnetismo terrestre.



Portiamo in A il polo  $m_1$  di un magnete verticale, polo che ha lo stesso nome del polo del magnete mobile che si trova in A. Quest'ultimo magnete viene poi deviato di un certo angolo  $\alpha$ , la vera torsione data al magnete al filo è uguale a  $\varphi$ . La condizione di equilibrio è allora, vedi fig. 270.

$$f_1 a = f a \cos \frac{\alpha}{2} = C\varphi + MH \sin \alpha = C \left( \varphi + \varphi_0 \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_0} \right)$$

Quando l'angolo di torsione è uguale a  $\varphi'$ , si ottiene l'angolo  $\alpha'$  e la forza  $f'$  e si ha

$$f' a \cos \frac{\alpha'}{2} = C \left( \varphi' + \varphi_0 \frac{\sin \alpha'}{\sin \alpha_0} \right)$$

da cui

$$\frac{f}{f'} = \frac{\varphi \sin \alpha_0 + \varphi_0 \sin \alpha}{\varphi' \sin \alpha_0 + \varphi_0 \sin \alpha'} \cdot \frac{\cos \frac{\alpha'}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}$$

Questo rapporto  $f/f'$  delle forze è dato dall'esperienza. Secondo la legge di Coulomb, si deve avere, si veda la (10-7a)

$$f : f' = \sin^2 \frac{\alpha'}{2} : \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

Uguagliando queste due espressioni di  $f : f'$ , si trova

$$\sin \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\alpha}{2} (\varphi \sin \alpha_0 + \varphi_0 \sin \alpha) = \sin \frac{\alpha'}{2} \tan \frac{\alpha'}{2} (\varphi' \sin \alpha_0 + \varphi_0 \sin \alpha')$$

Risulta pertanto, per ogni torsione del filo

$$\sin \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\alpha}{2} (\varphi \sin \alpha_0 + \varphi_0 \sin \alpha) = \text{cost} \quad (12.0.4)$$

se la legge di Coulomb è esatta. Le osservazioni confermano, nei limiti degli inevitabili errori, che l'espressione (3) è costante:  $\varphi_0$  e  $\alpha_0$  sono, come abbiamo detto sopra, determinati da una esperienza preliminare.

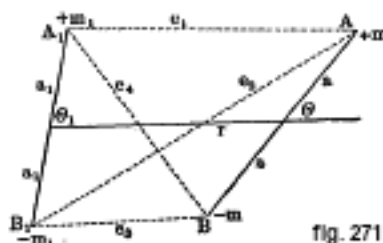
La verifica più precisa della parte della legge di Coulomb relativa alla dipendenza tra  $f$  e  $r$  si deve a Gauss; indicheremo in seguito il metodo da lui seguito.

La seconda parte della legge di Coulomb, che esprime la relazione tra la forza  $f$  e le quantità  $m$  e  $m_1$  del magnetismo libero, non può essere verificata sperimentalmente, perché non sono disponibili mezzi per far variare  $m$  o  $m_1$  in un rapporto determinato, come può essere fatto per le cariche elettriche. Si conosce l'esistenza della quantità  $m$  solo dalla sua azione, e si fa un'ipotesi, assumendo la quantità  $m$ , in circostanze identiche, proporzionale a questa azione; nella definizione di  $m$  si assume quindi già che la seconda parte della legge di Coulomb sia esatta. Qui, però, c'è una certa conferma indiretta. Siano A, B, C, D, ecc. i poli di diversi magneti; si constata che il rapporto delle azioni dei poli A e B rimane lo stesso, qualunque sia il polo C, D, ecc. su cui queste azioni sono esercitate.

È possibile, partendo dalla legge di Coulomb, risolvere un gran numero di problemi relativi all'azione reciproca dei magneti. Il metodo da adottare dipende dall'obiettivo, teorico o puramente pratico, che si vuole raggiungere, nonché dal grado di accuratezza che deve avere il risultato. Occorre innanzitutto stabilire se sia necessario tener conto della distribuzione del magnetismo libero nei due magneti che agiscono l'uno sull'altro, oppure se sia possibile considerare i due magnetismi liberi come concentrati ai due poli di ciascun magnete. Nel primo caso ci si può basare sulla formula (10-16), per il potenziale di un magnete in qualsiasi punto esterno, le cui coordinate  $\xi, \eta, \zeta$  compaiono nell'espressione di tale potenziale.

Se si considera l'azione di ciascuno dei due magneti come emanante solo dai suoi poli e se ci si accontenta di soluzioni approssimate, si può, in certi casi, utilizzare la formula (11-13c), che fornisce l'intensità  $H$  del campo di un magnete di breve lunghezza in punti distanti.

Per restare alle applicazioni pratiche, supporremo che gli assi dei due magneti si trovino sullo stesso piano, il più delle volte orizzontale. Supponiamo inoltre che il magnete A, che produce la deviazione, abbia una posizione invariabile, e che il magnete B, che è deviato, possa ruotare solo attorno ad un asse passante per il suo centro e perpendicolare al piano, contenente i due magneti; in pratica, questo asse è quasi sempre verticale. Sul magnete B agiscono quattro forze, applicate a due a due ai suoi poli ed emananti dai poli del magnete A. Le componenti di queste forze, in direzione normale all'asse del magnete B, danno una coppia, il cui momento  $\mathfrak{M}$  deve essere determinato. In assenza del magnete A, l'asse del magnete B è posto nel piano del meridiano magnetico. Sotto l'azione di A, l'asse di B viene deviato di un certo angolo  $\varphi$ , facilmente determinabile quando si è trovato il momento  $\mathfrak{M}$  della coppia che produce la deviazione.



Formule molto generali sono state stabilite da Lamont, O. D. Chwolson e A. Schmidt (1907). Siano AB e  $A_1B_1$  (fig. 271) gli assi dei magneti, ai cui poli sono concentrate le quantità di magnetismo  $\pm m$  e  $\pm m_1$ ; questi assi formano angoli  $\theta$  e  $\theta_1$  con la retta che congiunge i centri dei magneti; indichiamo anche con  $e_1, e_2, e_3, e_4$  le distanze tra i poli prese a due a due, con  $a$  e  $a_1$  le semi distanze tra i poli dello stesso magnete, infine con  $M = 2am$  e  $M_1 = 2a_1m_1$  i momenti

magnetici. Il potenziale reciproco dei due magneti è uguale a

$$W = mm_1 \left( \frac{1}{e_1} - \frac{1}{e_2} + \frac{1}{e_3} - \frac{1}{e_4} \right)$$

O. D. Chwolson ha dato a questa espressione la forma seguente

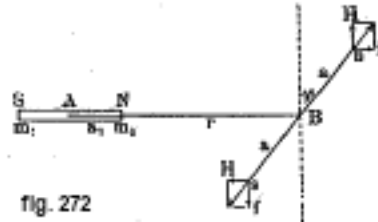
$$W = -\frac{MM_1}{r^2} \left( k_0 + \frac{k_2}{r^2} + \frac{k_4}{r^4} + \dots \right) \quad (12.0.5)$$

dove  $r$  è la distanza tra i centri dei magneti e  $k_1, k_2, k_4$ , ecc. sono funzioni di  $a, a_1$  e  $\theta, \theta_1$ ; egli ha calcolato i primi tre di questi coefficienti; si ha, in particolare

$$\begin{cases} k_0 = 2 \cos \theta \cos \theta_1 - \sin \theta \sin \theta_1 \\ k_2 = -\frac{3}{2}(a^2 + a_1^2)(4 \cos \theta \cos \theta_1 - \sin \theta \sin \theta_1) + \\ \quad + \frac{5}{2}(a_1^2 \cos^2 \theta_1 + a^2 \cos^2 \theta)(4 \cos \theta \cos \theta_1 - 3 \sin \theta \sin \theta_1) \end{cases} \quad (12.0.6)$$

Le derivate  $\frac{\partial W}{\partial \theta}$  e  $\frac{\partial W}{\partial \theta_1}$  sono rispettivamente uguali ai momenti cercati delle coppie che agiscono sui magneti.

Prenderemo in considerazione i due casi particolari noti come posizioni principali di Gauss.



Il magnete fisso NS (fig. 272) è normale al meridiano magnetico. Sul prolungamento del suo asse si trova il centro B del magnete mobile  $ns$  (ago magnetizzato). Questo magnete mobile, sotto l'azione di NS, subisce una deviazione  $\varphi$  a partire dal meridiano magnetico. La condizione di equilibrio è espressa dall'uguaglianza del momento della coppia che devia l'ago dal meridiano magnetico, e del momento  $MH \sin \varphi$ , della coppia con cui il magnetismo terrestre tende a riportare l'ago nel meridiano magnetico. O. D. Chwolson ha stabilito questa condizione, nel presente caso particolare, senza utilizzare la formula (4); essa si scrive così:

$$\frac{2MM_1}{r^2} \cos \varphi \left( 1 + \frac{p_2}{r^2} + \frac{p_4}{r^4} + \frac{p_6}{r^6} \dots \right) = MH \sin \varphi \quad (12.0.7)$$

essendo  $p_{2k}$  una funzione di  $a, a_1$  e  $\varphi$ , della quale O. D. Chwolson ha calcolato la forma per un valore qualsiasi di  $k$ ; si ha, in particolare

$$\begin{cases} p_2 = 2a_1^2 - 3a^2 + 15a^2 \sin^2 \varphi \\ p_4 = 3a_1^4 - 15a^2 a_1^2 (1 - 5 \sin^2 \varphi) + \frac{45}{8} a^4 (1 - 14 \sin^2 \varphi + 21 \sin^4 \varphi) \end{cases} \quad (12.0.8)$$

Queste due espressioni erano già state date da Lamont; le si può dedurre dalla (4) e (4a), ponendo  $\theta_1 = 0$  e  $\theta = 90^\circ - \varphi$ . Limitando la serie nella (5) ai primi due termini, si ha

$$\tan \varphi = \frac{2M_1}{Hr^3} \left( 1 + \frac{p_2}{r^2} \right) \quad (12.0.9)$$

Se si trascurano le dimensioni dell'ago mobile ( $a = 0$ ), si ottiene

$$\tan \varphi = \frac{2M_1}{Hr^3} \left( 1 + \frac{2a_1^2}{r^2} \right) \quad (12.0.10)$$

e trascurando anche  $\frac{a^2}{r^2}$ ,

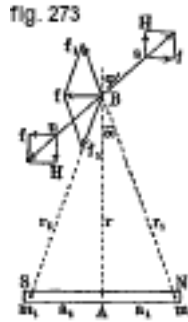
$$\tan \varphi = \frac{2M_1}{Hr^3} \quad (12.0.11)$$

È facile stabilire direttamente la formula (6,a) supponendo che l'intensità  $f$  del campo del magnete NS in  $n$  e  $s$  è la stessa che in B. Si ha allora

$$f = \frac{m_1}{(r - a_1)^2} - \frac{m_1}{(r + a_1)^2} = \frac{4a_1m_1r}{(r^2 - a_1^2)^2} = \frac{2M_1}{r^3} \left(1 - \frac{a_1^2}{r^2}\right)^{-2} = \frac{2M_1}{r^3} \left(1 + \frac{2a_1^2}{r^2}\right)$$

limitando lo sviluppo di  $\left(1 - \frac{a_1^2}{r^2}\right)^{-2}$  ai primi due termini.

Perché l'ago sia in equilibrio, la risultante delle intensità  $f$  e  $H$  deve avere la direzione dell'asse  $ns$ . Questo dà  $f = H \tan \varphi$ , da cui la formula (6,a), così come la (6,b).



SECONDA POSIZIONE PRINCIPALE DI GAUSS. Il magnete fisso NS (fig. 273) è ancora normale al meridiano magnetico, ma il centro B dell'ago  $ns$  giace su una retta perpendicolare all'asse del magnete SN e passante per il suo centro A. In questo caso, dove  $\theta_1 = 90^\circ$  e  $\theta = -\varphi'$ , le formule generali (4) e (4,a) danno, come condizione di equilibrio,

$$\frac{MM_1 \cos \varphi'}{r^3} \left(1 + \frac{q_2}{r^2} + \frac{q_4}{r^4}\right) = HM \sin \varphi' \quad (12.0.12)$$

limitando lo sviluppo del primo membro ai primi tre termini, si ha

$$\begin{cases} q_2 &= 6a^2 - \frac{3}{2}a_1^2 - \frac{45}{2}a^2 \sin^2 \varphi' \\ q_4 &= \frac{15}{8}a_1^4 - \frac{15}{4}a_1^2 a^2 (6 - 23 \sin^2 \varphi') + 15a^4 \left(1 - \frac{21}{2} \sin^2 \varphi' + \frac{105}{8} \sin^4 \varphi'\right) \end{cases} \quad (12.0.13)$$

Lamont fornisce come coefficienti nell'ultima parentesi, invece di  $-\frac{21}{2}$  e  $+\frac{105}{8}$ , i numeri  $-\frac{21}{4}$  e  $-\frac{21}{8}$ , ciò che comporta una correzione.

Fermando lo sviluppo nella (7) ai primi due termini, si ha

$$\tan \varphi' = \frac{M_1}{Hr^3} \left(1 + \frac{q_2}{r^2}\right) \quad (12.0.14)$$

e trascurando  $a$ ,

$$\tan \varphi' = \frac{M_1}{Hr^3} \left(1 - \frac{3a_1^2}{2r^2}\right) \quad (12.0.15)$$

Se si trascura anche  $a_1$ , rimane

$$\tan \varphi' = \frac{M_1}{Hr^3} \quad (12.0.16)$$

Le formule (6,b) e (7,d) danno

$$\tan \varphi = 2 \tan \varphi' \quad (12.0.17)$$

per valori molto piccoli di  $\varphi$  e  $\varphi'$ , l'angolo di deviazione, nella prima posizione di Gauss, è quindi doppio rispetto alla seconda.

La formula (7,c) si stabilisce facilmente, supponendo che l'intensità  $f$  del campo del magnete NS è la stessa sia in  $n$  e  $s$  che in B. La forza  $f$  si scompone in due forze uguali  $f_1$  che, come si vede nella figura, sono dirette lungo NB e SB, e si ha  $f = 2f_1 \sin \alpha$ , essendo  $\alpha$  l'angolo ABN; inoltre,  $f_1 = m_1 : r_1^2$  e  $\sin \alpha = a_1 : r_1$ , così che

$$f = \frac{2m_1 a_1}{r_1^3} = \frac{M_1}{(r^2 + a_1^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{M_1}{r^3} \left(1 + \frac{a_1^2}{r^2}\right)^{-\frac{3}{2}} = \frac{M_1}{r^3} \left(1 - \frac{3a_1^2}{2r^2}\right)$$

fermando lo sviluppo di  $\left(1 + \frac{a_1^2}{r^2}\right)^{-\frac{3}{2}}$  ai primi due termini. La condizione di equilibrio è, come in precedenza,  $f = H \tan \varphi'$ , ciò che porta alla (7,c).

Possiamo ora mostrare come Gauss ha verificato la legge di Coulomb. Gauss ammette che la forza  $f$  è inversamente proporzionale alla potenza  $n^e$  della distanza  $r$ , essendo  $n$  un numero incognito, ma intero; calcola, in questo caso,  $\tan \varphi$  e  $\tan \varphi'$ , e ottiene espressioni della forma

$$\begin{cases} \tan \varphi &= \frac{nP}{r^{n+1}} + \frac{Q}{r^{n+3}} \\ \tan \varphi' &= \frac{P}{r^{n+1}} + \frac{Q'}{r^{n+3}} \end{cases} \quad (12.0.18)$$

dove  $P, Q, Q'$  sono, per i due magneti assegnati, numeri indipendenti da  $r$ . Quando i valori di  $r$  sono molto grandi, quelli di  $\varphi$  e  $\varphi'$  molto piccoli, si ha

$$\varphi = n\varphi' \quad (12.0.19)$$

Gauss ha misurato, per due magneti, gli angoli  $\varphi$  e  $\varphi'$  corrispondenti a 15 diversi valori di  $r$ , da  $r = 1,1 m$  a  $r = 4 m$ . Ha constatato dapprima che, per valori grandi di  $r$ , l'angolo  $\varphi$  è molto vicino al doppio di  $\varphi'$ ; ha trovato, ad esempio, per  $r = 3,5 m$ , i valori  $\varphi = 6'55''.9$  e  $\varphi' = 3'28''.9$ ; ne consegue che  $n = 2$ . Ha calcolato inoltre, con il metodo dei minimi quadrati, i coefficienti numerici delle formule (8), ponendo  $n = 2$ . Ha trovato

$$\begin{cases} \tan \varphi &= 0,086870r^{-3} - 0,002185r^{-5} \\ \tan \varphi' &= 0,0143435r^{-3} + 0,002449r^{-5} \end{cases}$$

I valori degli angoli  $\varphi$  e  $\varphi'$ , calcolati con queste formule, differiscono solo di pochi secondi da quelli osservati. Questa ricerca ha fornito una conferma molto completa e molto precisa della legge di Coulomb.

Non abbiamo tenuto conto, nel calcolo dell'azione reciproca dei magneti, delle dimensioni trasversali di questi ultimi. OD Chwolson ha fornito, per il caso generale, come pure per le due posizioni di Gauss, formule contenenti termini complementari, che dipendono dalle dimensioni trasversali dei magneti. Per magneti cilindrici cavi, questi termini possono essere calcolati abbastanza esattamente.

Nel campo magnetico le azioni ponderomotrici si esercitano non solo sui magneti permanenti (naturali o d'acciaio), ma anche sui corpi che acquistano per l'esistenza di questo campo un magnetismo temporaneo, come ad esempio il ferro. Lo studio molto complesso di queste azioni è stato fatto da Kirchhoff (1884).

Le azioni reciproche tra un gran numero di magneti mobili (galleggianti su un liquido, per esempio) sono state considerate da Lloyd, Wehirauch, A. M. Mayer, Wood e altri. Negli esperimenti di Mayer, i magneti erano aghi d'acciaio magnetizzati nello stesso momento, inseriti in piccoli dischi di sughero e galleggianti sull'acqua. Questi aghi erano disposti in modo che i poli positivi fossero tutti al di sopra della superficie dell'acqua; questi poli si respingevano l'un l'altro nel rapporto inverso del quadrato delle loro reciproche distanze. Una forza attrattiva

era dovuta ad un polo negativo posto ad una certa distanza sopra il liquido; la componente di questa forza, parallela sulla superficie dell'acqua, potrebbe essere considerata come diretta verso la proiezione O del polo negativo su questa superficie e come molto approssimativamente proporzionale alla distanza di ciascun polo positivo da questo centro O.

Mayer ha dato le configurazioni assunte dai magneti galleggianti, quando il loro numero passa da 2 a 19. Quando questo numero non supera 5, i magneti si dispongono ai vertici di un poligono regolare; quando è maggiore di 5, una disposizione così semplice scompare. Pertanto, 6 magneti non sono disposti ai vertici di un esagono, ma sono divisi in due sistemi, un magnete al centro O e 5 magneti ai vertici di un pentagono regolare. Questa divisione in due gruppi si osserva da 6 a 15 magneti, dove compaiono 3 gruppi. Con 27 magneti si producono 4 gruppi e così via.

J. J. Thomson (1903) ha sottolineato che questi fatti hanno una certa analogia con la legge periodica delle proprietà degli elementi chimici. Supponiamo che questi elementi siano disposti in ordine di peso atomico crescente; prendendo un elemento di basso peso atomico, come il litio, si trovano ad esso associate alcune proprietà, che non appartengono agli elementi che seguono immediatamente nella serie, ma riappaiono quando si arriva al sodio, per poi scomparire negli elementi successivi per trovarsi nel potassio, ecc. Si consideri invece la disposizione dei magneti flottanti e si supponga che il loro numero sia proporzionale al peso di combinazione di un elemento chimico. Se una proprietà qualunque è associata a una disposizione triangolare di magneti, scompare quando il numero di magneti aumenta da 3 a 10; ma 10 magneti si dispongono in un triangolo centrale circondato da un anello di 7 magneti. Quando il numero dei magneti supera i 10, la disposizione triangolare scompare di nuovo, ma riappare con 20 magneti, poi con 35. La disposizione triangolare quindi appare e scompare come le proprietà degli elementi chimici nella classificazione periodica di Mendeleieff. Analogie dello stesso genere si osservano, inoltre, negli spettri degli elementi.

### 3. Azione reciproca tra un magnete e una corrente

Abbiamo detto nel § 1 che l'azione di un magnete su una corrente e quella di una corrente su un magnete obbediscono alla legge dell'uguaglianza di azione e reazione. È lo stesso, naturalmente, con le forze ponderomotrici, e possiamo quindi raggruppare i due casi. Abbiamo visto che l'azione reciproca tra un polo magnetico e una corrente chiusa è deducibile dall'azione reciproca tra un polo magnetico e un elemento di corrente, che è espressa dalla legge di Biot e Savart, cioè dalla formula

$$f = \frac{mI ds}{r^2} \sin \varphi \quad (12.0.20)$$

dove  $m$  indica la quantità di magnetismo che si presume concentrata al polo,  $I$  l'intensità della corrente in unità elettromagnetiche,  $ds$  la lunghezza dell'elemento di corrente,  $r$  la distanza tra il polo e l'elemento di corrente,  $\varphi$  l'angolo tra  $r$  e  $ds$ . La forza  $f$  è inoltre normale al piano passante per  $m$  e  $ds$ . Quando si tratta della forza che agisce sul polo magnetico, il verso di  $f$  è quello delle linee di forza della corrente rettilinea che si ottiene immaginando  $ds$  estesa indefinitamente su entrambi i lati; questo verso è determinato dalla regola di Ampère o da quella della vite. Quando  $f$  è la forza che agisce sull'elemento corrente, il suo verso è opposto e si ottiene con la regola della mano sinistra, coincidendo la linea di forza con  $r$ . Introducendo l'intensità  $H'$  del campo magnetico nel punto in cui si trova  $ds$ , abbiamo trovato, vedi (11-66)

$$f = \mu H' I ds \sin \varphi \quad (12.0.21)$$

si può dire allora che  $f$  è una forza normale al piano ( $H', ds$ ), essendo il suo verso determinato dalla regola della mano sinistra. L'applicazione del principio di uguaglianza di azione e reazione a forze elementari che la legge di Biot e Savart definisce nel modo che abbiamo appena indicato hanno dato luogo ad una discussione che è interessante conoscere. L'azione di un elemento di



corrente  $ds$  su un polo magnetico  $m$  è perpendicolare al piano  $(m, ds)$ . Come conciliare una tale direzione con l'uguaglianza vista come necessaria tra azione e reazione? L'azione è applicata in  $m$  e perpendicolare a  $(m, ds)$ . Il principio richiede che la reazione esercitata dal polo  $m$  sull'elemento  $ds$  sia applicata anche in  $m$  e perpendicolare a  $(m, ds)$ . Come si può applicare l'azione esercitata su un filo in un punto  $m$  che ne è indipendente?

Ampère ha rimosso questa difficoltà come segue. Una forza, per agire su un punto materiale, deve essere applicata a questo punto; ma un sistema di forze applicato ad un corpo solido, per quanto piccolo lo si voglia supporre, può essere sostituito in infiniti modi da un equivalente sistema di forze applicato a grandi distanze; uno di questi sistemi può essere ridotto a una forza per cui avremo il diritto di dire che il corpo è sollecitato, anche se potrebbe non incontrarlo. Il caso di due forze parallele di direzioni opposte è ben noto; il punto di applicazione della risultante può allontanarsi indefinitamente. Il punto di applicazione della risultante deve essere considerato legato al corpo su cui agisce. Se non lo è, le forze effettivamente applicate al corpo, naturalmente, sollecitano i punti che lo compongono; ma hanno una risultante con la quale potrebbero essere sostituite, se i punti di applicazione fossero solidali.

Si può dare un'altra forma all'idea di Ampère ammettendo che l'azione del polo  $m$  sull'elemento  $ds$  si applichi sì al punto in cui questo elemento si trova, ma considerando, al contrario, il magnete come un corpo solido il cui polo  $m$  è una parte.

Diversi fisici non hanno accettato questi espedienti; hanno proposto di modificare in questo caso il principio di uguaglianza di azione-reazione, supponendo che le due forze d'azione di  $ds$  su  $m$  e di  $m$  su  $ds$ , parallele e di versi contrari, formano una coppia nella quale il braccio della leva è la distanza  $r$  che compare nella formula (9).

Si potrebbe pensare che sia facile decidere sperimentalmente tra questi vari punti di vista; ma, come abbiamo già detto, la legge espressa dalle formule (9) e (9,a) è una legge differenziale, che si riferisce solo a una parte infinitamente piccola dell'insieme le cui azioni possono essere studiate dall'esperienza. Come tutte le leggi differenziali, questa non può essere verificata, perché non si può separare da un circuito chiuso un elemento di corrente e sottoporre alla prova le forze in numero infinito che agiscono su questa corrente o emanano da essa. Si possono verificare solo i tre integrali che risultano dalla (9), o (9,a) e relativi all'insieme del circuito formato. Dal fatto che l'esperimento conferma i risultati di tale integrazione, non ne consegue che la legge differenziale da cui partiamo sia esatta. Abbiamo visto che all'espressione di tale legge si possono aggiungere funzioni arbitrarie, sottoposte alla sola condizione di dare, per integrazione lungo un contorno chiuso, un'azione integrale nulla. È così, in particolare, quando si considera l'integrazione sulla coppia di cui parlavamo sopra; questo è ciò che J. Bertrand (1890) ha mostrato nel modo seguente. Sia  $S$  il circuito chiuso percorso dalla corrente su cui agisce il polo magnetico  $m$ . La coppia considerata ha  $r$  per braccio; la forza, in questa coppia, essendo perpendicolare al piano  $(m, ds)$ , è normale al cono di vertice  $m$  e di base  $S$ ; infine, l'intensità di questa forza è proporzionale a

$$\frac{ds \sin \varphi}{r^2}$$

Il momento della coppia è quindi proporzionale a

$$r \frac{ds \sin \varphi}{r^2} = \frac{ds \sin \varphi}{r}$$

e  $\frac{ds \sin \varphi}{r}$  è l'angolo sotto il quale l'elemento  $ds$  è visto dal punto  $m$ . Può essere rappresentato dalla porzione dell'intersezione del cono con una sfera di raggio unitario tra le generatrici che passano alle estremità di  $ds$ . Questa piccola linea rappresenta in modulo e in direzione l'asse della coppia, poiché in modulo rappresenta il momento ed è perpendicolare al suo piano, che è il piano normale al cono lungo la generatrice  $r$ .

Quando le coppie sono definite dai loro assi, la condizione di equilibrio è la seguente. Se, per un punto dello spazio, si traccia una retta parallela e uguale all'asse della prima coppia e se si

continua il poligono avente i suoi lati uguali e paralleli agli assi delle varie coppie, la condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio è che il poligono è chiuso.

Quando il poligono non è chiuso, la linea che unisce il primo vertice all'ultimo è l'asse della coppia risultante.

La curva di intersezione del cono di vertice  $m$  e base  $S$  con la sfera di raggio unitario avente centro in  $m$  è una curva chiusa; gli elementi di questa curva sono, come abbiamo mostrato, gli assi delle varie coppie introdotte nell'applicazione del principio di uguaglianza di azione e reazione; queste coppie quindi si bilanciano, e supponendo le forze con cui il polo  $m$  agisce sugli elementi di corrente applicati in  $m$ , formeranno un sistema equivalente a quello delle forze uguali e parallele applicate agli elementi  $ds$  di corrente.

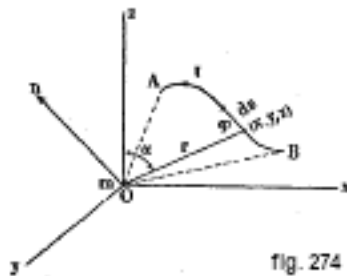
La formula (9) mostra che l'azione reciproca tra un dato polo magnetico e una corrente è indipendente dalle proprietà magnetiche del mezzo circostante, quando questo mezzo è omogeneo e illimitato. Ci si rende facilmente conto che deve essere così, poiché si è visto che l'intensità del campo di una corrente è, in queste stesse condizioni, indipendente dal mezzo circostante. La formula (9,a) non è in contraddizione con tale osservazione, sebbene vi compaia la permeabilità magnetica  $\mu$  del mezzo circostante, poiché la stessa quantità  $H'$  è inversamente proporzionale a  $\mu$ , quando la sorgente del campo è un polo magnetico.

Consideriamo una corrente chiusa  $I$  e un polo magnetico  $m$ , e sia  $F$  la forza che agisce sul polo  $m$ . Se  $V$  è il potenziale di corrente nel punto in cui si trova  $m$ , si ha

$$F = -m \frac{\partial V}{\partial n} \quad (12.0.22)$$

essendo  $n$  la normale nel punto  $m$  alla superficie  $V = \text{cost}$  ed essendo diretta dalla parte delle  $V$  decrescenti. Sostituendo a  $V$  il suo valore (11-60), e indicando con  $F_x, F_y, F_z$  le componenti della forza  $F$ , si ha

$$F_x = -mI \frac{\partial \Omega}{\partial x} \quad F_y = -mI \frac{\partial \Omega}{\partial y} \quad F_z = -mI \frac{\partial \Omega}{\partial z} \quad (12.0.23)$$



Si possono stabilire altre espressioni della forza  $F$  e delle sue componenti, partendo direttamente dalla formula (9). Sia AB (fig. 274) una porzione di una corrente chiusa  $I$ , e un elemento  $ds$  le cui estremità hanno per coordinate  $x, y, z$  e  $x + dx, y + dy, z + dz$ . Poniamo l'origine  $O$  delle coordinate nel polo  $m$ . Indichiamo ora la forza che  $I ds$  esercita su  $m$  con  $dF$ , le sue componenti con  $dF_x, dF_y, dF_z$ ; questa forza ha la stessa direzione di  $n$ , cioè è perpendicolare al piano  $(r, ds)$ , essendo il suo verso determinato dalla regola della vite. La formula (9) dà

$$dF_x = \frac{mI ds}{r^2} \sin \varphi \cos (n, x) \quad (12.0.24)$$

ma  $r ds \sin \varphi \cos (n, x)$  è la proiezione sul piano  $yOz$  dell'area del parallelogramma costruito sulle rette  $r$  e  $ds$ ; questa proiezione è uguale a  $ydz - zdy$  e, portando quest'ultima espressione nella formula (10,b), poi integrando su tutto il contorno chiuso, si ottiene la prima delle tre formule

$$\begin{cases} F_x = mI \int \frac{ydz - zdy}{r^3} \\ F_y = mI \int \frac{zdx - xdz}{r^3} \\ F_z = mI \int \frac{xdy - ydx}{r^3} \end{cases} \quad (12.0.25)$$

inoltre, il modulo e la direzione di  $F$  sono determinati dalle relazioni

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \quad (12.0.26)$$

$$\cos(F, x) = \frac{F_x}{F} \quad \cos(F, y) = \frac{F_y}{F} \quad \cos(F, z) = \frac{F_z}{F} \quad (12.0.27)$$

Osserviamo che si può ancora scrivere la (11) nella forma seguente:

$$F_x = mI \int \frac{z^2}{r^3} d\left(\frac{y}{z}\right) \quad F_y = mI \int \frac{x^2}{r^3} d\left(\frac{z}{x}\right) \quad F_z = mI \int \frac{y^2}{r^3} d\left(\frac{x}{y}\right) \quad (12.0.28)$$

Quando il polo  $m$  non si trova nell'origine  $O$  delle coordinate, ma nel punto  $(x_1, y_1, z_1)$ , si deve sostituire nelle formule (11),  $x, y, z$  con  $x - x_1, y - y_1$  e  $z - z_1$ . Si può allora scrivere

$$F_x = mI \int \frac{(y - y_1) dx - (z - z_1) dy}{r^3} = mI \int \frac{\partial_r^1}{\partial y_1} dz - \frac{\partial_r^1}{\partial z_1} dy \quad (12.0.29)$$

con espressioni analoghe per  $F_y$  e  $F_z$ .

Chiediamoci dove va ricercata la sorgente del lavoro che si compie quando un polo magnetico si muove nel campo di una corrente elettrica. Vedremo che questo lavoro non viene svolto a scapito di alcuna particolare energia potenziale del magnete e della corrente, e quindi il caso di un magnete e di una corrente differisce essenzialmente sotto questo aspetto da quello di due magneti. Due poli magnetici  $m$  e  $m'$  con lo stesso nome, ad esempio, possiedono presi insieme una determinata riserva di energia potenziale; quando questi poli si allontanano l'uno dall'altro, il lavoro delle forze repulsive avviene a scapito di questa energia potenziale, che in effetti diminuisce quando la distanza dai poli aumenta. È impossibile che, per effetto dell'azione reciproca dei poli dei magneti permanenti, uno di essi si muova lungo una linea chiusa, cioè possa ritornare al punto di partenza, poiché la riserva di energia potenziale riprenderebbe il suo valore originario. È molto diverso con un polo magnetico  $m$  e una corrente  $I$ . Le linee di forza della corrente sono curve chiuse e un polo di un magnete può, sotto l'azione del campo magnetico della corrente, muoversi indefinitamente lungo una di queste curve linee di forza chiuse. Vedremo in seguito come si possa praticamente realizzare un tale movimento ininterrotto di un magnete attorno ad una corrente (o corrente attorno ad un magnete). Ad ogni giro completo si compie il lavoro  $R = 4\pi Im$ , come si vede nella formula (10-42). Ora, dopo ogni giro completo, l'intero sistema riprende la sua posizione primitiva e, di conseguenza, l'energia potenziale della corrente e del magnete, se esiste, riacquista il suo valore primitivo. È chiaro che il lavoro  $R$  non può essere svolto a spese di tale energia. Vedremo che si realizza a spese dell'energia che mantiene la corrente elettrica. Quest'ultimo si esaurisce molto rapidamente, quando l'intensità  $I$  della corrente rimane costante nonostante il movimento del polo magnetico. Se, per qualsiasi ragione, il dispendio di energia rimane costante, il movimento del polo produce una diminuzione dell'intensità  $I$  della corrente; in altre parole, il lavoro viene compiuto a spese dell'energia della corrente stessa e diminuisce la cessione di calore nel conduttore attraversato dalla corrente. Entriamo qui nel campo dei fenomeni di induzione elettrodinamica. Vedremo che si può rigorosamente dimostrare che l'energia del campo magnetico e della corrente è uguale alla somma delle energie proprie del magnete e della corrente e che quindi non c'è energia potenziale speciale per un tale sistema. La dimostrazione poggia su una formula che indicheremo più avanti.

Studieremo vari casi particolari dell'azione ponderomotrice esercitata da una corrente su un magnete.

La forza  $F$  esercitata da una corrente rettilinea  $I$  di grandissima lunghezza su un polo magnetico  $m$  è data dalla formula (10-4), o (10-48,a); è uguale a

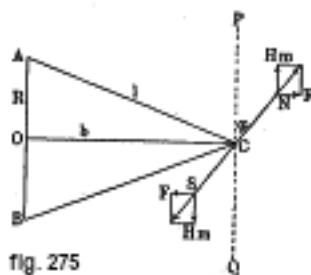
$$F = \frac{2mI}{r} \quad (12.0.30)$$

essendo  $r$  la distanza tra  $m$  e la linea della corrente, e l'intensità  $I$  della corrente essendo espressa in unità el. mag. Un magnete non può, sotto l'azione di una corrente, ruotare attorno ad un asse coincidente con la retta della corrente. Ma quando l'asse di rotazione del magnete non coincide con la linea della corrente, il magnete subisce una deviazione. Sotto l'effetto del campo del magnetismo terrestre e delle forze esercitate dalla corrente sui poli del magnete, quest'ultimo assume una posizione di equilibrio determinata. Vari casi di tale azione di una corrente rettilinea sono stati studiati da Decharme, Garnault e Raveau.

Si trova facilmente col calcolo che una corrente, il cui conduttore forma i lati di un angolo  $2\varphi$ , esercita su un polo  $m$ , posto sulla bisettrice, all'esterno dell'angolo e alla distanza  $r$  dal suo vertice, una forza  $F$  uguale a

$$F = \frac{2mI}{r} \tan \frac{\varphi}{2} \quad (12.0.31)$$

Per  $\varphi = 90^\circ$ , si ritrova la formula (12). Biot e Savart hanno confermato sperimentalmente l'esattezza di questo risultato.



Passiamo all'azione di una corrente circolare su un ago magnetico. Supponiamo che la corrente sia nel piano del meridiano magnetico, e sia AB (fig. 275) la sua proiezione su un piano orizzontale,  $R$  il suo raggio. Sull'asse della corrente si trova in  $C$  il centro dell'ago magnetico  $NS$ , il cui asse è nel meridiano magnetico  $PQ$ , quando non c'è corrente. Sotto l'azione della corrente, l'ago viene deviato di un certo angolo  $\varphi$  che ci proponiamo di determinare. Consideriamo dapprima il caso in cui l'ago magnetico sia abbastanza corto da poter considerare l'intensità del campo della corrente in  $N$  e in  $S$  uguale all'intensità del campo in  $C$ , dove la formula (10-49), è applicabile. Le forze  $\pm F$ , che agiscono sui poli, sono parallele a  $OC$  e uguali a

$$F = \frac{2\pi m R^2 I}{l^3} \quad (12.0.32)$$

essendo  $l$  uguale a  $AC$ . La risultante delle forze  $F$  e  $Hm$ , essendo  $H$  la componente orizzontale dell'intensità del campo magnetico terrestre, deve coincidere con l'asse del magnete, da cui segue che  $\tan \varphi = F : Hm$ ; introducendo il valore di  $F$ , viene

$$\tan \varphi = \frac{2\pi R^2 I}{H l^3} \quad (12.0.33)$$

$$I = \frac{H l^3}{2\pi R^2} \tan \varphi \quad (12.0.34)$$

Quando il centro  $C$  del magnete si trova in  $O$ , si ha  $l = R$ , ed essendo la deviazione indicata con  $\varphi_0$ , si ha

$$\tan \varphi = \frac{2\pi I}{R H} \quad (12.0.35)$$

$$I = \frac{R H}{2\pi} \tan \varphi_0 \quad (12.0.36)$$

Se si vuole tenere conto delle dimensioni dell'ago magnetico, bisogna calcolare l'intensità del campo della corrente nei punti N e S, situati al di fuori dell'asse OC della corrente. Indicheremo semplicemente il risultato, essendo i calcoli piuttosto lunghi. Sia  $CN = CS = a$  la semi lunghezza dell'ago magnetico e  $OC = b$ . Invece della formula (13), si ottiene la seguente

$$\left\{ \begin{array}{l} \tan \varphi = \frac{2\pi R^2 I}{H l^3} K \\ K = 1 - \frac{3a^2(4b^2 - R^2)}{4l^4} (1 - 5 \sin^2 \varphi) + \\ + \frac{45a^4(8b^4 - 12b^2 R^2 + R^4)}{64l^8} (1 - 14 \sin^2 \varphi + 21 \sin^4 \varphi) \end{array} \right. \quad (12.0.37)$$

Trascurando il terzo termine nell'espressione di  $K$ , si ha, invece della (13,a)

$$I = \frac{H l^3}{2\pi R^2} \tan \varphi \left\{ 1 + \frac{3a^2(4b^2 - R^2)}{4l^4} (1 - 5 \sin^2 \varphi) \right\} \quad (12.0.38)$$

Quando il centro C dell'ago si trova in O ( $b = 0$ ,  $l = R$ ), si ha, invece della (13,c)

$$I = \frac{RH}{2\pi} \tan \varphi \left\{ 1 - \frac{3a^2}{4R^2} (1 - 5 \sin^2 \varphi) \right\} \quad (12.0.39)$$

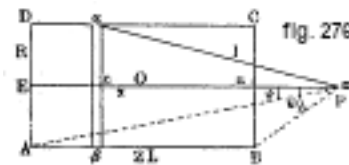
Il primo termine complementare nella (13,d) e nella (13,e) scompare, quando si pone

$$b = \frac{R}{2} \quad (12.0.40)$$

Ci si può allora servire delle formule dalla (13) alla (13,c), essendo l'errore determinato dal terzo termine dell'espressione (13,d) di  $K$ ; si ha per quest'ultimo

$$K = 1 - \frac{54}{125} \left( \frac{a}{R} \right)^4 (1 - 14 \sin^2 \varphi + 21 \sin^4 \varphi) \quad (12.0.41)$$

Si consideri ora l'azione ponderomotrice di una bobina su un polo magnetico  $m$ . Supponiamo che la bobina sia cilindrica e costituita da un singolo strato di filo isolato, avvolto su un cilindro circolare. Sia ABCD (fig. 276) la sezione longitudinale della bobina, in modo che gli avvolgimenti del filo siano approssimativamente perpendicolari al piano della figura. Indichiamo con  $2L$  la lunghezza della bobina, con  $R$  il suo raggio, con  $I$  l'intensità della corrente, con  $N$  il numero totale di spire del filo, con  $n = N : 2L$  il numero di spire per unità di lunghezza della bobina. Calcoliamo la forza  $F$  esercitata su un polo magnetico  $m$ , che si trova in P sull'asse della bobina, alla distanza  $a$  dal centro O di questa bobina. Gli elementi della corrente formano, come abbiamo detto, un angolo molto piccolo con un piano perpendicolare all'asse della bobina; supponiamo che questo angolo sia nullo, cioè che la bobina sia composta da  $N$  spire circolari. L'azione di ciascuno di questi giri è determinata dalla (12,b).



La somma di queste  $N$  forze porterebbe a espressioni complicate e scomode. Sostituiamo quindi questa sommatoria con una integrazione, immaginando tutta la corrente  $NI$  uniformemente distribuita lungo la generatrice  $2L$  del cilindro, in modo che, per unità di lunghezza di questa generatrice, si avrà una corrente  $NI : 2L = nI$ . Consideriamo alla distanza  $Ox = x$  una parte

$\alpha\beta$  di larghezza  $dx$ ; esso rappresenta una corrente circolare di raggio  $R$  e di intensità  $nIdx$ , che esercita su P, secondo la (12,b), una forza  $dF = 2\pi m R^2 nIdx : l^3$ , dove  $l^2 = \overline{P\alpha^2} = R^2 + (a+x)^2$ . Si ha quindi per la forza totale  $F$ :

$$F = 2\pi R^2 nIm \int_{-L}^{+L} \frac{dx}{\{R^2 + (a+x)^2\}^{3/2}} = 2\pi nIm \left\{ \frac{a+L}{\sqrt{R^2 + (a+L)^2}} - \frac{a-L}{\sqrt{R^2 + (a-L)^2}} \right\} \quad (12.0.42)$$

Indichiamo con  $\psi$  l'angolo EPA e con  $\psi_1$  l'angolo EPB, sotto i quali si vedono rispettivamente da P i raggi delle due basi. Si ha

$$F = 2\pi nIm (\cos \psi - \cos \psi_1) \quad (12.0.43)$$

Quando il polo  $m$  si trova al centro della bobina ( $a = 0$ ), si ha semplicemente

$$F_0 = 4\pi nIm \frac{L}{\sqrt{R^2 + L^2}} \quad (12.0.44)$$

Quando la bobina è molto lunga, cioè quando  $L$  è molto grande rispetto a  $R$ , si ottiene

$$F_0 = 4\pi nIm \quad (12.0.45)$$

Lo stesso risultato si trova per  $F$ , quando  $R$  è molto piccolo rispetto a  $L - a$ , ciò indica che, in una bobina molto lunga e ad una certa distanza dal centro, da una parte o dall'altra, la forza  $F$  è approssimativamente costante. Per  $L = 20R$ , la forza  $F$  varia di  $0,01F_0$  sui  $7/8$  della lunghezza totale della bobina e di  $0,001F_0$  su questa lunghezza. È possibile introdurre, in tutte le formule precedenti, il numero totale di spire  $N = 2nL$ , nonché la lunghezza totale del filo  $D = 2\pi Rn = 4\pi nRL$ . Quando in P si trova il centro di un ago magnetico abbastanza piccolo da poter supporre uguali a  $F$  le forze agenti sui poli dell'ago e quando l'asse della bobina è perpendicolare al piano del meridiano magnetico, l'asse dell'ago è deviato da questo piano di un angolo  $\varphi$  determinato dall'uguaglianza

$$\tan \varphi = \frac{F}{Hm} \quad (12.0.46)$$

il fattore  $m$  scompare sempre, perché è contenuto anche in  $F$ .

Da una bobina che ha un solo strato di filo, possiamo passare a una bobina con una serie di strati, che riempiono lo spazio tra le superfici di due cilindri circolari con lo stesso asse e raggi  $R_1$  e  $R_2$ . Il numero di strati per unità di lunghezza essendo  $n$ , il numero totale di strati nella bobina è  $N_{11} = n(R_2 - R_1)$ . Se si procede ancora per integrazione, dobbiamo, nella formula (14), sostituire  $F$  con  $dF$  e  $I$  con  $nIdR$ , e prendere  $R_1$  e  $R_2$  come limiti dell'integrale; si ottiene allora

$$F = 2\pi nIm \left\{ (a+L) \log \frac{R_2 + \sqrt{R_2^2 + (a+L)^2}}{R_1 + \sqrt{R_1^2 + (a+L)^2}} - (a-L) \log \frac{R_2 + \sqrt{R_2^2 + (a-L)^2}}{R_1 + \sqrt{R_1^2 + (a-L)^2}} \right\} \quad (12.0.47)$$

Ponendo  $a = 0$ , si ha, per la forza  $F_0$  al centro della bobina

$$F_0 = 4\pi n^2 I L m \log \frac{R_2 + \sqrt{R_2^2 + L^2}}{R_1 + \sqrt{R_1^2 + L^2}} \quad (12.0.48)$$

Queste formule si possono modificare, introducendo il numero totale di avvolgimenti, cioè

$$N_2 = NN_1 = 2n^2 L (R_2 - R_1)$$

Abbiamo supposto che il polo magnetico si trova sull'asse della bobina. Il caso in cui il polo è al di fuori di questo asse è stato studiato da Maxwell, Hicks, James, Stuart, Minchin, Nagaoka, ecc. Ci limiteremo ad indicare che all'interno di una bobina molto lunga, la forza  $F$  ha la stessa intensità in tutti i punti sufficientemente distanti dalle estremità, non solo sull'asse della bobina, come abbiamo visto più in alto, ma anche in un punto qualunque di una sezione trasversale. Una spiegazione molto completa di questa questione si troverà nel lavoro di Mascart e Joubert, *Lezioni sull'elettricità e il magnetismo* 2, pp 101-118, 1886.

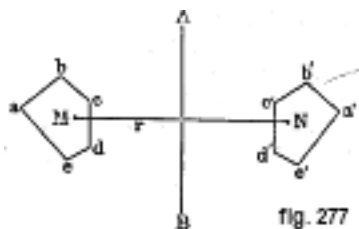
Le formule (14) e (15,a) consentono di determinare l'effetto di una bobina su un magnete, il cui asse è disposto lungo l'asse della bobina. Quando le estremità vicine della bobina e del magnete hanno nomi opposti, il magnete è in qualche modo attirato nella bobina, con una forza che si può facilmente calcolare con le formule precedenti, se non si tiene conto dell'azione magnetizzante della bobina. Il magnete raggiunge la sua posizione di equilibrio quando il suo centro coincide con il centro della bobina. Si ottengono formule molto diverse, quando si tratta della forza con cui la bobina attira al suo interno del ferro dolce; questo è infatti magnetizzato dalla bobina e il grado di magnetizzazione dipende dalla posizione relativa della bobina e del ferro. Citeremo a questo proposito le opere di Hankel, Dub, Waltenhofen, St Loup e Cazin.

La bobina può essere avvolta su un cilindro di spessore variabile nelle diverse sezioni trasversali, in modo che la sua superficie esterna non sia cilindrica. La superficie interna della bobina può anche non essere cilindrica; il filo può essere avvolto su un parallelepipedo rettangolare, una sfera, un ellissoide. Molti autori hanno calcolato le azioni esercitate da bobine di questo genere su un polo magnetico; ma i risultati di questi calcoli non hanno attualmente molto interesse pratico e ci limiteremo a segnalare su questo punto le ricerche di C. Neumann, Riecke, Wallentin, Minchin. Indicheremo solo una formula relativa ad una corrente  $I$  che percorre il perimetro di un poligono regolare di  $n$  lati; indicando con  $a$  la lunghezza di un lato, la forza  $F$  esercitata su un polo  $m$  posto al centro del poligono è uguale a

$$F = \frac{4nIm}{a} \sin \frac{\pi}{n} \tan \frac{\pi}{n} \quad (12.0.49)$$

Se si pone  $n = \infty$  e  $na = 2\pi R$ , si trova una espressione che, per  $l = R$ , è identica alla (12,b).

Di particolare interesse è l'azione di una corrente  $I$ , che percorre un filo avvolto su un anello di sezione trasversale qualsiasi. Un anello di questo tipo si ottiene facendo ruotare una figura piana come  $abcde$  (fig. 277) attorno ad un asse AB. Un piano passante per l'asse AB interseca l'anello lungo le due figure  $abcde$  e  $a'b'c'd'e'$ .



Sia  $N$  il numero totale di spire del filo; sostituiamo queste  $N$  spire con  $N$  correnti chiuse che percorrono i contorni delle sezioni meridiane dell'anello, e ci proponiamo di determinare la forza  $F$  esercitata sul polo  $m$ , posto nel punto interno M ad una distanza  $r$  dall'asse AB. Se si tiene conto della distribuzione simmetrica delle correnti attorno all'asse AB e della proposizione fondamentale secondo cui le linee di forza sono curve chiuse che racchiudono le linee di corrente, si vede che la linea di forza che passa per M non può che essere un circonferenza di raggio  $r$ . Di conseguenza, il lavoro svolto dalle forze magnetiche nello spostamento  $2\pi F$  del polo  $m$ , lungo la linea di forza passante per tale polo, è pari a  $4\pi NIm$ . Ne consegue che:

$$F = \frac{2NIm}{r} \quad (12.0.50)$$

Poiché le linee di forza non attraversano da nessuna parte la superficie dell'avvolgimento anulare, e ciascuna linea di forza circonda la corrente mentre passa all'interno della figura piana che percorre questa corrente, è chiaro che *una bobina anulare chiusa non genera alcun campo magnetico nello spazio*. All'interno dell'anello le linee di forza sono circonferenze, che hanno la posizione prima indicata; *la forza  $F$  all'interno dell'anello è inversamente proporzionale alla distanza dall'asse AB*. Essa non dipende né dalla forma né dalle dimensioni della sezione trasversale dell'anello, ma solo dall'intensità  $I$  della corrente e dal numero  $N$  di spire del filo. La formula (16) vale anche nel caso in cui l'avvolgimento dell'anello presenta un qualsiasi numero di strati.

Abbiamo parlato del solenoide elettrodinamico e del suo campo magnetico; abbiamo visto che questo campo è identico a quello di un solenoide magnetico, i cui poli sono alle estremità del solenoide e risentono della quantità di magnetismo  $\pm m = I_s \sigma = nI\sigma$ , essendo  $n$  il numero di correnti circolari concatenate, per unità di lunghezza, attorno all'asse del solenoide;  $I_s = nI$  è la potenza del solenoide e  $\sigma$  l'area delimitata da ciascuna delle correnti. In breve, chiameremo semplicemente solenoide quello elettrodinamico. In pratica un tale solenoide si ottiene facendo passare una corrente attraverso l'avvolgimento di una bobina, la cui lunghezza non è troppo piccola. Il polo sud è all'estremità dove il verso della corrente sembra essere quello orario, guardando dall'esterno l'estremità del solenoide. *L'azione ponderomotrice di un solenoide su un magnete mobile è uguale all'azione esercitata su questo magnete da un altro magnete i cui poli hanno la posizione e la massa sopra indicata.*

Considereremo in seguito il caso particolare dell'azione unipolare del campo di una corrente elettrica.

Consideriamo ora l'azione del campo di un magnete su una corrente elettrica mobile. Come abbiamo visto, su un elemento di corrente  $Ids$ , che si trova in un campo di intensità  $H'$ , agisce una forza, la cui intensità è determinata dalla formula (9,a) e il verso dalla regola della mano sinistra. Risulta da questa regola che una corrente, che discende verticalmente e che è sotto l'influenza del campo magnetico terrestre, deve tendere a muoversi verso est, mentre una corrente verticale diretta verso l'alto tende a muoversi verso ovest. Secondo quanto detto all'inizio di questo paragrafo, se si cambia il segno delle espressioni da (11) a (11,c), si ottengono le componenti della forza  $F$  esercitata dal polo magnetico  $m$  su un conduttore invariabile AB attraversato dalla corrente  $I$ . Si ha ad esempio:

$$F_x = -mI \int \frac{ydz - zdy}{r^3} = mI \int \frac{z^2}{r^3} d\left(\frac{y}{z}\right) \quad (12.0.51)$$

Dall'uguaglianza di azione e reazione risulta che un solenoide mobile è sottoposto, nel campo magnetico, alle stesse forze di un magnete equivalente.

Si può stabilire un'espressione generale dell'azione ponderomotrice del campo su una corrente chiusa. Abbiamo trovato, per l'energia potenziale  $W$  di una corrente chiusa  $I$  posta in un campo magnetico, la formula (64, b)

$$W = -IN \quad (12.0.52)$$

dove  $N$  è il numero di linee di induzione, che attraversano, da sud verso nord, l'area delimitata dalla linea della corrente. Se un parametro  $p$  qualunque, che determina la posizione della corrente, varia sotto l'influenza del campo della quantità  $dp$  e se il lavoro  $Pdp$  è così compiuto, si ha  $Pdp = -dW$ , da cui

$$P = I \frac{dN}{dp} \quad (12.0.53)$$

Il lavoro  $Pdp$  non può che essere positivo; lo spostamento della corrente, prodotto dal campo, sarà quindi accompagnato da un aumento del numero  $N$  di linee di induzione. C'è equilibrio stabile, quando il numero  $N$  raggiunge il massimo valore possibile. Si ha anche  $P = 0$ , nel caso



in cui  $N$  è minimo; ma, si vede facilmente, questo caso corrisponde ad un equilibrio instabile del conduttore. Osservando nella (19) la quantità  $p$  come una coordinata rettilinea, si riconosce che un campo uniforme non può produrre spostamento traslatorio di una corrente chiusa. In un campo non uniforme, una corrente chiusa tende a muoversi dalla parte in cui l'intensità del campo aumenta. Se la corrente può solo ruotare attorno ad un asse fisso  $A$  e se, nella formula (19), si prende, come parametro  $p$ , l'angolo  $\alpha$  che determina la posizione del conduttore, allora  $P$  è il momento  $\mathfrak{M}$  della coppia che fa ruotare il conduttore attorno all'asse  $A$ , per cui si ha:

$$\mathfrak{M} = I \frac{dN}{d\alpha} \quad (12.0.54)$$

Quando l'asse  $A$  è parallelo alle linee di forza di un campo uniforme, si ha  $\mathfrak{M} = 0$ . Supponiamo l'asse  $A$  perpendicolare alle linee di forza e oltre  $\mathfrak{M} = 0$ , quando la proiezione della linea chiusa della corrente, su un piano perpendicolare alle linee di forza, delimita un'area  $S$  che è massima. Quando la corrente è in un piano,  $S$  è l'area delimitata dalla corrente. Si vede facilmente che i valori  $\alpha = 0$  e  $\alpha = \pi$  corrispondono alle posizioni di equilibrio. Supponiamo che l'equilibrio sia stabile per  $\alpha = 0$ ; per ogni valore di  $\alpha$ , si ha  $N = BS \cos \alpha$ , essendo  $B$  l'induzione. La formula (19,a) dà, per il momento della coppia,

$$\mathfrak{M} = -IB \sin \alpha \quad (12.0.55)$$

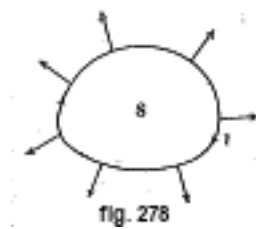
Quando le linee di forza formano l'angolo  $90^\circ - \beta$  con l'asse di rotazione, si ha:

$$\mathfrak{M} = -IB \cos \beta \sin \alpha \quad (12.0.56)$$

il segno  $-$  indica che la coppia tende a diminuire l'angolo  $\alpha$ . Consideriamo il caso in cui la corrente può ruotare attorno ad un asse verticale e si trova nel campo magnetico terrestre; supponiamo inoltre che la linea della corrente sia piana. Si ha pertanto:

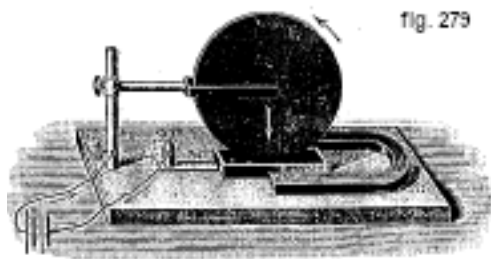
$$\mathfrak{M} = -IH \sin \alpha \quad (12.0.57)$$

essendo  $H$  la componente orizzontale dell'intensità del magnetismo terrestre. Un solenoide, il cui asse è orizzontale e che può ruotare attorno ad un asse verticale passante per il suo centro, si pone nel meridiano magnetico.



Quando una parte del conduttore è mobile o può subire una deformazione, la posizione di equilibrio stabile corrisponde all'area maggiore ottenibile nelle condizioni date. Si consideri una corrente piana chiusa  $I$  (fig. 278), in un campo uniforme le cui linee di forza sono normali al piano della figura e partano dal lettore; il verso della corrente è indicato dalle frecce. Il conduttore stesso sarà in equilibrio, ma a tutti i suoi elementi verranno applicate delle forze (vedi frecce), tendenti a far subire un'estensione alla linea della corrente, cioè ad aumentare l'area  $S$ .

Un caso interessante di azione ponderomotrice di un magnete su una corrente è quello presentato dalla ruota di Barlow (fig. 279). Una ruota, mobile attorno ad un asse orizzontale, si immerge, per la parte inferiore del suo bordo o per mezzo di denti, in una bacinella piena di mercurio, che si trova tra i poli di un magnete a ferro di cavallo. La corrente viene portata attraverso l'asse della ruota al mercurio e scorre lungo il raggio verticale della ruota.



Sotto l'azione della calamita, questo raggio subisce uno spostamento perpendicolare alle linee di forza (tra i poli del magnete) e a questo raggio stesso; la ruota inizia a girare nella direzione della freccia. Cambiando la direzione della corrente, la rotazione avviene nella direzione opposta. Questo esperimento dimostra chiaramente il nesso che esiste tra la corrente propriamente detta e la sostanza del conduttore, alla quale vengono trasmesse le forze che si devono considerare agenti prima sulla corrente stessa.

Resta da considerare le circostanze molto importanti, soprattutto dal punto di vista teorico, in cui si produce una rotazione continua di una corrente o di un magnete; i fenomeni in questione possono essere chiamati unipolari. Consideriamo dapprima la figura 280 e determiniamo la componente  $\mathfrak{M}_x$  del momento di rotazione  $\mathfrak{M}$  che agisce sulla parte AB della corrente  $I$  soggetta all'influenza del polo  $m$  posto in O. Sull'elemento  $Ids$  si esercita una forza, la cui componente  $dF_x$  è data dalla formula (10,b). Sostituendo, come in precedenza,  $rds \sin \varphi \cos(n, x)$  con  $yz - zdy$ , si ha

$$dF_x = Im \frac{ydz - zdy}{r^3}$$

con espressioni analoghe per  $dF_y$  e  $dF_z$ . La componente  $d\mathfrak{M}_z$  del momento  $d\mathfrak{M}$  che agisce su  $Ids$  è uguale a

$$d\mathfrak{M}_z = x dF_y - y dF_z = \frac{Im}{r^3} \left\{ z(xdx + ydy) - (x^2 + y^2) dz \right\}$$

ma  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$  e  $rdr = xdx + ydy + zdz$ ; pertanto

$$d\mathfrak{M}_z = \frac{Im}{r^3} \left\{ z(rdr - zdz) - (r^2 - z^2) dz \right\} = \frac{Im}{r^2} (zdr + rdz) = -Im \frac{dz}{r}$$

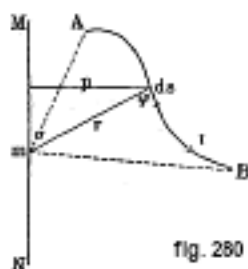
Indichiamo con  $\alpha$  l'angolo  $(r, z)$ ; si ha  $z = r \cos \alpha$  e quindi

$$d\mathfrak{M}_z = -Imd \cos \alpha$$

si trova integrando

$$\mathfrak{M}_z = Im (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) \quad (12.0.58)$$

essendo  $\alpha_1$  l'angolo  $BOz$  e  $\alpha_2$  l'angolo  $AOz$ .



Questa formula mostra che *il momento delle forze agenti sul conduttore AB della corrente I, rispetto a un asse passante per il polo m, non dipende dalla forma del conduttore, ma solo dalla posizione delle sue estremità A e B*. Quando la corrente è chiusa, abbiamo  $\mathfrak{M}_z = 0$ . Un polo magnetico non può far ruotare una corrente chiusa attorno ad un asse passante per questo polo. La risultante di tutte le forze che un polo magnetico esercita su una corrente chiusa passa quindi da questo polo.

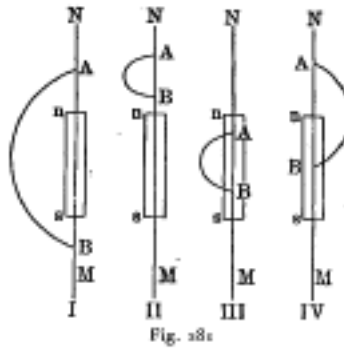
Data l'importanza di questo risultato, daremo un'altra dimostrazione molto semplice della formula (20). Poiché il momento è indipendente dalla forma del conduttore AB, possiamo supporre che quest'ultimo si trovi nel piano passante per il polo  $m$  e gli estremi A e B. Sia MN l'asse di rotazione (fig. 280),  $m$  il polo magnetico. La forza

$$dF = \frac{Im}{r^2} \sin \varphi ds$$

esercitata sull'elemento  $ds$ , è perpendicolare al piano della figura e pertanto il suo momento  $d\mathfrak{M}$  è uguale a  $\frac{Imp}{r^2} \sin \varphi ds$ , dove  $p$  è la distanza tra l'elemento  $ds$  e l'asse MN; ma  $p = r \sin \alpha$ , con  $\alpha$  l'angolo  $(r, MN)$ , e  $ds \sin \varphi = r d\alpha$ ; si ha quindi  $d\mathfrak{M} = Im \sin \alpha d\alpha = -Im d \cos \alpha$ , da cui

$$\mathfrak{M} = Im (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) \quad (12.0.59)$$

indicando con  $\alpha_1$  l'angolo  $AmM$  e con  $\alpha_2$  l'angolo  $BmM$ .



Consideriamo ora il caso particolarmente interessante in cui una parte del circuito ruota attorno ad un asse coincidente con l'asse del magnete dato. Sia  $ns$  (fig. 281, da I a IV) un magnete, MN il suo asse che passa per i due poli. La formula (20,a) esprime il momento prodotto da uno dei poli; l'altro polo esercita un momento analogo, ma di segno opposto, dovendo essere  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  sostituiti anche dagli angoli  $\alpha'_1$  e  $\alpha'_2$  tra l'asse del magnete e le rette condotte dal secondo polo agli estremi A e B della parte mobile del circuito. Si ha quindi

$$\mathfrak{M} = Im (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2 - \cos \alpha'_1 - \cos \alpha'_2) \quad (12.0.60)$$

Poiché la rotazione avviene attorno all'asse MN del magnete, le estremità A e B devono ovviamente trovarsi sull'asse MN stesso. Sono possibili quattro casi:

I. (fig. 281, I). I punti A e B si trovano rispettivamente da ogni lato di questo magnete:  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ ,  $\alpha'_1 = \alpha'_2 = \pi$ ; la (20,b) dà  $\mathfrak{M} = 0$ ; *la relazione è impossibile*.

II. (fig. 281, II). I punti A e B si trovano da uno stesso lato di questo magnete:  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha'_1 = \alpha'_2 = 0$ ; la (20,b) dà  $\mathfrak{M} = 0$ ; *la relazione è impossibile*.

III. (fig. 281, III). I punti A e B si trovano tra i poli del magnete:  $\alpha_1 = \alpha_2 = \pi$ ,  $\alpha'_1 = \alpha'_2 = 0$ ; la (20,b) dà  $\mathfrak{M} = 0$ ; *la relazione è impossibile*.

IV. (fig. 281, IV). Una delle estremità del conduttore mobile si trova al di fuori del magnete, l'altra tra i poli:  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = \pi$ ,  $\alpha'_1 = 0$ ,  $\alpha'_2 = 0$ ; la (20,b) dà

$$\mathfrak{M} = 2mI \quad (12.0.61)$$

Ha luogo una rotazione; essa dura indefinitamente, poiché la posizione relativa della corrente e del magnete non cambia durante la rotazione. Si ottiene quindi il seguente risultato: la rotazione continua di una parte del circuito di corrente attorno all'asse del magnete è possibile, quando le due estremità di quella parte del circuito posta sull'asse sono rispettivamente ai lati di uno dei poli o, in altre parole, quando solo uno di questi estremi si trova tra i poli del magnete.

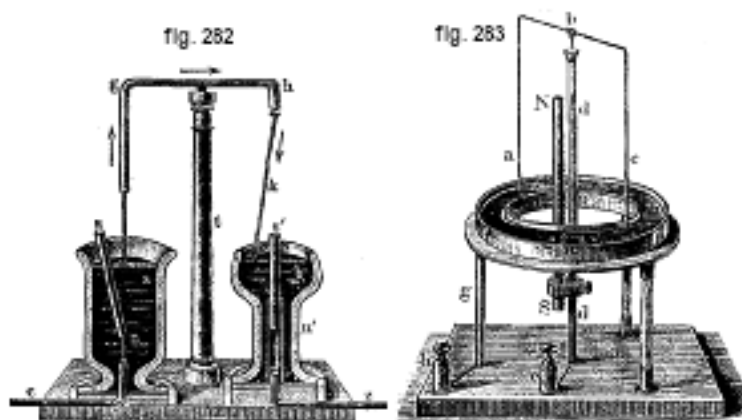
La rotazione continua di un magnete può essere prodotta da una corrente; si distinguono due casi:

1. Rotazione di uno dei poli del magnete attorno alla corrente, l'altro polo trovandosi sullo stesso asse di rotazione o avendo una posizione tale da non subire un'azione della corrente tendente a farlo ruotare (nel verso contrario).

2. Rotazione di un magnete attorno al proprio asse. Questo singolare caso di azione ponderomotrice si realizza nel diagramma di figura 281, IV e costituisce la controparte della rotazione continua della parte mobile AB di un conduttore attorno ad un magnete fisso. Quando la parte AB del circuito viene resa immobile e il magnete è libero di ruotare attorno al proprio asse, una tale rotazione avviene effettivamente: *il magnete ruota senza interruzione attorno al proprio asse, nel verso contrario a quello della rotazione continua di un conduttore mobile AB intorno all'asse di un magnete fisso.*

La rotazione continua di una corrente o di un magnete, nei tre casi che abbiamo appena indicato, è stata ottenuta per la prima volta da Faraday (1821). Descriveremo alcuni dispositivi con cui è possibile produrre una tale rotazione.

La figura 282 rappresenta uno dei dispositivi di Faraday, nel quale la rotazione del magnete  $sn$  avviene contemporaneamente attorno alla parte fissa  $gac$  del circuito di corrente e quella della parte mobile  $k$  di questo circuito attorno al magnete  $s'n'$ . Lo strumento è costituito da due vasi contenenti mercurio; la direzione della corrente è  $cag h k b z$ . L'estremità inferiore del magnete  $ns$  è collegata da un filo all'estremità del conduttore  $c$ ; il magnete  $n's'$  è infilato in un tubo metallico e l'estremità inferiore del conduttore  $k$  fluttua sulla superficie del mercurio. Come si riconosce facilmente, visto dall'alto, il polo  $s$  ruota intorno a  $ga$  in senso orario; allo stesso modo il conduttore  $k$  attorno ai poli  $s'$ . Lo strumento rappresentato dalla figura 283 è spesso usato oggi. Una colonnina metallica  $dd$ , posta in relazione con il terminale  $c$ , reca all'estremità superiore una coppetta piena di mercurio; in essa si immerge un punto  $b$  che sostiene il filo  $abc$ . Le estremità di questo filo sono immerse nel mercurio, versato in un vaso anulare  $f$  collegato al terminale  $h$ . Vicino all'asse c'è un magnete NS. Se il verso della corrente è  $h g f b d e$ , i due fili ruotano in senso antiorario.

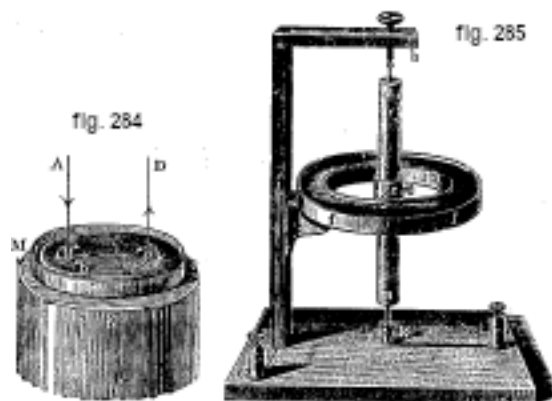


Quando una corrente viene inviata attraverso un nastro metallico sottile e flessibile, sospeso liberamente, e un magnete viene portato contro di esso, il nastro si avvolge elicoidalmente attorno al magnete. Riecke (1884), Lamprecht (1885) e Colard (1895) hanno compiuto lo studio teorico della forma che assume un conduttore flessibile ed inestensibile, percorso da una corrente,

sotto l'azione di forze magnetiche; ricerche sperimentali sono state condotte su questo argomento da Le Roux, Gore e altri.

Si può osservare una rotazione anche in un liquido percorso da una corrente. Davy ha evidenziato, per la prima volta, un tale fenomeno. Tale rotazione si produce molto semplicemente, ponendo un vaso contenente mercurio sul polo N (fig. 284) di un magnete e immergendovi le estremità B e C di un conduttore percorso da una corrente. Quando il verso della corrente è quello indicato dalle frecce, si notano sulla superficie del mercurio due vortici dove il movimento ha il verso delle frecce *b* e *c*. Bertin, De la Rive e altri ancora hanno costruito vari strumenti destinati ad osservare una tale rotazione di un liquido. La teoria di questi fenomeni è stata fatta in maniera molto approfondita da Riecke (1885).

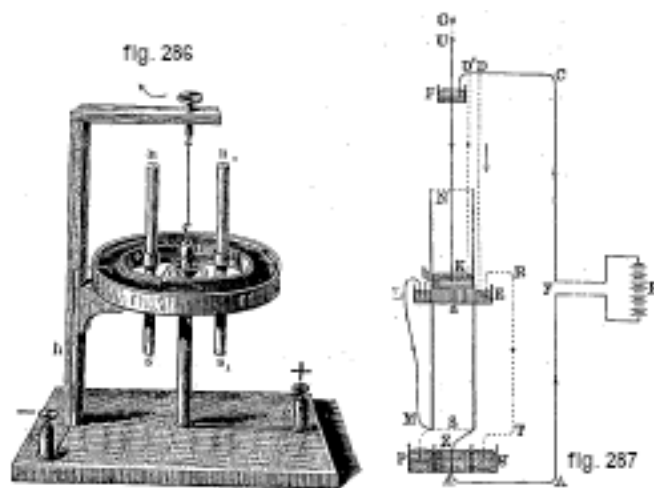
La rotazione di un magnete attorno al suo asse può essere mostrata mediante il dispositivo rappresentato dalla Fig. 285. Il magnete *ns* è provvisto di punte alle sue estremità e può quindi ruotare liberamente attorno al suo asse; l'estremità inferiore *k* è collegata al terminale *a*. All'anello *c*, fissato al centro del magnete, è saldato un filo, la cui altra estremità ricurva si immerge un poco nel mercurio contenuto in un vaso anulare *f* collegato al terminale *c*. Come si vede, questo strumento corrisponde interamente allo schema di Fig. 281, IV.



Quando si invia una corrente nella direzione *efcka*, il magnete, visto dall'alto, inizia a ruotare nel verso orario.

Per mostrare la rotazione continua di un magnete attorno ad una corrente si usa oggi, invece del semplice strumento di Faraday (fig. 282), quello rappresentato in figura 286. La colonna metallica *ab*, collegata ad un terminale *e*, porta una coppetta riempita di mercurio, in cui si immerge l'estremità inferiore di un'asta di rame *d*, sospesa a un filo. A questa asta sono fissati due magneti *ns* e *n<sub>1</sub>s<sub>1</sub>* nonché un filo *e*, un'estremità del quale si tuffa, come nell'apparecchio precedente, nel mercurio contenuto in un vaso anulare collegato al terminale *g*. Quando una corrente viene fatta passare nel verso *ghfedbac*, i poli *s* e *s<sub>1</sub>* iniziano a ruotare attorno alla corrente *ba*, in verso antiorario se visto dall'alto.

Nuovi strumenti sono stati recentemente costruiti da Ulsch, W. König, e in particolare W. Nikolaieff. Descriveremo alcuni degli ingegnosi dispositivi di Nikolaieff. Uno di essi è rappresentato in figura 287. Un elettromagnete cavo NS è sospeso a un filo fissato nel punto O; l'avvolgimento della bobina non è mostrato, ma si vedono in M e Z le sue estremità. In *a* c'è un tappo, sul quale è versato mercurio; E è un vaso anulare con mercurio: l'asta KU attraversa il vaso F che contiene mercurio; anche in Z c'è mercurio, così come nel vaso anulare *pg*. La corrente della batteria B può essere chiusa lungo quattro circuiti.



I. I conduttori ML e DF sono disinseriti; il verso della corrente è  $BCDERTgpZAB$ . L'intero circuito, ad eccezione dell'avvolgimento tra  $p$  e  $Z$ , che ovviamente non può mettere in moto il magnete, è situato all'esterno del magnete e non è connesso con esso. Il magnete rimane a riposo.

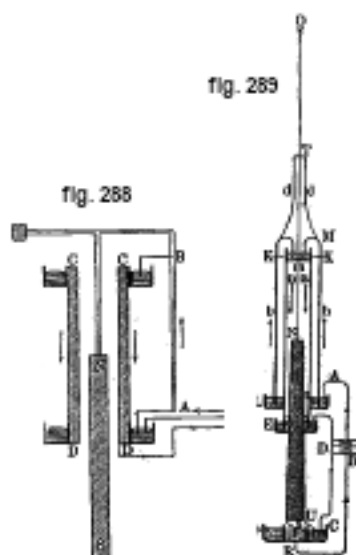
II. I conduttori MpDF e ERTg sono disinseriti; il verso della corrente è BCDELMZAB. La parte ML del circuito è fissata invariabilmente al magnete, che compie un rapido movimento rotatorio sotto l'azione del resto del circuito.

III. I conduttori DE, D'K e ML sono disinseriti; il verso della corrente è BCD'FNKbERTgpZAB. Ora è la parte FK ad essere fissata invariabilmente al magnete, che gira nel verso opposto.

IV. I conduttori D'F, DE e ML sono disinseriti; il verso della corrente è BCD'KbERTgpZAB, cioè la parte FNK fissata invariabilmente al magnete è sostituita dalla parte D'K che ne è indipendente. Il magnete ruota rapidamente come nel terzo caso; ciò dimostra che la corrente D'K non ha più effetto della corrente FNK fissata invariabilmente al magnete e che un circuito, parte del quale è all'interno di un magnete cavo, produce una rotazione.

Un altro strumento è rappresentato in Fig. 288. Un magnete NS è sospeso liberamente all'interno del tubo CCDD, che è circondato da due vasi anulari C e D contenenti mercurio; questo magnete è fissato invariabilmente al conduttore rettilineo AB; il vaso anulare superiore C è collegato metallicamente al tubo CD. La corrente ha il verso indicato dalle frecce; passa per AB e il tubo CCDD. Il magnete ruota contemporaneamente al conduttore AB.

Il terzo dispositivo di WV. Nikolaieff è rappresentato dalla figura 289. Un elettromagnete è sospeso a un filo  $m$ ; è circondato da due tubi  $aa$  e  $bb$ . I vasi KK e R, così come quelli anulari L, E e PC contengono mercurio. Il tubo esterno  $bb$  è fissato invariabilmente al disco T, appeso al filo TO. Allo stesso disco è fissato un filo  $r$ , al quale sono liberamente sospesi il vaso KK e il tubo interno  $aa$ ; il filo  $m$  è fissato al vaso KK. Il verso della corrente è BAbKaEDCuSRB; la corrente scorre lungo i tubi  $aa$  e  $bb$  in versi contrari. Il magnete può essere fissato invariabilmente al tubo interno  $aa$ ; l'intero sistema SNEaaK è quindi sospeso al filo  $r$ . Quando NS e  $aa$  non sono fissati assieme invariabilmente, il magnete rimane fermo e i due tubi ruotano in versi contrari. Se il magnete è fissato invariabilmente al tubo  $aa$ , entrambi ruotano nello stesso verso, il tubo esterno  $bb$  nel verso contrario.



Nel 1895 sorse una lunga controversia, provocata da Lecher, sulle condizioni in cui può avvenire la rotazione continua di un magnete o di una corrente. Torneremo su questa controversia, alla quale hanno preso parte molti fisici, quando studieremo i fenomeni dell'induzione unipolare.

#### 4. Mutua Azione delle correnti

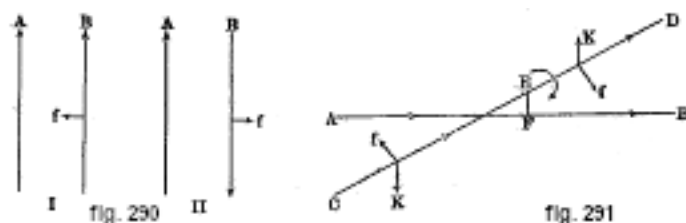
Lo studio della mutua azione di due correnti fa parte dell'elettrodinamica, alla quale è annesso anche quello delle correnti indotte.

Un conduttore attraversato da una corrente e posto nel campo magnetico di un'altra corrente deve essere soggetto a forze ponderomotrici. La regola della mano sinistra permette, in molti casi, di determinare la direzione e il verso di queste forze, e di conseguenza anche i movimenti che assumono i conduttori di mobili nelle varie circostanze che si possono presentare. Prenderemo in considerazione alcuni casi particolari.

*Due correnti parallele A e B (fig. 290, I) nella stesso verso si attraggono.* Le linee di forza della corrente A incontrano, secondo la regola della vite, la corrente B e hanno la direzione che viene dal lettore. La regola della mano sinistra (palmo della mano in alto, indice in avanti, medio in alto, pollice a sinistra) mostra che la forza  $f$ , che agisce sugli elementi della corrente B, è diretta verso la corrente A.

*Due correnti parallele A e B (fig. 290, II) di versi contrari si respingono,* poiché, dalla regola della mano sinistra (palmo della mano in basso, indice in avanti, medio in basso, pollice a destra), la forza  $f$  è ora diretta da B verso destra.

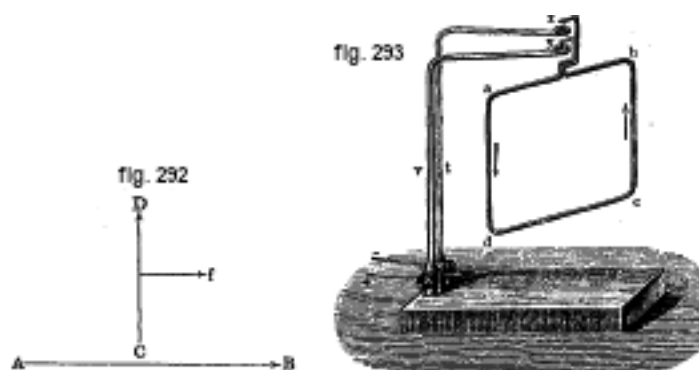
Supponiamo che le correnti AB e CD (fig. 291) formino un angolo acuto, e che la corrente CD possa ruotare attorno alla minore distanza EF delle due correnti, rimanendo sempre in un certo piano P (non mostrato in figura) parallelo ad AB. Tale movimento può essere prodotto solo dalla componente  $K$  dell'intensità del campo, che è normale a P. Nei punti posti su ED la componente  $K$  è diretta verso l'alto e di conseguenza la forza ponderomotrice  $f$  è diretta verso destra; nei punti che giacciono su EC, la componente  $K$  è diretta verso il basso e quindi la forza  $f$  verso sinistra. La corrente CD ruoterà quindi in senso antiorario e tenderà a posizionarsi parallelamente ad AB. Se la corrente fosse di verso opposto (da D a C), nel qual caso le correnti formerebbero un angolo ottuso, anche le forze  $f$  avrebbero direzione contraria. La corrente CD girerebbe in senso antiorario e tenderebbe a disporsi parallelamente ad AB, in modo che le due correnti abbiano lo stesso verso.



Il risultato a cui arriviamo è talvolta formulato così: due correnti, che formano un angolo, si attraggono quando sono entrambe dirette verso il vertice dell'angolo o quando entrambe si allontanano da esso; si respingono l'un l'altra, quando una è diretta verso il vertice, mentre l'altra si allontana da esso. Si può dire, più brevemente, che *due correnti formanti un angolo tendono a disporsi parallelamente, in modo da essere nello stesso verso*.

Supponiamo infine che CD (fig. 292) o una parte mobile del secondo circuito, perpendicolare alla corrente AB. In CD, le linee di forza della corrente AB sono normali al piano della figura e dirette verso il lettore. La regola della mano sinistra mostra che sul conduttore CD agisce un sistema di forze parallele la cui risultante  $f$  è diretta verso destra; il conduttore CD si muove parallelamente a se stesso nella direzione della corrente AB e verso la metà di questa corrente che, da quanto detto, l'attrae.

Vari strumenti, alcuni dei quali ci accingiamo a descrivere, sono stati predisposti per l'osservazione sperimentale dei casi considerati di mutua azione ponderomotrice tra due correnti. Per sospendere un conduttore mobile si utilizzano due "supporti metallici a gomito  $l$  e  $v$  (fig. 293), recanti alle estremità coppette piccole coppe ( $x$  e  $y$ ) piene di mercurio, poste una sopra l'altra. In esse si immergono le estremità, munite di punte, di circuiti di forme diverse, ad esempio di un circuito rettangolare  $abcd$  o circolare, ecc.



A questo circuito mobile si accosta un altro conduttore percorso da una corrente, la cui forma può variare anche molto; questo sarà, ad esempio, un telaio di legno rettangolare, sul quale sono avvolti diversi strati di filo (fig. 294). Se si porta questa cornice vicino ai lati  $ad$  o  $bc$  del rettangolo  $abcd$  (fig. 293), si verifica attrazione o repulsione di correnti parallele; tenendo la cornice al di sotto del filo, si può evidenziare la rotazione di una corrente mobile, formante un angolo con un'altra corrente a riposo.

Si può anche mostrare, sulle parti di uno stesso circuito, l'attrazione reciproca di correnti parallele e dello stesso verso. A tale scopo viene utilizzata quella che viene chiamata spirale Roget (fig. 295). La parte principale di questo dispositivo è costituita da un filo elastico avvolto ad elica e sospeso verticalmente; all'estremità inferiore di questo filo, è saldata una piccola sfera, recante una punta a contatto con la superficie del mercurio che riempie una coppa metallica.



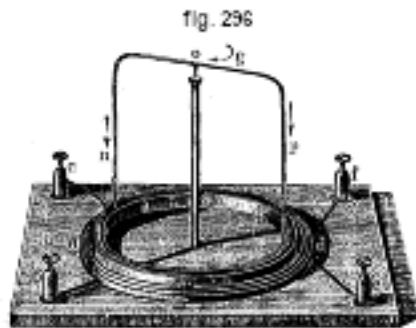
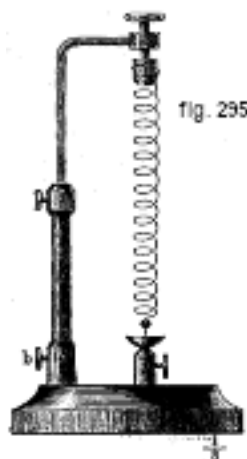


Quando una corrente passa attraverso questo filo, le spire si attraggono, il filo si accorcia e il punto inferiore esce dal mercurio, interrompendo la corrente. Cessata l'attrazione tra le spire, l'estremità inferiore del filo ridiscende sotto l'azione del peso della sferetta; ma, appena la punta torna a contatto con la superficie del mercurio, la corrente si interrompe nuovamente, le spire si attraggono, la punta sale, ecc. Il risultato è una continua oscillazione verticale della piccola sfera.

Il movimento laterale di una parte del circuito, perpendicolarmente alla corrente (vedi fig. 292), si può infine osservare con l'apparato rappresentato in figura 296. Questo dispositivo si compone di un recipiente anulare *a* riempito di mercurio, che è collegato al morsetto *c*. La colonna verticale collegata al morsetto *b* porta nella sua parte superiore un vasetto pieno di mercurio, dove si immerge la punta *o* saldata al filo *ngp*, le cui estremità vengono a contatto con il mercurio di *a*. Il recipiente *a* è circondato da numerosi avvolgimenti di un filo *dd*, le cui estremità sono fissate ai spinotti *f* e *e*. Quando, tramite questi spinotti, si fa passare una corrente nel filo *dd*, contemporaneamente tramite i spinotti *b* e *c* si fa passare un'altra corrente nei due rami di *ngp*, il filo inizia a girare attorno al proprio supporto. Se le correnti hanno il verso indicato dalle frecce, la rotazione, vista dall'alto, è in verso orario.

Si devono ad Ampère i primi apparecchi atti allo studio e alla dimostrazione dei diversi casi di mutua azione delle correnti. Altri dispositivi furono poi costruiti da Savary, Ritchie, Bertin, Mühlenbein, Benecke, Oberbeck, ecc.

Conoscendo la posizione delle linee di forza di una corrente, abbiamo già potuto determinare, in alcuni casi particolari, la direzione e il verso a direzione delle forze ponderomotrici agenti sulle parti mobili di un circuito, per effetto dell'azione reciproca di due correnti. Le conclusioni a cui siamo giunti nei capitoli precedenti ci permettono di addentrarci molto di più nello studio dell'azione reciproca delle correnti.



Consideriamo dapprima l'influenza del mezzo sull'azione reciproca delle correnti. Come abbiamo visto, il campo magnetico di una corrente di intensità  $I_1$  circolante scorre lungo una linea chiusa  $s_1$  è identico al campo magnetico di un foglio magnetico, che ricopre una superficie arbitraria  $S_1$  delimitata dalla curva  $s_1$ , essendo la potenza  $\omega$  del doppio strato data da,

$$\omega = \mu I \quad (12.0.62)$$

$\mu$  è la permeabilità magnetica del mezzo supposto omogeneo e si ha  $\omega = k\delta$ , dove  $\delta$  è lo spessore del foglio,  $\pm k$  la densità superficiale del magnetismo sulle due facce del foglio. Due correnti  $I_1$  e  $I_2$  agiscono l'una sull'altra, come due fogli magnetici le cui potenze sono  $\omega_1 = \mu I_1$  e  $\omega_2 = \mu I_2$ . L'azione reciproca di due di questi fogli è, secondo la legge di Coulomb, proporzionale a  $\omega_1 \omega_2 : \mu$ . Ne consegue che l'azione reciproca di due correnti è proporzionale a  $\mu I_1 I_2$ . Si può anche ragionare così: sostituiamo una delle correnti, ad esempio  $I_1$ , con un foglio di potenza  $\omega_1 = \mu I_1$ . L'azione di questo foglio sulla corrente  $I_2$  è proporzionale a  $\omega_1 I_2$  e indipendente dal mezzo. Sostituendo il valore  $\omega_1 = \mu I_1$ , si trova ancora che l'azione reciproca di due correnti è proporzionale a  $\mu I_1 I_2$ . *L'azione reciproca di due correnti è quindi direttamente proporzionale alla permeabilità magnetica  $\mu$  del mezzo omogeneo circostante.* Ziegler (1907) ha confermato sperimentalmente la correttezza di questa proposizione, usando come mezzo una sospensione di ferro in polvere nella glicerina. A titolo di paragone, ricordiamo che l'azione reciproca di due magneti è, al contrario, indipendente da  $\mu$ .

Con l'ausilio dei risultati precedenti, si può invece considerare in forma molto generale le forze ponderomotrici dovute all'azione reciproca di due correnti, nonché all'azione reciproca delle diverse parti di una stessa corrente. Abbiamo visto che l'energia potenziale  $W_{1,2}$  di due correnti chiuse  $I_1$  e  $I_2$  l'una rispetto all'altra è data dalla formula

$$W_{1,2} = -I_1 I_2 \mu L_{1,2} \quad (12.0.63)$$

essendo  $\mu L_{1,2}$  il coefficiente di mutua induzione delle due correnti. Abbiamo anche visto che il flusso  $\Psi_{1,2}$  di induzione magnetica (ovvero il numero  $N_{1,2}$  delle linee di induzione del campo della corrente  $I_1$ ), che attraversa la linea del percorso della corrente  $I_2$ , è, quando  $I_1 = 1$ , uguale al flusso  $\Psi_{2,1}$  o al numero  $N_{2,1}$  delle linee di induzione del campo della corrente  $I_2 = 1$ , che attraversano la linea del percorso della corrente  $I_1$ , per cui  $\Psi_{1,2} = \Psi_{2,1}$  e  $N_{1,2} = N_{2,1}$ ; inoltre,

$$\mu L_{1,2} = \Psi_{1,2} = N_{1,2} \quad (12.0.64)$$

Abbiamo dapprima trovato, per la grandezza  $L_{1,2}$  la formula

$$L_{1,2} = - \iint \frac{\partial^2 \frac{I}{r}}{\partial n_1 \partial n_2} dS_1 dS_2 \quad (12.0.65)$$

essendo  $dS_1$  e  $dS_2$  gli elementi delle due superfici qualsiasi tracciate dalle linee di percorso delle correnti  $I_1$  e  $I_2$ ,  $n_1$  e  $n_2$  le normali a queste superfici dalla parte sud,  $r$  la distanza tra gli elementi  $dS_1$  e  $dS_2$ ; gli integrali si estendono a tutti gli elementi delle superfici  $S_1$  e  $S_2$ . Applicando il teorema di Stokes, abbiamo trasformato l'espressione (23,b), e le abbiamo dato la forma

$$L_{1,2} = \iint \frac{\cos \varepsilon}{r} ds_1 ds_2 \quad (12.0.66)$$

essendo  $ds_1$  e  $ds_2$  i rispettivi elementi dei contorni delle superfici  $S_1$  e  $S_2$ , cioè gli elementi di due correnti considerate,  $r$  la distanza tra  $ds_1$  e  $ds_2$ ,  $\varepsilon$  l'angolo  $(ds_1, ds_2)$ ; gli integrali si estendono alle linee di percorso di due correnti. Le formule (23) e (23,c) danno

$$W_{1,2} = -I_1 I_2 \mu \iint \frac{\cos \varepsilon}{r} ds_1 ds_2 \quad (12.0.67)$$

la (23,a) dà

$$W_{1,2} = -I_1 I_2 N_{1,2} \quad (12.0.68)$$

Se si indica con  $Pdp$  il lavoro delle forze ponderomotrici, per una variazione infinitamente piccola del parametro  $p$  che determina la posizione di una delle correnti, l'uguaglianza  $Pdp = -dW$  fornisce, secondo la formula (19), le espressioni

$$P = -\frac{\partial W_{1,2}}{\partial p} = I_1 I_2 \frac{\partial N_{1,2}}{\partial p} = I_1 I_2 \mu \frac{\partial L_{1,2}}{\partial p} \quad (12.0.69)$$

Nel caso particolare in cui  $p$  è una delle coordinate  $x, y, z$ , si ottengono le componenti della forza che muove parallelamente a sé stessa una delle correnti. Ma, quando la corrente può ruotare solo attorno ad un certo asse e si prende per  $p$  l'angolo  $\alpha$  che definisce la posizione della corrente,  $P$  è il momento  $\mathfrak{M}$  della coppia che produce la rotazione. Le formule (25) mostrano che, nell'azione reciproca di due correnti, *lo spostamento avviene dalla parte dove aumenta il numero  $N_{1,2}$  delle righe di induzione, provenienti dall'interno di una delle correnti e che passano all'interno dell'altra* (andando da sud verso nord).

Abbiamo trovato per l'energia potenziale  $W_{1,2}$  di una corrente  $I_1$  rispetto a se stessa, l'espressione seguente

$$W_{1,1} = -\frac{1}{2}I_1^2\mu L_{1,1} \quad (12.0.70)$$

e abbiamo chiamato  $\mu L_{1,1}$  il coefficiente di auto induzione. La grandezza  $L_{1,1}$  è data dalla formula analoga a quella che esprime  $L_{1,2}$ , di modo che si ha

$$W_{1,1} = -\frac{1}{2}I_1^2\mu \iint \frac{\cos \varepsilon}{r} ds_1 ds'_1 \quad (12.0.71)$$

dove  $ds_1$  e  $ds'_1$  sono gli elementi di una stessa corrente  $I_1$ .

Abbiamo già indicato che l'azione mutua delle parti di una stessa corrente dà luogo a spostamenti di queste parti, che aumentano l'area avente per contorno la linea della corrente. Naturalmente, una corrente non può produrre uno spostamento complessivo della sua linea di percorso. Le azioni ponderomotrici possono manifestarsi solo con una deformazione della linea di corrente, cioè con uno spostamento delle parti mobili senza variazione della loro forma, o con un cambiamento della forma delle parti flessibili o estensibili del circuito. Il calcolo di  $L_{1,1}$  presenta alcune difficoltà particolari, che verranno indicate nel capitolo sull'induzione elettrodinamica.

Le formule (24) e (25) riducono la determinazione dell'azione reciproca di due correnti al calcolo di  $L_{1,2}$  con l'ausilio della (23,c), cioè a una questione puramente matematica. Questo calcolo è molto complicato, nella quasi totalità dei casi; ci limiteremo qui a considerare il caso molto semplice di due correnti rettilinee parallele, di cui una  $I_1$  ha una lunghezza molto grande e l'altra  $I_2$  una lunghezza finita  $b$ . Indichiamo con  $r$  la distanza tra le correnti e supponiamo che la parte rettilinea del conduttore della corrente  $I_2$  possa muoversi parallelamente a se stessa, senza trascinare con sé le altre parti del circuito, cosa possibile quando, ad esempio, le estremità della parte rettilinea nuota nel mercurio. Ci si potrebbe servire della formula (24), nella quale si avrebbe  $\cos \varepsilon = \pm 1$ , a seconda del verso delle correnti; ma, nel caso considerato, è più semplice considerare il numero  $N_{1,2}$  delle linee di induzione. Supponiamo che le correnti abbiano lo stesso verso e che  $r$  sia diminuito di  $dr$ ; la forza cercata  $F$ , che agisce sulla corrente  $I_2$ , è quindi determinata dall'uguaglianza  $-Fdr = I_1 I_2 dN_{1,2}$ , dove  $dN_{1,2}$  è l'aumento del numero di linee di induzione della corrente  $I_1$  nel punto in cui si trova la corrente  $I_2$ . L'intensità del campo magnetico della corrente  $I_1$  nel punto in cui si trova la corrente  $I_2$  è  $2I_1 : r$ ; l'area descritta dalla corrente  $I_2$  è  $-bdr$ ; quindi  $dN_{1,2} = -2\mu bdr$ . Si ha quindi

$$-Fdr = -2\mu I_1 I_2 \frac{b}{r} dr$$

da cui

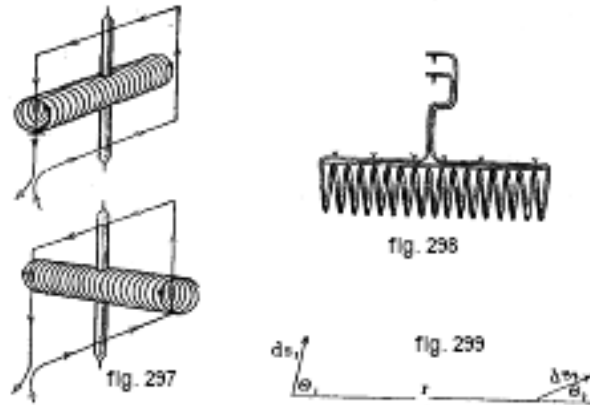
$$F = 2\mu I_1 I_2 \frac{b}{r} \quad (12.0.72)$$

Si vede che  $F$  cambia di segno, quando le correnti sono di verso contrario.

Alcuni casi più complicati sono stati trattati da vari autori, ad esempio quello di due correnti rettilinee nello stesso piano o in piani diversi (Ampère), quello di due correnti circolari o di una corrente circolare e una corrente ellittica situate nello stesso piano (Plana, Kirchhoff), quello di due correnti circolanti poste in piani perpendicolari (W. Weber), quella di due quadrati

della stessa grandezza e della stessa disposizione in piani paralleli, perpendicolari alla retta che congiunge i centri dei quadrati (Mascart e Joubert), ecc.

Secondo il § 3 di questo Capitolo, l'azione reciproca di una corrente e di un solenoide è identica all'azione reciproca di una corrente e di un magnete; due solenoidi agiscono l'uno sull'altro come due magneti. Nella parte superiore della figura 297 è mostrato un solenoide mobile attorno ad un asse, l'asse del solenoide essendo situato nel piano di un conduttore rettangolare. Quando si fanno passare, in questo conduttore e nel solenoide, correnti aventi rispettivamente il verso indicato dalle frecce, il solenoide gira e si porta nella posizione indicata in basso nella figura. È più conveniente dare al solenoide la forma di figura 298 e appenderlo al supporto mostrato in figura 299.



Si può ottenere l'espressione dell'energia potenziale  $W_{1,2}$  di due correnti chiuse sostituendo la (23,b) nella (23). Mostreremo ora come si possa trasformare l'espressione (24) di questa stessa energia potenziale. Sia  $r$  (fig. 299) la distanza tra le origini degli elementi  $ds_1$  e  $ds_2$  delle due correnti  $I_1$  e  $I_2$ ; indichiamo con  $x_1, y_1, z_1$  e  $x_2, y_2, z_2$  le rispettive coordinate di queste origini. Chiamiamo  $\theta_1$  l'angolo  $(ds_1, r)$ ,  $\theta_2$  l'angolo  $(ds_2, r)$ ,  $\varepsilon$  l'angolo  $(ds_1, ds_2)$ . Se  $ds_1, ds_2$  e  $r$  sono con gli assi coordinati gli angoli  $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$   $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$  e  $(\alpha, \beta, \gamma)$ , si ha

$$\begin{cases} \cos \theta_1 = \cos \alpha \cos \alpha_1 + \cos \beta \cos \beta_1 + \cos \gamma \cos \gamma_1 \\ \cos \theta_2 = \cos \alpha \cos \alpha_2 + \cos \beta \cos \beta_2 + \cos \gamma \cos \gamma_2 \\ \cos \varepsilon = \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 \end{cases} \quad (12.0.73)$$

Inoltre,  $\cos \alpha = (x_2 - x_1) : r$ , ecc.,  $\cos \alpha_1 = dx_1 : ds_1$ , ecc., infine  $\cos \alpha_2 = dx_2 : ds_2$  ecc. L'uguaglianza  $r^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$  dà

$$-r \frac{\partial r}{\partial s_1} = (x_2 - x_1) \frac{dx_1}{ds_1} + (y_2 - y_1) \frac{dy_1}{ds_1} + (z_2 - z_1) \frac{dz_1}{ds_1} \quad (12.0.74)$$

dalla (26), si ha quindi  $\frac{\partial r}{\partial s_1} = -\cos \theta_1$ ; si ottiene anche  $\frac{\partial r}{\partial s_2} = \cos \theta_2$ , di modo che

$$\frac{\partial r}{\partial s_1} \frac{\partial r}{\partial s_2} = -\cos \theta_1 \cos \theta_2 \quad (12.0.75)$$

Differenziando la (26,a) rispetto a  $s_2$ , si ha inoltre

$$-r \frac{\partial^2 r}{\partial s_1 \partial s_2} - r \frac{\partial r}{\partial s_1} \frac{\partial r}{\partial s_2} = \frac{dx_1}{ds_1} \frac{dx_2}{ds_2} + \frac{dy_1}{ds_1} \frac{dy_2}{ds_2} + \frac{dz_1}{ds_1} \frac{dz_2}{ds_2} = \cos \varepsilon \quad (12.0.76)$$

Questa uguaglianza e la formula (26,b) danno

$$r \frac{\partial^2 r}{\partial s_1 \partial s_2} = \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \varepsilon \quad (12.0.77)$$

e di conseguenza

$$- \iint \frac{\cos \varepsilon}{r} ds_1 ds_2 = \iint \frac{\partial^2 r}{\partial s_1 \partial s_2} ds_1 ds_2 - \iint \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{r} ds_1 ds_2$$

Il primo integrale del secondo membro, che si estende a due linee chiuse, è evidentemente nullo, e si trova

$$\iint \frac{\cos \varepsilon}{r} ds_1 ds_2 = \iint \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{r} ds_1 ds_2 \quad (12.0.78)$$

Si può quindi scrivere la formula (24)

$$W_{1,2} = -I_1 I_2 \mu \iint \frac{\cos \varepsilon}{r} ds_1 ds_2 \quad (12.0.79)$$

nella forma seguente

$$W_{1,2} = -I_1 I_2 \mu \iint \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{r} ds_1 ds_2 \quad (12.0.80)$$

Poiché i due integrali nella (26,e) sono uguali, si può anche scrivere  $W_{1,2}$  come somma di questi due integrali, ciascuno moltiplicato per un coefficiente, purché la somma dei due coefficienti sia uguale a  $-I_1 I_2 \mu$ , uno di essi rimanenti, completamente arbitrari. Si ha quindi

$$W_{1,2} = -I_1 I_2 \mu \iint \frac{1}{r} \{ (k+1) \cos \theta_1 \cos \theta_2 - k \cos \varepsilon \} ds_1 ds_2 \quad (12.0.81)$$

dove  $k$  è un numero arbitrario. Se si pone, ad esempio,  $k = 2$ , si ottiene

$$W_{1,2} = -2I_1 I_2 \mu \iint \frac{1}{r} \left( \frac{3}{2} \cos \theta_1 \cos \theta_2 - k \cos \varepsilon \right) ds_1 ds_2 \quad (12.0.82)$$

si può chiamare questa espressione la formula di Ampère. Per  $k = -1$  e  $k = 0$ , si hanno rispettivamente le formule (27) e (28). Se si sostituisce  $k$  con  $-(1+k) : 2$ , così che  $k+1$  deve essere esso stesso sostituito da  $(1-k) : 2$ , viene l'espressione

$$W_{1,2} = -\frac{1}{2} I_1 I_2 \mu \iint \frac{1}{r} \{ (1+k) \cos \varepsilon + (1-k) \cos \theta_1 \cos \theta_2 \} ds_1 ds_2 \quad (12.0.83)$$

che si può indicare con il nome di Helmholtz. Ponendo in quest'ultima  $k = -5$ , si ritrova la formula (30) di Ampère.

Quando si sostituiscono, nella formula generale (29), i coseni con i loro valori (26,b) e (26,c), si ha

$$W_{1,2} = -I_1 I_2 \mu \iint \left( k \frac{\partial^2 r}{\partial s_1 \partial s_2} - \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial s_1} \frac{\partial r}{\partial s_2} \right) ds_1 ds_2 \quad (12.0.84)$$

e, per  $k = 2$ , si ottiene, invece della (30)

$$W_{1,2} = -2I_1 I_2 \mu \iint \left( \frac{\partial^2 r}{\partial s_1 \partial s_2} - \frac{1}{2r} \frac{\partial r}{\partial s_1} \frac{\partial r}{\partial s_2} \right) ds_1 ds_2 \quad (12.0.85)$$

Si vede che si può ancora scrivere quest'ultima formula nel modo seguente:

$$W_{1,2} = -4I_1 I_2 \mu \iint \sqrt{r} \frac{\partial^2 \sqrt{r}}{\partial s_1 \partial s_2} ds_1 ds_2 \quad (12.0.86)$$

e la (32) nella forma

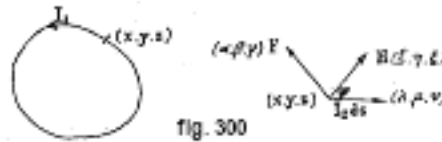
$$W_{1,2} = -k I_1 I_2 \mu \iint \sqrt[k]{r} \frac{\partial}{\partial s_2} \left( \frac{1}{\sqrt[k]{r}} \frac{\partial r}{\partial s_1} \right) ds_1 ds_2 \quad (12.0.87)$$

Per  $k = 2$ , si ottiene, invece della (30), l'espressione

$$W_{1,2} = -2I_1 I_2 \mu \iint \sqrt{r} \frac{\partial}{\partial s_2} \left( \frac{1}{\sqrt{r}} \frac{\partial r}{\partial s_1} \right) ds_1 ds_2 \quad (12.0.88)$$

Si può, partendo dalla formula (23), scrivere tutta una serie di espressioni per il coefficiente di mutua induzione  $\mu L_{1,2}$ , utilizzando le formule dalla (28) alla (34,a).

Per l'energia potenziale  $W_{1,1}$  di una corrente rispetto a se stessa e di conseguenza anche per il coefficiente di autoinduzione  $L_{1,1}$ , si possono ottenere, invece della (25, b), formule completamente trasformate, analoghe a quelle che abbiamo appena stabilito.



I risultati dei capitoli precedenti ci permettono ancora di determinare l'azione di una corrente chiusa su un elemento di un'altra corrente; ci si può servire per questo degli stessi due metodi seguiti nella determinazione dell'azione di una corrente chiusa su un polo magnetico. Sia  $I_1$  (fig. 300) una corrente chiusa,  $l_2 ds$  un elemento della seconda corrente,  $H$  l'intensità del campo magnetico prodotto dalla corrente  $I_1$ ,  $\varphi$  l'angolo  $(H, ds)$ . La forza  $F$ , che agisce sull'elemento  $ds$ , è,

$$F = \mu H I_2 \sin \varphi ds \quad (12.0.89)$$

$$F \text{ normale al piano } (H, ds) \quad (12.0.90)$$

Il verso della forza è determinato dalla regola della mano sinistra; nella figura si è ipotizzato che il verso di  $H$  provenga dal lettore. Se si indica con  $\Omega$  l'angolo solido sotto il quale si vede l'origine dell'elemento  $ds$  la linea di corrente  $I$ , con  $n$  la normale alla superficie  $\Omega = \cos t$ , (dal lato di  $\Omega$  decrescente), si ha

$$H = -I_1 \frac{\partial \Omega}{\partial n} \quad (12.0.91)$$

La direzione di  $H$  coincide con quella di  $n$ , le ultime tre formule determinano completamente la forza cercata  $F$ .

Si può seguire un altro modo per ottenere le componenti della forza  $F$ . Siano  $x, y, z$  le coordinate di un punto sulla retta della corrente  $I_1$ ,  $x_1, y_1, z_1$  le coordinate dell'elemento  $ds$ ; la direzione  $ds$  forma gli angoli  $\lambda, \mu, \nu$  con gli assi coordinati, la direzione di  $H$  gli angoli  $\xi, \eta, \zeta$  quella di  $F$ , gli angoli  $\alpha, \beta, \gamma$ . È facile vedere che

$$\frac{\cos \alpha}{\cos \nu \cos \eta - \cos \mu \cos \zeta} = \frac{\cos \beta}{\cos \lambda \cos \zeta - \cos \nu \cos \xi} = \frac{\cos \gamma}{\cos \mu \cos \xi - \cos \lambda \cos \eta} \quad (12.0.92)$$

I segni sono già qui scelti secondo il verso della forza  $F$ , cioè con la regola della mano sinistra, che si ottiene facilmente portando l'asse  $x$  (verso destra) parallelo a  $ds$ , l'asse  $z$  (verso l'alto) parallelo a  $H$  e notando che  $F$  deve avere la direzione e il verso dell'asse  $y$ , che come al solito punta in avanti della figura (per  $\lambda = 0$  e  $\zeta = 0$ , si deve avere  $\beta = 0$ ). La somma dei quadrati dei denominatori, nella (35,c), è uguale a  $\sin^2 \varphi$  e si ha pertanto

$$\cos \alpha = \frac{\cos \nu \cos \eta - \cos \mu \cos \zeta}{\sin \varphi}, \text{ ecc} \quad (12.0.93)$$

Le componenti dell'intensità  $H$  si ottengono ponendo  $m = 1$  nella (11,d).

Introduciamo le quantità seguenti:

$$\begin{cases} \int \frac{(y-y_1)dz - (z-z_1)dy}{r^3} = A \\ \int \frac{(z-z_1)dx - (x-x_1)dz}{r^3} = B \\ \int \frac{(x-x_1)dy - (y-y_1)dx}{r^3} = C \end{cases} \quad (12.0.94)$$

e sia

$$\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = D \quad (12.0.95)$$

il vettore, le cui componenti sono  $A, B, C$ , è stato chiamato da Ampère la direttrice della corrente chiusa.

La formula (11,d) mostra che le componenti dell'intensità  $H$  hanno i valori seguenti:

$$H_x = I_1 A \quad H_y = I_1 B \quad H_z = I_1 C \quad (12.0.96)$$

e che quindi

$$H = I_1 D \quad (12.0.97)$$

Si ha inoltre

$$A = D \cos \xi \quad B = D \cos \eta \quad C = D \cos \zeta \quad (12.0.98)$$

Le componenti cercate  $F_x, F_y, F_z$  della forza  $F$  si deducono dalla (35); si ha, ad esempio,

$$F_x = \mu H I_2 \sin \varphi \cos \alpha ds$$

o

$$F_x = \mu I_1 I_2 D (\cos \nu \cos \eta - \cos \mu \cos \zeta) ds$$

Le formule (36,d) danno infine

$$\begin{cases} F_x = \mu I_1 I_2 (B \cos \nu - C \cos \mu) ds \\ F_y = \mu I_1 I_2 (C \cos \lambda - A \cos \nu) ds \\ F_z = \mu I_1 I_2 (A \cos \mu - B \cos \lambda) ds \end{cases} \quad (12.0.99)$$

Le formule (36) e (37) determinano completamente l'azione ponderomotrice di una corrente chiusa  $I_1$  su un elemento di corrente  $I_2 ds$ ,  $\lambda, \mu, \nu$  designando gli angoli formati da  $ds$  con gli assi coordinati. Il modulo della risultante  $F$  è uguale a

$$F = \mu I_1 I_2 D \sin \varphi ds \quad (12.0.100)$$

dove  $D$  è dato dalla (36,a). Gli angoli  $\alpha, \beta, \gamma$  che questa risultante forma con gli assi coordinati sono determinati dalle formule (35,c), dove  $\lambda, \mu, \nu$  sono noti; gli angoli  $\xi, \eta, \zeta$  sono dati dalla (36,d) e (36,a).

## 5. Azione reciproca di due elementi di corrente

Abbiamo trattato esaurientemente, nel paragrafo precedente, la questione della mutua azione Integrata di due correnti chiuse. Bisogna sempre avere presente che tutti i risultati ottenuti si basano esclusivamente sulla formula di Biot e Savart; è questa formula che ci ha fatto scoprire l'analogia tra l'azione di una corrente e quella di un foglio magnetico. Il problema dell'azione ponderomotrice reciproca di due correnti è interamente risolto dalle formule (24) e (25), in quanto la soluzione può essere sottoposta a verifica sperimentale diretta. Ma, poiché tutte le conseguenze tratte da queste formule nei casi particolari sono state completamente confermate dall'esperienza, nessun dubbio può essere sollevato sulla loro correttezza. Lo stesso non si può dire delle formule (37), anche se si possono ovviamente dedurre le formule (24) e (25). Verificarle

sperimentalmente è impossibile e si può solo affermare che l'azione reciproca di due correnti chiuse è la stessa come se ogni elemento  $ds$  di una delle correnti fosse sottoposto da parte dell'altra corrente chiusa a forze date dalle formule (37). Tuttavia, è per un'altra strada che siamo arrivati originariamente alla formula definitiva (24). Quando Ampère ha scoperto l'azione reciproca delle correnti, ha supposto che il fenomeno osservato fosse il risultato di forze agenti tra ciascuna coppia di elementi  $ds_1$  e  $ds_2$  delle due correnti, nonché l'attrazione universale e furono quindi spiegate le azioni reciproche di corpi elettrizzati o magnetizzati dalle forze agenti tra i punti materiali, le cariche elettriche o le quantità di magnetismo libero che bisognava prendere a due a due. In questi ultimi tre casi le forze elementari, attrattive o repulsive, sono dirette lungo la retta che congiunge i due elementi agenti l'uno sull'altro. Ampère ha anche ipotizzato, per analogia, che due elementi  $ds_1$  e  $ds_2$  delle due correnti  $l_1$  e  $l_2$  si attraggano o si respingano lungo la retta congiungente  $r$ . Oggi non si può più ammettere un'istantanea azione reciproca a distanza tra gli elementi della corrente. L'azione ponderomotrice osservata sul conduttore della corrente  $l_2$ , che si trova nel campo magnetico della corrente  $l_1$ , è il risultato dell'azione della parte di questo campo immediatamente adiacente al conduttore  $I_2$ . A priori, non si può ammettere che questa azione, al fine di facilitare l'applicazione dell'analisi matematica, sia semplicemente il risultato di forze agenti tra gli elementi correnti presi a due a due. Una tale differenziazione dell'azione integrale è già di per sé un'ipotesi, che si restringe ulteriormente con quest'altra ipotesi che le forze differenziali agiscano solo lungo le rette che congiungono gli elementi. Anche nel caso in cui si riesca a trovare per queste forze un'espressione che, con sommatoria estesa a tutti gli elementi delle due correnti, porti alla formula certamente esatta (24), bisogna tuttavia considerare queste forze come fittizie e non attribuire loro alcun significato fisico reale; va detto che due correnti agiscono l'una sull'altra, come se le forze elementari della forma considerata agissero tra gli elementi della corrente presi a due a due. C'è da chiedersi anche se la forma trovata per le forze elementari sia l'unica possibile e se non esistano altre forze che conducono alla stessa mutua azione integrale di due correnti chiuse. La risposta è immediata; esiste certamente un'infinità di forme possibili di forze differenziali, non appena ce n'è una, perché si possono aggiungere all'espressione analitica di queste ultime termini, che scompaiono nell'integrazione lungo due contorni chiusi. In base a ciò, ci si deve aspettare, nella ricerca della possibile forma di una legge differenziale che regoli l'azione reciproca di due correnti, di ottenere solo un risultato indeterminato, rappresentando comunque solo una mera finzione.

Contemporaneamente alla questione della legge differenziale dell'azione mutua di due correnti, se ne pone un'altra non meno interessante, quella dell'esistenza di un potenziale elementare di due elementi correnti. È facile vedere che le ipotesi fatte da Ampère sono incompatibili con l'esistenza di un tale potenziale elementare. Infatti, la posizione relativa di due elementi di corrente  $ds_1$  e  $ds_2$  è definita dalla distanza  $r$  tra di essi e da certi angoli come l'angolo  $\theta_1$  tra  $r$  e  $ds_1$ , l'angolo  $\theta_2$  tra  $r$  e  $ds_2$ , infine l'angolo  $\varepsilon$  tra  $ds_1$  e  $ds_2$ . Sia  $f ds_1 ds_2$  la forza agente tra gli elementi  $ds_1$  e  $ds_2$  e  $w ds_1 ds_2$  il loro potenziale reciproco. Non c'è dubbio che  $f$  dipende non solo da  $r$ , ma anche dai parametri angolari  $\theta_1, \theta_2, \varepsilon$ ; l'espressione di  $f$  è quindi della forma seguente:

$$f = I_1 I_2 F(r, \theta_1, \theta_2, \varepsilon) \quad (12.0.101)$$

Se il potenziale  $w$  dipendesse solo da  $r$ , la sua derivata rispetto a  $r$ , che è proporzionale a  $f$ , dipenderebbe anche solo da  $r$ . Si deve quindi prendere, per il potenziale  $w$ , un'espressione tale che

$$w = I_1 I_2 \Phi(r, \theta_1, \theta_2, \varepsilon) \quad (12.0.102)$$

ma allora esistono derivate parziali di  $w$  rispetto ai parametri angolari; in altre parole, in una rotazione di uno degli elementi (senza variazione di  $r$ ), viene compiuto del lavoro. Se questo lavoro di rotazione fosse nullo, uno degli elementi  $ds_1, ds_2$  potrebbe spostarsi e poi ritornare nella sua posizione iniziale, senza che il lavoro totale svolto sia nullo. Sia infatti AB uno degli elementi  $ds_1, ds_2$ , che viene in A'B'; si può scegliere AA' tale che il lavoro compiuto in questo spostamento



non sia nullo. Si potrà sempre riportare l'elemento in AB senza lavoro, se le ipotesi di Ampère sono vere. Ruotiamo A'B' attorno ad A', finché la direzione coincide con AA'. Ammettiamo che il lavoro compiuto in questa rotazione sia nullo. Quindi facciamo muovere l'elemento nella sua direzione; si tratta di AB" e non c'è lavoro, poiché l'azione della corrente chiusa a cui appartiene il secondo elemento è normale all'elemento A'B'; una rotazione attorno ad A può poi riportare AB" ad AB, ancora senza alcun lavoro.

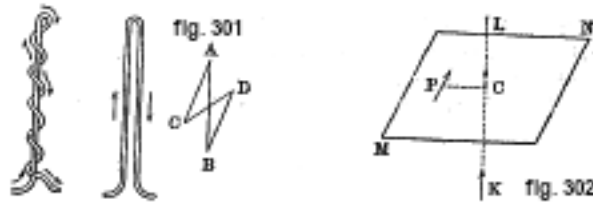
L'esistenza di coppie, che tendono a ruotare gli elementi di due correnti e i cui momenti sono dell'ordine di grandezza della forza diretta lungo la linea di congiunzione, ha dato luogo a una famosa controversia tra J. Bertrand e Helmholtz. Secondo J. Bertrand, tutte queste coppie, agendo su tutti gli elementi di un filo conduttore percorso da una corrente e sottoposto all'azione di un'altra corrente o della Terra, dovrebbero immediatamente spezzare il filo e ridurlo in polvere. Helmholtz ha risposto che un ago magnetico non si rompe sotto l'azione della Terra, sebbene su ogni elemento di lunghezza agisca una coppia il cui momento è dell'ordine di grandezza dell'elemento. J. Bertrand rispose che nessuno credeva più oggi alla reale esistenza dei fluidi magnetici di Coulomb e che la risposta di Helmholtz non aveva senso; H. Poincaré (*Electricité et Optique*, 2nd ed. 1901, p. 275) osservava che Helmholtz avrebbe potuto dire che neppure nessuno credeva all'esistenza oggettiva di una corrente materiale circolante in un conduttore. Il malinteso tra Helmholtz e J. Bertrand era il seguente. Per Helmholtz, la coppia che agisce su un elemento di corrente era solo un tipo di tendenza alla rotazione che ha una sua esistenza indipendente dalle sue due forze componenti, che possono non avere un determinato punto di applicazione. La coppia esiste ogni volta che la rotazione compie lavoro. In altre parole, Helmholtz suppone che, per quanto si spinga la divisione della materia, ciascuna parte rimarrà sempre soggetta a una coppia. J. Bertrand pensava invece che arriva un momento in cui le parti ultime della materia sono sottoposte a una forza unica e che adottando un altro modo di vedere, siamo ingannati da una finzione matematica che nasconde la realtà dei fatti.

Indicheremo gli esperimenti e i ragionamenti che portarono Ampère alla sua famosa formula per la forza  $f ds_1 ds_2$ , cioè alla determinazione della funzione  $F$  che entra nella (39).

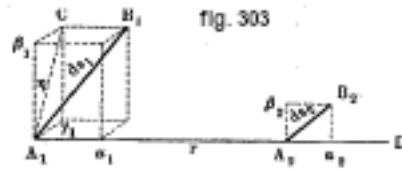
Ampère ha dapprima ammesso che l'azione reciproca di due elementi  $ds_1$  e  $ds_2$  delle correnti  $I_1$  e  $I_2$  è proporzionale al prodotto  $I_1 I_2 ds_1 ds_2$ . Quando cambia il verso di una delle correnti, cambia anche quello della forza; ciò deriva dal fatto che due parti rettilinee infinitamente vicine di una stessa corrente, uguali e parallele (fig. 301), non esercitano alcuna azione e non sono soggette ad alcuna azione. Ampère ha quindi ipotizzato che la forza cercata sia inversamente proporzionale a una certa potenza  $n$  della distanza  $r$  tra gli elementi, per cui si può scrivere

$$f ds_1 ds_2 = \frac{C I_1 I_2 ds_1 ds_2}{r^n} \Omega$$

$\Omega$  dipendente dai parametri angolari che definiscono il sistema dei due elementi  $ds_1$  e  $ds_2$ , ad esempio gli angoli  $\theta_1, \theta_2, \varepsilon$ , e  $C$  che è un fattore di proporzionalità. Ampère ha anche verificato sperimentalmente, che due correnti della stessa intensità e di versi opposti non esercitano alcuna azione esterna neanche quando uno dei conduttori è rettilineo e l'altro, a forma di elica o di linea sinuosa, è infinitamente vicino al primo (fig. 301, a sinistra). Dal punto di vista dell'azione ponderomotrice, qualsiasi elemento della corrente AB (fig. 301, a destra) può quindi essere sostituito dal sistema degli elementi AC, CD, DB; da ciò segue questa importante conseguenza che l'elemento di corrente può essere sostituito dalle sue componenti secondo la regola del parallelogramma o del parallelepipedo. Infine Ampère si è basato sul fatto che  $f = 0$ , quando uno degli elementi può condurre un piano perpendicolare all'altro elemento ( $\varepsilon = 90^\circ$  e uno degli angoli  $\theta_1$  o  $\theta_2$  uguale a  $90^\circ$ ). Liouville (1829) ha proposto la seguente dimostrazione di questa proposizione. Supponiamo che l'elemento P (fig. 302) nel piano MN passante per il centro C del secondo elemento normale a questo piano. Consideriamo due elementi L e K, posti equidistanti da MN sui prolungamenti dell'elemento C.



Per la perfetta simmetria della figura, è chiaro che K e L agiscono allo stesso modo su P, se sono in versi opposti e si allontanano, per esempio, entrambi dal piano MN. Quando gli elementi L e K hanno lo stesso verso, esercitano quindi azioni contrarie su P e deve essere così, per quanto L e K siano vicini al piano MN. Quando coincidono con C, quest'ultimo elemento deve contemporaneamente attrarre e respingere P, da cui ne consegue che tra C e P non esiste azione reciproca.



Siano ora  $A_1B_1 = ds_1$  e  $A_2B_2 = ds_2$  (fig. 303) gli elementi di due correnti  $I_1$  e  $I_2$ ,  $A_1A_2 = r$ ,  $\theta_1$  l'angolo  $B_1A_1A_2$  tra  $r$  e  $ds_1$ ,  $\theta_2$  l'angolo tra  $r$  e  $ds_2$ . Prendiamo il piano  $(r, ds_2)$  per uno dei piani di coordinate,  $A_1A_2$  per uno degli assi delle coordinate e siano  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$  le componenti di  $ds_2$ ,  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  le componenti di  $ds_1$ : indichiamo con  $\eta$  l'angolo diedro  $\beta_1A_1C$  compreso tra i piani  $(r, ds_1)$  e  $(r, ds_2)$ . Si può sostituire l'azione reciproca tra  $ds_1$  e  $ds_2$  con sei azioni reciproche alle quali attribuiremo le notazioni seguenti:  $(\alpha_1, \alpha_2)$ ,  $(\beta_1, \beta_2)$ ,  $(\alpha_1, \beta_2)$ ,  $(\beta_1, \alpha_2)$ ,  $(\gamma_1, \alpha_2)$ ,  $(\gamma_1, \beta_2)$ . Dalla proposizione appena esposta, le quattro ultime azioni reciproche sono nulle, per cui si ha

$$f ds_1 ds_2 = (\alpha_1, \alpha_2) + (\beta_1, \beta_2) \quad (12.0.103)$$

Ora,

$$(\beta_1, \beta_2) = \frac{CI_1I_2\beta_1\beta_2}{r^n} \quad (12.0.104)$$

essendo  $C$  un fattore di proporzionalità; quando si pone  $C = 1$ , si introduce un'unità particolare per l'intensità di corrente, che chiameremo l'unità elettrodinamica.

Sostituendo i valori  $\beta_1 = ds_1 \sin \theta_1 \cos \eta$ ,  $\beta_2 = ds_2 \sin \theta_2$ , si ottiene

$$(\beta_1, \beta_2) = \frac{I_1I_2ds_1ds_2}{r^n} \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \eta \quad (12.0.105)$$

si ha anche, poiché  $\alpha_1 = ds_1 \cos \theta_1$  e  $\alpha_2 = ds_2 \cos \theta_2$

$$(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{KI_1I_2ds_1ds_2}{r^n} \cos \theta_1 \cos \theta_2 \quad (12.0.106)$$

dove  $K$  è un nuovo fattore di proporzionalità. Si ha quindi

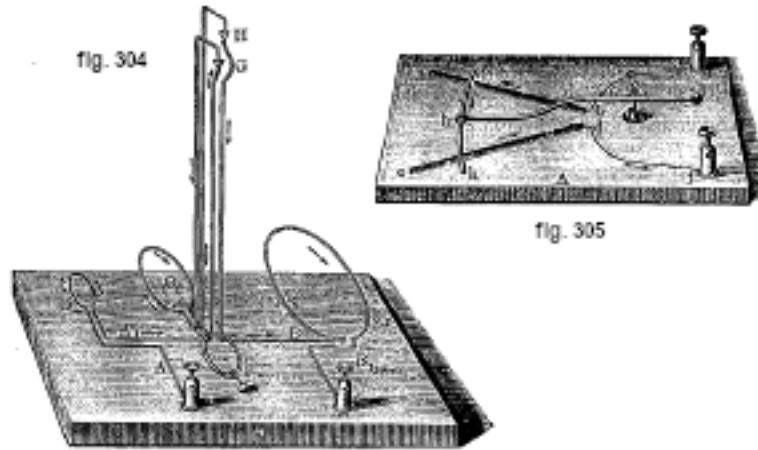
$$f ds_1 ds_2 = \frac{I_1I_2ds_1ds_2}{r^n} \{ \cos \varepsilon - (1 - K) \cos \theta_1 \cos \theta_2 \} \quad (12.0.107)$$

Ampère ha determinato il valore numerico dell'esponente  $n$  mediante il seguente esperimento. Una corrente circolare  $O_1$  può ruotare liberamente attorno a un asse verticale tra due correnti circolari immobili  $O$  e  $O_2$  ( $J$  è un contrappeso). I rispettivi raggi dei tre cerchi stanno tra loro come i numeri 1, 2, 4. Una stessa corrente è inviata nei tre conduttori circolari in un verso (vedi

frecce, fig. 304) tale che la corrente  $O_1$  sia respinta dalle correnti  $O$  e  $O_2$ . Si vede  $O_1$  prendere una posizione, in cui la distanza dai centri di  $O_1$  e  $O_2$  è doppia rispetto alla distanza dai centri di  $O$  e  $O_1$ ; di conseguenza, quando si raddoppiano le dimensioni di due cerchi e la loro distanza (considerando, ad esempio,  $O_1$  e  $O_2$  invece di  $O$  e  $O_1$ ), l'azione reciproca di questi due cerchi non cambia (poiché  $O$  e  $O_2$  agiscono allo stesso modo su  $O_1$ ); però, raddoppiando le dimensioni di  $ds_1$  e  $ds_2$ , si rende la forza quattro volte maggiore, e si deve quindi avere  $n = 2$ , da cui

$$f ds_1 ds_2 = \frac{I_1 I_2 ds_1 ds_2}{r^2} \{ \cos \varepsilon - (1 - K) \cos \theta_1 \cos \theta_2 \} \quad (12.0.108)$$

Ampère si dedicò anche all'esperimento per determinare la magnitudine  $K$ . Si consideri un arco metallico  $ik$  (fig. 305), normalmente fissato in  $hg$ ; questo arco può ruotare liberamente attorno al punto  $g$ , toccando in due punti la superficie del mercurio che si trova nei canaletti  $ab$  e  $cd$ . La corrente è inviata nel verso indicato dalle frecce. Si trova che l'arco  $ik$  rimane immobile quando il suo centro è nel punto  $g$ , sebbene su di esso agisca una corrente quasi chiusa nei due punti  $b$  e  $d$  molto vicini. Anche l'arco  $ik$  rimane immobile sotto l'azione di un magnete (o di un solenoide). Ma, se si dà a  $ik$  un piccolo spostamento angolare intorno a  $h$ , l'arco comincia a muoversi sotto l'azione della corrente stessa oltre che sotto quella di un magnete. Ampère ha concluso che la forza esercitata da una corrente chiusa su un elemento di corrente è normale a quest'ultimo.



Calcoliamo l'azione della corrente chiusa  $I_1$  sull'elemento  $I_2 ds_2$ . Dalle formule (26,b) e (26,c), si ha

$$\begin{aligned} f ds_1 ds_2 &= -\frac{I_1 I_2 ds_1 ds_2}{r^2} \left( r \frac{\partial^2 r}{\partial s_1 \partial s_2} + k \frac{\partial r}{\partial s_1} \frac{\partial r}{\partial s_2} \right) = \\ &= -\frac{I_1 I_2 ds_1 ds_2}{r^{K+1}} \frac{\partial \left( r^K \frac{\partial r}{\partial s_2} \right)}{\partial s_1} = \frac{I_1 I_2 ds_1 ds_2}{r^{K+1}} \frac{\partial (r^K \cos \theta_2)}{\partial s_1} \end{aligned} \quad (12.0.109)$$

La componente di questa forza lungo la direzione  $ds_2$  è uguale a

$$f \cos \theta_2 ds_1 ds_2 = \frac{I_1 I_2 ds_1 ds_2}{r^{K+1}} \cos \theta_2 \frac{\partial (r^K \cos \theta_2)}{\partial s_1}$$

La componente lungo  $ds_2$  dell'azione totale della corrente  $I_1$  deve essere nulla: di conseguenza

$$ds_2 \int f \cos \theta_2 ds_1 = I_1 I_2 ds_2 \int \frac{\cos \theta_2}{r^{K+1}} \frac{\partial (r^K \cos \theta_2)}{\partial s_1} ds_1 = 0$$

da cui, con una evidente trasformazione

$$\int \frac{1}{r^{K+1}} \frac{\partial (r^K \cos \theta_2)^2}{\partial s_1} ds_1 = 0$$

e integrando per parti

$$\left| \frac{\cos^2 \theta_2}{r} \right| + (2K + 1) \int \frac{\cos^2 \theta_2}{r^2} ds_1 = 0$$

Poiché l'integrazione avviene lungo un contorno chiuso, il primo termine si annulla identicamente; l'elemento differenziale nell'integrale del secondo termine è sempre positivo; si ha quindi  $2K + 1 = 0$ , cioè  $K = -\frac{1}{2}$ . La (40,a) assume pertanto la forma seguente:

$$f ds_1 ds_2 = \frac{I_1 I_2 ds_1 ds_2}{r^2} \left( \cos \varepsilon - \frac{3}{2} \cos \theta_1 \cos \theta_2 \right) \quad (12.0.110)$$

Questa è la famosa formula Ampère. A questa formula e all'esame critico della sua dimostrazione è stata dedicata una letteratura molto vasta; ma tutte queste opere oggi hanno poco più che un interesse storico. Sappiamo che la dimostrazione della formula di Ampère non regge a uno studio approfondito, in particolare l'esperimento descritto per ultimo. Abbiamo esposto all'inizio di questo paragrafo le questioni di principio che solleva. Ci limiteremo a citare alcune delle opere che contengono una critica alla formula di Ampère o che ne danno un'altra dimostrazione; si devono a Liouville, Stefan, C. Neumann, Margules, Korteweg, Riecke, D. Boryleff, Lorentz, Moutier, Ettinghausen, Felici, Savary, Blanchet, Pellat, Buguet, Duhem, Isarn, H. Poincaré e altri.

Dalla formula (41) derivano diverse conseguenze. Supponiamo gli elementi  $ds_1$  e  $ds_2$  paralleli; si ha allora  $\varepsilon = 0$  e  $\theta_1 = \theta_2$ ; si ottiene, nella parentesi,  $1 - \frac{3}{2} \cos^2 \theta_1$ . Quando  $\cos \theta_1 < \sqrt{\frac{2}{3}}$ , gli elementi si attraggono; quando  $\cos \theta_1 > \sqrt{\frac{2}{3}}$ , essi si respingono; se infine  $\cos \theta_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}$ , cioè  $\theta_1 = 24^\circ 13' \dots$ , essi non esercitano alcuna azione uno sull'altro. Questo risultato è molto poco verosimile.

Gli elementi di una stessa corrente rettilinea si respingono, per  $\varepsilon = \theta_1 = \theta_2 = 0$ , si ha

$$f ds_1 ds_2 = - \frac{I_1 I_2 ds_1 ds_2}{2r^2}$$

Ampère, Faraday, Lenz, Forbes e altri ancora hanno cercato di verificare questo risultato sperimentalmente, ma questi non sono stati del tutto convincenti.

Si può trasformare in diversi modi la formula (41). Se si pone  $K = -\frac{1}{2}$ , la (40,b) dà

$$f ds_1 ds_2 = \frac{I_1 I_2 ds_1 ds_2}{r^2} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial r}{\partial s_1} \frac{\partial r}{\partial s_2} - r \frac{\partial^2 r}{\partial s_1 \partial s_2} \right) \quad (12.0.111)$$

$$f ds_1 ds_2 = - \frac{I_1 I_2 ds_1 ds_2}{\sqrt{r}} \frac{\partial \left( r^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial r}{\partial s_1} \right)}{\partial s_2} = \frac{I_1 I_2 ds_1 ds_2}{\sqrt{r}} \frac{\partial \left( r^{-\frac{1}{2}} \cos \theta_2 \right)}{\partial s_2} \quad (12.0.112)$$

Si vede che è possibile scrivere anche

$$f ds_1 ds_2 = - \frac{I_1 I_2 ds_1 ds_2}{\sqrt{r}} \frac{\partial^2 \sqrt{r}}{\partial s_1 \partial s_2} \quad (12.0.113)$$

È molto importante notare che, in tutte queste formule, la forza  $f$  è contata positivamente, quando gli elementi di corrente si attraggono, e che le intensità sono misurate in unità elettrodinamiche, che danno, per due elementi paralleli dello stesso verso, perpendicolare a  $r$  ( $\varepsilon = 0$ ,  $\theta_1 = \theta_2 = 90^\circ$ ), l'espressione

$$f ds_1 ds_2 = \frac{I_1 I_2 ds_1 ds_2}{r^2} \quad (12.0.114)$$

Calcoliamo ora il potenziale reciproco  $W_{1,2}$  di due correnti chiuse  $I_1$  e  $I_2$ . Supponiamo che le due correnti subiscano uno spostamento molto piccolo; il lavoro che viene allora compiuto

dall'insieme delle forze  $f ds_1 ds_2$  deve essere uguale alla diminuzione della grandezza  $W_{1,2}$ , che indicheremo con  $-\delta W_{1,2}$ . Sia  $\delta r$  la variazione della distanza tra  $ds_1$  e  $ds_2$ ; il lavoro della forza attrattiva  $f ds_1 ds_2$  è uguale a  $-f ds_1 ds_2 \delta r$ , e si ha

$$\begin{aligned}\delta W_{1,2} &= \iint f ds_1 ds_2 \delta r = -2I_1 I_2 \iint \frac{\partial^2 \sqrt{r}}{\partial s_1 \partial s_2} \frac{\partial r}{\sqrt{r}} ds_1 ds_2 = -4I_1 I_2 \iint \frac{\partial^2 \sqrt{r}}{\partial s_1 \partial s_2} \delta \sqrt{r} ds_1 ds_2 = \\ &= -2I_1 I_2 \left\{ \int ds_1 \int \delta \sqrt{r} \frac{\partial^2 \sqrt{r}}{\partial s_1 \partial s_2} \frac{\partial r}{\sqrt{r}} ds_2 + \int ds_2 \int \delta \sqrt{r} \frac{\partial^2 \sqrt{r}}{\partial s_1 \partial s_2} ds_1 \right\}\end{aligned}$$

Integrando per parti e osservando che si tratta di circuiti chiusi, si trova

$$\begin{aligned}\delta W_{1,2} &= 2I_1 I_2 \iint \left\{ \frac{\partial \sqrt{r}}{\partial s_1} \delta \left( \frac{\partial \sqrt{r}}{\partial s_2} \right) + \frac{\partial \sqrt{r}}{\partial s_2} \delta \left( \frac{\partial \sqrt{r}}{\partial s_1} \right) \right\} ds_1 ds_2 = \\ &= 2I_1 I_2 \iint \delta \left( \frac{\partial \sqrt{r}}{\partial s_1} \frac{\partial \sqrt{r}}{\partial s_2} \right) ds_1 ds_2 = 2I_1 I_2 \delta \iint \frac{\partial \sqrt{r}}{\partial s_1} \frac{\partial \sqrt{r}}{\partial s_2} ds_1 ds_2 = \\ &= \frac{1}{2} I_1 I_2 \delta \iint \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial s_1} \frac{\partial r}{\partial s_2} ds_1 ds_2 = -\frac{1}{2} I_1 I_2 \delta \iint \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{r} ds_1 ds_2\end{aligned}$$

Se ne deduce

$$W_{1,2} = -\frac{1}{2} I_1 I_2 \iint \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{r} ds_1 ds_2 \quad (12.0.115)$$

o,

$$W_{1,2} = -\frac{1}{2} I_1 I_2 \delta \iint \frac{\cos \varepsilon}{r} ds_1 ds_2 \quad (12.0.116)$$

Questa espressione è stata inizialmente data da F. Neumann (1845).

Confrontando le formule (42) e (43) con le formule (27) e (28), si vede che differiscono per il fattore  $\frac{1}{2}$ . Questo fatto si spiega come segue: siamo partiti, per stabilire le espressioni (27) e (28) della formula di Biot e Savart, in cui abbiamo preso il fattore di proporzionalità  $C = 1$ , e abbiamo introdotto così l'unità elettromagnetica (el. mag.) di intensità di corrente; abbiamo invece ottenuto le espressioni (42) e (43), dopo aver posto  $C = 1$  nella formula (39,c), dove vale la stessa cosa in (41,d), che ci ha portato all'unità elettrodinamica (el. din.) dell'intensità di corrente. Indichiamo con  $I_d$  e  $I_m$  i valori numerici dell'intensità della stessa corrente misurata in unità el. din. e nell'el. mag. e cerchiamo le dimensioni dell'unità el. din. dell'intensità di corrente. Nella formula (41,d), il primo membro rappresenta una forza di dimensioni  $MLT^{-2}$ ; si ha pertanto

$$[I_d]^2 = MLT^{-2}$$

o

$$[I_d] = M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1}$$

Confrontando questa espressione con la (8-46,b), o con (8-4,b), vediamo che l'unità el. mag. e l'unità el. din. di intensità di corrente hanno le stesse dimensioni (abbiamo posto  $n = 1$ , stabilendo la (42) e la (43). Ciò è confermato anche dal fatto che le due differiscono dalla (27) e (29) solo per il fattore indipendente  $\frac{1}{2}$ , indipendentemente dalla scelta delle unità fondamentali  $L, M, T$ . Le formule indicate danno  $\frac{1}{2} I_d^2$  e  $I_m^2$ , cioè

$$I_d = I_m \sqrt{2} \quad (12.0.117)$$

Il valore numerico dell'intensità di una corrente misurata in unità el. din. è  $\sqrt{2}$  volte maggiore del valore numerico dell'intensità della stessa corrente misurata in unità el. mag. Se designiamo queste unità con  $i_d$  e  $i_m$ , si ha

$$i_d = \frac{i_m}{\sqrt{2}} \quad (12.0.118)$$

L'unità el. din. di intensità di corrente è  $\sqrt{2}$  volte più piccolo dell'unità el. mag., indipendentemente dalla scelta delle unità fondamentali di lunghezza, massa e tempo. Il sistema di el. din. oggi non è più utilizzato.

È facile vedere che le formule (42) e (43) possono essere sostituite da tutta una serie di altre espressioni, che non differiscono dalle (29), (30), (31), (32), (33), (33,a), (34) e (34,a) che per il fattore  $\frac{1}{2}$ ; ci si rende conto ora del particolare interesse presentato dalla formula (30), che richiama la formula (41) di Ampère.



Tutta la ricerca sperimentale e teorica di Ampère sull'elettrodinamica lo ha portato alla sua famosa teoria del magnetismo, basata sull'identità delle azioni di un magnete e di un solenoide. Secondo questa teoria, si deve considerare qualsiasi magnete come un sistema di magneti elementari, ciascuno costituito da una corrente elettrica chiusa. Se si assume che tutte queste correnti siano in piani perpendicolari all'asse del magnete, l'insieme delle correnti in un piano (fig. 306) può essere sostituito da una singola corrente che segue il contorno della sezione del magnete, come già mostrato in Fig. 212. Effettuando tale sostituzione per tutte le sezioni del magnete, quest'ultimo viene in realtà sostituito da un solenoide. Dobbiamo ipotizzare che le correnti elementari non incontrino resistenza, in modo che la loro energia non si trasformi in energia termica.

Molti autori hanno cercato di sostituire la formula di Ampère (41) con altre espressioni dell'azione reciproca  $f ds_1 ds_2$  di due elementi di corrente. Si trova dapprima che si può, dalle formule (42) e (43), ammettere le seguenti due leggi differenziali per l'azione reciproca di due elementi di corrente, essendo le intensità espresse in unità el. dyn.

$$f ds_1 ds_2 = \frac{1}{2} I_1 I_2 \frac{\cos \varepsilon}{r^2} ds_1 ds_2 \quad (12.0.119)$$

$$f ds_1 ds_2 = \frac{1}{2} I_1 I_2 \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{r^2} ds_1 ds_2 \quad (12.0.120)$$

Si può infatti dimostrare rigorosamente che con queste leggi differenziali si ottengono, per l'energia  $W_{1,2}$ , le espressioni (42) e (43). Le formule (41), (45) e (45,a) portano, quando gli elementi  $ds_1$  e  $ds_2$  occupano una posizione particolare, a risultati del tutto diversi; ma, per due correnti chiuse, danno tutte e tre la stessa espressione di  $W_{1,2}$  e di conseguenza anche la stessa mutua azione. Se potessimo, nella (42) e (43), considerare le funzioni che sono sotto il segno di integrazione come potenziali elementari, si otterrebbero, per la forza che agisce nella direzione di  $r$ , proprio le espressioni (45) e (45,a); ma a questa forza se ne aggiungerebbero altre, tendenti a far girare l'elemento, come abbiamo spiegato all'inizio di questo paragrafo. Tra le formule che sono state proposte in sostituzione delle tre precedenti citiamo quella di Grassmann (1845), Hankel (1865) e Reynard (1870) che, in el. din., ha la seguente forma

$$f ds_1 ds_2 = \frac{1}{2} I_1 I_2 ds_1 ds_2 \frac{\sin \theta_2 \cos \psi}{r^2} \quad (12.0.121)$$

dove  $\theta_2 = (r_1, ds_2)$  e  $\psi$  l'angolo che  $ds_1$  forma con il piano passante per  $ds_2$  e  $r$ . Questa formula dà, per due correnti chiuse, gli stessi risultati della formula di Ampère. Se uno degli elementi coincide con  $r$ , la formula (45,b) dà  $f = 0$ , che sostanzialmente la distingue da quelle sopra considerate. Va inoltre notato che viola la legge di Newton sull'azione e reazione nella sua forma classica. Grassmann ha mostrato che obbedisce comunque al principio dell'uguaglianza di azione

e reazione, ma nel modo seguente. Se i due elementi si trovano in uno stesso piano e se  $R_1$ ,  $R_2$  designano le distanze di  $ds_1$  e  $ds_2$  nel loro punto di intersezione, si ha

$$\text{per } ds_1 \quad \frac{1}{2} I_1 I_2 ds_1 ds_2 \frac{1}{r^2} \frac{\sin \theta_2}{R_1} = \frac{1}{2} \frac{I_1 I_2 ds_1 ds_2}{r^3} \sin (ds_1, ds_2)$$

$$\text{per } ds_2 \quad \frac{1}{2} I_1 I_2 ds_1 ds_2 \frac{1}{r^2} \frac{\sin \theta_1}{R_2} = \frac{1}{2} \frac{I_1 I_2 ds_1 ds_2}{r^3} \sin (ds_1, ds_2)$$

Grassmann ne conclude che, nell'applicazione della legge di Newton, si devono considerare non le accelerazioni lungo la distanza tra gli elementi, ma le accelerazioni angolari attorno al punto di intersezione di questi elementi. Reynard al contrario mostrò che la violazione della legge di Newton era solo apparente e che poteva essere resa del tutto legittima considerando non un'azione diretta a distanza dei due elementi, ma un'azione che avviene attraverso la mediazione di un mezzo.

Riecke (1880) ha indicato una serie di azioni mutue possibili tra gli elementi  $ds_1$  e  $ds_2$ , che seguono dalla formula di Ampère opportunamente scomposte. Stefan (1869) ha stabilito con grande chiarezza l'esistenza di un'infinità di leggi elementari, tutte portanti allo stesso risultato per due correnti chiuse. E. e F. Cosserat (1909) nella loro nota sulla teoria dei corpi deformabili aggiunta al Tomo II (cfr. § 5, Azione euclidea a distanza, p. 1130) hanno mostrato quale fosse l'origine di tutte queste leggi e di quelle di cui ora parleremo.

Dopo le ricerche di Ampère e quelle di F. Neumann, che ha dato la formula (43), è opportuno citare le opere classiche di Helmholtz e di W. Weber. Come abbiamo visto nella (39,a), l'esistenza di un potenziale elementare  $wd s_1 ds_2$  è incompatibile con l'ipotesi fondamentale di Ampère che la forza tra  $ds_1$  e  $ds_2$  sia nella direzione di  $r$ . Tuttavia, si sono talvolta considerate le espressioni che sono sotto il segno di integrazione nella (42) e (43), cioè

$$wd s_1 ds_2 = -\frac{1}{2} I_1 I_2 \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{r} ds_1 ds_2 \quad (12.0.122)$$

$$wd s_1 ds_2 = -\frac{1}{2} I_1 I_2 \frac{\cos \varepsilon}{r} ds_1 ds_2 \quad (12.0.123)$$

come potenziali reciproci di due elementi di corrente. Helmholtz ha basato la sua teoria sull'ipotesi che due elementi  $ds_1$  e  $ds_2$  abbiano effettivamente un determinato potenziale, uguale a

$$wd s_1 ds_2 = \frac{A I_1 I_2 ds_1 ds_2}{r} \{ (1+k) \cos \varepsilon + (1-k) \cos \theta_1 \cos \theta_2 \} \quad (12.0.124)$$

dove  $A$  e  $k$  sono costanti, dipendendo  $A$  dalla scelta delle unità. Per due correnti chiuse si ottiene l'espressione (31), di  $W_{1,2}$  (in unità el. din.), che è certamente esatta, poiché, dalla (26,d), è identica alla (27) o (28). La formula di Weber che indicheremo tra poco è un caso particolare di quella di Helmholtz: la si trova ponendo  $k = 0$ ; allora il potenziale assume la forma

$$wd s_1 ds_2 = \frac{A I_1 I_2 ds_1 ds_2}{r} (\cos \varepsilon + \cos \theta_1 \cos \theta_2) \quad (12.0.125)$$

Ponendo  $k = 1$ , si ha l'espressione del potenziale proposta da F. Neumann. Ponendo  $k = \frac{1}{3}$ , Helmholtz dice che si ritroverebbe l'elettrodinamica di Maxwell; ma H. Poincaré (*Electricité et Optique*, 2a ed. Parigi, 1901, pag. 329) ha mostrato che si tratta piuttosto di un caso limite che di un caso particolare. L'ipotesi di Helmholtz che l'azione reciproca di due elementi abbia effettivamente un potenziale della forma (47) ha dato luogo a lunghe discussioni; tra gli autori che vi intervennero, dobbiamo citare J. Bertrand, che negò addirittura la possibilità dell'esistenza di un potenziale elementare, oltre a C. Neumann, Zöllner, Herwig ed altri ancora. Gli esperimenti sulle correnti chiuse, ovviamente, non possono risolvere la questione; è necessario ricorrere a correnti indotte, non chiuse; gli esperimenti intrapresi a questo scopo da N. Schiller non hanno un significato decisivo, per ragioni che egli stesso ha dettagliatamente indicato.

W. Weber ha cercato una soluzione in una direzione completamente diversa; ha posto alla base della sua teoria non una legge differenziale, ma una legge puntuale regolante l'azione reciproca tra due particelle elettriche liberamente mobili nei conduttori. Se  $\eta, \eta_1$  sono le masse elettriche,  $r$  la loro distanza,  $t$  il tempo, la legge di W. Weber è espressa da

$$f = \frac{C\eta\eta_1}{r^2} \left\{ 1 - a^2 \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + 2a^2 r \frac{d^2 r}{dt^2} \right\} \quad (12.0.126)$$

La forza  $f$  dipende quindi non solo dalla distanza  $r$ , ma anche dalle due prime derivate di  $r$  rispetto a  $t$ ; per le particelle immobili, la legge si trasforma in quella di Coulomb. È davvero notevole che la forza  $f$  abbia un potenziale

$$w = -\frac{C\eta\eta_1}{r} \left\{ 1 - a^2 \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 \right\} \quad (12.0.127)$$

ai ha, infatti

$$f = -\frac{dw}{dr} \quad (12.0.128)$$

Weber ha mostrato che la formula (48) conduce, per l'azione reciproca di particelle elettriche in moto in due conduttori, a un'espressione identica alla formula di Ampère e che può servire come base per stabilire le leggi dell'induzione elettrodinamica. Nella teoria di Weber l'azione reciproca di due elementi si riduce a un'unica forza diretta lungo la retta che li unisce. C'è in apparenza una contraddizione con l'esistenza di un potenziale; ma è da notare che, in questa teoria, si suppone che le particelle elettriche siano animate da un moto uniforme; ciò è possibile solo per una corrente chiusa, non per una corrente aperta. All'estremità di una corrente aperta, infatti, le particelle elettriche si arrestano; la loro accelerazione quindi non è nulla. Gli elementi vicini alle estremità non obbedirebbero alla legge di Ampère, perché bisognerebbe tener conto dell'accelerazione delle particelle elettriche che vi circolano, accelerazione che non è più nulla.

Ci sarebbe quindi divergenza tra le due teorie, se si trattasse, ad esempio, di una corrente chiusa e di una porzione di corrente completamente libera. Ma non è il caso in cui ci si colloca abitualmente, quando si esamina sperimentalmente l'azione di una corrente chiusa su un elemento di corrente. Infatti, quando si studia l'azione di un conduttore chiuso su un elemento mobile, questo elemento mobile è esso stesso parte di una corrente chiusa e le sue estremità sono mobili lungo conduttori fissi. Non c'è, quindi, accelerazione per la particella che arriva a una di queste estremità, e, in questo caso, la teoria di Weber conduce alla legge di Ampère. Si trova allora, in effetti, che le forze indicate dalle due leggi ammettono entrambe un potenziale, e lo stesso potenziale; solo, nella teoria di Ampère, c'è un potenziale solo in virtù dei particolari vincoli imposti al sistema. Se invece si considerassero le correnti istantanee aperte, la legge di Ampère e l'ipotesi di Weber porterebbero a risultati diversi; ma in questo caso l'esperimento sembra quasi impossibile.

W. Thomson e P. G. Tait, Helmholtz, C. Neumann, Clausius e altri ancora presero parte alla lunghissima controversia sorta sulla possibilità di accettare la formula di Weber.

W. Thomson e P. G. Tait hanno fatto notare che la legge di conservazione dell'energia non è rispettata nella formula di Weber. Questa obiezione, pubblicata nella prima edizione del *Treatise on Natural Philosophy* di questi autori, non è stata mantenuta nelle edizioni successive. Weber ha fatto notare infatti che bastava sommare a  $w$ , nella (48,a), l'energia cinetica delle due particelle di elettricità in movimento, per ottenere l'equazione dell'energia. È interessante aggiungere che C. Neumann (1869), considerando l'espressione

$$w' = \frac{C\eta\eta_1}{r} \left\{ 1 + a^2 \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 \right\}$$



ha potuto, applicando il principio di Hamilton, ritrovare la legge di forza di Weber. B. Riemann (1861) aveva già avuto l'idea di introdurre i metodi della meccanica nello studio dell'elettrodinamica.

Le obiezioni di Helmholtz sono più serie. Se  $m$  è la massa che porta la carica elettrica  $\eta$ , che è soggetta alla repulsione di una carica  $\eta_1$  dello stesso segno a riposo, l'equazione del moto è

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{C\eta\eta_1}{r^2} \left\{ 1 - a^2 \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + 2a^2 r \frac{d^2 r}{dt^2} \right\}$$

da cui si deduce, per l'equazione dell'energia, moltiplicando per  $\frac{dr}{dt}$  e integrando

$$\frac{m}{2} \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{C\eta\eta_1}{r} \left\{ 1 - a^2 \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 \right\} = cost$$

Da ciò, la velocità è infinitamente grande per

$$r = \frac{2C\eta\eta_1 a^2}{m}$$

cioè per una distanza finita, ciò che appare inammissibile.

Molti autori hanno proposto sia modifiche delle teorie elettrodinamiche che abbiamo già considerato, sia teorie più indipendenti. Lo scopo di tutta questa ricerca è quello di dare una spiegazione non solo delle azioni ponderomotrici, ma anche delle azioni elettromotrici (induzione) dell'elettricità in movimento. Diremo solo poche parole su questo argomento, in primo luogo perché non abbiamo ancora studiato i fenomeni di induzione, ma soprattutto perché oggi tutte queste teorie hanno solo un interesse storico. Basti citare, ad esempio, le opere di C. Neumann, R. Clausius, B. Riemann, Hankel, Reinard, Moutier, Edlung e altri.

C. Neumann ha dedicato tutta una serie di memorie e in particolare la prima parte della sua opera *Die elektrischen Kräfte*, Lipsia 1873, ad un'analisi rigorosa dei principi dell'elettrodinamica. Introduce in particolare l'idea già espressa da Gauss nel 1845, in una lettera di Weber, e che B. Riemann ha cercato di realizzare poco dopo nel 1858, di una propagazione nel tempo del potenziale, secondo un'equazione analoga a quella di Poisson, che si trova attualmente nelle teorie elettroniche.

La teoria di Weber ci obbliga ad ammettere la concezione dualistica del movimento dell'elettricità, secondo la quale l'elettricità positiva e quella negativa devono muoversi, nella corrente elettrica, con velocità uguali e contrarie. R. Clausius ha cercato di sostituire questa concezione dualistica con la concezione unitaria, che gli sembrava più semplice. Propende per l'ipotesi che, nella corrente elettrica, si muova solo l'elettricità positiva, rimanendo ferma quella negativa; ma la sua teoria permette di attribuire alle due elettricità velocità differenti, in conformità con le recenti idee dei fisici. Nell'introduzione della sua legge fondamentale, Clausius procede sistematicamente partendo, per le componenti di forza, da espressioni generali, che dipendono dalle coordinate relative delle particelle di elettricità e dalle derivate di primo e secondo ordine rispetto al tempo delle coordinate di tali particelle. Queste espressioni sono poi particolarizzate con ragioni di simmetria e dall'applicazione ai fatti sperimentali. Alla fine arriva alla seguente formula, per il potenziale elettrodinamico.

$$w = -\frac{\eta\eta'}{r^2} (1 + kvv' \cos \varepsilon) \quad (12.0.129)$$

dove  $v$  e  $v'$  sono le velocità assolute del moto delle particelle  $\eta$  e  $\eta'$  e  $\varepsilon$  l'angolo tra le direzioni di queste due velocità. La formula (49) porta al risultato che due particelle in quiete relativa

alla superficie della Terra agiscono l'una sull'altra con una forza che dipende dalla velocità  $v$  della Terra, perché allora si ha

$$f = \frac{\eta\eta'}{r^2} (1 + kv^2)$$

Fröhlich, Budde, Lorberg, Levy, Wand e altri hanno avanzato obiezioni contro la teoria di Clausius.

Edlund suppone, come Weber, che la forza  $f$  dipenda da  $dr/dt$  e da  $d^2r/dt^2$ ; secondo lui, la forza ritarda per così dire sul movimento della particella elettrica, sicché non può raggiungere il valore che prevede la legge di Coulomb, quando la particella è in movimento. Herwig, Baumgarten, Licher, O. D. Chwolson e altri hanno diretto critiche contro la teoria di Edlund.

E. Budde (1887) ha proposto vari esperimenti per decidere tra le varie leggi elementari che abbiamo appena passato in rassegna; nessuno è stato eseguito, perché sono difficili da realizzare e perché a quel tempo le domande più urgenti, relative alla teoria di Maxwell, sollecitavano i fisici.

Dal punto di vista elettronico si preferirebbero oggi, tra le leggi dell'elettrodinamica, quelle di Grassmann e Clausius, avendo riguardo però alla nozione di propagazione nel tempo delle azioni elettriche.

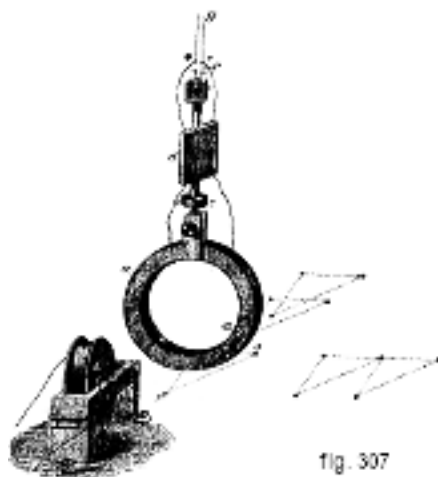
## 6. Verifica sperimentale delle leggi di mutua azione di correnti

Abbiamo visto che il problema dell'azione mutua di due correnti chiuse è interamente risolto teoricamente dalle formule (24) e (25). W. Weber è stato il primo a intraprendere la verifica sperimentale di queste formule. A tale scopo costruì il dinamometro elettrico, che consiste essenzialmente di due bobine o anelli di filo isolato. Una delle bobine è fissa, l'altra ha una sospensione bifilare, i cui fili servono contemporaneamente a condurre la corrente.

Weber ha usato due elettrodinamometri. Nel primo, la bobina immobile ha un diametro interno e una larghezza di  $76\text{ mm}$ ; contiene 3600 spire di filo  $0,7\text{ mm}$  di diametro. La bobina mobile (5000 spire di filo da  $0,4\text{ mm}$ ) è sospesa all'interno della precedente, con i loro centri coincidenti, ma i piani dei loro avvolgimenti sono perpendicolari. La bobina mobile è provvista di uno specchio, per la misurazione, tramite un cannocchiale e una scala graduata, delle rotazioni che questa bobina subisce. Weber ha utilizzato questo strumento per la verifica della legge di dipendenza tra l'azione reciproca delle correnti e le loro intensità. Quando le correnti sono della stessa intensità, la loro azione reciproca deve essere proporzionale al quadrato di questa intensità. Weber collocava normalmente l'asse della bobina immobile nel piano del meridiano magnetico e, a nord della bobina, a una distanza di  $583\text{ mm}$  c'era un magnete mobile (specchio d'acciaio), la cui deflessione, sotto l'azione della bobina fissa, serviva per misurare l'intensità  $I$  della corrente. Facendo passare la stessa corrente attraverso le due bobine e variando l'intensità di questa corrente nel rapporto dei numeri 1, 2, 3 approssimativamente, Weber trovò che l'azione reciproca delle bobine variava rigorosamente come il quadrato dell'intensità di corrente.

Il secondo elettrodinamometro di Weber (fig. 307) comprende una bobina A immobile (per la durata delle osservazioni), il cui asse è sostenuto da un banco: la bobina mobile  $aa$  circonda la prima e, per poterne osservare le deviazioni, essa porta un piccolo specchio  $d$ . La bobina A può essere installata in modo che i centri delle due bobine coincidano; ma può anche essere rimossa e posizionata accanto ad  $aa$  (vedi figura), a nord o a sud, a est o a ovest e a distanze diverse da  $aa$ ; negli esperimenti di Weber i piani degli avvolgimenti delle bobine erano sempre perpendicolari e l'asse della bobina mobile veniva portato, prima del passaggio della corrente, nel piano del meridiano magnetico. Un'altra bobina immobile, in cui veniva inviata la stessa corrente  $I$  come nelle due bobine dell'elettrodinamometro, serviva a misurare l'intensità della corrente. Weber ha calcolato il momento della coppia che agisce sulla bobina mobile, prima a diverse distanze e poi per le seguenti tre disposizioni delle bobine: 1° i centri delle bobine

coincidono; 2° il piano degli avvolgimenti della bobina immobile passa per il centro della bobina mobile (la prima è a nord o a sud della seconda); 3° il piano degli avvolgimenti della bobina mobile passa per il centro della bobina fissa (la seconda è a est o a ovest della prima). Weber ha fatto le sue osservazioni alle distanze  $r = 0,300, 0,400, 0,500$  e  $0,600\text{ mm}$ . Ha trovato l'accordo più completo tra le azioni reciproche osservate e quelle calcolate dalla formula di Ampère.



Altre verifiche delle leggi della mutua azione delle correnti sono state fatte successivamente da Cazin (1864), Boltzmann (1869) e Niemöller (1878).



# 13. Induzione dello stato magnetico nei corpi

## 1. Introduzione

Dopo aver considerato, nel capitolo precedente, le forze ponderomotrici che si originano nel campo magnetico, andiamo a studiare le altre azioni di questo campo sui corpi che esso contiene. Considereremo dapprima, in questo capitolo, i fenomeni puramente magnetici, che si verificano quando si introduce un qualsiasi corpo in un campo magnetico. L'intensità di questi fenomeni dipende soprattutto, per un dato campo magnetico, dalla sostanza del corpo; è molto grande per un piccolo numero di sostanze (in particolare per Fe, acciaio, Ni, Co), e molto piccola per quasi tutte le altre, anche se con ogni probabilità mai nulla. Da un punto di vista puramente esteriore, i fenomeni considerati possono essere definiti nel modo seguente: *un corpo, posto in un campo magnetico, diventa esso stesso un magnete; è magnetizzato*. Si dice anche che *nel corpo sia stato indotto uno stato magnetico o che vi sia stato indotto il magnetismo*. L'induzione magnetica può essere interpretata in due modi. Si può dire che, sotto l'azione del campo o anche sotto l'azione diretta delle sorgenti del campo (azione a distanza), si producono nel corpo delle modificazioni che lo trasformano in un magnete. Il campo di questo nuovo magnete si sovrappone, per così dire, al campo già esistente, in modo da ottenere una certa nuova distribuzione di forza nello spazio esterno. Se il campo primitivo scompare, rimane parte del magnetismo indotto e del campo che gli è proprio. Questa concezione pone la questione del meccanismo dell'induzione magnetica; porta, ad esempio, a cercare di ridurre questo meccanismo a una rotazione di magneti molecolari (si veda più avanti). Ma si può ancora considerare la manifestazione dell'induzione magnetica in un altro modo; se si introduce, in un campo magnetico, un corpo la cui permeabilità magnetica  $\mu$  differisce dalla permeabilità  $\mu_0$  del mezzo (l'aria, per esempio), si ha una nuova distribuzione delle linee di induzione, che, per  $\mu > \mu_0$  in particolare, si condensano all'interno del corpo e fanno acquisire a quest'ultimo tutte le proprietà di un magnete, i magnetismi fittizi nord e sud, ecc. Adottando questo modo di vedere, non si deve più parlare di un'influenza del campo sul corpo, ma piuttosto di un'azione *del corpo sul campo*. Il corpo stesso funge solo da mezzo per le linee di induzione. Si potrebbe credere che questa seconda concezione sia più esatta, più conforme allo stato attuale della scienza; tuttavia non è così. In primo luogo, il fenomeno del magnetismo rimanente non può rientrare in questo nuovo quadro senza ulteriori ipotesi. In secondo luogo, il cambiamento subito dal campo è lungi dall'essere l'unico fenomeno osservato quando un corpo viene introdotto in un campo magnetico; cambiano anche tutta una serie di proprietà di questo corpo, come vedremo in seguito. In terzo luogo, la teoria elettronica del magnetismo, appena nata (1907), porta alla conclusione che le modificazioni avvengono realmente all'interno di un corpo portato in un campo magnetico. Tutto ciò ci consente di parlare, come prima, di un'azione magnetizzante del campo magnetico. Alla fine di questo capitolo, esporremo le nuove importanti teorie del magnetismo di J. J. Thomson, W. Voit, P. Langevin e P. Weiss.

Ricorderemo prima alcune formule precedentemente stabilite. Sia  $H$  l'intensità del campo in ogni punto del corpo. Abbiamo designato con  $I$  il grado di magnetizzazione nel punto considerato; è uguale al momento magnetico riferito all'unità di volume ed anche alla densità  $k$  del magnetismo fittizio che si trova sulla base di un parallelepipedo ritagliato nel corpo, questa base essendo normale all'asse magnetico della parte staccata del corpo. Osservando la

magnetizzazione  $I$  come prodotta dal campo  $H$ , si ha

$$I = \chi H \quad (13.0.1)$$

dove  $\chi$  è la suscettività magnetica della sostanza considerata. Sia all'interno del corpo una fenditura infinitamente stretta, le cui facce sono perpendicolari a  $H$  e sono quindi ricoperte di magnetismo fittizio di densità  $\pm k'$ . L'intensità del campo all'interno di questa fenditura è allora l'induzione  $B = \mu H$ , dove  $\mu$  è la permeabilità della sostanza. L'intensità di questo campo è uguale a

$$H + 4\pi k' = H + 4\pi I = H + 4\pi \chi H = (1 + 4\pi \chi) H$$

Si ricava

$$\mu = 1 + 4\pi \chi \quad (13.0.2)$$

In precedenza si distinguevano solo corpi *paramagnetici* e corpi *diamagnetici*; alla prima appartenevano le sostanze per le quali si ha  $\chi > 0$ , alla seconda quelli per i quali  $\chi < 0$ ; per tutti i corpi, si ha  $\mu > 0$ . La grandezza  $\mu$  è analogo al potere induttore  $K$  dei dielettrici. Se si introduce, in un campo magnetico uniforme, una sfera diamagnetica ( $\mu < 1$ ), le linee di forza si distribuiscono come rappresentato dalla figura 70; con una sfera paramagnetica si ottiene la distribuzione delle linee di forza rappresentata in figura 71. Non esistono, nel campo dei fenomeni magnetici, casi che corrispondono alla figura 72, ( $n = \infty$ ).

Oggi si ha l'abitudine di raggruppare i corpi, per quanto riguarda le loro proprietà magnetiche, in corpi fortemente magnetici o ferromagnetici e in corpi debolmente magnetici. Tra i primi si annoverano i diversi tipi di ferro e acciaio, il nichel, il cobalto, oltre ad alcune leghe e minerali naturali. Normalmente, le denominazioni di sostanze paramagnetiche e sostanze diamagnetiche sono attualmente utilizzate solo per corpi debolmente magnetici. Ciò ha tanto più opportunità in quanto alcune teorie contemporanee portano al risultato che i fenomeni osservati nelle sostanze ferromagnetiche differiscono essenzialmente da quelli che si verificano, ad esempio, nei corpi paramagnetici. Se queste teorie dovessero essere confermate, sarebbe assolutamente scorretto classificare i corpi ferromagnetici tra le sostanze paramagnetiche.

Abbiamo designato con  $A, B, C$  le componenti del vettore di magnetizzazione  $I$ . La densità di volume  $\rho$  del magnetismo fittizio in un punto qualunque è determinata dall'equazione

$$\rho = - \left( \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \right) \quad (13.0.3)$$

Alla superficie di un magnete, la densità superficiale  $k$  del magnetismo fittizio è,

$$k = \bar{A} \cos(n, x) + \bar{B} \cos(n, y) + \bar{C} \cos(n, z) = \bar{I} \cos(I, n) \quad (13.0.4)$$

dove  $\bar{I}(A, B, C)$  è la magnetizzazione alla superficie,  $n$  la direzione della normale a questa superficie. Il potenziale  $V$  del magnete è

$$V = \int \frac{k ds}{r} + \int \frac{\rho dv}{r} \quad (13.0.5)$$

essendo  $ds$  e  $dv$  gli elementi della superficie e del volume,  $r$  la distanza tra questi elementi e il punto al quale si riferisce  $V$ . Abbiamo qualificato la magnetizzazione solenoidale, quando si ha dovunque  $\rho = 0$ , cioè quando

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0 \quad (13.0.6)$$

l'abbiamo chiamata lamellare, quando esiste un potenziale  $\varphi$  di magnetizzazione, cioè quando si può porre

$$A = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad B = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad C = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (13.0.7)$$

Vedremo in seguito che  $\chi$ , e quindi  $\mu$ , non sono grandezze, che hanno, per una data sostanza, un determinato valore numerico, ma che queste grandezze dipendono in larga misura dal campo  $H$  stesso. Questo è vero, in particolare, per le sostanze fortemente paramagnetiche, rappresentate soprattutto dal ferro. Come vedremo, la causa principale della complessità del fenomeno dell'induzione magnetica risiede in questa dipendenza delle grandezze  $\chi$  e  $\mu$  rispetto a  $H$ .

## 2. Teoria matematica dell'induzione magnetica

Questa teoria si occupa di risolvere il seguente problema: dato un campo magnetico, nel quale si introduce un corpo di determinate dimensioni, forma e sostanza, trovare lo stato magnetico di questo corpo, cioè la distribuzione del magnetismo al suo interno o il potenziale in tutti i punti dello spazio, sia all'interno che all'esterno del corpo. Poisson (1824) ha fornito, per la prima volta, un metodo per ottenere la soluzione di questo problema, che ha applicato inoltre ad alcuni casi particolari. Non menzioneremo i molti autori che hanno sviluppato questa teoria dell'induzione magnetica e ne hanno perseguito l'applicazione. Ma indicheremo già qui un difetto essenziale della costruzione teorica di Poisson; essa è basata sull'ipotesi che  $\chi$  o  $\mu$  sono quantità costanti per una data sostanza, cioè indipendenti dall'intensità  $H$  del campo interno al corpo, fatto che non corrisponde alla realtà, come si è detto. Inoltre, questa teoria non tiene affatto conto della possibile esistenza del magnetismo residuo. Lasciando da parte quest'ultima circostanza, si può aggiungere che si ottiene una rappresentazione esatta della distribuzione del magnetismo indotto solo quando esso ha lo stesso valore in tutti i punti all'interno del corpo. Ma, anche in questo caso, la teoria di Poisson non risponde alla questione della dipendenza tra il grado di magnetizzazione e la grandezza  $H$  del dato campo esterno. Non considereremo i tentativi fatti per introdurre, nella trattazione del problema, una relazione tra  $\chi$  e  $H$ .

Introduciamo le seguenti notazioni. Sia  $H_0$  l'intensità del dato campo esterno,  $V_0$  il potenziale; l'induzione dà origine all'interno del corpo alla densità di volume  $\rho$  del magnetismo e alla densità  $k$  alla superficie. Sia  $H_i$  il campo prodotto da questo magnetismo all'interno del corpo,  $V_i$  il potenziale,  $H_e$  e  $V_e$  le grandezze corrispondenti all'esterno del corpo. Indichiamo con  $H = H_0 + H_i$  il campo totale all'interno del corpo, con  $V = V_0 + V_i$  il potenziale, con  $I$  il vettore di magnetizzazione e con  $A, B, C$  le sue componenti; essendo  $\Delta$  l'operatore laplaciano, si ha all'interno del corpo  $\Delta V_0 = 0$ , pertanto  $\Delta V = \Delta V_i$ . Si ha inoltre

$$\Delta V = \Delta V_i = -4\pi\rho \quad (13.0.8)$$

$$\frac{\partial V_e}{\partial n} - \frac{\partial V_i}{\partial n} = -4\pi k \quad (13.0.9)$$

$$I = \chi H = \chi (H_0 + H_i) \quad (13.0.10)$$

Ponendo  $-\chi (V_0 + V_i) = \chi V = \varphi$ , si ha

$$A = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad B = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad C = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

Ne segue che la magnetizzazione è lamellare. La formula (3) dà  $\rho = -\Delta\varphi = \chi\Delta V$ ; portando questo valore nella (8), si ottiene  $(1 + 4\pi\chi)\Delta V = \mu\Delta V = 0$ . Ma si ha  $\mu \neq 0$ ; pertanto  $\Delta V = 0$ , ciò che dà  $\rho = 0$ ; e ne risulta che la magnetizzazione è solenoidale. Si ha quindi, nell'induzione magnetica, una magnetizzazione sia lamellare che solenoidale; vi è magnetismo fittizio solo alla superficie. La densità  $k$  di questo magnetismo è, si veda la (4),

$$k = \bar{I} \cos(\bar{I}, n) = -\chi \left( \frac{\partial V_0}{\partial n} + \frac{\partial V_i}{\partial n} \right) \quad (13.0.11)$$

ma si ha, si veda la (5)

$$V_i = \int \frac{k ds}{r} \quad (13.0.12)$$

pertanto

$$V_i = -\chi \int \frac{ds}{r} \left( \frac{\partial V_0}{\partial n} + \frac{\partial V_i}{\partial n} \right) \quad (13.0.13)$$

Le formule (9) e (10) contengono tutta la teoria generale dell'induzione magnetica. Il problema sarà risolto quando si troverà una distribuzione di massa fittizia di densità  $k$  alla superficie del corpo, tale che il suo potenziale  $V_i$  soddisfi la condizione (10). Se si porta la (9) nella (8,c), si ottiene per  $k$  la seguente espressione:

$$k = -\chi \left( \frac{\partial}{\partial n} \int \frac{k ds}{r} + \frac{\partial V_0}{\partial n} \right) \quad (13.0.14)$$

Non è privo di interesse notare che si ottengono le precedenti equazioni generali, partendo dalla legge di invariabilità del flusso di induzione magnetica. Se si indicano con  $H_{0,n}$ ,  $H_{e,n}$ ,  $H_{i,n}$  le componenti delle forze  $H_0 H_e$ ,  $H_i$ , nella direzione della normale  $n$ , questa legge si scrive

$$H_{e,n} + H_{0,n} = \mu (H_{i,n} + H_{0,n}) \quad (13.0.15)$$

o

$$\frac{\partial V_e}{\partial n} - \frac{\partial V_i}{\partial n} = (\mu - 1) \left( \frac{\partial V_0}{\partial n} + \frac{\partial V_i}{\partial n} \right)$$

Sostituendo il primo membro con  $-4\pi\chi$ , vedere (8,a), e ponendo  $\mu - 1 = 4\pi\chi$ , si ottiene l'espressione (8,c) per  $k$ .

Il campo  $H_i$  ha generalmente una direzione tale che l'intensità  $H = H_0 + H_i$  è minore dell'intensità  $H_0$ . La magnetizzazione  $I$  è minore della magnetizzazione  $I_0 = \chi H_0$  che si otterrebbe in assenza di uno strato superficiale di densità  $k$ . Questo strato esercita di conseguenza un'azione smagnetizzante, per la misura della quale prenderemo la grandezza<sup>1</sup>

$$N = -\frac{H_i}{I} \quad (13.0.16)$$

questa grandezza si riferisce a un punto determinato del corpo, ma si possono introdurre anche dei valori medi. Le formule (8,b) e (12) danno

$$N = \frac{\chi H_0 - I}{\chi I} = \frac{I_0 - I}{\chi I} \quad (13.0.17)$$

$$I = \frac{\chi H_0}{1 + \chi N} = \frac{I_0}{1 + \chi N} \quad (13.0.18)$$

$$H_i = -\frac{\chi N}{1 + \chi N} H_0 \quad (13.0.19)$$

$$H = H_0 + H_i = \frac{H_0}{1 + \chi N} \quad (13.0.20)$$

$$\chi = \frac{I}{H_0 - NI} \quad (13.0.21)$$

---

<sup>1</sup>Abbiamo utilizzato in precedenza altre notazioni:  $I$  e  $I'$  invece di  $I_0$  e  $I$ , e abbiamo introdotto i valori medi  $H'_i$  e  $N'$ ; inoltre non abbiamo tenuto conto della direzione dei vettori  $H'_i$  e  $I'$  e di conseguenza abbiamo tolto il segno  $-$ .



$$\mu = 1 + 4\pi\chi = \frac{H_0 + (4\pi - N)I}{H_0 - NI} \quad (13.0.22)$$

Per l'induzione  $B = \mu H = \mu (H_0 + H_i)$ , si ottiene, sostituendo la (12,c) e introducendo  $\mu$  al posto di  $\chi$ ,

$$B = \frac{4\pi \mu}{4\pi + (\mu - 1)N} H_0 \quad (13.0.23)$$

da cui

$$\mu = \frac{(4\pi - N)B}{4\pi H_0 - NB} \quad (13.0.24)$$

$B = \mu (H_0 + H_i)$  e la (8,b) danno  $B = \frac{\mu I}{\chi}$ ; si ha quindi, dalla (12,e) e (12,f)

$$B = H_0 + (4\pi - N)I \quad (13.0.25)$$

$$I = \frac{B - H_0}{4\pi - N} \quad (13.0.26)$$

$$\mu = \frac{B}{H_0 - NI} \quad (13.0.27)$$

Nella determinazione delle formule precedenti, abbiamo introdotto all'inizio la grandezza  $\chi$ ; osserviamo che molto autori si servono di un altro coefficiente  $p$ , che è uguale a

$$p = \frac{4\pi\chi}{3 + 4\pi\chi} = \frac{\mu - 1}{\mu + 2} \quad (13.0.28)$$

Quando  $\chi$  è molto piccolo, si può trascurare  $H_i$  rispetto a  $H_0$  e porre  $I = \chi H_0$ ,  $N = 0$ ; la forma del corpo non svolge in questo caso alcun ruolo. Se  $\chi$  è molto grande e se  $N$  non è piccolo, si deduce dalla (12,b)  $I = H_0 : N$ , di modo che allora la magnetizzazione non dipende del tutto da  $\chi$ .

II. Poincaré (1896), nella sua celebre memoria sul metodo di Neumann, ha posto il problema, risolto in seguito da diversi geometri, di trovare su una superficie chiusa un potenziale di singolo strato per il quale si abbia

$$\frac{\partial V_0}{\partial n} + \nu \frac{\partial V_i}{\partial n} = 0$$

essendo  $\nu$  una costante opportunamente scelta. Ricorrendo alle relazioni (1-47,e) e (1-47,e'), si vede che si ha per la densità  $k$ , l'equazione di Fredholm

$$k + \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \int k \frac{\cos \psi}{2\pi r^2} ds = 0$$

i valori di  $\nu$  sono quindi semplicemente correlati ai valori singolari di  $\lambda$ . È così che E. Picard (1906) collegò il problema dell'induzione magnetica a quello di Fredholm. Consideriamo un corpo delimitato da una superficie  $S$ . Secondo la teoria di Poisson, il problema dell'induzione magnetica consiste nel trovare una funzione  $V(x, y, z)$  della natura di un potenziale all'infinito, continuo in tutto lo spazio, armonico all'interno e all'esterno di  $S$ , e tale che, per ogni punto  $m$  di  $S$ , si abbia

$$(1 + 4\pi\chi) \frac{\partial V_i}{\partial n} - \frac{\partial V_e}{\partial n}$$

uguale a una funzione nota del punto  $m$ . Ora, possiamo rappresentare  $V$  mediante un potenziale di singolo strato esteso su  $S$ . Usando le equazioni (1-47,e), (1-47, e'), abbiamo immediatamente per la densità  $k$  di questo strato l'equazione funzionale

$$k - \frac{2\pi\chi}{1 + 2\pi\chi} \int k \frac{\cos \psi}{2\pi r^2} ds = \text{funzione data su } S$$

Per  $\chi$  positivo, l'equazione ha certamente una e una sola soluzione, perché abbiamo visto che i valori singolari  $\lambda$  dell'equazione (1-74,m'), erano almeno uguali a *uno* in valore assoluto. Potrebbe essere altrimenti se  $\chi$  fosse negativo. Ad esempio, se  $S$  è una superficie sferica di raggio *uno*, si avranno i valori singolari di *chi* corrispondente a

$$2\pi\chi = -\left(1 + \frac{1}{2n}\right)$$

dove  $n$  è un intero positivo. La teoria classica dell'induzione magnetica probabilmente non è applicabile a tali corpi diamagnetici, se ne esistono.

Consideriamo ora alcune applicazioni particolari della teoria di Poisson. In un campo uniforme ( $H_0 = \text{cost}$ ) è introdotta una lamina molto grande, le cui facce sono perpendicolari a  $H_0$ . Sia  $k$  la densità del magnetismo sulla faccia della lamina, di cui la normale esterna ha il verso di  $H_0$ , e  $k'$  la densità sull'altra faccia. È facile vedere che  $k' = -k$ . Infatti, si ha  $H_i = -2\pi(k \pm k')$ , pertanto  $H_0 + H_i = H_0 - 2\pi(k \pm k') = \text{cost}$ , e quindi  $I = \chi(H_0 + H_i) = \text{cost}$ . La formula (4) dà  $k = I$ ,  $k' = -I$ ; si ha quindi  $k' = -k$ . Ciò posto,  $H_i = -4\pi k = -4\pi I$ , da cui

$$I = \chi(H_0 + H_i) = \chi(H_0 - 4\pi I)$$

Ne risulta che

$$I = k = \frac{\chi H_0}{1 + 4\pi\chi} = \frac{1 - \mu}{4\pi\mu} H_0 \quad (13.0.29)$$

$$H_i = -\frac{1 - \mu}{\mu} H_0 \quad (13.0.30)$$

$$H = H_0 + H_i = \frac{H_0}{\mu} \quad (13.0.31)$$

$$N = \frac{H_i}{I} = 4\pi \quad (13.0.32)$$

Passiamo al caso in cui una sfera di raggio  $r$  si trova in un campo uniforme ( $H_0 = \text{cost}$ ). Come visto in precedenza, una sfera uniformemente magnetizzata ( $I = \text{cost}$ ) produce un campo interno

$$H_i = -\frac{4}{3}\pi I \quad (13.0.33)$$

il suo momento magnetico  $M$  è

$$M = \frac{4}{3}\pi r^3 I \quad (13.0.34)$$

Una tale magnetizzazione uniforme soddisfa le equazioni dell'induzione magnetica, poiché la formula (15) non è in contraddizione con l'equazione fondamentale (6,b), cioè con

$$I = \chi(H_0 + H_i) \quad (13.0.35)$$

dove  $H_0$  e  $I$  sono quantità costanti. Introducendo il valore (15), si ha

$$I = \left(H_0 - \frac{4}{3}\pi I\right)$$

da cui

$$I = \frac{\chi H_0}{1 + \frac{4\pi\chi}{3}} = \frac{3}{4\pi} \cdot \frac{\mu - 1}{\mu + 2} H_0 \quad (13.0.36)$$

$$H_i = -\frac{\mu - 1}{\mu + 2} H_0 \quad (13.0.37)$$

$$H = H_0 + H_i = -\frac{3}{\mu + 2} H_0 \quad (13.0.38)$$

Se si conta l'angolo  $\varphi$  come nella figura 173, ( $H_0$  diretto da sinistra verso destra), si ha

$$k = I \cos \varphi = \frac{3}{4\pi} \cdot \frac{\mu - 1}{\mu + 2} H_0 \cos \varphi \quad (13.0.39)$$

$$N = -\frac{H_i}{I} = \frac{4\pi}{3} \quad (13.0.40)$$

Infine, il momento magnetico  $M$  della sfera è

$$M = \frac{\mu - 1}{\mu + 2} r^3 H_0 \quad (13.0.41)$$

Si vede da ciò che la grandezza  $p$ , si veda la (13,d), non è altro che il momento di una sfera di raggio *uno*, posta in un campo uniforme la cui intensità è  $H_0 = 1$ .

Si ha, per l'induzione  $B$ , dalla (13) e (15,g),

$$B = \frac{3\mu}{\mu + 2} H_0 \quad (13.0.42)$$

Quando  $\mu$  è grande, si può porre  $B = 3H_0$ ; in altre parole, le linee di forza all'interno della sfera sono tre volte più dense che nel campo esterno originario. L'espressione (15,f) concorda perfettamente con la (1-77), quando si pone  $K_1 = 1$ ,  $K_2 = \mu$ ,  $F = -H_0$ ; si vede facilmente perché.

Quando si introduce, in un campo uniforme  $H_0$ , un ellissoide di rivoluzione il cui asse è diretto lungo  $H_0$ , l'ellissoide è uniformemente magnetizzato ( $I = cost$ ). Abbiamo dato in precedenza le formule (45,d), (45,e) e (45,f) per la quantità  $N'$ , che è identica alla quantità  $N$  delle formule (12) e (12,f). Se si porta il valore di  $N$  nella (12,b), (12,c), (12,d), si ottengono  $I$ ,  $H_i$ ,  $H$ . La densità è  $k = I \cos \varphi$ , essendo l'angolo che l'asse di rivoluzione forma con la normale alla superficie dell'ellissoide nel punto in cui la densità è  $k$ .

Quando si pone, in un campo uniforme  $H_0$ , un cilindro molto lungo, in modo che il suo asse sia parallelo a  $H_0$ , si può, nelle parti del cilindro lontane dalle basi, trascurare l'azione smagnetizzante del magnetismo e porre  $H_i = 0$ ,  $N = 0$ ; allora si ha

$$I = \chi H_0 \quad B = \mu H_0 \quad (13.0.43)$$

Se l'asse del lungo cilindro è perpendicolare al campo  $H_0$ , si ha

$$N = 2\pi \quad (13.0.44)$$

Le formule (12,b), (12,c), (12,d) e (13) danno

$$I = \frac{\chi H_0}{1 + 2\pi\chi} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\mu - 1}{\mu + 1} H_0 \quad (13.0.45)$$

$$H_i = \frac{2\pi\chi H_0}{1 + 2\pi\chi} = \frac{\mu - 1}{\mu + 1} H_0 \quad (13.0.46)$$

$$H = \frac{H_0}{1 + 2\pi\chi} = \frac{2}{\mu + 1} H_0 \quad (13.0.47)$$

$$B = \frac{2\mu}{\mu + 1} H_0 \quad (13.0.48)$$

Per un valore molto grande di  $\mu$ , si può porre  $B = 2H_0$ , mentre con la sfera si aveva al limite  $B = 3H_0$ .

Il problema della magnetizzazione di un anello, generato dalla rotazione di una qualsiasi figura piana attorno ad un asse situato nel piano di questa figura e che non lo interseca, è molto importante dal punto di vista pratico. Prendiamo coordinate cilindriche; sia  $r$  la distanza di un punto M dall'asse,  $z$  la distanza da questo punto a un qualsiasi piano perpendicolare all'asse,  $\varphi$  l'angolo tra il piano passante per M e l'asse e un piano origine qualunque pure passante per l'asse. Kirchhoff ha considerato il caso in cui il campo dato  $H_0$  è ovunque normale al piano  $\varphi = cost$ , cioè alla sezione trasversale dell'anello, ed è indipendente da  $\varphi$ . Le linee di forza del campo  $H_0$  sono circonferenze, per tutti i punti con  $z = cost$  e  $r = cost$ , e inoltre  $H_0 = f(r, z)$ . L'anello è magnetizzato, ma non c'è magnetismo superficiale, così che  $N = 0$ ,  $H_i = 0$ ,  $H_e = 0$ ; in altre parole, l'anello non esercita alcuna azione nello spazio; si ha  $H = H_0$  e  $B = \mu H$ . Quando il campo è dovuto al passaggio di una corrente  $i$  in un filo avvolto uniformemente sull'anello (solenoido chiuso), il problema è di particolare interesse. Si ha allora,

$$H = H_0 = \frac{2\pi ni}{r} \quad (13.0.49)$$

dove  $n$  è il numero totale di avvolgimenti. In questo caso

$$I = \frac{2\chi ni}{r} \quad (13.0.50)$$

$$B = \frac{2\pi ni}{r} \quad (13.0.51)$$

Il flusso di induzione totale  $\Psi$  è uguale a

$$\Psi = 2\pi ni \iint \frac{drdz}{r} \quad (13.0.52)$$

dove l'integrale si estende a tutti gli elementi di una sezione trasversale. Per una sezione rettangolare di altezza  $h$  (parallela all'asse), larghezza  $b$ , e il cui centro è ad una distanza dall'asse uguale a  $R$ , si ottiene

$$\Psi = 2\pi ni h \log \frac{2R + b}{2R - b} \quad (13.0.53)$$

Se  $b/R$  è molto piccolo, si può porre

$$\Psi = \frac{2\pi ni S}{R} \quad (13.0.54)$$

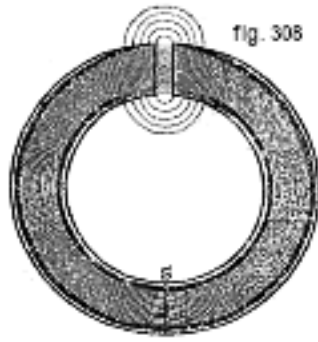
dove  $S = hb$ . Per una sezione trasversale circolare (toroide) di raggio  $\rho$ , il cui centro è a una distanza  $R$  dall'asse dell'anello, si ha

$$\Psi = 4\pi \mu ni \left( R - \sqrt{R^2 - \rho^2} \right) \quad (13.0.55)$$

ponendo  $S = \pi \rho^2$  e prendendo  $\frac{\rho}{R}$  molto piccolo, si ottiene

$$\Psi = \frac{2\pi ni S}{R} \quad (13.0.56)$$

Boltzmann, Sauter, Mues, Schütz, Boulgakoff, ecc., hanno studiato la magnetizzazione di un anello per campi meno semplici.



Il caso di un anello aperto (con una fenditura o un taglio), vedi fig. 308, è di grandissimo interesse pratico; è stato trattato da Du Bois. Manteniamo a  $R$  e a  $\rho$  il loro significato precedente, e sia  $d$  la larghezza della fenditura; l'anello è, come prima, provvisto di un avvolgimento attraversato da corrente. Le linee di induzione si dispongono come mostrato in figura: nelle vicinanze di  $S$ , cioè a una grande distanza dalla fenditura, esse differiscono molto poco dalle circonferenze che si avevano nell'anello chiuso. Sotto l'azione del magnetismo superficiale di due facce del taglio,  $H$  e  $B$  diminuiscono, quando ci si avvicina a tale fenditura; pertanto, le linee di induzione divergono e tagliano in parte la superficie laterale dell'anello sotto angoli molto acuti. Queste linee fuoriescono quasi normalmente alla superficie laterale, quando  $\mu$  ha un grande valore (ferro), come mostra la (6-48), dove si deve porre  $\mu_1 = \mu$ ,  $\mu_2 = 1$ , dove  $\tan \alpha_1 = \mu \tan \alpha_2$ , essendo  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  gli angoli che formano le linee di induzione con la normale alla superficie laterale dell'anello. Tutto il flusso di induzione non passa quindi per la fenditura e si è dato a questo fenomeno il nome di dispersione. Sia ora  $\Psi$  il flusso medio all'interno dell'anello,  $\Psi_e$  quello nella frattura; la grandezza

$$\sigma = \frac{\Psi}{\Psi_e} \quad (13.0.57)$$

è chiamato coefficiente di *dispersione* o *perdita di flusso*; si ha  $\sigma > 1$  e  $\sigma$  è tanto più grande quanto più grande è la fenditura. Trascurando il magnetismo superficiale sulla superficie laterale dell'anello e assumendo che la densità  $k$  è ovunque la stessa su entrambe le facce della frattura, Du Bois ha trovato, per il coefficiente  $N$  di smagnetizzazione, l'espressione

$$N = \frac{4\pi (d + s - \sqrt{d^2 + s^2})}{2\pi R - d} \quad (13.0.58)$$

Se  $d$  è molto piccolo, cioè se la fenditura è molto stretta, si ha

$$N = \frac{2d}{R} \quad (13.0.59)$$

Esprimendo la larghezza della fenditura in centesimi  $p$  della circonferenza  $2\pi R$  o in gradi  $\alpha$  dell'angolo sotto il quale la fenditura è vista dal centro dell'anello, si ottiene approssimativamente, secondo l'ultima espressione di  $N$ ,

$$N = \frac{1}{2}p = 0,035\alpha \quad (13.0.60)$$

H. Lehmann (1893) ha verificato sperimentalmente le formule di Du Bois, con un anello di ferro di Svezia ( $R = 7,96 \text{ cm}$ ,  $\rho = 0,895 \text{ cm}$ ) e per cinque valori di  $d$  (da  $0,040 \text{ cm}$  a  $0,357 \text{ cm}$ ); ha ottenuto i valori seguenti per  $N$  e  $\sigma$ :

$d = 0,040 \text{ cm}$	$0,063 \text{ cm}$	$0,103 \text{ cm}$	$0,202 \text{ cm}$	$0,357 \text{ cm}$
$N = 0,0079$	$0,0102$	$0,0140$	$0,0203$	$0,0246$
$\sigma = (1,31)$	$1,52$	$1,79$	$2,48$	$3,81$

Il numero 1,31 è stato trovato per estrapolazione, utilizzando la formula empirica  $\sigma = 1+7d : R$ . I risultati di queste misure presentano un accordo molto soddisfacente con le formule di Du Bois.

Il fenomeno dell'ombra magnetica, che ha origine nei corpi cavi detti schermi magnetici, è legato all'azione interna smagnetizzante del magnetismo superficiale indotto. Quando un corpo cavo, ad esempio un involucro sferico o un involucro cilindrico molto lungo, di una sostanza fortemente magnetica viene introdotto in un campo magnetico, il magnetismo superficiale che induce su tale corpo produce, nella cavità stessa, un'azione contraria al campo magnetico esterno  $H_0$ , in modo che il campo  $H'$  all'interno della cavità diventi più debole del campo  $H_0$ . La cavità è nell'ombra magnetica e il corpo stesso funge da schermo, che protegge la cavità dalle azioni magnetiche provenienti dall'esterno. L'azione ponomotrice del campo esterno sui corpi che si trovano nella cavità (magneti, correnti) è diminuita, ma in compenso compaiono forze ponderomotrici che si esercitano sul corpo cavo che funge da schermo. Le linee di forza del campo esterno sono fortemente rifratte al loro ingresso nel corpo e poi seguono, per la maggior parte, l'interno della sua massa, circondando, per così dire, la cavità interna. Stefan (1882), Rücker (1894), Du Bois (1897), Wills (1899), Du Bois e Wills (1900), De la Rive (1909) e Esmarch (Mosca, 1911) si sono occupati dei problemi posti dal fenomeno dell'ombra magnetica. Ci limiteremo a indicare due formule. Per una sfera cava con raggio interno  $R_1$  e raggio esterno  $R_2$ , si ha

$$\frac{H_0}{H_1} = 1 + \frac{2(\mu - 1)^2}{9\mu} \left(1 - \frac{R_1^3}{R_2^3}\right) \quad (13.0.61)$$

Quando  $\mu$  è grande e lo spessore  $d = R_1 - R_2$  è piccolo, si può porre

$$\frac{H_0}{H_1} = 1 + \frac{9\pi\chi}{3} \frac{d}{R} \quad (13.0.62)$$

Per un cilindro cavo molto lungo, il cui asse è perpendicolare al vettore  $H_0$  e i cui raggi interno ed esterno sono rispettivamente  $R_1$  e  $R_2$ , si ha

$$\frac{H_0}{H_1} = 1 + \frac{1(\mu - 1)^2}{4\mu} \left(1 - \frac{R_1^2}{R_2^2}\right) \quad (13.0.63)$$

Quando  $\mu$  è grande e  $d = R_2 - R_1$  è piccolo, si può porre

$$\frac{H_0}{H_1} = 1 + 12\pi\chi \frac{d}{R} \quad (13.0.64)$$

Rücker, Du Bois e Wills hanno fornito formule per schermi doppi e tripli, vale a dire per due e tre strati sferici o cilindrici concentrici. Esmarch ha ottenuto una soluzione completamente generale e molto flessibile per qualsiasi numero di strati sferici o cilindrici concentrici.

Tutto quanto detto finora sulla teoria dell'induzione magnetica si basa sull'assunto che  $\chi$  e  $\mu$  sono grandezze costanti, indipendenti dall'intensità  $H$  del campo magnetico, per cui la magnetizzazione è proporzionale a tale intensità. Ma, come già ricordato, entrambi dipendono da  $H$  e dalla magnetizzazione  $I$ , che aumenta contemporaneamente ad  $H$  e tende verso un certo limite chiamato saturazione magnetica. Anche la teoria precedente non fornisce alcuna indicazione del fenomeno del magnetismo residuo. Sebbene non siano ancora stati considerati i risultati delle ricerche sperimentali effettuate per determinare la dipendenza tra  $\chi, \mu$  e  $H$ , riteniamo necessario presentare subito un tentativo di spiegazione teorica della saturazione e del magnetismo residuo. Questa spiegazione poggia sull'ipotesi della rotazione dei magneti molecolari. I primi calcoli al riguardo sono dovuti a W. Weber (1852), il quale suppone che la forza magnetica  $H$  tende a far ruotare la molecola e a porre il suo asse parallelamente a  $H$ , sviluppando poi una forza antagonista  $F$ , parallela alla direzione che aveva l'asse della molecola prima della sua rotazione. Sia  $n$  il numero molto elevato di molecole nell'unità di volume,  $m$  il

momento magnetico di una molecola. Il valore limite di magnetizzazione  $I$ , che corrisponde a  $H = \infty$ , è uguale a  $mn$ . Supponiamo che l'asse della molecola formi prima l'angolo  $\alpha$  con la direzione  $H$ , ma che dopo la rotazione questo angolo diventi  $\beta$ . La condizione di equilibrio sarà  $H \sin \beta = D \sin (\alpha - \beta)$ , da cui

$$\tan \beta = \frac{D \sin \alpha}{H + D \cos \alpha} \quad (13.0.65)$$

Un momento magnetico  $\Delta I$  si manifesta a causa della rotazione nella direzione di  $H$  ed è uguale a

$$\Delta I = m (\cos \beta - \cos \alpha)$$

Se si introduce, in questa formula, il valore di  $\beta$  dedotto dalla (21), e se si ammette che tutte le direzioni  $\alpha$  si presentano con uguale frequenza, si ottiene per  $I$  il seguente risultato:

Per  $0 < H < D$ , si ha

$$I = \frac{2}{3} mn \frac{H}{D} \quad (13.0.66)$$

per  $H > D$ , si ha

$$I = mn \left( 1 - \frac{1}{3} \frac{H^2}{D^2} \right) \quad (13.0.67)$$

Per piccoli valori di  $H$ , la magnetizzazione  $I$  aumenta quindi proporzionalmente a  $H$ , divenendo  $I$  uguale ai  $2/3$  del massimo  $mn$ , quando  $H = D$ . Per  $H > D$ , la magnetizzazione si avvicina asintoticamente al valore  $mn$ . La teoria di Weber lascia la questione del magnetismo residuo senza risposta.

Maxwell ha colmato questa lacuna. Egli suppone che quando l'angolo di rotazione  $\alpha - \beta$  della molecola rimane minore di un certo valore  $\theta$ , la molecola ritorna esattamente nella sua posizione originaria, dopo che il campo  $H$  è scomparso; ma, se si ha  $\alpha - \beta > \theta$ , la molecola, dopo la soppressione di  $H$ , gira all'indietro solo di un angolo  $\theta$  e di conseguenza rimane deviata dell'angolo  $\alpha - \beta - \theta$ , il che spiega il magnetismo residuo. Il risultato finale di questa teoria non è abbastanza vicino alla realtà per attribuirgli grande importanza. O. D. Chwolson sembra essere stato il primo a dare una spiegazione della forza  $D$  che, secondo lui, sarebbe la risultante delle azioni esercitate sulla molecola considerata da tutte le molecole vicine. Altri sviluppi della teoria della rotazione dei magneti molecolari si troveranno nelle opere di Righi (1880), Auerbach (1881), Ewing (1899), Du Bois (1894), ecc.

Quando l'intensità del campo aumenta o diminuisce bruscamente, si verifica dapprima una variazione molto rapida dello stato magnetico; poi, dopo uno stato stazionario, la cui durata sembra breve, una lenta variazione, che può durare diversi minuti. Questo fenomeno è stato studiato da Holborn (1896), Martens (1897), Klemencic (1897) e più recentemente da Gildemeister (1907). Gildemeister ha considerato in particolare la parte della magnetizzazione che si annulla bruscamente, quando il campo svanisce (per apertura della corrente di magnetizzazione). Ha trovato che questa magnetizzazione cala a meno della metà in  $1/300000$  di secondo, a meno di un decimo in  $1/150000$  di secondo, e che sembra scomparire completamente in  $1/50000$  di secondo. Da  $1/50000$  a  $1/2000$  di secondo non c'è nessuna nuova variazione; la lenta diminuzione della magnetizzazione inizia comunque solo più tardi.

### 3. Elettrocalamite

Nel paragrafo precedente abbiamo considerato il fenomeno dell'induzione magnetica in un campo magnetico di origine qualsiasi, ed è solo per un anello che abbiamo ipotizzato che il campo fosse dovuto ad una corrente elettrica, passante in un avvolgimento attorno ad esso. Consideriamo ora il caso generale in cui la magnetizzazione è prodotta da una corrente, il corpo da magnetizzare essendo di ferro, cioè di valore grande. Tale sistema è detto *elettromagnete*; è costituito da un

nucleo di ferro e da un avvolgimento o bobina; quest'ultimo può essere costituito da uno o più strati di filo isolato, nei quali viene inviata la corrente. Gli elettromagneti possono assumere forme molto diverse; i più diffusi sono gli elettromagneti rettilinei (dove il nucleo è un'asta rettilinea a sezione ordinariamente circolare) e gli elettromagneti a ferro di cavallo. Questi ultimi furono costruiti per la prima volta da Sturgeon (1826) e Brewster (1826). Sono ordinariamente provvisti di due spire rettilinee, che avvolgono i due rami del nucleo a ferro di cavallo. La piastra di ferro dolce, che a volte viene applicata contro i poli dell'elettromagnete, è detta l'armatura.

L'intensità  $H$  del campo magnetico all'interno della bobina è determinata dalla (12-14e), ponendo  $m = 1$ . Si può anche prendere la formula approssimata (12-14c), dove  $n$  è il numero di avvolgimenti per unità di lunghezza della spira in tutti gli strati, cioè ponendo  $H = 4\pi ni$ , dove  $i$  è l'intensità della corrente. Se  $S$  è l'area della sezione della cavità interna della bobina, si ha, per il flusso di forza

$$\Phi = 4\pi niS \quad (13.0.68)$$

Quando si riempie questa cavità con il nucleo di ferro, il flusso di induzione  $\Psi$  all'interno della bobine diviene uguale a

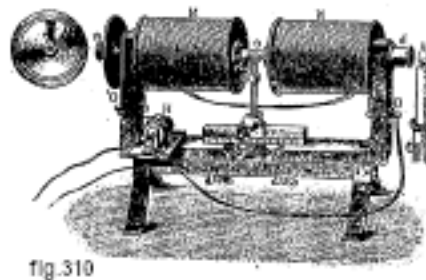
$$\Psi = 4\pi n (1 + 4\pi k) iS = 4\pi n \mu iS \quad (13.0.69)$$

Ma l'intensità  $H$  del campo, quindi anche il flusso di forza all'interno della bobina, non cambiano, quando la cavità interna della bobina è riempita di ferro. L'intensità del campo all'interno di uno stretto canale rettilineo, supposto ritagliato nel nucleo parallelamente all'asse della bobina, è quindi ancora uguale a  $H = 4\pi ni$ . Al contrario, in una fenditura perpendicolare all'asse, l'intensità del campo, che misura l'induzione  $B$ , è  $\mu H = 4\pi n \mu i$ .



Indicheremo qui alcune delle diverse forme date agli elettromagneti. La figura 309 rappresenta un elettromagnete dovuto a Joule; è costituito da un cilindro di ferro cavo, tagliato parallelamente all'asse in due parti disuguali; sulla maggiore è avvolto longitudinalmente un filo, mentre la minore funge da armatura.

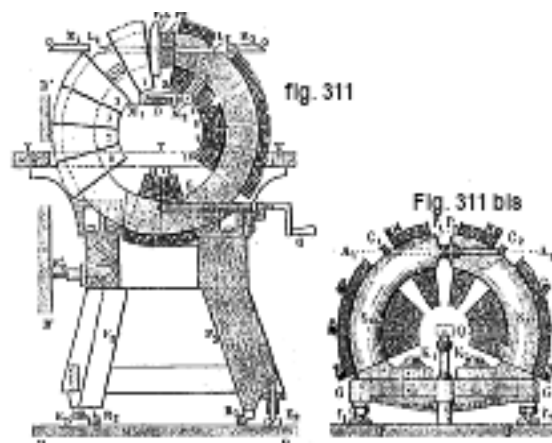
Ruhmkorff ha costruito un elettromagnete che è conveniente in alcune ricerche e che è ancora frequentemente utilizzato. Consiste in un banco di ferro K (fig. 310), lungo il quale possono muoversi spesse lastre di ferro O e O' piegate ad angolo retto. Alle estremità superiori di queste lastre sono avvitate due cilindri orizzontali di ferro avvolti dalle bobine N e M. Su una tavoletta di livello variabile si trova il corpo  $c$  che si vuole sottoporre all'azione di un potente campo magnetico. I nuclei di ferro vengono forati lungo il loro asse, per uno scopo che verrà indicato in seguito.



Gli elettromagneti di Du Bois, che consentono di ottenere un campo magnetico di intensità molto elevata in uno spazio ridotto, sono recentemente diventati molto diffusi. Du Bois (1894)



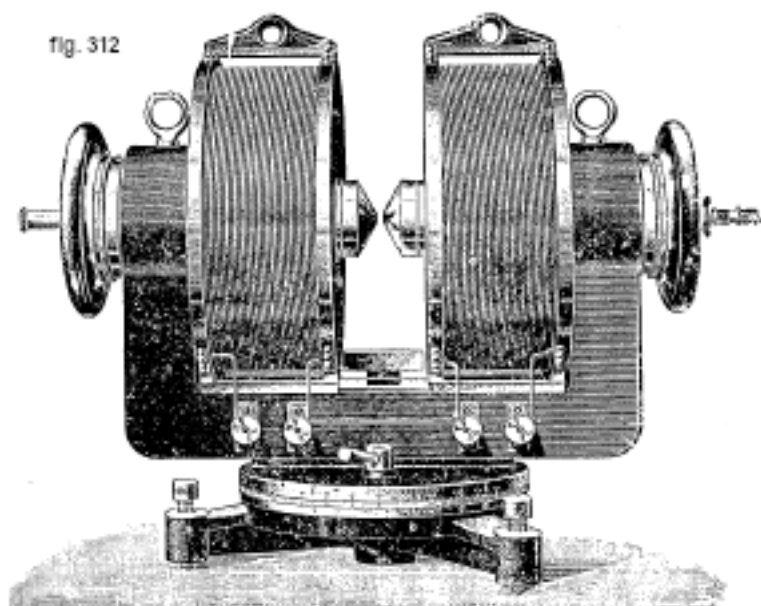
costruì per primo l'elettromagnete anulare mostrato schematicamente nella figura 311. Un anello di ferro è montato su un treppiede di legno, dove è trattenuto da graffette di ottone. La tavola TT viene utilizzata per ricevere dispositivi ausiliari. L'anello è tagliato lungo il piano orizzontale S, che è tangente alla circonferenza interna; ruotando la manovella G, si può variare la distanza tra le due metà dell'anello. Dodici bobine a forma di settore avvolgono l'anello; la larghezza di ciascuno di essi corrisponde ad un angolo al centro di  $20^\circ$ , per cui in totale coprono  $240^\circ$ , cioè  $\frac{2}{3}$  della superficie dell'anello. Nella parte superiore è forato un canale  $L_1L_2$ , che può essere occupato dai cilindri di ferro  $K_1$  e  $K_2$ . Un'asta di rame a tiraggio  $M_1M_2$  serve a evitare che l'anello si pieghi, per effetto dell'attrazione dei poli. Per una magnetizzazione molto forte, è necessario introdurre delle lastre di rame nella fenditura Z. Ai poli dell'elettromagnete possono essere avvitate parti in ferro di varie forme; due di questi pezzi di  $P_1P_2$  sono mostrati in figura.



Stefan e contemporaneamente Ewing e Low (1888) hanno mostrato che per ottenere la massima intensità del campo magnetico in uno spazio ridotto, è necessario utilizzare espansioni polari aventi forma di tronco di cono, le cui generatrici formano con l'asse un angolo  $\alpha = 54^\circ 44'$  ( $\alpha = \arctan \sqrt{2}$ ). Walter (1904) ha poi sviluppato la teoria di Stefan evidenziandone la sua utilità pratica. Du Bois ha ottenuto la massima intensità con  $\alpha = 60^\circ$ , cioè quando l'apertura del cono è di  $120^\circ$ ; è riuscito a raggiungere un'intensità di campo di 40000 gauss (unità C.G.S.), in uno spazio di pochi millimetri di larghezza; diminuendo la larghezza di questo spazio fino a una frazione di millimetro, ha potuto ottenere intensità ancora maggiori.

Nel 1900 Du Bois ha costruito un elettromagnete ad anello, mostrato nella planimetria in figura 311 bis. Basta ricordare che le viti  $K_1$  e  $K_2$  consentono di variare la distanza tra i due rami dell'elettromagnete e fare ruotare ciascun ramo attorno ad un asse verticale; otto bobine ricoprono  $22,5^\circ \times 8 = 180^\circ$ , cioè mezza circonferenza. Il supporto Q viene utilizzato per installare vari dispositivi. Dal 1909 al 1912 Du Bois ha pubblicato una serie di memorie, nelle quali ha descritto ulteriori perfezionamenti e importanti trasformazioni dei suoi elettromagneti e dove ha trattato anche teoricamente (1912) la questione della forma migliore da dare alle espansioni polari. È riuscito a raggiungere nello spazio un campo di oltre 50000 gauss (unità C.G.S.).

P. Weiss (1907) ha costruito un potentissimo elettromagnete (fig. 312). È montato su piede rotante su sfere, con cerchio di regolazione suddiviso in gradi e un dispositivo di bloccaggio. Le bobine essendo poste direttamente sui nuclei dei poli concentrano la saturazione magnetica solo in questa regione, mentre il resto del circuito magnetico, avendo una sezione notevolmente più forte, lavora con un'induzione molto più debole. I nuclei polari possono essere allontanati o avvicinati micrometricamente la lunghezza del traferro può essere letta al decimo di millimetro. Le pareti delle carcasse degli avvolgimenti sono cave e attraversate da una circolazione d'acqua, che impedisce la comunicazione ai raccordi polari del calore prodotto dal riscaldamento dell'avvolgimento. Il traferro rimane assolutamente freddo, il che è un vantaggio importante per molti esperimenti. Tra poli conici, l'intensità di campo può salire fino a 40000 gauss.



Due potentissimi elettromagneti rettilinei furono costruiti e studiati da Ollivier (1910); producono campi rigorosamente di rivoluzione. Con una corrente di 31 ampère e un traferro di  $0,8\text{ mm}$  si ottiene un campo di 45100 gauss.

Prenderemo in considerazione alcune proprietà degli elettromagneti. Sono state condotte numerose indagini per determinare empiricamente la dipendenza tra la magnetizzazione e l'intensità della forza magnetizzante, nonché le dimensioni del nucleo. Indicheremo solo in modo sommario alcuni vecchi lavori, che oggi hanno solo un interesse storico. Per magnetizzazione, gli autori di questi lavori intendevano una grandezza, che rappresentava un certo valore medio di  $I$  o che era misurata direttamente dal momento magnetico del nucleo; manterremo, per designarla, la lettera  $I$ . La forza magnetizzante  $H$  era misurata dal prodotto dell'intensità di corrente per il numero di spire della bobina. Lenz e Jacobi (1839), che impiegavano nuclei spessi e correnti deboli, hanno trovato che  $I$  aumenta proporzionalmente a  $H$ , il che corrisponde alla realtà solo entro limiti molto ristretti. Le seguenti formule empiriche sono di un certo interesse:

$$J. Müller \dots I = c \arctan bH \quad (13.0.70)$$

dove  $b$  e  $c$  dipendono dalle dimensioni del nucleo;

$$Lamont \dots I = a \left(1 - e^{-cH}\right) \quad (13.0.71)$$

$$O. Frölich \dots I = \frac{kI_0H}{1 + kH} \quad (13.0.72)$$

essendo  $a, c, k$  costanti,  $I_0$  il massimo di  $I$ . Frölich (1894) ha sostituito più tardi la sua formula con un'altra più complicata. Altre espressioni empiriche sono state proposte anche da Sohncke, Ruths, Müllendorf, Kapp, ecc.

Numerosissimi autori hanno cercato di determinare come il momento magnetico  $M$  o la magnetizzazione media  $I$  dei tondini di ferro, soprattutto quelli cilindrici, dipende dalla loro lunghezza  $l$  e dalla loro dimensione trasversale  $d$ . Ci limiteremo ad alcune indicazioni dei risultati molto diversi e puramente empirici che sono stati ottenuti. Si ha  $M = vI$ , dove  $v$  è il volume dell'asta; si può quindi porre  $M = Cl d^2 I$ , essendo  $C$  un coefficiente costante. Dud ha trovato che  $M$  cresce proporzionalmente a  $\sqrt{d}$ , e quindi  $I$  proporzionalmente a  $d^{-3/2}$ ; ha inoltre dedotto dalle sue osservazioni che  $I$  è proporzionale a  $l\sqrt{l}$ , da cui  $M$  proporzionale a  $l^2\sqrt{l}$ . Le ricerche di Waltenhofen, G. Wiedemann e altri hanno mostrato, tuttavia, che questa dipendenza dalle

dimensioni dell'asta tappo non è confermata dalle esperienze. Non esiste una legge semplice e certamente non può esserci. Si può scrivere approssimativamente

$$M = Cld^2 \left(\frac{l}{d}\right)^{1+p} \dots\dots\dots I = C_l \left(\frac{l}{d}\right)^{1+p}$$

dove  $p = 0, 3$ . Formule analoghe sono applicabili al magnetismo residuo.

Passiamo all'interessante questione di quella che viene chiamata la forza portante degli elettromagneti. Non ci soffermeremo molto sulle numerose ricerche sperimentali intraprese da Fechner (1833), Lenz e Jacobi (1839), Joule (1851), Dub (1852), Waltenhofen (1870), Siemens (1881) e altri, che non hanno dato risultati molto chiari né ben definiti. Questi lavori sono esposti con tutti i dettagli necessari nell'opera di G. Wiedemann, *Lehre von der Elektrizität*, Volume III, pagine da 638 a 661 e da 688 a 709, Braunschweig 1895. Uno studio teorico si deve a Stefan (1880) e Maxwell (nel suo famoso *Treatise on Electricity and Magnetism*, Volume II, da pag. 641 a 644). La teoria di Stefan porta alla formula

$$P = 2\pi I^2 S \quad (13.0.73)$$

dove  $P$  è la forza portante,  $S$  l'area della sezione trasversale del nucleo dell'elettromagnete,  $I$  la sua magnetizzazione media. La teoria di Maxwell porta a un'espressione essenzialmente diversa della forza portante, che può essere stabilita mediante processi elementari. Consideriamo un elettromagnete rettilineo, tagliato in due parti contemporaneamente alla bobina da una sezione trasversale; queste parti vengono poi accostate in modo che vi sia il contatto più intimo possibile tra i nuclei e le bobine, attraverso le quali passa la corrente magnetizzante. Si tratta di trovare la forza  $P$  necessaria per staccare una parte dell'elettromagnete dall'altra. Supponiamo una magnetizzazione uniforme  $I$ , uguale alla densità  $k$  del magnetismo sulle superfici  $S$  a contatto. Sia  $H$  l'intensità del campo delle bobine. La formula (12-63), pagina 687, e la dipendenza indicata nello stesso punto tra un solenoide (corrente) e un magnete fanno immaginare che le bobine parziali siano sostituite da magneti la cui magnetizzazione  $I_1$  è uguale a  $H : 4\pi$ . È quindi possibile sostituire al nucleo con la sua bobina un nucleo semplice, le due superfici  $S$  essendo allora ricoperte di magnetismo, con una densità superficiale  $I + H : 4\pi$ . L'intensità del campo in prossimità di una di queste superfici è  $2\pi (I + H : 4\pi)$  e per conseguenza la forza  $P$ , che agisce sul piano vicino a  $S$ , è uguale a

$$P = 2\pi \left(I + \frac{H}{4\pi}\right)^2 S = \frac{(H + 4\pi I)^2 S}{8\pi} = \frac{B^2 S}{8\pi} \quad (13.0.74)$$

Questa è la formula di Maxwell. Quando una sola delle aste è avvolta da una bobina, l'intensità del campo alla sua superficie estrema è  $H + 2\pi I$ ; pertanto la forza portante è

$$P' = (H + 2\pi I) IS = (2\pi I^2 + HI) S \quad (13.0.75)$$

La differenza  $P - P' = H^2 S : 8\pi$  è ovviamente uguale alla forza di attrazione delle bobine parziali, cioè a  $2\pi I_1^2 S = 2\pi (H : 4\pi)^2 S$ . Quest'ultima forza è molto piccola rispetto a  $P$ , quando il nucleo è fortemente magnetizzato. Siemens e Wassmuth (1882) hanno verificato la formula di Stefan (24); Bosanquet (1886), Bidwell, Threfall (1894) e E. T. Jones (1895) hanno verificato quella di Maxwell. Particolare importanza è attribuita al lavoro di E. T. Jones, il quale ha mostrato che la forza  $P$  è proporzionale a  $B^2$ , ma non a  $I^2$ ; ha infatti osservato che, per valori molto grandi di  $H$ , la forza  $P$  continua ad aumentare, mentre  $I$  rimane costante. Se, nella formula (24,a), la grandezza  $B$  è espressa in unità C.G.S., l'area  $S$  in centimetri quadrati e la forza  $P$  in grammi, si ha

$$P = \frac{B^2 S}{8,91 \cdot 981} \text{ grammi} = \left(\frac{B}{5000}\right)^2 S \text{ kg} \quad (13.0.76)$$

Vedremo che in pratica è facile ottenere il valore  $B = 20000$ , ciò che dà per  $P$  un valore di circa  $16 \text{ kg/cm}^2$ ; il massimo valore ottenibile  $B = 60000$  dà per  $P$  circa  $144 \text{ kg/cm}^2$ .

La nozione di circuito magnetico, che ha una grande importanza pratica, ma non regge dal punto di vista teorico una critica seria, è in stretta relazione con quanto precede. Abbiamo in precedenza introdotto la formula

$$\psi = \frac{\int H dl}{\int \frac{dl}{\mu \sigma}} = \frac{\int H dl}{r} \quad (13.0.77)$$

che si riferisce a qualsiasi parte di un tubo di induzione;  $\psi$  è il flusso di induzione nel tubo,  $dl$  l'elemento di lunghezza di quest'ultimo,  $\sigma$  l'area della sezione trasversale dell'elemento  $dl$ ,  $H$  e  $\mu$  sono relativi allo stesso elemento  $dl$ . La grandezza  $\int H dl$  è la forza magnetomotrice agente nei settori del tubo e la grandezza  $r = \int \frac{dl}{\mu \sigma}$  la resistenza magnetica (riluttanza) del settore. La formula (25) è del tutto analoga a quella che esprime la legge di Ohm.

Kapp e i fratelli J. e E. Hopkinson (1886) hanno mostrato quasi contemporaneamente che una relazione simile alla (25) può essere di grande utilità nella costruzione di macchine elettrodinamiche; questa relazione non è del tutto esatta, ma è sufficientemente vicina alla realtà nella pratica. Come sappiamo, le linee di induzione sono curve chiuse e si può, di conseguenza, in qualsiasi sistema la cui parte costitutiva principale è un elettromagnete, considerare isolatamente uno spazio anulare percorso dalla maggioranza delle linee di induzione. È a questo spazio che si applica la formula (25); quando è costituito da parti per le quali la lunghezza  $l$ , così come  $\sigma$  e  $\mu$  hanno valori diversi, la resistenza totale  $r$  del circuito magnetico è

$$r = \sum \frac{l_i}{\mu_i \sigma_i} \quad (13.0.78)$$

Se si suppone il campo magnetico prodotto da una bobina con un totale di  $n$  avvolgimenti, si ha,

$$\int H dl = 4\pi ni = 0,4\pi ni_a \quad (13.0.79)$$

essendo  $i$  l'intensità della corrente in unità C.G.S.,  $i_a$  l'intensità della corrente in ampere;  $ni_a$  è il numero di ampere-giri. L'espressione del flusso di induzione è allora

$$\psi = \frac{0,4\pi ni_a}{\sum \frac{l_i}{\mu_i \sigma_i}} \quad (13.0.80)$$

Per un anello chiuso di sezione circolare (toroide), sul quale il filo è uniformemente avvolto, si ha

$$\psi = \frac{4\pi n \mu \sigma}{l} \quad (13.0.81)$$

dove  $l$  è la lunghezza della linea centrale dell'anello. Quando solo una parte dell'anello è ricoperta dal filo e l'anello è sufficientemente spesso, si può ancora usare, come approssimazione, della formula (25,d), supponendo che tutti i tubi di induzione siano contenuti nella massa dell'anello, cioè la perdita di flusso nell'aria circostante sia trascurabile. Il caso di un anello aperto o con una fenditura è di particolare interesse nella pratica. Sia  $d$  la larghezza della fenditura; allora si ha

$$\psi = \frac{4\pi ni}{\frac{l-d}{\mu \sigma} + \frac{d}{\sigma}} = \frac{4\pi i n \mu \sigma}{d + d(\mu - 1)} \quad (13.0.82)$$

essendo  $\mu$  uguale a *uno* per l'area. Per un grande valore di  $\mu$ , questa espressione di  $\psi$  può essere molto più piccola della (25,d) anche se  $d$  è piccolo rispetto a  $l$ ; uno strato d'aria aumenta la resistenza del circuito magnetico in proporzione significativa. Gli esperimenti di K. Kahle (1890)

hanno mostrato che la formula (25,e) non fornisce risultati esatti, fintanto che  $d$  assume un valore elevato (era fino a  $d = 20, 18 \text{ mm}$ ).

L'analogia tra la relazione (25,c) e quella che esprime la legge di Ohm è puramente formale, perché la nozione di resistenza magnetica è stata introdotta in modo artificioso e non corrisponde ad una determinata grandezza fisica, come avviene per la resistenza elettrica. Va notato in particolare che  $\mu$  e di conseguenza anche la resistenza magnetica dipendono dall'intensità del campo, per cui, nell'espressione (25,c), il denominatore dipende dal numeratore. Scompare così definitivamente la possibilità di perseguire un'analogia più intima tra il circuito magnetico e la corrente elettrica. Tuttavia, la formula (25) è molto utile per orientarsi nei calcoli elettrochimici.

#### 4. Influenza del campo magnetico su forma e dimensioni corpi

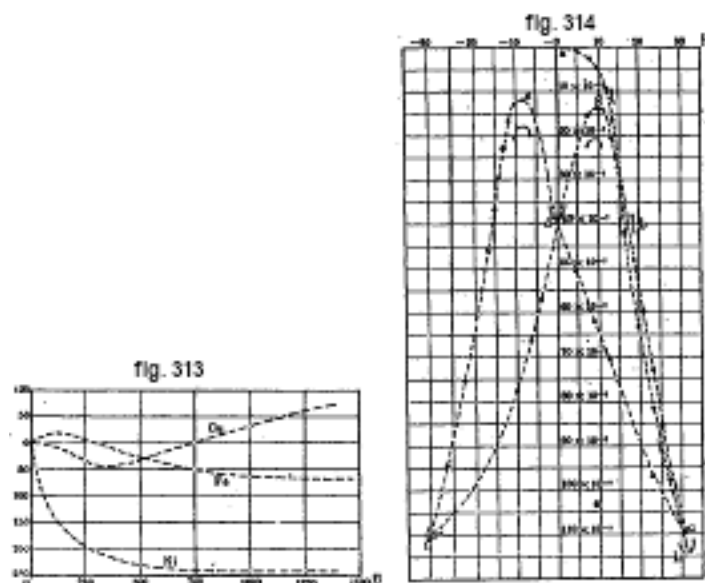
Abbiamo già brevemente descritto i fenomeni di elettrostrizione, cioè le variazioni di forma e di grandezza che subiscono i corpi quando sono posti in un campo elettrico. Analoghe variazioni si producono in corpi posti in un campo magnetico; costituiscono quella che viene chiamata magnetostrizione. Maxwell, Helmholtz, Kirchhoff, P. Duhem, Kolacek, Lorberg, Cantone, R. Gans, F. Pockels e altri autori, hanno sviluppato varie teorie sulla magnetostrizione. Ci limiteremo a dire qualche parola sulla teoria di Kirchhoff, secondo la quale il rapporto tra le componenti A, B, C della magnetizzazione  $I$  e le componenti  $H_x, H_y, H_z$  dell'intensità del campo è

$$A = [\chi - \chi'(\lambda_x + \lambda_y + \lambda_z) - \chi''\lambda_x] H_x \quad (13.0.83)$$

con due formule analoghe per  $B$  e  $C$ ;  $\chi$  conserva qui il suo precedente significato,  $\chi'$  e  $\chi''$  sono due nuove costanti,  $\lambda_x + \lambda_y + \lambda_z$  sono le dilatazioni lineari lungo le direzioni degli assi. Kirchhoff ha trovato che l'interno di un corpo magnetizzato deve dappertutto esercitare una pressione analoga a quella idrostatica e uguale a  $\frac{BH}{8\pi} - \frac{\chi'H^2}{2}$ , e una forza di estensione nella direzione delle linee di forza uguale a  $\frac{BH}{4\pi} + \frac{\chi'H^2}{2}$ . Ha calcolato la deformazione di una sfera nel campo magnetico; Cantone lo ha fatto per un ellissoide di rivoluzione allungato, uniformemente magnetizzato nella direzione dell'asse di rivoluzione e ha fornito formule per l'allungamento di questo asse, nonché per l'aumento di volume dell'ellissoide. La teoria di Kirchhoff, così come quelle proposte da altri studiosi, hanno sollevato numerose obiezioni e la questione rimane tuttora del tutto aperta dal punto di vista teorico. Non si può dire che le conseguenze di una qualsiasi di queste teorie siano state quantitativamente confermate dall'esperimento; c'è accordo con l'osservazione solo per quanto riguarda il carattere generale del fenomeno e il suo aspetto qualitativo.

Passiamo alle ricerche sperimentali che sono state fatte per determinare l'influenza del campo magnetico sulle dimensioni dei corpi. La variazione della lunghezza di un corpo, nella sua magnetizzazione longitudinale, è stata studiata da molti autori. A tale scopo sono stati utilizzati diversi metodi, ad esempio una leva sensibile dotata di uno specchio, i cui spostamenti sono osservati mediante un cannocchiale e una scala graduata, o un micrometro a contatto che chiude la corrente o infine un metodo di interferenza analogo a quello che Fizeau ha impiegato per determinare la dilatazione termica dei corpi. Le prime misurazioni si devono a Joule (1847), che ha trovato, per il ferro, un allungamento proporzionale al quadrato del grado di magnetizzazione. Senza fermarci ai lavori di A. M. Mayer e Barrett, passeremo agli esperimenti di Shelford Bidwell (1885-1905). I risultati di alcune delle numerose indagini di questo fisico, fondate su aste e anelli di Fe, Co e Ni, sono mostrati in Fig. 313, dove l'intensità  $H$  del campo espressa in unità C.G.S. è contata in ascissa, e l'allungamento (sopra la linea dello zero) o l'accorciamento (sotto) sull'ordinata. Si vede che il ferro subisce, per una debole influenza del campo, un allungamento che, a seconda della natura del ferro, oscilla tra  $2,5 \cdot 10^{-6}$  e  $5 \cdot 10^{-6}$  della lunghezza totale. Per  $H > 100$ , l'allungamento diminuisce, diventa uguale a zero, e si trasforma in un accorciamento, quando  $H$  continua ad aumentare. Il cobalto si comporta esattamente in senso opposto: si ha accorciamento per valori piccoli di  $H$  e allungamento per valori grandi. Infine, il nichel subisce

un accorciamento molto pronunciato che, per  $H$  molto grande, sembra tendere asintoticamente verso un limite vicino  $50 \cdot 10^{-6}$  della lunghezza totale.



Tra le tante opere successive, quelle di studiosi giapponesi Nagaoka, Honda e Shimizu sono di particolare interesse. Questi autori hanno mostrato che le variazioni di lunghezza, che avvengono sotto l'influenza del campo magnetico, evidenziano il fenomeno dell'*isteresi*; la lunghezza non è la stessa, quando  $H$  assume un valore determinato dall'aumento o dalla diminuzione. In un ciclo completo di variazione del campo da  $+H$  a  $-H$  e viceversa, la variazione di lunghezza è rappresentata da una curva chiusa; la figura 314 riporta la curva relativa al Ni. Quando il nichel è sottoposto, per la prima volta, all'azione di un campo  $H$  progressivamente crescente, ne consegue l'accorciamento si traduce con la curva  $abc$ ; per  $H = +30$ , è uguale a  $110 \cdot 10^{-7}$ . Quando il campo decresce continuamente da  $H = 30$  a  $H = 0$ , si ottiene la curva  $cd$ , per cui, per  $H = 0$ , si ha un allungamento di  $40 \cdot 10^{-7}$ . Quando si produce poi la magnetizzazione in senso inverso, da  $H = 0$  a  $H = -30$ , si ha la curva  $edf$ ; cioè, l'accorciamento continua dapprima a diminuire, per crescere poi rapidamente fino al valore ottenuto per  $H = +30$ . Un passaggio progressivo in senso contrario, da  $H = -30$  a  $H = +30$ , è descritto dalla curva  $fdgc$ . Se poi si fa variare  $H$  da  $+30$  a  $-30$  e viceversa, gli accorciamenti sono rappresentati, in ogni ciclo percorso, dalla curva  $cdefdg$ . Rosing ha scoperto, contemporaneamente a Nagaoka, l'esistenza di una tale isteresi. Ha studiato un filo di ferro teso da un peso di  $380 \text{ g/mm}^2$  di sezione e ha trovato che il suo allungamento relativo  $\Delta l/l$  è espresso dalla formula

$$10^9 \frac{\Delta l}{l} = 0,000044834 I^2 - 0,00365023 I H + 0,0301531 H^2$$

Gli esperimenti di Cantone sulla variazione di lunghezza di un ellissoide allungato di rivoluzione (rapporto degli assi  $16,7 : 1$ ) sono già stati citati. Confrontando le formule, che danno la variazione di lunghezza e volume secondo la teoria di Kirchhoff, con i risultati dell'osservazione, ha potuto determinare le quantità  $\chi$ ,  $\chi'$  e  $\chi''$  presenti nella (26); ha trovato che  $\chi'$  e  $\chi''$  sono molto grandi rispetto a  $\chi$  e che si ha per il ferro  $\chi' > 0$ ,  $\chi'' < 0$ ; al contrario, per nichel,  $\chi' < 0$ ,  $\chi'' > 0$ .

Nagaoka e Honda (1902) hanno studiato l'acciaio al nichel, ma i risultati dei loro esperimenti sono stati contestati da Van Aubel e Osmond. Bidwell ha osservato un allungamento del bismuto nel campo magnetico, ma questo risultato non è stato confermato negli esperimenti di Van Aubel e Wills.

Honda e Shimizu (1902) si proponevano di determinare l'influenza della temperatura sulla variazione di lunghezza nel campo magnetico. Indicheremo alcuni dei risultati delle loro osservazioni.

L'accorciamento del nichel diminuisce col riscaldamento e scompare quasi completamente a  $400^\circ$ . Alla temperatura dell'aria liquida ( $-186^\circ$ ) è minore, per piccoli valori di  $H$ , che a temperatura ordinaria, e al contrario maggiore per alti valori di  $H$ . L'accorciamento del ferro dolce, che corrisponde a valori elevati di  $H$ , scompare alle alte temperature. L'allungamento massimo non cambia tra  $-186^\circ$  e  $+200^\circ$ . Nel cobalto fuso, quando la temperatura sale, l'accorciamento, che corrisponde a piccoli valori di  $H$ , diminuisce, e l'allungamento, per grandi valori di  $H$ , aumenta; a  $800^\circ$  l'accorciamento scompare, ma si osserva un allungamento anche a  $1020^\circ$ . Partendo da  $-186^\circ$  l'accorciamento del cobalto ricotto aumenta prima fino a un massimo, poi diminuisce a zero e cambia in un allungamento, avendo ugualmente un massimo per poi diminuire, ma rimanendo comunque molto evidente anche a  $1634^\circ$ . Recenti ricerche sono state condotte da Guthe e Austin (1906), Davies (1906), Mc Lennan (1907), Tieri (1908), Dorsey (1910) e Williams (1911). Dorsey, che ha fornito una bibliografia molto completa (1847-1908), ha studiato diverse leghe di ferro e carbonio. Ha scoperto che l'allungamento massimo è il più piccolo, per un contenuto di carbonio dello 0,9% e che l'asta raffreddata lentamente subisce un allungamento maggiore rispetto a quando il raffreddamento è rapido.

Considereremo in seguito la Torsione che viene prodotta dal campo magnetico; si può ovviamente, infatti, osservare questo fenomeno nei corpi solo quando la simmetria si trova alterata in particolari condizioni.

La variazione del volume, sotto l'influenza del campo magnetico, è stata osservata da alcuni degli autori che hanno studiato la variazione della lunghezza, in particolare da Knott e Shand, Maurain e altri ancora. I risultati non sono molto chiari; in ogni caso la variazione di volume è molto piccola. La variazione di lunghezza, in una magnetizzazione longitudinale, è accompagnata da una variazione in senso opposto delle dimensioni trasversali. Il rapporto  $\sigma$  tra la variazione relativa delle dimensioni trasversali e la variazione relativa della lunghezza è una grandezza, che richiama il coefficiente di Poisson e che risulta essere prossima a 0,5, ciò che porta all'invariabilità del volume  $v$ . Joule ha trovato  $\Delta v = 0$  per il ferro; Cantone ha ottenuto lo stesso risultato, ma ha osservato che  $\Delta v < 0$  per il Ni. Nagaoka e Honda hanno dapprima trovato  $\Delta v < 0$  per il Ni; ma hanno in seguito constatato (1902) che  $\Delta v > 0$ , per il ferro, l'acciaio, Ni e l'acciaio al nichel, e che  $\Delta v < 0$  per il Co; il cobalto fuso possiede un minimo di volume per  $H = 900$ .

Knott e Shand (Fe), così come Bidwell (Ni e Co) hanno studiato la variazione di capacità di un tubo posto in un campo magnetico. I risultati dei loro esperimenti sono complicati e non possono essere considerati come definitivi.

Hurmuzescu (1897) ha osservato una diminuzione del volume di un liquido (soluzione di un sale di ferro), inserito in un campo magnetico uniforme, e Quincke (1900) ha ottenuto lo stesso risultato con soluzioni di  $FeCl^3$  e di  $K^4Fe (CAz)^6$ .

Quando la superficie di separazione di due liquidi o di un liquido e un gas si trova in un campo magnetico  $H$ , su di essa si esercitata una pressione

$$\Delta p = \frac{\chi - \chi'}{2} H \quad (13.0.84)$$

$\chi$  e  $\chi'$  riferiti alle due sostanze a contatto. Quincke, Töpler e Hennig hanno applicato questa formula alla misura di  $\chi$  (si veda in seguito).

Alla magnetostrizione è ovviamente legato il suono emesso da un tondino di ferro sottoposto ad una magnetizzazione discontinua o variabile (in direzione). Questo fenomeno è stato osservato per la prima volta da Page (1838); è stato poi studiato da Delezenne, Marian, Matteucci, Wertheim, De La Rive, Ferguson, Ader, Tronwbridge, Bachmetieff e recentemente da Honda e Shimizu. Si osserva facilmente, quando il tondino è avvolto da una bobina, che non tocca la superficie dello stesso. Se nell'avvolgimento delle bobine viene inserita una corrente discontinua (intermittente) o alternata, l'asta inizia a risuonare, l'altezza del suono corrisponde perfettamente al numero di magnetizzazioni dell'asta nell'unità di tempo. Rimane controverso se le vibrazioni

longitudinali dell'asta, cioè le sue variazioni di lunghezza, siano dovute solo alla magnetizzazione o anche all'attrazione delle bobine. Bachmetieff ha mostrato che un'asta sottoposta a forte estensione non emette suono; Honda e Shimizu hanno osservato che l'ampiezza delle vibrazioni è molto maggiore dell'allungamento che risulta dalla sola magnetizzazione. La costruzione del telefono di Reis si basa sul fenomeno precedente.

## 5. Metodi di misura di $\chi$ e $\mu$ nei corpi ferromagnetici

Ricordiamo le equazioni fondamentali  $I = \chi H$ ,  $B = \mu H$  e  $\mu = 1 + 4\pi\chi$ , dove  $H$ ,  $B$  e  $I$  si riferiscono a uno stesso punto all'interno dei corpi. Queste equazioni danno

$$B = \mu H = (1 + 4\pi\chi) H = H + 4\pi I \quad (13.0.85)$$

Quando il campo esterno  $H_0$  è dato, si ha

$$H = \frac{H_0}{1 + \chi N} \quad (13.0.86)$$

dove  $N$  indica l'azione smagnetizzante del magnetismo superficiale. La quantità  $\mu$  ha per espressione

$$\mu = \frac{H_0 + (4\pi - N) I}{H_0 - N I} \quad (13.0.87)$$

$$\mu = \frac{(4\pi - N) B}{4\pi H_0 - N B} \quad (13.0.88)$$

Per grandi valori di  $\chi$ , si può porre

$$\mu = 4\pi\chi = 12,566\chi \quad (13.0.89)$$

$$B = 4\pi I = 12,566 I \quad (13.0.90)$$

Quando  $N = 0$ , si ha  $H = H_0$  e

$$\mu = 1 + 4\pi \frac{I}{H} = \frac{B}{H} \quad (13.0.91)$$

Nello studio sperimentale della magnetizzazione,  $H$  è considerato la variabile indipendente. Se la magnetizzazione è prodotta per mezzo di una lunga bobina, il campo esterno  $H_0$  viene determinato utilizzando la formula

$$H_0 = 4\pi n_1 i = 0,4\pi n_1 i_a \quad (13.0.92)$$

essendo  $n$  il numero di spire della bobina per unità di lunghezza,  $i$  l'intensità della corrente in unità C.G.S.,  $i_a$  l'intensità della corrente in ampere. Oltre a  $H_0$ , consideriamo noto anche  $N$ . Il problema che si pone è esprimere  $B$  o  $I$ , o  $\mu$  in funzione di  $H$ . Si determina sperimentalmente una delle grandezze  $I$  o  $B$ . Nel primo caso, si ottiene  $H$  con la formula,

$$H = H_0 - H_i = H_0 - N I \quad (13.0.93)$$

Nel secondo caso, dove l'esperienza dà  $B$ , si ha

$$H = \frac{B}{\mu} = \frac{4\pi H_0 - N B}{4\pi - N} \quad (13.0.94)$$

Le formule (28,b) e (28,c) danno immediatamente  $\mu$ .



Faremo la seguente osservazione relativa alla grandezza  $N$ . In pratica, al corpo da studiare si dà la forma di un anello, nel qual caso  $N = 0$ , oppure la forma di una lunga asta, per la quale si può ancora porre  $N = 0$ , o infine la forma di un ovoide, dove  $N$  è dato dalla formula (7-45,d). Un ovoide è uniformemente magnetizzato, come sappiamo, in un campo uniforme; abbiamo quindi, per il suo momento magnetico  $M$ , l'espressione

$$M = vI \quad (13.0.95)$$

denotando  $v$  il volume dell'ovoide. La stessa formula vale anche per un'asta, quando si può porre  $N = 0$ .

Descriveremo ora i metodi impiegati per lo studio delle proprietà delle sostanze fortemente magnetiche.

I. METODO MAGNETOMETRICO. Questo metodo dà  $I$  in funzione di  $H$ . Si prepara, con la sostanza da studiare, un ovoide molto allungato o una lunga asta, che si dispone lungo l'asse di una lunga bobina orizzontale e perpendicolare al meridiano magnetico. Un magnetometro, cioè un piccolo magnete sospeso a un filo, è posto in una delle posizioni principali di Gauss. Dall'altro lato del magnetometro c'è una seconda bobina, in modo che inviando la stessa corrente attraverso le due bobine, le loro azioni sul magnetometro si eliminano a vicenda, quando l'ovoide o l'asta non è all'interno della prima bobina. Se poi si introduce in questa bobina il corpo da studiare, si osserva, nel magnetometro, una deviazione del magnete, che è dovuta solo al corpo magnetizzato. Vedremo come si possa così determinare il momento magnetico  $M$  dell'ovoide o dell'asta; conoscendo  $M$ , si ottiene  $I$  usando la formula (30). Si conosce  $H_0$  dalla per (28, g); per un ovoide si deduce  $H$  dalla (29); per un'asta lunga e sottile, si può porre  $H = H_0$ . La formula (28) dà inoltre le grandezze  $B = H + 4\pi I$ ,  $\mu = B : H$  e  $\chi = (\mu - 1) : 4\pi$ ; si può calcolare  $\mu$  direttamente per mezzo della (28,b) o  $\chi$  mediante la (12,e)

$$\chi = \frac{I}{H} = \frac{I}{H_0 - NI} \quad (13.0.96)$$

Per un'asta cilindrica di breve lunghezza, si deve introdurre la quantità  $N$ .

Esiste un secondo metodo magnetometrico, proposto da Ewing (1891). La bobina è posta verticalmente, in modo che il piano passante per il suo asse e per il centro del magnete mobile sia perpendicolare al meridiano magnetico; inoltre, il polo superiore dell'ovoide o dell'asta viene portato all'altezza dell'asse del magnete mobile. Si noti che, in un ovoide uniformemente magnetizzato, la distanza tra i poli è uguale a  $2/3$  della lunghezza dell'asse di rivoluzione. L'azione della bobina è compensata con una seconda bobina. Sotto l'influenza dell'ovoide o dell'asta magnetizzata, si ottiene una certa deviazione  $\varphi$  del magnete mobile. Sia  $\pi a^2$  l'area della sezione trasversale dell'asta o della sezione equatoriale dell'ovoide. In entrambi i casi l'azione del magnete è uguale a quella delle quantità di magnetismo  $\pm \pi a^2 I$  concentrate ai poli. Sia  $r$  la distanza dal polo superiore al centro del magnete mobile,  $l$  la distanza tra i poli. La componente orizzontale  $F$  della forza con cui l'ovoide o l'asta agisce sul polo del magnete mobile è uguale a

$$F = \pi a^2 I \left\{ \frac{1}{r^2} - \frac{r}{(r^2 + l^2)^{3/2}} \right\} = \frac{\pi a^2 I}{r^2} \left\{ 1 - \left( \frac{r}{\sqrt{r^2 + l^2}} \right)^3 \right\} \quad (13.0.97)$$

Nella posizione di equilibrio del magnete mobile, si ha

$$F = H' \tan \varphi$$

dove  $H'$  è la componente orizzontale dell'intensità del magnetismo terrestre. Se ne deduce

$$I = \frac{r^2 H' \tan \varphi}{\pi a^2 \left\{ 1 - \left( \frac{r}{\sqrt{r^2 + l^2}} \right)^3 \right\}} \quad (13.0.98)$$

Se  $r/a$  è molto piccolo, si può porre

$$I = \frac{r^2}{\pi a^2} H' \tan \varphi \quad (13.0.99)$$

II. - METODO BALISTICO. Questo metodo si basa sul fenomeno dell'induzione di correnti, di cui parleremo nel volume V. Basteranno qui le seguenti indicazioni. Supponiamo che, in una bobina che contiene almeno in totale  $n$  avvolgimenti, passi un flusso di induzione  $\psi$  parallelo all'asse. Supponiamo inoltre che questo flusso scompaia o perché si annulli la causa che l'ha prodotto, o perché la bobina sia portata rapidamente in un luogo dove  $\psi = 0$ , o infine perché sia fatta ruotare rapidamente di  $90^\circ$  intorno ad un asse perpendicolare a flusso. In tutte queste circostanze, si manifesta nel circuito chiuso in cui è inserita la bobina, una corrente di induzione di breve durata, la quantità totale di elettricità  $\eta$ , che attraversa il circuito, essendo uguale a

$$\eta = \frac{n_1 \psi}{R} \quad (13.0.100)$$

dove  $R$  è la resistenza del circuito. Si usa, per la misura  $\eta$ , il galvanometro balistico; l'ago magnetico di un tale galvanometro è caricato da un peso, che ne aumenta il momento d'inerzia e ne ritarda il movimento. Si può ammettere che la corrente di induzione agisca su di esso come uno urto, durante il quale esso non ha il tempo di uscire dalla sua posizione di equilibrio. La deviazione dell'ago sotto l'azione di questo urto consente di determinare  $\eta$ .

Il metodo balistico dà immediatamente l'intensità dell'induzione  $B$ . Per studiare con questo metodo le proprietà magnetiche di una sostanza, se ne fa un anello o un'asta, su cui si avvolge un filo attraverso il quale si invia la corrente  $i$  di magnetizzazione; questo filo costituisce quella che viene chiamata la bobina primaria. Questa è avvolta per tutta la lunghezza o solo su parte della lunghezza dell'anello, dalla bobina secondaria che è collegata al galvanometro balistico. Quando l'intensità della corrente viene improvvisamente variata da zero a un certo valore  $i_m$ , poi da  $i_m$  a zero e da zero a  $-i_m$ , infine da  $-i_m$  a zero (Ewing), a ogni variazione dell'intensità di corrente il galvanometro balistico dà una misura della variazione del flusso di induzione. Quando la corrente  $i$  viene fatta passare e la sua direzione viene improvvisamente cambiata, il galvanometro mostra una deviazione che misura il doppio del flusso di induzione ( $2\psi$ ). Supponiamo che la bobina secondaria racchiuda  $n$  spire e che ogni spira abbracci un'area  $S_1$ ; indichiamo con  $S$  l'area della sezione trasversale dell'anello o dell'asta, essendo  $S$  generalmente più piccola di  $S_1$ . Il flusso totale che attraversa la bobina secondaria, è uguale a  $S\psi + (S_1 - S)H$ ; è quindi facile apportare la necessaria correzione, quando  $S_1$  non è uguale a  $S$ .

Per un anello di piccola sezione circolare, così come per un anello piano di piccola larghezza, si possono prendere per  $H$  e  $B$  le formule (18) e (18,b), considerando la quantità  $r$ , che entra in esse, come la distanza dalla linea mediana dell'anello all'asse di quest'ultimo. Se il corpo ha la forma di un'asta, la bobina secondaria è avvolta su un anello speciale, che si può spostare liberamente lungo la bobina primaria. Dopo aver inviato una corrente  $i$  nella bobina primaria, a cui corrisponde un dato valore di  $H$ , la bobina secondaria viene rapidamente spostata e allontanata dalla primaria. In questo caso, il galvanometro balistico misura l'entità del flusso di induzione che ha attraversato la bobina secondaria.

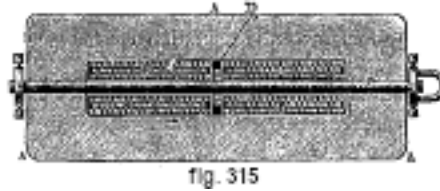
Come si vede, il metodo balistico consente generalmente di misurare la quantità della variazione  $\Delta\psi$  del flusso di induzione all'interno del corpo studiato; in casi particolari, si ha  $\Delta\psi = \psi$ . La variazione corrispondente dell'induzione è

$$\Delta B = \frac{\Delta\psi}{S} \quad (13.0.101)$$

Il numero  $n_1$  di spire della bobina secondaria non entra in questa formula, perché si assume che il galvanometro balistico sia tarato per il circuito utilizzato, in modo che le sue deviazioni determinino la grandezza  $\Delta\psi$ . Avendo ottenuto  $B$  e  $H$ , si deducono  $I$ ,  $\mu$  e  $\chi$  dalle formule (28).

L'importanza di questo metodo, soprattutto per gli anelli, è stata indicata da Kirchhoff ed evidenziata dai lavori di Stolietoff e Rowland.

III. METODO DI J. HOPKINSON. Questo metodo permette lo studio di una piccola asta, senza dover introdurre alcuna correzione relativa all'azione smagnetizzante delle estremità. Tale scopo viene raggiunto collegando tali estremità mediante spesse lamelle di ferro, in modo da formare un circuito magnetico chiuso. La parte principale del dispositivo è costituita da uno spesso telaio AAA di ferro dolce (fig. 315), forato da un canale CC. In quest'ultimo viene introdotta l'asta da studiare; essa è avvolta da una doppia bobina di magnetizzazione BB, così come dalla bobina di induzione D collegata a un galvanometro balistico.



Se  $n$  è il numero di spire della bobina BB,  $i$  l'intensità della corrente (in ampere) in questa bobina,  $l$  la lunghezza della parte dell'asta all'interno del telaio,  $s$  la sezione dell'asta,  $S$  la sezione trasversale dei due rami del telaio,  $L$  la lunghezza del solo telaio e  $\mu'$  la permeabilità magnetica della sostanza del telaio, si ha

$$0,4\pi ni = Bs \left( \frac{l}{\mu s} + \frac{L}{\mu' S} \right) = \frac{B}{\mu} \left( l + \frac{s}{S} \frac{\mu}{\mu'} L \right) \quad (13.0.102)$$

o

$$\frac{0,4\mu ni}{l} = H \left( 1 + \frac{s}{S} \frac{\mu}{\mu'} \frac{L}{l} \right) \quad (13.0.103)$$

La frazione  $s : S$  è molto piccola e si ha  $\mu' > \mu$ ; si può quindi porre

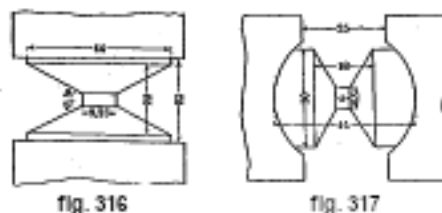
$$H = 0,4\pi \frac{ni}{l} \left( 1 - \frac{s}{S} \frac{\mu}{\mu'} \frac{L}{l} \right)$$

Nel secondo membro, si può sostituire il primo fattore con  $H = B : \mu$ , per cui

$$H = 0,4\pi \frac{ni}{l} - \frac{s}{S} \frac{B}{\mu'} \frac{L}{l} \quad (13.0.104)$$

Si può, usando questa formula, calcolare  $H$ , quando  $B$  è noto. Si ottiene quest'ultima grandezza o le sue variazioni come nel metodo precedente. Variando  $i$ , ad esempio da un certo valore fino a zero o fino a  $-i$ , si hanno le corrispondenti variazioni del flusso  $Bs$ . Si può anche adottare il seguente metodo: l'asta da studiare è composta da due parti, che si incontrano vicino all'estremità di destra della bobina di sinistra B. La bobina D è collegata a un elastico teso. Se si tira, per mezzo di una maniglia, sulla parte destra dell'asta, la bobina D viene rapidamente estratta dal telaio e gettata di lato; la corrente indotta misura il flusso  $Bs$ . Diverse varianti di questo metodo sono state proposte da Ewing, Corsepius, Behn-Eschenburg, Kapp, Drysdale e altri.

IV. METODO DELL'ISTMO MAGNETICO. Questo metodo, che serve a determinare  $\mu$  in magnetizzazioni molto forti, fu proposto da Ewing e Low (1887). Si dà sull'avvolgimento a un pezzo della sostanza da studiare la forma di una carcassa di bobina. Le figure 316 e 317 rappresentano due di tali forme; la prima è costituita da una parte stretta (l'istmo) e da due tronchi di cono, disposti tra i poli di un potente elettromagnete; la seconda forma ha estremità cilindriche, poste, come mostrato in Fig. 317, in tacche cilindriche nelle masse polari dell'elettromagnete.

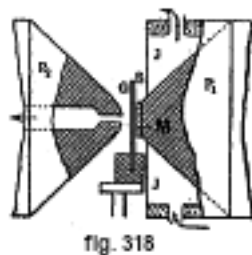


Sull'istmo è avvolta la bobina di induzione; si avvolge questa con una sostanza indifferente e si circonda la seconda bobina su questa sostanza. Si può molto velocemente accantonare il corpo da studiare che ha la prima forma (fig. 316) e ruotare velocemente il corpo della seconda forma (fig. 317) di  $180^\circ$  attorno ad un asse perpendicolare al piano della figura. Se la bobina interna è collegata ad un galvanometro balistico, le indicazioni di quest'ultimo permettono di calcolare  $B$ . Quando la bobina esterna è collegata al galvanometro, all'azione del flusso di induzione  $B$  nel ferro si aggiunge l'azione del flusso di forza  $H$  nell'intervallo che separa le bobine, sicché la differenza delle due indicazioni del galvanometro fornisce il modo per calcolare  $H$ , che può essere preso uguale all'intensità  $H$  cercata all'interno del ferro. Determinati  $B$  e  $H$ , si ottengono come prima  $I$ ,  $\mu$  e  $\chi$ .

V. METODO OTTICO DEL LEGNO. Questo metodo si basa sul fenomeno di Kerr, che studieremo in seguito. Supponiamo che la direzione della magnetizzazione sulla superficie del magnete coincida con la direzione della normale esterna. Se un raggio polarizzato rettilineamente cade normalmente su tale superficie, il piano di polarizzazione ruota, nella riflessione del raggio, di un certo angolo

$$\varphi = kI \quad (13.0.105)$$

essendo  $k$  la costante di Kerr, che dipende dalla sostanza e in misura elevata dalla lunghezza d'onda del raggio luminoso incidente: la temperatura non ha quasi alcun effetto su  $k$ . Du Bois ha determinato i valori numerici di questa grandezza, per Fe, Co e Ni.



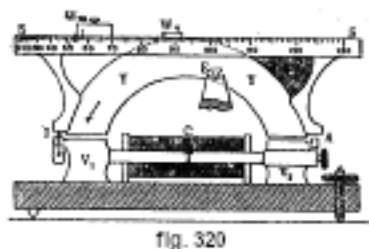
Il suo dispositivo è rappresentato nella figura 318:  $P_1$  e  $P_2$  sono i poli di un potente elettromagnete,  $M$  è una lastra levigata della sostanza da studiare.  $JJ$  è una cassa attraverso la quale viene fatto passare vapore acqueo bollente, che consente di effettuare osservazioni a  $100^\circ$ . Il raggio incidente e il raggio riflesso passano attraverso il polo  $P_2$  forato, che consente di misurare  $\varphi$  e  $I$ . Per determinare  $B$ , che è uguale all'intensità del campo in prossimità di  $M$ , si usa una lastra di vetro argentato  $G$  sul lato  $S$ , su cui avviene la rotazione del piano magnetico di polarizzazione; l'entità di questa rotazione determina il flusso di induzione  $B$ . L'uguaglianza  $H = B - 4\pi I$  dà l'intensità  $H$  all'interno della piastra.

VI. METODO DELLA TRAZIONE. Questo metodo consiste in un'applicazione della formula (24,a), e della formula (24,b) che poco ne differisce. Se la forza  $P$  necessaria per interrompere il circuito magnetico è espressa in grammi, si ha

$$B = \sqrt{\frac{8,981\pi P}{S}} \quad (13.0.106)$$

dove  $S$  è l'area della sezione trasversale dell'asta da tirare. Tra gli apparati basati su questo metodo, i più importanti sono il permeometro di S. Thompson e la bilancia magnetica di Du Bois. Il primo di questi strumenti è costituito da un telaio di ferro dolce A (fig. 319) forato da un canale in  $a$ . Un'asta della sostanza da studiare viene introdotta in questo canale e tocca l'altro lato del telaio in  $b$ ;  $c$  è la bobina di magnetizzazione,  $B$  un dinamometro che serve a determinare la forza  $P$  necessaria per staccare l'asta dal telaio. Si ha  $H = 0,4\pi niI$ , dove  $n$  è il numero di spire della bobina per unità di lunghezza.

La bilancia magnetica di Du Bois è rappresentata schematicamente nella figura 320. L'asta da studiare  $T$  è saldamente fissato tra i blocchi di taglio  $V_1$  e  $V_2$ ; essa è circondata dalla bobina  $C$ . Attorno al coltello triangolare  $E$ , oscilla un arco massiccio in ferro  $YY$ ; l'ampiezza di oscillazione di questo arco è molto piccola, ed è limitata dalla sporgenza salto  $A$  e dalla vite  $I$ . L'asse  $E$  non è al centro dell'arco, ma il peso in eccesso sul lato sinistro è bilanciato da una massa di piombo  $P$ . Le attrazioni della stessa grandezza dovute a  $V_1$  e  $V_2$  agiscono su bracci di leva disuguali e abbassano la parte sinistra dell'arco fino a quando non entra in contatto con la vite  $I$ . Spostando i due pesi  $W$  lungo la doppia scala superiore  $SS$ , si possono compensare queste attrazioni in modo che la parte sinistra stia per far cadere la vite  $I$ . Le divisioni della bilancia vengono tracciate in modo da ottenere il numero  $B$  semplicemente moltiplicando la lettura per 10 o per 2, a seconda di quale dei due pesi si sposta dallo zero della bilancia. La bobina è lunga  $4\pi$  centimetri e contiene 100 spire; il valore di  $H$  al suo centro si ottiene quindi moltiplicando il numero di ampere per 10. Il circuito magnetico non è chiuso; è interrotto in  $I$  e  $A$ . Du Bois ha sviluppato la teoria del suo dispositivo, basandosi sulle formule del circuito magnetico. Ha trovato, per il coefficiente di smagnetizzazione,  $N = 0.02$ .



VII. - METODI DIVERSI. Citeremo brevemente alcuni altri metodi per misurare  $B$  e  $\mu$  per le sostanze ferromagnetiche. Bruyer colloca una spirale di bismuto nella fessura di un telaio chiuso e determina la grandezza  $B$  dalla resistenza elettrica di questa spirale (vedere oltre sull'influenza del campo sulla resistenza del bismuto).

Siemens e Halske dispongono, in una cavità cilindrica ricavata all'interno dell'arco di chiusura, un telaio mobile di filo, attraverso il quale viene fatta passare una corrente di determinata intensità. L'angolo di rotazione del telaio permette di determinare  $B$  (vedere più avanti il galvanometro di Deprez e D'Arsonval).

Anche il dispositivo di Holden è interessante; serve a confrontare i valori di  $\mu$  in due aste, una delle quali è stata studiata in precedenza e funge da corpo di confronto. Recentemente è stato ampiamente utilizzato un dispositivo chiamato flussometro. La teoria di questo strumento e come usarlo sarà descritta più avanti.

Studi critici dei diversi metodi sono stati recentemente fatti da Lloyd (1909), Peirce (1910), Beattie e Gerrard, Gray e Ross (1910), e altri.

## 6. Dipendenza delle grandezze $B$ e $\chi$ da $H$ , nei corpi ferromagnetici.

### Isteresi

Studiamo ora i risultati ottenuti per le grandezze  $B$  e  $\chi$  utilizzando i metodi appena descritti. Come variabile indipendente, si prende quasi sempre in considerazione l'intensità  $H$  del campo all'interno del corpo considerato. Solitamente, i risultati delle ricerche sono presentati sotto forma di tabelle che riportano  $B, \mu, \chi$  e  $I$  per i vari valori di  $H$  o più spesso da curve che indicano la dipendenza tra queste grandezze e  $H$ ; è raro scegliere  $B$  o  $I$  come variabile indipendente.

La dipendenza delle quantità  $B$  e  $\mu$  da  $H$  è, in particolare, estremamente complessa. Quando si parte, ad esempio, dal ferro più dolce per passare all'acciaio più duro, questa dipendenza varia con il grado di sostanza considerato. Vedremo inoltre che  $B$  e  $\mu$  variano molto, a seconda che il campo  $H$  sia il più intenso dei campi che hanno esercitato la loro azione sul dato corpo, o che quest'ultimo sia già stato sottoposto ad un campo più potente. Supporremo in questo paragrafo che ciascuno dei campi successivi, aumentando gradualmente, agisca per la prima volta sul corpo. Scriviamo ancora una volta le formule fondamentali

$$B = H + 4\pi I = (1 + 4\pi\chi) H = \mu H \quad (13.0.107)$$

Lo studio delle grandezze  $B$  e  $\mu$  è di grande importanza pratica per l'elettrotecnica, nella costruzione di dinamo, elettromagneti, ecc.

Le proprietà magnetiche del ferro dipendono in larga misura dalla sua natura, in particolare dal suo contenuto di carbonio e di varie altre sostanze estranee, oltre che dal suo modo di fabbricazione; da quest'ultima modalità dipende anche, tra l'altro, lo stato del carbonio, che può essere disciolto o, almeno in parte, combinato chimicamente con il ferro, come ad esempio nelle cementite  $Fe^3C$ .

Indicheremo i valori di  $H, I, B, \mu$  e  $\chi$ . L'intensità del campo può essere facilmente portata ad alcune migliaia di unità C.G.S. Ewing e Low (1889) hanno raggiunto  $H = 24500$ ; E. T. Jones (1896) è arrivato fino a  $H = 51600$ . Tali campi possono essere prodotti solo in uno spazio molto piccolo tra le masse dei poli conici dei più potenti elettromagneti.

La magnetizzazione  $I$ , che è uguale al momento magnetico di un centimetro cubo, aumenta, quando  $H$  aumenta da  $H = 0$ , prima lentamente, poi rapidamente e infine ancora più lentamente, tendendo verso un certo massimo  $I_m$ , che corrisponde alla saturazione. Quest'ultima è generalmente raggiunta quando  $H$  è uguale a 2000 o 3000 unità CGS e  $I$  uguale a circa  $I_m = 1600$  unità CGS; in casi eccezionali si è raggiunto  $I_m = 1850$ . Per la ghisa si ha  $I_m = 1250$ .

La grandezza  $B$  è approssimativamente nella stessa dipendenza di  $I$  rispetto ad  $H$ , perché si può, nella formula  $B = H + 4\pi I$ , trascurare il primo termine, purché la magnetizzazione rimanga lontana dalla saturazione. Ma, per  $H > 3000$ , quando  $I$  cessa di aumentare, la grandezza  $B$  continua ad aumentare con  $H$ , così che non c'è massimo per  $B$ . Ewing e Low sono arrivati fino a  $B = 45350$ , per  $H = 24500$ ; E. T. Jones ha raggiunto addirittura il valore  $B = 74200$  per  $H = 51600$ . Weiss (1907, 1910), Droz (1910), Hadfield e Hopkinson (1910) hanno determinato il massimo  $I_m$ . Weiss e Droz hanno trovato  $I_m = 1708$  ( $20^\circ$ ); si è riconosciuto che quando  $H$  è grande, il valore di  $I$  è una funzione lineare di  $1/H$ . Hadfield e Hopkinson hanno ottenuto, per il ferro puro,  $I_m = 1680$  e, per tutti gli altri tipi di ferro, valori più piccoli.

Affrontiamo la dipendenza particolarmente interessante, che esiste tra le quantità  $\mu$  e  $\chi$  e l'intensità  $H$ . Per valori molto piccoli di  $H$ , si ha approssimativamente  $\mu = 200$ ; ma si ottengono, per ferro molto dolce, valori ancora più piccoli, scendendo a  $\mu = 100$ . Quando  $H$  cresce,  $\mu$  cresce molto rapidamente fino a un certo massimo  $\mu_m$ , che è già raggiunto per piccoli valori di  $H$ , in particolare per  $H = da 2 a 3$ ; questo massimo si verifica raramente per valori più grandi di  $H$  che raggiungono  $H = 10$ . Il massimo  $\mu_m$  è uguale a circa 3000 e corrisponde circa ai valori  $I = 400$  e  $B = 5000$ . Wilson (1898) ha tuttavia trovato, per del ferro puro,  $\mu_m = 5480$  con  $B = 9100$ , ciò che dà  $H = 1,66$  e  $I = 720$ . Si ottiene, al contrario, per la ghisa, da  $\mu_m = 300$  a 700 con

$B = 2000$  a  $B = 6000$ . Quando  $H$  continua a crescere,  $\mu$  diminuisce di nuovo rapidamente e senza limite, come mostra la formula  $\mu = 1 + 4\pi\chi = 1 + \frac{4\pi I}{H}$ , con  $I$  che cessa di variare (saturazione). Ewing e Low sono giunti fino a  $\mu = 1,85$ ; E. T. Jones è arrivata fino a  $\mu = 1,44$  per i precedenti valori di  $H$  e di  $B$ . Il limite teorico per  $H = \infty$ , è evidentemente  $\mu = 1$ .

La grandezza  $\chi$  è approssimativamente nella stessa dipendenza di  $\mu$  rispetto ad  $H$ , perché, per grandi valori di  $\mu$ , si ha la relazione  $\mu = 4\pi\chi$ . Il massimo valore possibile è circa  $\chi_m = 200$ ; ma il numero di Wilson  $\mu = 5480$  corrisponde a  $\chi_m = 425$ . Per valori molto grandi di  $H$ , poiché  $\mu$  tende a 1,  $\chi$  è una piccola frazione. Così, al numero  $\mu = 1,85$  (Ewing e Low) corrisponde il valore  $\chi = 0,07$ ; per  $\mu = 1,44$  (E. T. Jones) si ha  $\chi = 0,036$ . Il valore limite teorico, per  $H = \infty$ , è ovviamente  $\chi = 0$ .

Per piccoli valori di  $H$ ,  $\mu$  e  $\chi$  aumentano, come abbiamo visto, con  $H$ , come mostrato per la prima volta da A. Stolietoff (1872), che fece i suoi esperimenti su un anello con il metodo balistico. Per  $H = 0,4302$ , ha trovato  $\chi = 21,54$ ; per  $H = 3,212$ , ha ottenuto il massimo  $\chi_m = 174,0$ ;  $\chi$  poi diminuisce a  $\chi = 42,13$ , per  $H = 30,73$ . Più tardi Baur (1880) e Lord Rayleigh (1887) hanno studiato  $\chi$  e  $\mu$ , per valori molto piccoli di  $H$ . Baur ha trovato, per ferro dolce,

$$\begin{aligned}\chi &= 14,5 + 110H \\ \mu &= 183 + 1382H\end{aligned}$$

tra  $H = 0,0158$  e  $H = 0,384$ . Lord Rayleigh ha trovato, per il ferro svedese più duro, che si possono considerare le grandezze  $\chi$  e  $\mu$  come costanti da  $H = 0,00004$  a  $H = 0,04$ ; ha ottenuto inoltre fino a  $H = 1,2$

$$\begin{aligned}\chi &= 6,4 + 5,1H \\ \mu &= 81 + 64H\end{aligned}$$

Weiss (1896), Holborn (1897) e altri trovarono anche una dipendenza lineare tra  $\chi$  e  $\mu$  e  $H$ , per piccoli valori di  $H$ . Gli esperimenti di Culmann e Rössler hanno mostrato che quando  $H$  rimane molto piccolo,  $\chi$  e  $\mu$  sono quasi costanti. Per piccoli valori di  $H$  si osserva un magnetismo residuo significativo: la magnetizzazione non raggiunge il suo valore definitivo tutto in una volta, ma dopo un certo tempo. Due memorie sulla magnetizzazione del ferro con  $H$  molto piccolo sono state recentemente pubblicate da Peirce (1910) e da Gumlich e Ragowski (1911). Peirce ha studiato un tipo di ferro purissimo proveniente dalla Norvegia e un altro tipo americano. Il ferro norvegese ha dato il massimo  $\mu = 5480$  con  $H = 1,40$  e  $I = 610$ ; con  $H = 20$ , si ha  $\mu = 748$ ; Il ferro americano ha dato  $\mu = 3670$  con  $H = 2,0$  e  $I = 584$ ; con  $H = 20$ , si ha  $\mu = 792$ . Gumlich e Ragowski hanno considerato vari tipi di ferro, ghisa, acciaio e leghe di ferro e silicio per  $H$  compreso tra 0,01 gauss e 0,5 gauss e hanno migliorato i metodi impiegati. Per estrapolazione, hanno determinato il valore  $\mu = \mu_0$  per  $H = 0$ . Per l'acciaio duro, si ha  $\mu_0 = 58,0$ ; per l'acciaio dolce  $\mu_0 = 131,5$ ; per una lega con il 4,45% di Si,  $\mu_0 = 450$ , ecc. Il valore numerico di  $\mu_0$  oscilla tra 43,2 e 528.

Per magnetizzazioni molto intense, sono state proposte diverse formule empiriche  $\mu = f(B)$ . Così, si può porre, per alcuni tipi di ferro

$$\mu = cB^{\frac{2}{3}} \quad (13.0.108)$$

quando  $B$  rimane compreso tra 5000 e 10000; per il ferro dolce, si ha  $c = 5,6$ . Altri osservatori hanno trovato per il ferro dolce, tra  $B = 7000$  e  $B = 16000$

$$\mu = 4850 - \frac{B}{3,5} \quad (13.0.109)$$

In Ni e Co, il carattere generale della dipendenza tra  $B$ ,  $\mu$ ,  $\chi$  e  $H$  è lo stesso del Fe, ma i valori numerici sono per lo più diversi.

Nel nickel dolce, i massimi sono circa  $\mu_m = 296$  e  $\chi_m = 23,5$ , per  $H = 9,5$ . Con un filo di nickel duro, si ha  $\mu_m = 108$  e  $\chi_m = 8,3$ . Il massimo della magnetizzazione è  $I_m = 400$ , ma si è pure osservato  $I_m = 540$ , con  $H = 13000$ ,  $B = 19800$  e  $\mu = 1,52$ ; un altro tipo ha dato  $\mu = 1,32$  per  $H = 16000$ . Weiss e Droz (1910) hanno trovato  $I_m = 490,5$  ( $19,5^\circ$ ); nel Ni,  $I$  è anche una funzione lineare di  $1 : H$ , quando  $H$  è grande.

Il cobalto si magnetizza come la ghisa, per valori molto grandi di  $H$ ; con  $H = 5000$ , il valore di  $I = 1300$  è già raggiunto. I massimi  $\mu_m = 174$  e  $\chi_m = 13,8$  sono ottenuti con  $H = 25$ , cioè con un valore di  $H$  molto più grande che per il ferro. Con  $H = 15000$ , si ottiene  $\mu = 2,10$ . Weiss (1910) ha trovato  $I_m = 1412$  ( $17^\circ$ ), Droz  $I_m = 1383$ . Per grandi valori di  $H$ , a partire da  $H = 4280$ ,  $I$  è una funzione lineare di  $1 : H^2$ , ciò che distingue il Co dal Ni e dal Fe.

In quanto precede, abbiamo ipotizzato che ogni campo  $H$  agisse per la prima volta sul corpo considerato. I fenomeni assumono un altro carattere quando un campo agisce dopo che il corpo è già stato sottoposto all'azione di un campo più intenso. Inizieremo con il caso più semplice, in cui  $H$  aumenta gradualmente da  $H = 0$  fino ad un certo valore  $H = H'$ , per poi ritornare anche in modo progressivo a  $H = 0$ , e rappresenteremo graficamente il risultato ponendo  $H$  in ascissa,  $B$  o  $I$  in ordinata; le ultime due quantità danno due curve quasi del tutto identiche, a scale ovviamente diverse, perché è solo per valori estremamente piccoli di  $H$  e per valori molto grandi che non si può porre  $B = 4\pi I$ . La prima magnetizzazione fornisce, per  $I$  o  $B$ , una curva deformata OA (fig. 321); per  $H = H'$ , si ha  $I = H'A$ . Se ora diminuiamo  $H$ ,  $I$  diminuisce a poco a poco e rimane, per  $H = 0$ , la magnetizzazione residua  $I_r = B_r : 4\pi = OC$ . Per portare  $I$  a zero è necessario agire sul corpo con una forza negativa  $OD = H_k$ , detta forza coercitiva.

Il rapporto tra la magnetizzazione residua  $I_r$  e la magnetizzazione temporanea  $I$  (per  $H = H'$ ) dipende dalla sostanza, dalla forma del corpo e dalla quantità  $I$  stessa. Questo rapporto può avvicinarsi significativamente all'unità. Ewing ha trovato, ad esempio per un lungo filo morbido, i seguenti valori:

$H =$	0,42	0,99	1,44	2,02	2,51	3,16	5,02	7,20	11,91	45,51
$I =$	16	62	195	468	614	764	984	1070	1150	1230
$\frac{I_r}{I} =$	0,24	0,40	0,68	0,81	0,84	0,85	0,84	0,82	0,80	0,76

Il magnetismo residuo qui raggiunge fino all'85% del magnetismo temporaneo. Lo stesso filo ha dato, dopo l'estensione, il massimo  $I_r : I = 0,625$ , per  $H = 7120$  e  $I = 359$ . La notevole influenza della forma del corpo su  $I_r$  si spiega con l'azione smagnetizzante del magnetismo superficiale. Maggiore è il coefficiente  $N$ , più  $I_r$  è piccolo per lo stesso valore di  $I$  prodotto da diversi campi  $H$ . In aste molto lunghe, e in particolare negli anelli, si ottiene il massimo di  $I_r : I$ . In un'asta, la cui lunghezza è 50 volte maggiore della sua dimensione trasversale, abbiamo già per  $I_r$  un valore quasi 2 volte inferiore rispetto al caso ideale in cui  $N = 0$ . In una sfera e a fortiori in una lastra sottile magnetizzata trasversalmente, si trova per  $I_r$  un valore estremamente piccolo. Bouty ha mostrato che, in una ripetuta magnetizzazione,  $I_r$  cresce, conforme alla formula  $I_r = A - B : n$ , fino a un certo valore limite;  $n$  denota il numero di magnetizzazioni.

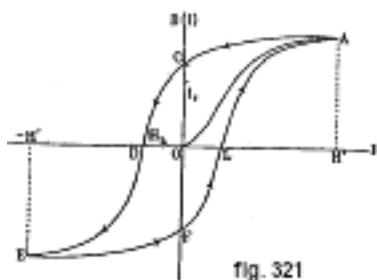


fig. 321



La grandezza  $I_r$  dipende anche dal modo in cui  $H$  è passato dal valore  $H'$  al valore zero. Waltenhofen (1863) fu il primo ad osservare che, in un'improvvisa scomparsa del campo (interruzione della corrente), si ottiene per  $I_r$  un valore notevolmente minore di quando si passa progressivamente a  $H = 0$ . In alcuni casi,  $I_r$  può assumere anche un valore negativo: si parla di magnetizzazione anomala. Fromme, Auerbach (1882), Righi (1880), Peirce (1912) e altri ancora hanno studiato questo fenomeno e hanno mostrato che non si può spiegare dall'azione delle correnti di induzione, ma risulta dalla natura stessa dei fenomeni magnetici.

Bouty (1876) lo aveva notato, nella smagnetizzazione di un'asta di acciaio per mezzo di una spirale, una parte del magnetismo scomparso ricompariva dopo qualche tempo. Lo stesso fenomeno di una lenta rimagnetizzazione spontanea è stato poi nuovamente scoperto da Ollivier (1910), con il suo grande elettromagnete, e da lui studiato in maniera precisa.

La forza coercitiva  $H_k$  dipende solo dalla sostanza e dalla magnetizzazione  $I$  raggiunta, che può essere annullata dalla forza  $-H_k$ , ma non dipende dalla forma del corpo e in questo senso non dipende neanche più dal magnetismo residuo  $I_r$ , che annulla. Se dunque in corpi della stessa sostanza, ma di diversa forma, si producono con diversi  $H'$  gli stessi valori di  $I$ , si ottengono, diminuendo  $H'$  fino a zero, valori diversi di  $I_r$ ; ma, per annullarlo, occorre sempre la stessa forza  $-H_k$ . Per i vari tipi di ferro,  $H_k$  oscilla tra  $H_k = 1$  e  $H_k = 4$ ; per l'acciaio,  $H_k$  sale fino a 30, a volte anche fino a 80.

Il fenomeno che ora descriviamo è stato scoperto da Warburg (1880) e poi, indipendentemente, da Ewing (1882), che ha proposto di chiamarlo *isteresi*; questo nome è stato successivamente applicato a tutti i fenomeni dove una certa grandezza  $y$  (qui  $I$ ) assume valori diversi per lo stesso valore  $x$  della causa (qui  $H$ ) che la produce, a seconda che  $x$  sia raggiunta per incremento da valori più piccoli o decrescente da quelli maggiori. Più semplicemente si ha isteresi, quando  $y$  dipende non solo dalla causa  $x$  che agisce in un dato momento, ma anche dai precedenti valori di  $x$ . Dopo Ewing e prima di altri, Hopkinson hanno studiato a fondo l'isteresi magnetica.

Per conoscere più a fondo questo fenomeno, dobbiamo considerare un ciclo completo di magnetizzazione, vedi fig. 321. Quando il campo negativo viene variato a  $-H'$ , si ottiene la curva DE, l'ordinata del punto E essendo in valore assoluto uguale a quella del punto A. Se poi il campo negativo viene variato da  $-H'$  a zero, si ha la curva EF simmetrica ad AC, così che  $OF = -OC = I_r$ . Infine, crescendo  $H$  da zero a  $H'$ , si ha  $I = 0$  per  $H = OL = OD = H_k$ , e si ritorna, per  $H = H'$ , al valore primitivo di  $I$  uguale all'ordinata del punto A. Nella magnetizzazione ciclica tra  $H = +H'$  e  $H = -H'$ , la grandezza  $I$  (o  $B$ ) è quindi rappresentata graficamente da una curva chiusa della forma ACDEFLA. Quando per la prima volta si sottopone un corpo a magnetizzazioni cicliche, non si ottiene immediatamente questa curva; nei primi cicli, le ordinate dei punti A ed E aumentano gradualmente, come abbiamo già detto (Bouty).

La forma della curva chiusa dipende dalla velocità delle magnetizzazioni alternative. Molti autori si sono occupati di questa questione, tra gli altri Warburg e Hönig, Weihe, Oberbeck, Lord Rayleigh, Tanakadatê, Niethammer, Hopkinson, Wilson, Lydall e più recentemente M. Wien, Angström, Maurain, Schames e altri ancora. Alcuni hanno osservato che, all'aumentare del numero  $n$  di cicli percorsi al secondo, le ordinate dei punti A ed E diminuiscono un poco; la curva si arrotonda in A ed E e i suoi due rami si allontanano l'uno dall'altro, cosicché l'area abbracciata dalla curva si allarga e aumenta. Altri hanno scoperto che quest'area è indipendente dal numero  $n$  di cicli al secondo. Ciò è stato confermato da Schames (1907), che ha confrontato queste aree per induzioni massime uguali  $B$ , che supera 10000. Per valori maggiori di  $B$ , l'area aumenta con la frequenza  $n$ .

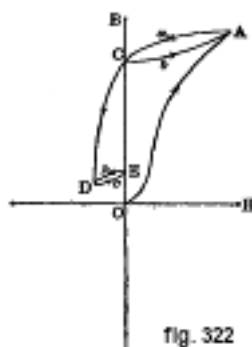


fig. 322

Si ottiene un'infinita varietà di curve quando  $H$  viene variato per cicli incompleti; si trova, ad esempio, passando da  $H = 0$  a  $H = H'$ , poi a  $H = 0$  per tornare a  $H = H'$ , la curva  $OAaCbA$  (fig. 322). Se, a metà del ciclo, si passa da un certo valore negativo di  $H$  a  $H = 0$ , e se si ritorna al valore iniziale, si ha la curva  $DcEhD$ .

Lord Rayleigh (1887) ha notato che, per valori molto piccoli di  $H$ , da  $H = 0,00004$  a  $H = 0,04$ , tra i quali  $\mu$  è una quantità costante e di conseguenza  $B$  e  $I$  delle funzioni lineari di  $H$ , non c'è isteresi.

Per ottenere le curve di magnetizzazione ciclica, si misura  $I$  o  $B$  con uno dei metodi sopra descritti. Si fa variare la grandezza  $H$  progressivamente e si ottengono così successivamente i punti della curva cercata. Ma si può ancora procedere diversamente (Ewing). Facendo  $H = H'$ , si ha il punto  $A$  (fig. 321); poi diminuendo  $H$  della piccola quantità  $\Delta H$ , si trova un punto sul ramo  $AC$ ; si percorre tutto il ciclo, per tornare al punto  $A$ , e si diminuisce  $H$  della quantità  $\Delta H' > \Delta H$ , che dà un nuovo punto sul ramo  $AC$ ; si ripercorre di nuovo l'intero ciclo, ecc. Searle e Ewing hanno costruito dei dispositivi che permettono di proiettare su uno schermo il movimento di un punto luminoso che attraversa un ciclo chiuso di magnetizzazione; si può quindi disegnare o fotografare questa curva. Il punto luminoso si ottiene per riflessione di un raggio su un piccolo specchio, che ruota attorno ad un asse verticale e attorno ad un asse orizzontale, una delle rotazioni essendo proporzionale a  $H$ , l'altra a  $B$ . Wehnelt (1909) ha costruito uno strumento per la rappresentazione oggettiva delle curve magnetiche. Angström (1899), Piola (1906) e Madelung (1907) hanno utilizzato, allo stesso scopo, il tubo Braun a raggi catodici.

Ricerche teoriche sul fenomeno dell'isteresi sono state pubblicate negli ultimi anni da Balwin (1907), Weiss (1908), R. Gans (1910), Silv. Thompson (1910), Madelung (1912), Kunz (1912) e altri. Non possiamo qui segnalare questi lavori. Allo stesso modo non parleremo delle numerose ricerche sperimentali relative ai vari tipi di ferro o ai diversi tipi di azione della corrente. Tuttavia, citeremo una serie di studi recenti molto interessanti che sono stati fatti sulle proprietà del ferro depositato elettroliticamente. La deposizione del ferro in un campo magnetico è di particolare interesse. Il lavoro svolto su questo argomento si deve a Maurain (1900), Schild (1908), Ferry (1910), Kaufmann e Meyer (1911), R. Gans (1911) e Vallauri (1912). Maurain ha trovato che, considerato  $I$  in funzione di  $H$ , cresce molto più velocemente, quando il campo magnetico agisce durante l'elettrolisi, che se quest'ultima avviene con  $H = 0$  e se il ferro è portato successivamente nel campo. Maurain ha osservato inoltre che campi già deboli (da 10 a 15 gauss), quando agiscono durante l'elettrolisi, magnetizzano il ferro fino alla saturazione, e che le curve di isteresi assumono quindi quasi la forma di rettangoli, i cui lati sono paralleli agli assi delle coordinate. Quando  $H = 0$  durante l'elettrolisi, si ottiene la consueta forma della curva di isteresi. Kaufmann e Meyer hanno anche riconosciuto la rapida saturazione e la forma rettangolare della curva di isteresi; ma hanno dimostrato che questa forma si osserva anche nel caso in cui il campo  $H = 0$  durante l'elettrolisi.

La soluzione sottoposta ad elettrolisi deve possedere certe proprietà, in virtù delle quali il ferro contiene idrogeno occluso, e quest'ultimo è la causa della singolare forma della curva. Dopo un tempo abbastanza breve, in particolare per riscaldamento, il ferro perde le sue particolari

proprietà e la curva assume la forma ordinaria, ovviamente perché è stato emesso l'idrogeno. Se poi si polarizza il ferro come catodo, si ottiene nuovamente la forma rettangolare della curva di isteresi.

## 7. Lavoro e riscaldamento nella magnetizzazione

Warburg (1881) fu il primo ad indicare la semplicissima dipendenza che esiste tra l'isteresi e il lavoro speso nel cambiamento di stato magnetico di un corpo. Daremo la dimostrazione dovuta a Hopkinson della formula fondamentale che traduce questa dipendenza. Si consideri una bobina molto lunga con  $n$  avvolgimenti per unità di lunghezza e si supponga che attraverso questa bobina si faccia passare una corrente  $i$ ; in questo caso si ha  $H = 4\pi ni$ . All'interno della bobina di lunghezza  $l$  si trova un tondino di ferro; sia  $s$  l'area della sezione trasversale di questa asta,  $v = ls$  il suo volume. Quando l'induzione  $B$  aumenta di  $dB$ , e di conseguenza il flusso di induzione di  $s dB$ , in ogni spira della bobina nasce una forza elettromotrice, numericamente uguale a  $s dB$  e di verso opposto a quello della corrente  $i$ . In tutta la bobina appare la forza elettromotrice  $nls dB$ . Affinché l'intensità  $i$  della corrente non cambi, l'energia  $inls dB$  deve essere prodotta a spese della sorgente della corrente. Questa energia  $inls dB$  è spesa nel lavoro di cambiamento dello stato magnetico del corpo. Sia  $dW$  il lavoro speso nell'unità di volume del corpo; si ha

$$dW = \frac{inls dB}{v} = indB$$

La relazione  $H = 4\pi ni$  dà

$$dW = \frac{1}{4\pi} H dB \quad (13.0.110)$$

Questa formula molto importante determina il lavoro cercato in erg per  $cm^3$ , quando  $H$  e  $B$  sono dati in unità C.G.S. Se si sostituisce  $H = B - 4\pi i$  e  $dB = dH + 4\pi dI$ , si ottengono le espressioni

$$dW = \frac{1}{8\pi} d(H^2) + H dI \quad (13.0.111)$$

$$dW = \frac{1}{8\pi} d(B^2) - I dB \quad (13.0.112)$$

Per ogni ciclo di magnetizzazione chiuso, si ha, per il lavoro totale  $W$  speso nell'unità di volume del corpo

$$W = \frac{1}{4\pi} \int H dB \quad (13.0.113)$$

ora,  $\int H dB$  è numericamente uguale all'area delimitata dalla curva (il cui verso di percorrenza è antiorario) che rappresenta il rapporto tra  $B$  e  $H$  nella magnetizzazione ciclica (fig. 321). Da ciò segue il seguente importante risultato: *l'area delimitata dalla curva, che rappresenta graficamente il rapporto tra  $B$  e  $H$  nella magnetizzazione ciclica, divisa per  $4\pi$ , è numericamente uguale al lavoro speso per unità di volume in un ciclo*. Questa è la relazione tra isteresi e lavoro. Se non ci fosse l'isteresi, cioè se a qualsiasi valore di  $H$  corrispondesse solo un valore di  $B$ , il lavoro totale nella magnetizzazione ciclica sarebbe uguale a zero.

Si possono trovare, oltre alla formula (38), per il lavoro  $W$  corrispondente al ciclo, tutta una serie di altre espressioni, usando la (37,a) e (37,b); gli integrali dei primi termini dei secondi membri sono infatti nulli, e si ha

$$W = \frac{1}{4\pi} \int H dB = \int H dI = - \int I dB \quad (13.0.114)$$

In una curva chiusa, si ha in generale  $\int dxy = \int y dx + \int x dy = 0$ , pertanto la (38,a) dà la relazione

$$W = -\frac{1}{4\pi} \int B dH = - \int I dH = \int B dI \quad (13.0.115)$$

Le equazioni  $B = \mu I$  e  $I = \chi H$  danno

$$W = \frac{1}{8\pi} \int \frac{1}{\mu} d(B^2) = \frac{1}{8\pi} \int \mu d(H^2) = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\chi} d(I^2) = \frac{1}{2} \int \chi d(H^2) = - \int \chi H dB \quad (13.0.116)$$

È interessante confrontare la (38) con l'ultima delle espressioni (38,c); si passa direttamente dall'una all'altra con facilità usando le formule

$$\int (1 + 4\pi\chi) H dB = \int \mu H dB = \int B dB = \frac{1}{2} \int d(B^2) = 0$$

In una variazione non ciclica dello stato magnetico, bisogna servirsi delle (37), (37,a) o (37,b). Quando la magnetizzazione è molto intensa, si può porre  $dI = 0$ ; la (37,a) dà allora

$$dW = \frac{1}{8\pi} d(H^2) \quad (13.0.117)$$

Per i corpi debolmente magnetici, si può scrivere  $\mu = \text{cost}$ ; il lavoro  $W'_0$  di magnetizzazione di un centimetro cubo di tale corpo, speso quando il campo aumenta da zero a  $H$ , è

$$W = \frac{1}{4\pi} \int_0^H H dB = \frac{\mu}{4\pi} \int_0^H H dH = \frac{\mu}{8\pi} H^2 \quad (13.0.118)$$

Questa formula determina la quantità di energia di un corpo magnetizzato debolmente magnetico.

L'area della figura ACDEFLA (fig. 321) è approssimativamente pari a  $2DL$ .  $AH' = 4H_k$ . Si può quindi, calcolando il lavoro per centimetro cubo in un ciclo, applicare la formula

$$W = \frac{1}{\pi} I H_k \text{ erg} \quad (13.0.119)$$

Adler, Duhem, Cisotti (1908), Leduc (1911) e altri ancora hanno studiato anche questa questione del lavoro di magnetizzazione. Leduc ha mostrato che, per una curva di isteresi chiusa, le formule precedenti danno il valore esatto del lavoro  $W$ , ma che, in una variazione infinitamente piccola dello stato magnetico dell'unità di volume, dobbiamo scrivere  $dW = H dl$ . Quando si adotta la teoria della rotazione dei magneti molecolari, si può considerare il lavoro di magnetizzazione impiegato per vincere l'attrito che si oppone a questa rotazione.

Abbiamo chiamato *isteresi* un certo fenomeno; ma la stessa denominazione si applica anche alla grandezza  $W$ , cioè alla perdita di energia che si produce in una magnetizzazione; si intende allora per misura dell'isteresi la determinazione di  $W$ . La grandezza  $W = \int H dl$ , in un ciclo che porta quasi al massimo di  $I$ , può essere utilizzata per caratterizzare la sostanza. Per i diversi tipi di ferro dolce utilizzati in elettrotecnica,  $W$  oscilla intorno al valore di  $10000 \text{ erg}$  (in un ciclo e per centimetro cubo). Con il ferro duro,  $W$  è molto più grande e può raggiungere, in certi tipi di acciaio, fino a diverse centinaia di migliaia di erg. Warburg riteneva che il ferro chimicamente puro non mostrasse isteresi; ma Kreusler e Gumlich (1908), che hanno studiato un campione di ferro perfettamente puro dal punto di vista chimico, hanno trovato che esso presentava una fortissima isteresi. Con il nichel sono stati ottenuti valori di  $W$  variabili da 11000 a 25000; con il cobalto (contenente il 2% di Fe), si ha  $W = 30400$ .

Steinmetz ha introdotto la seguente relazione empirica tra  $W$  e il maggior valore che raggiunge  $\pm B$ :

$$W = \eta B^{1,6} \quad (13.0.120)$$

Lo stesso esponente figura anche nella relazione tra  $W$  e  $I$ , potendo porre  $I = B : 4\pi$ . La formula (41) è stata verificata da un gran numero di fisici, per esempio da Ewing e Miss Klassen,

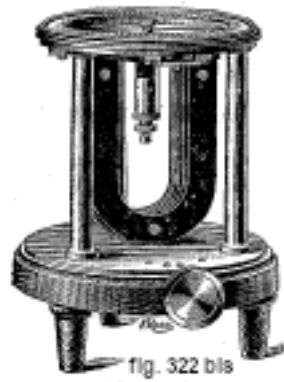
Baily, Maurach, Grey, Weiss, ecc. L'esponente è risultato oscillare tra 1,3 e 1,8; per il ferro il coefficiente  $\eta$  ha un valore compreso tra 0,001 e 0,004: ma per gli acciai più duri sale a 0,1. Maurach ha trovato, con un anello di ferro, che l'esponente diminuisce da 2,47 a 1,22, quando  $H$  aumenta da 0,31 a 27,8, crescendo  $I$  da 4,78 a 1567 e  $W$  da 0,12 a 9817. Richter (1910) ha proposto la formula

$$W = aB + bB^2 \quad (13.0.121)$$

più facile da calcolare. Questa formula fornisce, rispetto ai valori misurati, meno scostamenti rispetto alla formula (41).

La questione della dipendenza tra la grandezza  $W$  e la velocità di percorrenza del ciclo deve essere considerata irrisolta, nonostante il gran numero di ricerche che sono state fatte su questo argomento. L'isteresi in un campo magnetico rotante è di grande importanza pratica. Fu studiato prima da Baily (1894), poi da Grau e Hiecke (1896), Schennel (1902), più recentemente da Weiss e Plauer (1908), Fuller e Brace (1909), Vallauri (1909), e in particolare modo da Perrier (1909-1910). Baily ha osservato che, in un campo rotante, l'isteresi  $W$  prima aumenta con  $B$ , quando  $B$  varia da 16000 a 17000, ma raggiunge un massimo e poi decresce molto rapidamente; per  $B = 20500$ ,  $W$  è solo  $1/13$  del suo massimo valore e, nella saturazione magnetica, probabilmente si annulla. Questi risultati sono stati confermati da Weiss e Plauer; hanno scoperto che in Fe e Ni, il massimo di  $W$  con un campo rotante è circa la metà del massimo che si verifica per la saturazione in un campo alternato. Quando  $B$  è molto grande,  $W$  scende a pochi millesimi del valore massimo. In un campo rotante debole,  $W$  è maggiore (circa 4 volte per  $H = 10$  gauss) che in un campo alternato. Perrier ha studiato Fe, Ni e magnetite per diversi valori di  $B$ ; ha trovato in particolare che il rapporto dei valori massimi nell'una e nell'altra specie di campo è quasi indipendente dalla temperatura.

Gli strumenti per misurare l'isteresi (isteresimetri) sono stati costruiti da Ewing, Marcel, Deprez, Blondel e Holden. L'isteresimetro Blondel, costruito da J. Carpentier, è destinato al controllo industriale del ferro dal punto di vista dell'isteresi. Il ferro da provare, tagliato in anelli di 38 mm di diametro interno e 55 mm di diametro esterno, viene impilato su un supporto cilindrico, in modo da formare uno spessore di 4 mm; il supporto viene poi montato su un'asta verticale, il campione viene posto in un campo creato da un magnete a forma di U (fig. 322 bis). Le espansioni polari, portate dal magnete, abbracciano l'anello, lasciando un traferro di lunghezza sufficiente ad assicurare, nel ferro, un'induzione magnetica praticamente costante e vicina ai 10000 gauss. Una manovella, posta lateralmente alla base, permette, tramite un disco ed un rullo, di far ruotare il magnete a forma di U attorno ad un asse verticale. Ad ogni giro del magnete, tutti i punti del campione passano attraverso un ciclo completo di magnetizzazione, il dispendio energetico, causato dall'isteresi, produce una coppia che tende a trascinare il ferro, ma una molla elicoidale, fissata all'albero verticale, si oppone a questo movimento, e la torsione di questa molla dà la misura dell'isteresi. Un indice, fissato sull'albero, e un quadrante suddiviso, permettono di misurare la torsione della molla. L'apparecchiatura è destinata al confronto del campione testato con un altro di isteresi nota, il rapporto delle torsioni fornisce il rapporto delle perdite per isteresi; è accompagnato da un campione a lungo studiato, la cui isteresi è costante e ben nota.



L'isteresimetro Blondel-Carpentier misura l'isteresi rotante; i coefficienti sono circa del 25% superiori a quelli dei dispositivi che misurano l'isteresi alternata. L'approssimazione delle misure raggiunge circa il 5%.

Il lavoro  $W$  deve risultare nella comparsa di una certa energia. Poiché lo stato magnetico di un corpo non cambia nella magnetizzazione ciclica, è chiaro che questa energia può essere solo termica. Esprimiamo  $W$  in erg; la quantità equivalente di calore  $q$ , che si sprigiona in un ciclo per centimetro cubo, è pari a  $W : 4,16 \cdot 10^7$  grammi-calorie. Se si percorrono  $n$  cicli in un secondo, la quantità di calore  $Q$  liberata nel tempo  $t$  in  $1 \text{ cm}^3$  di ferro è uguale a

$$Q = \frac{nWt}{4,16 \cdot 10^7} \text{ grammi - calorie} \quad (13.0.122)$$

Il numero di watt spesi è uguale a  $nW : 10^7$ . Su una tonnellata ( $10^3 \text{ kg}$ ) di ferro, il cui volume è di  $10^6 : 7,7 \text{ cm}^3$ , si consuma

$$N = \frac{nW \cdot 10^6}{10^7 \cdot 7,7 \cdot 736} = 0,0000177nW \text{ cavalli} \quad (13.0.123)$$

(1 cavallo = 736 watt). Si ha, ad esempio,  $W = 10000$  (ferro dolce) e  $n = 100$ , si ottiene  $N = 17,7 \text{ cavalli}$ . Quando si prende la densità del ferro uguale a 7,7 e la sua capacità termica uguale a 0,11, si ha, per l'innalzamento  $\theta$  della temperatura del ferro, in un ciclo

$$\theta = \frac{W}{4,16 \cdot 10^7 \cdot 7,7 \cdot 0,11} = 2,84 \cdot 10^{-8} W \text{ gradi} \quad (13.0.124)$$

Per  $W = 10000$  si trova  $\theta = 0,000284^\circ$ . L'aumento  $\theta_1$  della temperatura in un secondo ( $n$  cicli) è uguale a  $2,84 \cdot 10^{-8} nW$  gradi. Per  $W = 10000$  e  $n = 100$ , si ha  $\theta_1 = 0,0284^\circ$ . Se il calore non scomparisse, la temperatura, in un'ora, salirebbe di  $102^\circ$  nel ferro dolce. Nell'acciaio duro si ottiene un minor riscaldamento per magnetizzazioni deboli, quando  $H < 15$ ; ma se  $H > 15$ , l'acciaio si scalda maggiormente e si osserva, ad esempio nel ferro dolce, con  $H = 75,0$ ,  $\theta = 0,0003^\circ$ , e nell'acciaio duro  $\theta = 0,0019^\circ$ .

La misura sperimentale della quantità di calore  $Q$ , che si sprigiona nel ferro come equivalente del lavoro  $W$  della magnetizzazione ciclica, presenta grosse difficoltà, perché, accanto a questa cessione di calore, si ha un riscaldamento del ferro per le correnti di induzione (correnti di Foucault, Volume V), nonché per la bobina di magnetizzazione, essa stessa riscaldata dalla corrente che la attraversa. Il calore  $Q$  è stato misurato in particolare da Joule, Cazin, Grove, Warburg, Herurg, Jamin e Roget, Borgmann, Warbuug e Hönig, Pilleux, Edlund, Trowbridge, B. Strauss, M. Wien, Maurain. Non possiamo fermarci allo studio di queste opere; diremo solo che in generale dimostrano con certezza l'esistenza della emissione di calore  $Q$ , ma che non hanno dato alcun risultato che si possa considerare definitivo.

## 8. Influenza delle azioni meccaniche e della temperatura sulla magnetizzazione

Abbiamo già trattato delle influenze in questione sul magnetismo residuo; dobbiamo qui considerare le influenze che si manifestano durante la magnetizzazione.

I. Le scosse e gli urti aumentano la magnetizzazione temporanea  $I$  e diminuiscono la magnetizzazione residua  $I_r$ . Generalmente favoriscono la variazione di  $I$  risultante da quella del campo  $H$  nell'istante considerato. La grandezza  $W$  dell'isteresi diminuisce notevolmente; nel ferro dolce,  $W$  è quasi nullo, se il ferro è sottoposto, durante la magnetizzazione ciclica, a urti abbastanza forti. L'induzione  $B$ , che era in un filo pari a 190 per  $H = 0,32$ , è aumentata per gli scuotimenti fino a 6620; dal valore  $B = 7120$ , si è passati a  $B = 11600$ . In una diminuzione di  $H$  da un valore alto a 0,33, si è ottenuto  $B = 6880$  e dopo gli urti  $B$  è sceso a 320. Nel Ni, il massimo di 1 può essere decuplicato da colpi e urti. Ewing, G. Wiedemann, Fromme, Villari, Berson, Ascoli, Russel (1907) e altri si sono occupati dell'influenza delle scosse e degli urti.

II. L'estensione e la compressione sono state studiate da molti autori dal punto di vista della loro azione sulla magnetizzazione. Occorre distinguere tra l'influenza esercitata da un'estensione moderata, con un valore variabile di  $H$ , da quella di un'estensione gradualmente crescente, in un dato campo  $H$ . Wertheim (1852) e Matteucci (1858), che per primi hanno studiato queste influenze, hanno osservato che l'estensione aumenta la magnetizzazione di un filo di ferro duro. Villari (1868) ha scoperto che, in un campo  $H$  debole, un'estensione aumenta la magnetizzazione temporanea  $I$ , ma la diminuisce in un campo intenso. Per una certa intensità  $H$  del campo, l'estensione non ha effetto: questo si chiama punto critico di Villari. Maggiore è l'estensione, minore è l'intensità critica  $H$ ; maggiore è  $H$ , minore è l'estensione per la quale  $I$  inizia a diminuire. Per  $H = 2,46$ , la grandezza  $I$  è aumentata da 450 a 620, aumentando lo sforzo di estensione  $p$  da zero a 1,8 kg, ed è poi diminuita fino a 520, per  $p = 6$  kg. Verso  $H = 7,5$ ,  $I$  diminuisce, quando si parte da  $p = 0$ . Con il ferro duro, un aumento molto marcato di  $I$  per  $H < 25$  e un carico moderato; così, per  $H = 4,31$ , la grandezza  $I$  può passare da 150 a 550, per  $H = 8,6$  da 350 a 850, ecc. ; in una forte estensione,  $I$  ricomincia a diminuire. Quando si sottopone un filo, in un dato campo  $H$ , ad un'estensione ciclica, non si ritrova la magnetizzazione originaria  $I$ , ritornando alla deformazione iniziale; si osserva un'isteresi magneto-elastica, dove la curva chiusa presenta una forma complicata che ricorda un otto irregolare (vedi Ewing, *Magnetic Induction in Iron*, 3a ed., p.p. da 217 a 221, 1890; traduzione tedesca, p.p. 196 a 200, 1896) Nuove ricerche su questa isteresi si devono a Honda e Terada (1907), Maurain (1908) ed Ercolini (1911).

La compressione agisce sulla magnetizzazione del ferro I in direzione opposta all'estensione.

L'estensione ha un effetto considerevole sul filo di nichel, come hanno mostrato le ricerche di Heydweiller, Ewing e altri. Heydweiller ha stabilito che esiste anche, per il Ni, un punto critico di "Villari", ma esso compare solo con valori molto piccoli di  $H$ . In generale, l'estensione diminuisce molto fortemente la magnetizzazione  $I$ . Citeremo alcuni numeri relativi a un nichel dello spessore di 0,68 mm. Per  $H = 100$ , si ha  $I = 400$ ,  $I_r = 250$ ; sotto un carico  $p = 12$  kg, si ottiene  $I = 100$ ,  $I_r = 16$ . Con lo stesso filo, ma reso un po' più duro, si abbassa da 375 a 50 sotto un carico di 18 kg. L'isteresi magnetoelastica è insignificante nel Ni. Ewing (1888) ha mostrato che, mediante compressione longitudinale,  $I$  e  $I_r$ , aumentano molto rapidamente nel nichel, per esempio, con  $H = 20$ , da  $I = 100$  a  $I = 430$  e da  $I_r = 50$  a  $I_r = 390$ . Il rapporto  $I_r : I$  aumenta da 0,5 a 0,9; con l'estensione, può scendere a 0,19. È molto facile rendersi conto che l'estensione e la compressione agiscono più fortemente su  $I_r$  che su  $I$ .

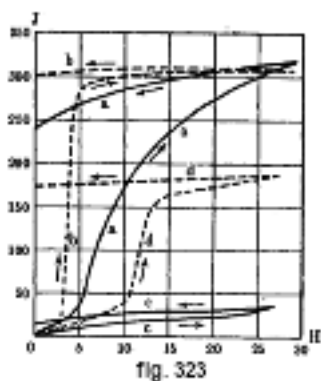
Anche W. Thomson ha trovato un punto critico per il cobalto, ma gli effetti dell'estensione sono inversi ai loro analoghi sul ferro: con piccoli valori di  $H$ , un'estensione diminuisce la magnetizzazione  $I$ ; l'aumenta, al contrario, con grandi valori di  $H$ . Il fenomeno opposto si verifica nella compressione, come ha dimostrato Chree. Ulteriori osservazioni sul cobalto sono

state fatte da G. S. Meyer (1896), così come da Nagaoka e Honda (1902).

III. L'effetto della *torsione* sulla magnetizzazione ha dato luogo a un grandissimo numero di opere; le più importanti sono dovute a Wertheim, G. Wiedemann, W. Thomson, Knott, Ewing, Zehnder, Nagaoka, Moreau, Scherer, Barus, ecc. Strettamente legata alla questione dell'influenza della torsione sulla magnetizzazione di un corpo è la questione dell'effetto della magnetizzazione su un corpo precedentemente attorcigliato e quella della torsione prodotta dalla magnetizzazione longitudinale di un filo di ferro percorso da una corrente elettrica, così che una magnetizzazione circolare è già indotta nel piano di una sezione rettilinea. Non possiamo qui esporre i complessi e vari fenomeni che sorgono. Si troveranno tutti i dettagli necessari su questi fenomeni nell'opera di G. Wiedemann, *Die Lehre von der Elektrizität* Tomo III, p. p. 767 a 812, 1895 e nell'opera di Ewing sopra citata (pp. da 131 a 249 della 3a edizione inglese e pp. 211 a 225 dell'edizione tedesca). Ci limiteremo a poche indicazioni. Quando si sottopone, durante la magnetizzazione, un tondino di ferro ad una torsione ciclica, in una sola direzione o nelle due direzioni,  $I$  diminuisce nella torsione, aumenta nella deformazione; esiste un'isteresi magnetoelastica. Quando si fa passare una corrente attraverso un filo, che produce in questo filo una magnetizzazione circolare trasversale, insensibile nello spazio esterno, la torsione dà luogo ad una magnetizzazione longitudinale apprezzabile. Il fenomeno reciproco è particolarmente interessante: se un filo percorso da una corrente è sottoposto ad una magnetizzazione longitudinale, il filo si attorciglia in una verso che dipende da quello della corrente e della magnetizzazione. Questo fenomeno è stato studiato in modo preciso su quattro fili d'acciaio da Williams (1911); non ha trovato alcuna dipendenza tra questo effetto Wiedemann e l'effetto Joule, cioè l'allungamento di un filo nella magnetizzazione.

Inoltre, G. Wiedemann ha osservato che un filo, già attorcigliato, si attorciglia un po' di più per magnetizzazione longitudinale. G. Wiedemann, partendo dalla teoria della rotazione dei magneti molecolari, ha spiegato un gran numero di questi fenomeni. Nuove ricerche sono state fatte su questo argomento negli ultimi anni da Bouasse e Berthier (1907), Muraun (1907) e Pellet (1909).

Il nichel manifesta in generale gli stessi fenomeni del ferro, ma sono di verso opposto. Pertanto, la torsione, al momento della magnetizzazione, aumenta la magnetizzazione  $I$ . I numerosi lavori di Nagaoka hanno portato a risultati molto interessanti. Ci limiteremo a illustrarne uno con una presentazione grafica. In Fig. 323, la curva  $aa$  rappresenta l'aumento e la diminuzione di  $I$ , durante la prima magnetizzazione di un filo di nichel tenero. La curva  $bb$  si riferisce al caso in cui il filo è sottoposto ad una torsione di  $3^\circ$  per centimetro; per valori molto piccoli di  $H$ , la magnetizzazione  $I$  è diminuita; per i valori medi è fortemente aumentata e la curva presenta una regione a forte curvatura; l'isteresi è ridotta. La curva  $cc$  è relativa a un filo sottoposto ad un allungamento: qui la magnetizzazione  $I$  diminuisce notevolmente, l'isteresi è quasi nulla.



Infine, la curva  $dd$  si riferisce al caso in cui estensione e torsione agiscono contemporaneamente sul filo.



IV. Resta da considerare l'effetto della temperatura sulla magnetizzazione. Questa influenza della temperatura ha dato origine alle ricerche di Kupfer, G. Wiedemann, Perkins, Hopkinson, Tomlinson, Baur, Curie, Guillaume, Houllevigue, Osmond, Du Bois, L. Dumas, Dumont, Kunz, Wills, Le Chatelier, Berson, Honda e Shimizu e altri.

Nel ferro si può notare che con piccoli valori di  $H$  il riscaldamento produce a volte un fortissimo aumento della magnetizzazione  $I$ . Con grandi valori di  $H$  il riscaldamento produce una diminuzione di  $I$ . Vi è, per ogni tipo di ferro, un certo campo critico  $H$ , in cui l'influenza del riscaldamento su  $I$  cambia segno. Quanto sopra si riferisce a un riscaldamento moderato. Ad una certa temperatura, tra  $700^\circ$  e  $800^\circ$  per il ferro e tra  $600^\circ$  e  $700^\circ$  per l'acciaio, la magnetizzazione  $I = 0$ ; Hopkinson chiama questa temperatura la temperatura critica; Auerbach ha proposto di chiamare temperatura critica la temperatura alla quale l'aumento di  $I$  si cambia in una diminuzione. Queste due definizioni differiscono poco l'una dall'altra, perché il passaggio da 1 massimo a  $I = 0$  (per  $H$  piccolo) avviene con sorprendente rapidità. Così Hopkinson ha trovato che nel Fe, per  $H = 0,075$ , l'induzione  $B$  aumenta da 17 a 512, con un aumento della temperatura da  $10^\circ$  a  $778^\circ$ . Per  $H = 0,3$  si ottengono i seguenti valori di  $\mu$ :

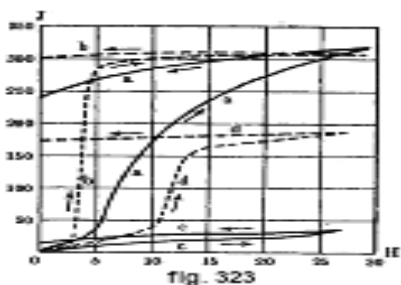
Temp.:	$20^\circ$	$480^\circ$	$580^\circ$	$730^\circ$	$750^\circ$	$770^\circ$	$775^\circ$	$785^\circ$
$\mu =$	500	700	900	2500	3800	7700	11000	1 ( $I = 0$ )

Fino a  $600^\circ$ , l'incremento di  $\mu$  è lento (fino al valore 1000); poi, fino a  $750^\circ$ , l'aumento è più rapido (fino a 3800); infine, tra  $750^\circ$  e  $775^\circ$ , l'aumento è quasi repentino (da 3800 a 11000). Per un ulteriore, piccolissimo aumento di temperatura, la magnetizzazione, che è molto forte, scende a zero. Si ottiene un quadro completamente diverso con grandi valori di  $H$ . Si ha, ad esempio, per  $H = 4$ , un aumento molto lento di  $\mu$  fino a  $620^\circ$ , e poi una rapida diminuzione fino a zero. Per valori ancora maggiori di  $H$ , l'aumento di  $\mu$  scompare; abbiamo, ad esempio, per  $H = 45$ ,

Temp.:	$20^\circ$	$370^\circ$	$570^\circ$	$720^\circ$	$750^\circ$	$785^\circ$
$\mu =$	300	300	260	240	200	1 ( $I = 0$ )

Nel determinare, per temperature diverse, il valore di  $B$  in funzione di  $H$ , si ottengono le curve rappresentate in figura 324, che si intersecano.

La rapida scomparsa del magnetismo a una certa temperatura può essere paragonata al fenomeno della ricalescenza scoperto da Barrett. Questo fenomeno consiste nel fatto che, verso  $780^\circ$ , avviene nel ferro un cambiamento molecolare, accompagnato da un assorbimento di calore e da una riduzione di volume; nonostante un regolare apporto di calore, si verifica un arresto nell'innalzamento della temperatura del ferro.



Quando si raffredda il ferro che è stato riscaldato oltre gli  $800^\circ$ , si nota a  $780^\circ$  una cessione di calore, cioè un aumento di temperatura e un aumento di volume. Per l'acciaio la temperatura di ricalescenza è inferiore; l'acciaio essendosi raffreddato fino a  $680^\circ$ , si riscalda nuovamente a  $712^\circ$ , per cui l'aumento di temperatura è di  $32^\circ$ . Tutti questi fenomeni sono strettamente

correlati alle trasformazioni che avvengono nel ferro a diverse temperature. Van't Hoff (1900) ha mostrato che queste trasformazioni possono essere determinate dalla regola delle fasi e che esiste un punto quadruplo, dove quattro fasi (martensite, cementite, ferrite e il loro vapore saturo) sono in equilibrio con le due componenti (Fe e C). Questo punto è a  $670^\circ$ , per una concentrazione corrispondente allo 0,8% di carbonio; è analogo al punto criodratice di una soluzione salina acquosa; tuttavia, con il ferro è una soluzione solida.

Curie ha studiato il ferro a temperature più elevate e con  $H = 1000$ . Ha trovato che dopo un forte calo intorno a  $760^\circ$ , la magnetizzazione continua a diminuire lentamente; a  $860^\circ$  avviene una caduta più rapida, poi più lenta; infine, a  $1280^\circ$ , c'è un fortissimo aumento (del 50%), seguito ancora fino a  $1365^\circ$  da una lenta diminuzione. La temperatura  $\theta$ , alla quale la magnetizzazione scende per la prima volta molto rapidamente, fino a un valore relativamente molto piccolo, è solitamente chiamata punto di Curie e da molti autori (ad es. Ashworth, 1912) temperatura critica. Alla temperatura  $\theta$  cambiano le proprietà fisiche del ferro, in particolare il calore specifico. Curie ha trovato che al di sopra della temperatura  $\theta$ , la magnetizzazione con  $H$  dato cambia in ragione inversa alla temperatura assoluta. Weiss, secondo la sua teoria, di cui parleremo alla fine di questo capitolo, ha stabilito la formula

$$\chi'(T - \theta) = C$$

dove  $\chi'$  è la suscettibilità specifica (riferita all'unità di volume); chiama  $C$  la costante di Curie. Weiss e Foëx (1911) hanno verificato la suddetta formula per Fe, Ni, Co, magnetite e varie leghe Fe-Ni e hanno trovato un buon accordo per certi intervalli di temperatura.

Fenomeni analoghi a quelli del ferro compaiono quando vengono riscaldati nichel e cobalto. Nel nichel il punto critico è poco sopra i  $300^\circ$ . Honda e Shimizu (1905) hanno trovato  $\theta = 320^\circ$ , mentre Ashworth (1912) ha ottenuto la temperatura particolarmente elevata di  $388^\circ$ . Per il cobalto, si ha  $\theta = 1080^\circ$ , Ashworth (1912) ha confrontato Fe, Ni e Co con le temperature corrispondenti, ottenute ponendo  $\theta = 1$  per la temperatura critica assoluta e ha trovato che quando  $T : \theta$  è uguale per i tre metalli, si trova lo stesso valore per  $I : I_0$ , con  $I_0$  riferito a  $0^\circ C$ .

Baikow (1910) ha mostrato per la prima volta che il nichel, come Fe e Co, sono dotati di polimorfismo e che il punto di trasformazione è a  $360^\circ$ .

L'effetto di temperature molto basse è stato studiato da Fleming e Dewar, Claude, Osmond, Honda e Shimizu e altri ancora; molto recentemente questo studio è stato ripreso in particolare da Weiss e Kamerlingh-Onnes (1910) e da Perrier e Kamerlingh-Onnes (1912). Il raffreddamento alla temperatura dell'idrogeno liquido ( $20^\circ$  ass.) determina, nei campi deboli, una riduzione, nei campi forti, un aumento della magnetizzazione. Quest'ultima non è grande; sale (rispetto a quella a  $0^\circ C$ ) nel Ni (17,  $3^\circ$  ass.) al 5,46%, nel ferro (20,  $0^\circ$  ass.) al 2,1%, nella magnetite (15,  $5^\circ$  ass.) al 5,69%; nel cobalto l'incremento è di circa 1%. Radovanovic (1912) ha stabilito, per un anello di nichel, la formula

$$\theta = 359 + 0,198\sqrt{H}$$

dove  $\theta$  è la temperatura di trasformazione (Cels.). Perrier e Kamerlingh-Onnes hanno studiato lo stesso anello di nichel e la suscettibilità  $\chi$  in campi molto deboli (da 0,017 a 0,090 gauss) a basse temperature. Hanno trovato, per le seguenti temperature assolute  $T$ :

$T =$	$291^\circ$	$90^\circ$	$76,5^\circ$	$20,5^\circ$ ass
$\chi =$	3,045	0,955	0,881	0,782

Kunz, Thiesen, Morris, Roget, Maurain (1910) e altri ancora si sono occupati dell'influenza della temperatura sull'isteresi  $W$ . Si osserva in generale che la perdita di energia  $W$  diminuisce all'aumentare della temperatura.

Tomlison ha scoperto che il campo critico (Villari), in cui un'estensione non ha alcun effetto su  $I$ , aumenta con l'aumentare della temperatura.

Schwedoff, Edison, Stefan e altri ancora hanno costruito motori basati sulla proprietà che possiede il ferro di perdere quasi completamente il suo stato magnetico ad alta temperatura.

## 9. Proprietà ferromagnetiche di polveri, leghe e minerali naturali

Abbiamo supposto, in quanto precede, che i corpi ferromagnetici, ferro, nichel o cobalto, si trovino in pezzi massicci di forma molto allungata o anulare. Non è privo di interesse determinare le proprietà magnetiche di queste stesse sostanze, quando le si prendono in polvere, o omogenee, o mescolate con un'altra polvere non magnetica, o infine distribuite uniformemente nella massa di un corpo molle, ad esempio un grasso. Waltenhofen (1870), Börnstein (1875), Toepler e v. Ettingshausen (1877), Aueubach (1880), Haubner (1886), Kobylina e Tereschine (1886), Maurain (1903) e in particolare Trenkle (1905) hanno studiato vari casi di questo genere. Risulta dal loro lavoro che la magnetizzazione  $I$  è tanto più piccola, quanto la polvere della sostanza ferromagnetica è più diluita dall'altra polvere amagnetica e che di conseguenza è più debole l'azione reciproca tra le molecole più vicine. Kobylina e Tereschine hanno trovato che nelle miscele di polveri di ferro e carbonio, il massimo di  $\mu$  (o di  $\chi$ ) avviene per lo stesso valore di  $H$ , che è però minore del valore di  $H$  che dà il massimo di  $\mu$  per il ferro massivo. Hanno inoltre osservato che una leggera aggiunta di carbonio alla polvere di ferro aumenta il momento residuo. Trenkle è riuscito a magnetizzare fino alla saturazione polveri di ferro puro ( $I_1$ ) e miscele di 60% di Fe e 40% di bronzo ( $I_2$ ). Ha trovato che il massimo  $I_1 = 300$  è raggiunto con  $H = 2900$ , ma il massimo  $I_2 = 190$  con  $H = 3500$  soltanto. Il rapporto  $I_1 : I_2$ , che è uguale a 2,46 per  $H = 200$ , diminuisce al crescere di  $H$ , ma a partire da  $H = 2400$  fino a  $H = 3100$ , questo rapporto mantiene il valore costante 1,55.

Passiamo ora alle leghe che contengono parti costituenti ferromagnetiche. Abbiamo già indicato che un'aggiunta di carbonio al ferro e lo stato in cui si trova questo carbonio agiscono fortemente sulle proprietà magnetiche. Piccole aggiunte di Cr, Ni, W e Mo al ferro aumentano la forza coercitiva, ma esercitano poca influenza sulla magnetizzazione temporanea; lo stesso vale, come ha mostrato Daubrée, per un'aggiunta di platino. Un contenuto di Si più alto (fino al 5%) innalza il massimo di  $\mu$  da 3000 a 4000 e diminuisce notevolmente l'isteresi  $W$ . Gumlich (1910) ha trovato invece che il valore di saturazione diminuisce proporzionalmente al contenuto del ferro.

Quando si aggiunge all'acciaio il 12% di Mn, si ottiene una lega amagnetica, che non presenta più alcun magnetismo residuo.

Weiss ha studiato le leghe Fe+Sb. Con il 56,8% di Fe, si ha  $\mu = 14,3$ ; con il 42,7% di Fe, si ha  $\mu = 2,57$ ; con il 34% si ha  $\mu = 1,06$ . Il manganese agisce poco, quando non entra per più del 2%; ma una lega, contenente il 12% di Mn e l'1% di C, dà il valore  $\mu = 1,4$  e non manifesta magnetismo residuo.

Leghe di ferro e alluminio sono state prese in considerazione da Parshall e in particolare da Richardson, che è stata fino al 18,47% di Al e fino a temperature di  $-83^\circ$  e  $+940^\circ$ . I risultati ottenuti sono molto complessi: ci limiteremo ad indicare che una lega al 18,47% di Al dà un massimo per  $\mu$  ad una temperatura che è ben al di sotto di  $-90^\circ$  e presenta a  $+25^\circ$  il punto critico dove  $\mu$  diminuisce rapidamente.

La lega Ni+Cr perde le sue proprietà magnetiche, quando contiene il 10% di Cr; la lega Fe+Co+Cr al contrario rimane fortemente magnetica, anche con il 40% di Cr. Hill (1902) ha studiato le leghe Ni+Cu e Ni+Sn; ha trovato le temperature di trasformazione  $t$  seguenti, alle quali l'induzione  $B$  diminuisce rapidamente e si annulla:

Contenuto in Cu.:	0%	4%	8%	20%	40%
$t =$	355°	310°	280°	155°	-100°

Le leghe Cu+Co rimangono ancora magnetiche, anche con il 98,5% di Cu. In un lavoro successivo, Hill (1907) ha trovato per l'abbassamento  $\Delta t$  della temperatura di trasformazione, con l'aggiunta di  $m$  grammo-molecole di Cu o Sn a una grammo-molecola di Ni, i valori  $m \cdot 10,5^\circ$  e  $m \cdot 7,3^\circ$ .

Le leghe di Ni con Cu e di Co con Cu sono state studiate da Reichard (1901), che ha trovato le prime non magnetiche, mentre Cu+Co, anche con un contenuto di Co di solo 1,5%, manifesta un magnetismo, che sfuma in rosso chiaro. Bloch (1912) si è occupato delle leghe Ni+Co e ha trovato che il valore di saturazione è una funzione lineare del contenuto, mentre la temperatura alla quale il magnetismo scompare rapidamente è una funzione parabolica.

Gray (1912) ha fatto uno studio molto completo delle leghe di Ni con dal 5 al 30% di Mn, a  $+15^\circ$  e a  $-190^\circ$ , e in aggiunta di queste leghe ricotte a  $900^\circ$  e indurite a  $900^\circ$ . A  $-1900$ , nei campi forti la magnetizzazione è sempre più intensa che a  $15^\circ$ , mentre nei campi deboli si osserva il contrario. Con una lega, che contiene ad esempio il 15% di Mn, le curve corrispondenti ad un campo di 14 gauss si intersecano, quando la lega viene ricotta.

Tammann (1908), che ha studiato le leghe di Fe, Ni e Co con Si, Sn, Al, Sb, Bi, Mg e Zn, ha ottenuto risultati di grande rilievo. Tra le leghe ne esistono, come si sa, un numero molto elevato che corrispondono a determinate combinazioni chimiche, ad esempio  $FeAl^3$ ,  $CoSi^2$ ,  $CoZn^4$ ,  $NiSn^2$ , NiBi, ecc. Tammann indica circa 40 di tali combinazioni. Le altre leghe formano cristalli misti, dove sia il metallo ferromagnetico sia l'altro componente della lega funge da solvente. Tammann ha trovato le seguenti regole generali:

*Le combinazioni binarie di metalli ferromagnetici con altri metalli sono quasi tutte non magnetiche.*

I cristalli misti, nei quali il metallo ferromagnetico è il solvente, sono generalmente magnetizzabili.

I cristalli misti, che costituiscono soluzioni solide di metalli ferromagnetici in altri metalli, non sono magnetici.

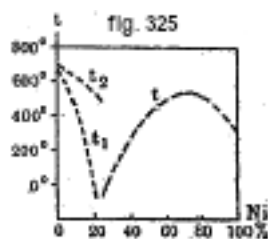
Fanno eccezione le leghe in cui la temperatura di trasformazione scende al di sotto della temperatura ordinaria, ad esempio per alcune leghe Cu-Ni, Cu-Co e Cr-Ni. A una temperatura sufficientemente bassa, queste eccezioni scompaiono.

Honda (1910) ha confermato le regole trovate da Tammann. Ha studiato le leghe Ni+Cr, Co+Cr, Fe+V, Ni+Sn e Ni+Al. Friederich (1908) ha osservato che la prima regola di Tammann è valida solo per le combinazioni metalliche; le combinazioni  $Co^5As^2$ ,  $Fe^3P$ ,  $Fe^2P$ ,  $Fe^2S$  e  $Fe^3O^2$  (magnete naturale) sono fortemente magnetiche.

Gli amalgami sono stati studiati da Nagaoka (Fe+Hg e Co+Hg, tra  $-100^\circ$  e  $+250^\circ$  e fino a  $H = 3200$  e Wünsche (Ni+Hg). È notevole che, negli amalgami di Fe e Co, la forza coercitiva è enorme, anche se si ottiene un magnetismo residuo insignificante. Con il 2,3% di Fe, la forza coercitiva è pari a 370, mentre il suo valore massimo per l'acciaio è pari a 80; per Hg+Co, raggiunge i 150. Ciò è legato al fatto che l'isteresi è straordinariamente grande negli amalgami; è curioso che gli amalgami Hg+Ni siano molto poco magnetici, come mostrano i seguenti numeri (per  $H = 8000$ ):

Contenuto in Ni.:	0,5%	1%	2%	3%	3,5%
$10^6 \chi =$	24,9	49,3	121,9	249,1	349,8

Non si nota alcun aumento a  $-78^\circ$ .



Le leghe di ferro e nichel sono di grande interesse; sono state studiate da Hopkinson, Guillaume, Osmont, Dumont, L. Dumas, Houllé, Abt e altri. Per spiegare le proprietà di queste leghe possiamo usare la figura 325, dove in ascissa è riportato il contenuto di Ni, in ordinata la temperatura. Si distingue tra leghe *reversibili*, che contengono più del 25% di Ni, e leghe *irreversibili*, che ne contengono meno del 25%.

Inizieremo con le leghe irreversibili. Vi sono per queste due temperature  $t_1$  e  $t_2$  tra le quali la lega può esistere in due stati, uno magnetico e l'altro non magnetico. Quando la lega magnetica viene riscaldata, diventa amagnetica a  $t_2'$  e rimane tale se viene raffreddata fino a  $t_1'$ ; raffreddata al di sotto di tale valore, la lega riacquista la proprietà di poter essere magnetizzata e la conserva quando viene riscaldata. Quando il contenuto di Ni aumenta, la temperatura  $t_2$  scende lentamente, ma la temperatura  $t_1$  molto rapidamente (fig. 325). Per il 4,7% di Ni, la proprietà di poter essere magnetizzata scompare verso  $t_2 = 780^\circ$  e ricompare per raffreddamento sotto  $t_1 = 650^\circ$ ; i due stati della lega sono possibili entro un intervallo di  $130^\circ$ . Se la lega contiene circa il 25% di Ni, si ha  $t_2 = 580^\circ$  e  $t_1$  è ben al di sotto di  $0^\circ$ , per cui una lega riscaldata oltre i  $580^\circ$ , non può essere magnetizzata alla temperatura ordinaria; l'intervallo è di  $600^\circ$ . Si può affermare che queste leghe possiedono una notevole isteresi termica.

Le leghe contenenti più del 25% di Ni perdono la proprietà di poter essere magnetizzate ad una certa temperatura  $t^\circ$ ; quando vengono raffreddate, ritornano magnetiche ad una temperatura  $t_1$ , che differisce poco da  $t^\circ$  se la lega contiene poco più del 25% di Ni. Quindi, per il 30% di Ni, si ha  $t = 140^\circ$ ,  $t_1 = 125^\circ$ . Con leghe più ricche di nichel le due temperature si confondono; una sola curva  $t$  è stata quindi rappresentata in figura 325. La temperatura  $t$  aumenta contemporaneamente al contenuto di nichel, fino a  $600^\circ$  per il 70% di Ni, per poi scendere a  $320^\circ$  per il nichel puro.

Hilpert e Colver-Glauert (1911) hanno studiato diversi tipi di acciaio al nichel tra  $950^\circ$  e  $-180^\circ$ ; essi hanno riconosciuto che la stessa lega può comportarsi in modi molto diversi dal punto di vista della facoltà di magnetizzazione, che dipende dagli sbalzi di temperatura a cui è stata sottoposta in precedenza,

Parliamo ora dell'interessante e del tutto nuova scoperta delle *leghe ferromagnetiche di metalli amagnetici*. Già nel 1892, Hogg aveva osservato che, mentre le leghe con 80% di Fe e 20% di Al e 88% di Fe + 12% di Mn sono del tutto amagnetiche, le leghe 10,80% Fe + 54,86% Mn + 25,34% Al (le altre parti costituenti sono C, Si, P, S, Cu) e 14,80% Fe + 75,40% Mn + 3,05% Al possiedono quasi le stesse proprietà magnetiche del ferro. Nel 1900, Heusler (il suo primo lavoro è stato pubblicato nel 1903) ha scoperto che la lega amagnetica 30% Mn + 70% Cu, che si trova in commercio (fornita dall'Isabellenhütten a Dillenburg, vicino Wiesbaden), acquista la capacità di essere magnetizzata se le si aggiunge uno dei metalli Al, Sn, Sb, Bi o anche As e Bo. Un'aggiunta di C, Si, P o anche dell'1,2% di Fe non genera alcuna proprietà magnetica. Le leghe più fortemente ferromagnetiche si ottengono aggiungendo Al, cioè formando una lega Mn+Cu+Al. Il miglior rapporto tra Mn e Al è quello che corrisponde al composto MnAl, essendo il peso del manganese circa il doppio di quello dell'alluminio. Il primo studio sperimentale di queste leghe è stato realizzato da Haupt e Stark, sotto la direzione di Richarz; hanno trovato in particolare, con  $H = 100$ , per le leghe Cu e MnAl:

MnAl	28,8%	36,6%	39,7%
$B =$	3200	4645	5380

L'ultimo numero corrisponde a  $I = 430$ . L'aggiunta di una piccola quantità di Pb aumenta ulteriormente la capacità magnetica di queste leghe; così una lega contenente il 36,1% di MnAl ha dato  $B = 6480$ , per  $H = 150$ , cioè  $I = 514$ . Ulteriori ricerche su queste leghe e sulle loro analoghe sono state effettuate da un numero molto elevato di autori.

L'influenza della temperatura è molto grande e complessa. Ad una certa temperatura di trasformazione  $\theta$ , le proprietà magnetiche scompaiono. A seconda della composizione della lega,  $\theta$  oscilla tra  $60^\circ$  e  $350^\circ$ . Riscaldando a lungo si modificano le proprietà della lega; la massima magnetizzazione si ottiene scaldando a lungo una lega fresca a  $110^\circ$  (toluolo bollente). Austin ha osservato una notevole magnetostrizione; per  $H = 400$ , l'allungamento è pari a  $11 \cdot 10^{-7}$  della lunghezza, che rappresenta  $1/3$  dell'allungamento massimo nel ferro. Con campi intensi si produce una contrazione proporzionale a  $H^2$ .

Gumlich ha trovato, per una di queste leghe, una forza coercitiva così grande come per i migliori tipi di acciaio.

L'abbassamento della temperatura a  $-185^\circ$  non ha alcun effetto sulle proprietà magnetiche di queste leghe. Take ha riscontrato che riscaldando ripetutamente leghe contenenti Pb, la temperatura di trasformazione  $\theta$  aumenta notevolmente, ad esempio da  $120^\circ$  a  $240^\circ$  o da  $75^\circ$  a  $120^\circ$ . Utilizzando un dilatometro, ha potuto osservare variazioni di volume a  $\theta^\circ$ . Tra  $400^\circ$  e  $500^\circ$  avvengono nuove trasformazioni, in cui alcune leghe perdono completamente le loro proprietà magnetiche, che non vengono più ripristinate a  $-185^\circ$ . Hill ha scoperto che con un forte riscaldamento, le proprietà magnetiche prima diminuiscono (dopo il raffreddamento), ma aumentano con un riscaldamento ancora più forte. Indichiamo, nella tabella seguente, i valori di  $I$  ottenuti dopo riscaldamento a  $t^\circ$  ( $H = 85$ ):

Prima del riscaldamento	$368^\circ$	$500^\circ$	$650^\circ$	$850^\circ$
$I = 131$	267	27	90	155

Gunlich ha osservato che le leghe precedenti possiedono un notevole magnetismo residuo, vale a dire che  $H$  variando il loro nuovo stato magnetico è ben lungi dall'essere stabilito istantaneamente; ha trovato anche che l'isteresi può arrivare fino a  $1520$  erg per  $cm^3$  e che, nella formula (41) di Steinmetz, si ha  $\eta = 0,0045$ .

Negli ultimi anni (1907-1912) sono stati pubblicati in gran numero nuovi lavori sulle leghe di Heusler. In prima linea vanno citate le estese ricerche di Take (1911) sulla vecchiaia di queste leghe e sui fenomeni di trasformazione che vi si verificano. Una panoramica dettagliata della questione è stata fornita da Richarz (*Congrès internat. de Radiologie et d'Électricité*, Bruxelles, 1911) e da Heusler e Take (*Phys. Zeitschr.*, 1912).

Guillaume (1907) ha cercato di spiegare il ferromagnetismo delle leghe di manganese supponendo che il punto di trasformazione del manganese fosse a una temperatura molto bassa; di conseguenza, questo metallo non è ferromagnetico alla temperatura ordinaria. Aggiungendo altri metalli, come Cu, Al, Pb, ecc., il punto di trasformazione si innalza. I fisici di Marburgo (Richarz e i suoi allievi) non ritengono esatta questa spiegazione. Attraverso numerose ricerche di diverso genere, hanno sostenuto ed esteso la teoria stabilita da Heusler. Secondo questa teoria, sono le combinazioni chimiche completamente definite di metalli che possiedono il ferromagnetismo. Richarz ha approfondito questa teoria, ponendosi dal punto di vista della teoria elettronica. Il ferromagnetismo appare qui come una proprietà costitutiva della molecola composta, in cui gli elettroni hanno un grado di mobilità più elevato rispetto alle molecole dei metalli puri prese isolatamente. Le combinazioni ferromagnetiche particolarmente forti devono avere, secondo Heusler (1912), la forma  $Al^x Mn^y Cu^{3x-y}$ .

Ci resta ora da dire qualche parola sui minerali ferromagnetici. Tali sono la pietra magnetica naturale (magnetite  $Fe^3O^4$ ), la pirrotite (approssimativamente  $Fe^7O^8$ ), l'ematite ( $FeO^2$ ), l'ilmenite ( $FeTiO^3$ ), la limonite ( $Fe^4H^6O^9$ ), la cromite ( $FeCr^2O^4$ ), l'almandino ( $Fe^3Al^2Si^3O^{12}$ ),

la cianite, l'augite, ecc. L'idrato ferromagnetico  $Fe^3(OH^2)^8$ , che corrisponde alla magnetite, può essere ottenuto artificialmente. Alcuni di questi minerali presentano un'anisotropia magnetica molto marcata, sulla quale torneremo in seguito. Ci limiteremo qui a dare alcune indicazioni. E. Becquerel (1845) ha scoperto che la magnetite ha circa 0,48 dell'intensità magnetica del ferro. Holz ha scoperto che il magnetismo residuo di questo minerale è 1,5 volte maggiore quello dell'acciaio più duro; la sua forza coercitiva, tuttavia, è inferiore a quella dell'acciaio, come confermato da Abt, che ha osservato che il magnetismo residuo può essere anche 2,75 volte maggiore di quello dell'acciaio. Con  $H = 800$ , la magnetite è satura; la forza coercitiva è pari a 50; nella pirrotite è pari a 200, nell'ematite a circa 150; quest'ultimo minerale non è ancora saturo con  $H = 1000$ . Il basalto, che contiene ematite, è stato studiato da Pockels. Curie ha scoperto che, nella magnetite,  $\chi$  diminuisce rapidamente verso i  $535^\circ$  (punto critico) per poi diminuire regolarmente all'aumentare della temperatura. Parleremo più avanti del lavoro di Weiss sui cristalli di magnetite e pirrotite.

## 10. Paramagnetismo e Diamagnetismo. Proprietà fondamentali

Abbiamo indicato in precedenza che si possono distinguere i corpi, rispetto alle loro proprietà magnetiche, in corpi fortemente magnetici o ferromagnetici e in corpi debolmente magnetici; questi ultimi sono ulteriormente suddivisi in *paramagnetici* e *diamagnetici*. Da un punto di vista puramente esteriore, i corpi ferromagnetici rappresentano sostanze fortemente paramagnetiche, ma è possibilissimo che esista tra ferromagnetismo e paramagnetismo, non solo una differenza quantitativa, ma anche una differenza qualitativa molto più profonda. Quantitativamente, non si può tracciare un limite rigoroso tra i corpi ferromagnetici e i paramagnetici, perché si trovano, ad esempio, leghe o anche minerali, la cui suscettività magnetica  $\chi$  ha un qualsiasi valore intermedio tra il massimo valore relativo al ferro e il più piccolo di quelli relativi a corpi debolmente paramagnetici.

Nelle sostanze diamagnetiche si ha  $\chi < 0$  e di conseguenza  $\mu < 1$ , poiché  $\mu = 1 + 4\pi\chi$ . Va però notato che, anche nei corpi più fortemente diamagnetici,  $\chi$  è piccolissimo, dell'ordine di  $10^{-5}$ , per cui  $\mu$  non è mai minore di circa 0,988.

Quando ci si limita a fenomeni puramente esterni, si può dire che un corpo paramagnetico, per esempio una piccola sfera paramagnetica, è attratta dal polo di una calamita, mentre un corpo diamagnetico è respinto. Questo fenomeno fu osservato, per la prima volta, da Brugmans (1778), avvicinando il polo di una calamita ad un pezzetto di bismuto, che poggiava in un piccolo galleggiante sull'acqua o sul mercurio. Successivamente E. Becquerel (1827) ha osservato un fenomeno simile con l'antimonio. Nel 1845 furono pubblicati i primi esperimenti di Faraday, i quali hanno mostrato che un campo magnetico sufficientemente potente agisce su quasi tutti i corpi e che questi si distinguono in paramagnetici e nel diamagnetici. Quando si penetra un po' più intimamente nel carattere dei fenomeni osservati in un campo magnetico, si deve dire che i corpi paramagnetici si spostano da luoghi di minore intensità del campo verso quelli di maggiore intensità e che i diamagnetici si muovono nel verso opposto.

Un altro carattere esteriore è il seguente. Se si dispone tra i poli di un magnete un'asta orizzontale mobile della sostanza da studiare, l'asse di questa assume una posizione assiale, cioè è posta nella direzione delle linee di forza (seguendo una retta che congiunge i poli), quando la sostanza è paramagnetica. L'asse di una retta diamagnetica assume una posizione equatoriale, cioè normale alle linee di forza (perpendicolare alla retta che congiunge i poli). Ma in realtà non è la direzione delle linee di forza che determina la posizione dell'asta; è il carattere del campo. Cohn (1900), Meslin (1908), R. Gans (1908) e Perrier (1910) hanno studiato le condizioni di equilibrio di una sbarretta o di un ellissoide in un campo magnetico. Meslin ha considerato il caso di un ellissoide anisotropo (cristallino, vedi dopo) in un campo uniforme. R. Gans ha considerato un campo, che ha un asse di simmetria e un piano di simmetria perpendicolare a questo asse; il

centro della sbarretta deve essere posizionato sull'asse e su questo piano. Quando l'intensità del campo aumenta dal centro lungo l'asse, la sbarretta viene posta come si è detto sopra; questo è il solito caso di un campo tra i poli di un elettromagnete. Ma se l'intensità del campo diminuisce dal centro lungo l'asse, si dispone un'asta paramagnetica perpendicolare all'asse, quindi anche alle linee di forza, e un'asta diamagnetica, parallela alle linee di forza, cioè lungo l'asse. R. Gans ha realizzato un caso del genere, ponendo sui poli piani di un elettromagnete due cilindri cavi di ferro lunghi  $2\text{ cm}$  di lunghezza, e del diametro di  $2\text{ cm}$ , con una parete spessa  $3\text{ mm}$ , in modo che rimanga tra loro uno spazio di  $4\text{ mm}$ . La massima intensità del campo si trova qui al centro di questo spazio intermedio, e si vede che un'asta di Pt si pone perpendicolarmente alle linee di forza, un'asta di Bi parallelamente. Perrier ha mostrato che quando  $\chi$  è grande, un ellissoide diamagnetico può anche essere disposto, in un campo omogeneo, in modo tale che il suo asse maggiore sia parallelo alle linee di forza.

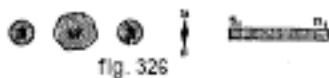
Le figure 70 e 71, mostrano come si modifichi la forma delle linee di forza rettilinee, quando si introduce, in un campo magnetico uniforme, un corpo diamagnetico (fig. 70) o un corpo paramagnetico (fig. 71). Si deve aggiungere che se si tiene conto del valore estremamente piccolo della grandezza  $\chi$  nei corpi diamagnetici, la figura 70 non corrisponde ai casi che si incontrano realmente, perché la divergenza delle linee di forza all'interno del corpo è molto esagerata in questa figura; anche nei corpi più fortemente diamagnetici, questa divergenza è estremamente piccola.

Senza addentrarci in considerazioni più approfondite sull'intima natura del paramagnetismo e del diamagnetismo, si può tuttavia facilmente affrontare la questione dell'influenza del mezzo sulle proprietà magnetiche di qualsiasi corpo. Poniamo un qualsiasi liquido paramagnetico o diamagnetico in un campo magnetico e immaginiamo che una parte qualunque  $M$  all'interno di questo liquido sia separata dal resto della massa. Se questa parte  $M$  fosse effettivamente sottratta alla massa totale e trasportata in un campo magnetico, le sue proprietà paramagnetiche o diamagnetiche sarebbero evidenziate dalle forze ponderomotrici che agiscono su di essa. Ma, quando si trova all'interno del liquido, la parte  $M$  ovviamente non può essere soggetta ad alcuna azione ponderomotrice. È quindi già visibile che *ogni corpo, posto in un mezzo qualsiasi, subisce un'apparente perdita di paramagnetismo o diamagnetismo, che è uguale al paramagnetismo o al diamagnetismo del volume del mezzo occupato da questo corpo*. Una perdita di diamagnetismo equivale a un guadagno di paramagnetismo e viceversa. In particolare, un corpo paramagnetico deve, in un mezzo più fortemente paramagnetico, manifestare le proprietà di un corpo diamagnetico e parimenti un corpo diamagnetico, in un mezzo più fortemente diamagnetico, deve manifestare le proprietà di un corpo paramagnetico. Un corpo diamagnetico, in un mezzo paramagnetico, appare più fortemente diamagnetico, ecc. È facile concepire tutti gli altri possibili casi in cui si verificano tali apparenti cambiamenti nelle proprietà magnetiche dei corpi. L'analogia con il principio di Archimede è evidente. Faraday, Plücker, Becquerel e altri hanno verificato sperimentalmente le precedenti conseguenze. Un tubicino di vetro contenente una soluzione di sale paramagnetico appare paramagnetica, se posta all'interno di una soluzione più diluita, e diamagnetica, all'interno di una soluzione più concentrata.

Nell'effettuare misure in aria si deve tener presente che l'aria è una sostanza paramagnetica e che, di conseguenza, si osserva la differenza tra il magnetismo del corpo e quello dell'aria. Nel seguito supporremo che nel vuoto, cioè nell'etere, ma non nell'aria, si ha  $\mu = 1$  e  $\chi = 0$ . Tuttavia, poiché è più conveniente, si può immaginare che l'etere sia un corpo paramagnetico e che solo tutti i corpi meno paramagnetici dell'etere ci appaiano diamagnetici. Un tale progetto può comportare una grande semplificazione, poiché rimuove la nozione di due gruppi essenzialmente diversi di sostanze magnetiche. Ma è molto dubbio che corrisponda alla realtà; alcune delle teorie più recenti portano proprio all'idea che le sostanze paramagnetiche e quelle diamagnetiche (nel vuoto) differiscano tra loro per l'essenza stessa dei fenomeni interni, da cui dipendono le loro proprietà magnetiche.

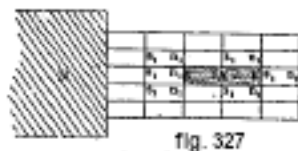


Considerando ancora una volta solo l'aspetto esteriore dei fenomeni, ci si può occupare anche di quella che si chiama la *polarità diamagnetica*; un corpo diamagnetico posto in un campo magnetico esercita, nello spazio esterno, azioni corrispondenti alla comparsa in questo corpo di due poli disposti in senso inverso a quelli che esisterebbero, nelle stesse condizioni, in un corpo paramagnetico. In particolare, all'estremità di una bacchetta diamagnetica più vicina al polo di un magnete, compare un polo dello stesso nome e, quando una bacchetta diamagnetica viene introdotta in una bobina, esistono in questa bacchetta poli di nomi contrari ai poli più vicini della bobina. W. Weber, Tyndall e altri hanno mostrato, con vari esperimenti, l'esistenza di questa polarità diamagnetica. W. Weber (1848) ha posto da un lato di un ago magnetico (fig. 326) un potente elettromagnete NS e dall'altro un magnete compensatore  $n_1s_1$ . Quando un grosso pezzo di bismuto  $W$  viene portato tra i poli N e S, il polo  $n$  dell'ago magnetico devia verso l'elettromagnete, da cui risulta la presenza di un polo sud magnetico dalla parte del bismuto rivolto verso il polo S. W. Weber (1852) ha costruito inoltre un dispositivo chiamato *diamagnetometro*, che consiste in due bobine verticali parallele, all'interno delle quali possono muoversi verticalmente in entrambe le direzioni aste di bismuto; l'azione di queste aste, su un ago magnetico posto nelle vicinanze, indica l'esistenza di una polarità diamagnetica, inversa della polarità paramagnetica. W. Weber ha mostrato, utilizzando un altro dispositivo, che le correnti indotte, prodotte dallo spostamento di un magnete diamagnetico in un campo magnetico, hanno verso opposto a quello delle correnti indotte prodotte, nelle stesse condizioni, da un corpo paramagnetico.



W. Weber ha mostrato, utilizzando un altro dispositivo, che le correnti indotte, prodotte dal movimento di un magnete diamagnetico in un campo magnetico, hanno verso opposto a quello delle correnti indotte prodotte, nelle stesse condizioni, da un corpo paramagnetico. Tyndall ha sospeso un'asta di bismuto all'interno di una bobina orizzontale, che poteva essere spostata leggermente in direzione orizzontale perpendicolare alla sua lunghezza. Sulle estremità dell'asta, sporgenti verso l'esterno, agivano lateralmente i poli di due elettromagneti. Il verso del movimento dell'asta anche in questo caso evidenzia la polarità diamagnetica dovuta al bismuto.

L'influenza del mezzo circostante che abbiamo considerato per la prima volta e l'esistenza della polarità diamagnetica possono essere spiegate in modo puramente formale come segue. Sia N (fig. 327) il polo nord di un magnete, in prossimità del quale è posto il corpo paramagnetico A, che è circondato da un mezzo paramagnetico. Si ottengono alle estremità del corpo A i magnetismi fittizi  $s$  e  $n$  e alle estremità degli elementi, in cui possiamo supporre il mezzo scomposto, i magnetismi fittizi  $n_1$  e  $s_1$ .



Alle estremità del corpo A, questi magnetismi sono a due a due in contatto. Se il mezzo è più debolmente paramagnetico, si ha, ad esempio, all'estremità sinistra del corpo A un eccesso di magnetismo sud e il corpo A rimane paramagnetico, perdendo esattamente tanto paramagnetismo quanto si manifesterebbe la parte del mezzo occupata dal corpo. Se invece il mezzo è più fortemente paramagnetico del corpo A, all'estremità sinistra di questo corpo del nord rimane magnetismo; in altre parole, il corpo manifesta una polarità diamagnetica.

Vediamo ora più da vicino quale influenza esercita il mezzo sui valori di  $\mu$  e  $\chi$  dati dall'esperienza. Siano  $\mu_0$  e  $\chi_0$  i valori veri di queste grandezze per il dato corpo (nel vuoto),  $\mu'$  e  $\chi'$  i valori per un qualsiasi mezzo; supponiamo infine che i valori  $\mu$  e  $\chi$  siano relativi al corpo circondato dal mezzo. Indichiamo con  $H$  e  $H'$  le intensità del campo magnetico alla superficie stessa del corpo, rispettivamente all'interno e all'esterno di esso. Quando il corpo è nel vuoto, si ha

$$\mu_0 H = H'$$

Quando è circondato dal mezzo, si ha  $\mu_0 H = \mu' H'$  o

$$\frac{\mu_0}{\mu'} = H'$$

Se ne deduce, per la permeabilità magnetica apparente  $\mu$  del corpo circondato dal mezzo,  $\mu = \mu_0 : \mu'$  o  $1 + 4\pi\chi = (1 + 4\pi\chi_0) : (1 + 4\pi\chi')$ , cioè

$$\chi = \frac{\chi_0 - \chi'}{1 + 4\pi\chi'} \quad (13.0.125)$$

Nei corpi facilmente magnetici, è possibile trascurare  $4\pi\chi'$  rispetto all'unità, e porre

$$\chi = \chi_0 - \chi' \quad (13.0.126)$$

Le formule che abbiamo stabilito per l'induzione magnetica si semplificano quando le si applica a sostanze debolmente magnetiche. Si può, ad esempio, nella formula (12,b),

$$I = \frac{\chi}{1 + \chi N} H_0$$

trascurare il termine  $N$  e ammettere che l'azione smagnetizzante del magnetismo superficiale è nulla. Si ottiene così, indipendentemente dalla forma del corpo,

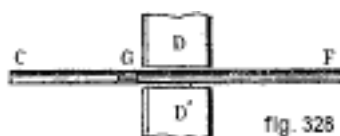
$$I = \chi H_0 \quad (13.0.127)$$

Tutto quanto detto non tocca l'intima natura dei fenomeni paramagnetici e diamagnetici. Molti autori si sono proposti di determinare quale fosse il carattere essenziale e primitivo di questi fenomeni; W. Weber, P. Duhem, Richarz, B. Rosing, R. Lang, Du Bois, P. Langevin, P. Weiss e altri.

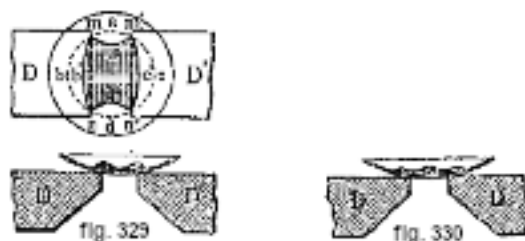
La teoria di W. Weber, di cui indicheremo i tratti principali, non presenta solo, come vedremo, un interesse storico. Abbiamo visto che, secondo la teoria di Ampère, le molecole di un corpo paramagnetico sono circondate da correnti molecolari costanti che, non incontrando alcuna resistenza nel loro corso, non possono scomparire. La magnetizzazione consiste, secondo questa visione, in una rotazione delle molecole con le loro correnti, dove i piani di queste correnti tendono a prendere una posizione in cui sono normali alle linee di forza. W. Weber (1852) ha ammesso che le molecole delle sostanze diamagnetiche non sono circondate da correnti molecolari, ma che tali correnti sono indotte quando il corpo viene portato in un campo magnetico. Vedremo che il verso delle correnti indotte dalla nascita o dal cambiamento d'intensità di qualsiasi corrente, è contrario a quello delle correnti che potrebbero produrre il dato campo. Quando si ammette che tali correnti siano indotte attorno alle molecole di una sostanza diamagnetica, si vede che un corpo costituito da tale sostanza deve manifestare una polarità contraria a quella di un corpo paramagnetico portato nello stesso campo. Una corrente indotta rimane costante finché il campo non varia; ma, quando l'intensità del campo diminuisce, si produce una nuova induzione elettrodinamica di verso contrario alla prima, che di conseguenza indebolisce le correnti stabilite all'origine fino alla loro completa scomparsa, quando l'intensità del campo si annulla. La geniale teoria di Weber è stata a lungo dimenticata, ma negli ultimi anni sono state proposte nuove teorie, che possono essere considerate come un ritorno alla teoria di Weber, sviluppata e trasformata secondo le idee moderne. Negli ultimi paragrafi di questo Capitolo parleremo, con tutti i dettagli necessari, di queste recenti teorie, in particolare di quelle di P. Langevin e P. Weiss.

## 11. Studio delle sostanze paramagnetiche e diamagnetiche

Presenteremo i metodi sperimentali impiegati nello studio delle sostanze debolmente magnetiche. Ci si può, per lo studio qualitativo delle sostanze allo stato solido, avvalere dei metodi già citati: l'osservazione dell'azione di un potente polo magnetico su un piccolo corpo, ad esempio una piccola sfera, oppure l'osservazione della posizione assunta da una piccola asta orizzontale, sospesa tra i poli di un elettromagnete. Quest'ultimo metodo può essere adottato anche nello studio qualitativo delle sostanze allo stato liquido, ponendo il liquido in un tubo di vetro sigillato sospeso tra i poli; l'azione del campo sul tubo stesso deve essere preventivamente determinata. È anche possibile (Quet, 1854) porre una goccia *G* del liquido studiato (fig. 328) in un tubo orizzontale *CF*, tra i poli *DD'* di un elettromagnete. Una goccia diamagnetica si muove, dopo aver chiuso la corrente, nella direzione di *C*, una goccia paramagnetica viene attratta nello spazio tra i poli.



Quando si versa un po' del liquido studiato in un vetro di orologio posto sulle vicine masse polari *DD'* di un elettromagnete (fig. 329 e 330), un liquido paramagnetico, inizialmente limitato da una circonferenza *abdc* (fig. 329 in alto), si contrae e il suo contorno diventa la linea *a'b'd'c'*: il liquido si raccoglie sui bordi delle masse polari, formandovi dei piccoli monticelli (fig. 329 sotto). Un liquido diamagnetico, invece, si svuota al di sopra dei bordi delle masse polari (fig. 330). Inoltre, la forma della superficie del liquido dipende dall'avvicinamento ai poli magnetici.



Per lo studio qualitativo dei gas si può osservare l'azione di un magnete su un piccolo involucro sferico di vetro riempito con il gas studiato e che è sospeso, o su una bolla di sapone contenente il gas, la quale sale o s'abbassa liberamente tra i poli dell'elettromagnete. Per mostrare l'azione di un magnete su una corrente di gas che sale tra i poli, Faraday ha aggiunto a questo gas un po' di  $\text{HCl}$  e ha posto, sopra la corrente gassosa, una serie di tubi aperti inumiditi con una soluzione di  $\text{AzH}^3$ . Il lato, verso il quale un potente elettromagnete inclina la corrente del gas, è determinato da quello dei tubi dove compaiono nubi di sale ammoniacale.

Tutti questi metodi, naturalmente, indicano solo la natura del magnetismo della data sostanza data comparativamente all'aria, la quale, in ragione del suo contenuto di ossigeno, è paramagnetica.

Il notevole diamagnetismo delle fiamme è facilmente riconoscibile dalle variazioni di forma di queste tra i poli di un potente elettromagnete. La figura 331 I rappresenta la sezione equatoriale di tale fiamma, la figura 331 II la sua sezione assiale; la figura 331 III mostra la sezione equatoriale per una posizione più alta della fiamma; la figura 331 IV dà l'immagine di una fiamma, che giace leggermente a lato della linea che congiunge i centri dei poli; una fiamma fortemente fumosa (trementina) si divide in due (fig. 331 V).

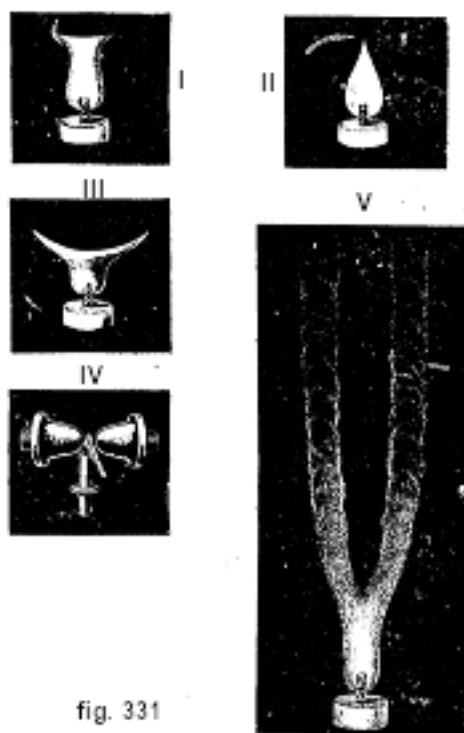


fig. 331

Occupiamoci ora dei metodi che servono allo studio quantitativo dei corpi debolmente magnetici, cioè alla determinazione numerica di  $\chi$  e  $\mu$  in questi campi. Quasi tutti questi metodi si basano sulla misura della forza ponderomotrice  $p$  che agisce sul corpo in studio, quando questo è posto in un campo magnetico non uniforme. Bisogna distinguere due casi.

I. Un corpo di dimensioni molto piccole, ad esempio una piccola sfera, è posto in un campo non uniforme  $H$ ; determiniamo la forza  $p$ , che sposta il corpo in una certa direzione  $x$ ; assumeremo  $p$  espresso in grammi e  $g$  uguale a 981. Si ha

$$pg = \chi v H \frac{\partial H}{\partial x} \quad (13.0.128)$$

essendo  $v$  il volume del corpo in centimetri cubi e  $H$  essendo espresso in unità C.G.S.. La formula (45) può essere stabilita diversamente, per esempio nel modo seguente. L'energia magnetica del piccolo corpo è uguale a

$$E = \frac{v}{2} I H = \frac{1}{2} \chi v H^2$$

quando il corpo si muove nella direzione dell'asse  $x$  sotto l'azione del campo, il lavoro  $pgdx$  deve essere uguale all'incremento  $dE$  dell'energia magnetica, che dà immediatamente la formula (45).

II. Il corpo ha la forma di un'asta; denotiamo con  $S$  l'area della sua sezione trasversale. Una delle basi dell'asta è posta in un punto in cui l'intensità del campo ha un valore  $H$  molto grande. L'asse dell'asta è perpendicolare alle linee di forza; si suppone che l'altra base si trovi in un punto in cui l'azione del campo può essere trascurata. Misuriamo la forza  $p$  (in grammi), che agisce sull'asta nella direzione del suo asse. Si ha

$$pg = \frac{1}{2} S \chi H^2$$

da cui

$$\chi = \frac{2pg}{SH^2} \quad (13.0.129)$$

Nelle formule (45) e (46), la grandezza  $\chi$  è determinata dall'equazione (43,a)

$$\chi = \chi_0 - \chi' \quad (13.0.130)$$

dove  $\chi_0$  si riferisce allo stesso corpo nel vuoto, e  $\chi'$  al mezzo circostante, ad esempio all'aria.

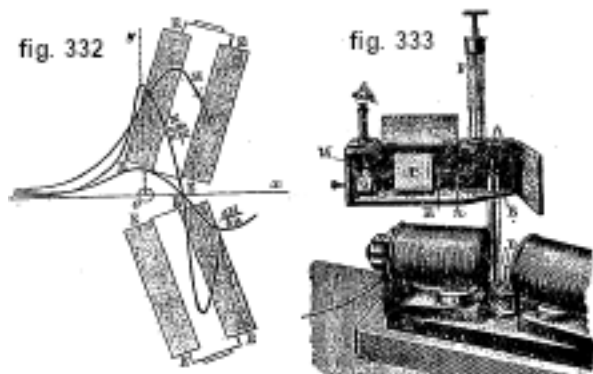
A parte i due casi, che abbiamo appena considerato, ne sono ancora possibili altri più complessi. La forza ponderomotrice  $p$  può essere misurata o mediante la bilancia di torsione o mediante una normale bilancia. In quest'ultimo caso il corpo è sospeso al giogo della bilancia; la forza  $p$  deve avere una direzione verticale. La bilancia ordinaria è stata impiegata da Becquerel (1855), W. Thomson (Lord Kelvin, 1890), Jäger e Meyer (1899), Stephan Meyer (1900), Stearns (1903), Wills (1904), Pascal (1910) e altri. Curie (1895), Curie e Chéneveau e infine Meslin (1906) hanno applicato la formula (45); molti autori, in particolare Stephan Meyer, hanno utilizzato la formula (46).

Citiamo alcuni altri metodi. E. Becquerel (1850) sospese una piccola asta orizzontale tra i poli di un elettromagnete e le fece, torcendo il suo filo di sospensione, formare un angolo determinato con le linee di forza. La torsione del filo può servire come misura relativa della grandezza  $\chi$ , quando si studiano differenti sostanze con un campo della stessa intensità. Boltzmann ha fornito delle formule in alcuni casi in cui una bobina agisce su un corpo magnetico. Utilizzando una di queste formule, Ettingshausen (1882) ha misurato la forza con cui la bobina spinge indietro un'asta diamagnetica, posta all'interno e in prossimità di una delle estremità di questa bobina; nell'espressione di questa forza entra la grandezza  $\chi$ , che può così essere calcolata.

Rowland e Jacques hanno misurato la durata dell'oscillazione di un'asta debolmente magnetica in un campo magnetico, il che permette anche di misurare  $\chi$ .

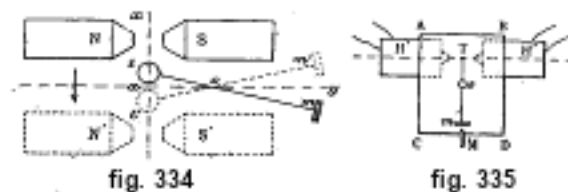
Indichiamo anche che A. Toepler ha utilizzato un metodo di confronto delle proprietà magnetiche di vari corpi, che consiste nel misurare le correnti indotte da questi corpi, nel loro movimento attraverso il campo magnetico. Con Ettingshausen, ha effettuato, con questo metodo, una serie di misurazioni; questi due autori hanno, tra l'altro, determinato il rapporto delle magnetizzazioni a parità di peso del ferro e del bismuto.

Passiamo alla descrizione di alcuni dispositivi di recente costruzione. Curie (1895) ha utilizzato un metodo basato sull'applicazione della formula (45); il suo strumento è rappresentato schematicamente in Fig. 332. Due elettromagneti orizzontali EE formano un angolo ottuso;  $ox$  è l'asse di simmetria, nella direzione del quale agisce la forza ponderata  $p$ . Curie ha studiato in primo luogo la distribuzione delle grandezze  $H$ ,  $\partial H/\partial x$  e  $H\partial H/\partial x$  sulla retta  $ox$ ; il risultato è rappresentato sulla figura 232 da tre curve. La forza  $H$  che possiede un massimo nel punto  $\alpha$ , dove si ha  $\partial H/\partial x = 0$ . Il massimo di  $H\partial H/\partial x$  e pertanto anche quello della forza  $p$  corrisponde al punto  $o$ ; è qui che ha collocato il corpo da studiare. Si sono rappresentate in fig. 333, le parti principali dello strumento.



La sostanza di prova si trova nel serbatoio di vetro D. La bilancia di torsione AF viene utilizzata per misurare la forza; ad uno dei suoi bracci è fissata un'asta ricurva di rame ABC, e a questa il serbatoio D; l'altro braccio è provvisto di una scala M, illuminata dallo specchio G e osservata al microscopio. La lastra in alluminio P funge da ammortizzatore ad aria; sulla lastra possono essere posti  $n$  pesi, in modo da mettere preventivamente lo strumento nel punto.

La parte verticale, che porta il serbatoio D, può essere avvolta da un forno elettrico, di cui non è necessario dare la descrizione. Curie e Chevenau (1903) successivamente costruirono un altro dispositivo con un magnete anulare, che può essere spostato perpendicolarmente alla linea di giunzione dei poli. La figura 334 mostra schematicamente la posizione iniziale del magnete (posizione superiore); il corpo da studiare si trova all'intersezione degli assi  $x$  e  $y$ . Il punto  $o$  è la traccia del filo della bilancia di torsione,  $m$  un indice i cui spostamenti vengono osservati per mezzo di un microscopio. Quando si porta gradualmente il magnete NS nella posizione N'S', si ottiene dapprima una certa deviazione massima  $l$  su un lato dell'asse  $y$ , e poi una deviazione uguale  $l'$  sull'altro lato. La grandezza di questa deviazione può essere usata per misurare il valore relativo di  $\chi_0 - \chi'$ , con  $\chi'$  che si riferisce all'aria. Quando si considera  $\chi_0$  come noto per un dato corpo (per l'acqua), si può trovare  $\chi_0$  per tutte le altre sostanze. Chevenau (1910) diede in seguito una precisa descrizione di un apparato perfezionato, di cui sviluppò la teoria. Meslin (1906) che per primo ha utilizzato il dispositivo di Curie e Chevenau, ne ha costruito un altro, il cui schema è indicato nella figura 335;  $H'$  e  $H''$  sono i rami di un elettromagnete. T il corpo da studiare; la traccia del filo della bilancia di torsione è in  $o$ , M è un microscopio per l'osservazione dello spostamento della scala  $m$ . La corrente viene prima inviata solo in una delle spire dell'elettromagnete, poi nell'altra, il che produce una deflessione del corpo in entrambe le direzioni. Un attento studio del campo permette di utilizzare la formula (45), dove  $x$  indica la direzione della retta che congiunge i poli. Meslin ha confrontato  $\chi$  per diverse sostanze, con il valore di questa grandezza per l'acqua. Jolley (1910) ha utilizzato il dispositivo descritto da Chevenau per determinare  $\chi$  in varie leghe utilizzate per misure di resistenza ed anche in una serie di liquidi. Ha scoperto che è molto difficile ottenere una sostanza non magnetica per i resistori.



Tutti i metodi che abbiamo appena fatto conoscere possono essere adottati con i liquidi e i gas. Così, Curie ha studiato i gas comprimendoli fortemente nel serbatoio D (fig. 333). Schuhmeister si è servito del metodo di Rowland e Jacques sopra indicato, misurando la durata dell'oscillazione nel campo magnetico di un tubo riempito di liquido. Borgmann (1878) ha utilizzato il metodo balistico. Il suo dispositivo è costituito da due anelli cavi, torniti in un blocco di ottone; lo spessore della parete di questi anelli è di 2,5 mm, il diametro interno di 33 mm e il diametro medio degli anelli di 246,5 mm. Gli anelli sono circondati da un filo spesso (1000 avvolgimenti) che serve per la magnetizzazione e inoltre un sottile filo (avvolgimento secondario, 2600 spire), in cui viene indotta una corrente quando cambia la direzione della corrente di magnetizzazione  $i$ . Uno degli anelli è riempito con il liquido studiato, l'altro rimane vuoto; la differenza  $I$  delle correnti di induzione viene misurata con un galvanometro. Conoscendo le dimensioni degli anelli, il numero di spire dei due avvolgimenti, nonché il rapporto  $I : i$  tra le due correnti, si può dedurre il valore di  $\chi$  per il liquido studiato.

G. Wiedemann (1860) ha determinato per la prima volta la forza ponderomotrice  $p$  utilizzando la bilancia di torsione. Una parte del suo apparato è mostrata in fig. 336; Al filo della bilancia è fissato un piccolo recipiente  $k$ , che contiene il liquido da studiare, oltre a un contrappeso, uno specchietto  $g$  usato per osservare la rotazione e uno ammortizzatore a olio  $n$ ; l'elettromagnete che agisce su  $k$  è fissato a destra. Le osservazioni fatte secondo questo metodo forniscono solo valori relativi di  $\chi$ , Schuhmeister ha perfezionato questo metodo, dando al contenitore la forma di una sfera, ciò che permette anche di determinare il valore assoluto di  $\chi$ .

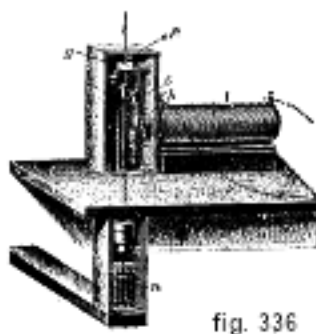


fig. 336

Considereremo ancora alcuni metodi, specialmente applicabili a liquidi e gas. Ziloff (1877) ha utilizzato un sistema astatico di aghi magnetici, posti quasi perpendicolarmente al meridiano magnetico. Al di sotto di questo sistema è sospeso un vaso con il liquido studiato, che viene magnetizzato dal campo magnetico terrestre, in modo che gli aghi magnetizzati vengano deviati; si può calcolare la quantità  $\chi$  in base all'entità della deviazione. Ziloff (1879) successivamente ha sospeso un magnete all'interno di un recipiente sferico contenente il liquido e circondato da un filo attraverso il quale viene inviata la corrente magnetizzante. Osservando la deflessione del magnete, che è prodotta dal solo liquido, si può trovare  $\chi$ . In un'altra serie di esperimenti, il magnete da deviare è stato posto sopra la sfera contenente il liquido.

Borgmann (1878) ha determinato la quantità di  $\chi$  in un liquido, misurando le correnti indotte di una bobina immersa in questo liquido. Come vedremo, la forza elettromotrice  $E$  di induzione è proporzionale a  $\mu = 1 + 4\pi\chi$ . Se misuriamo la differenza  $\Delta E$  delle forze elettromotrici  $E$  nell'aria ( $\mu = 1$ ) e nel liquido, si ha  $\Delta E : E = 4\pi\chi$ , da cui si deduce  $\chi$  con il calcolo. Ziloff (1880) e Townsend (1896) hanno confrontato l'azione induttrice di una bobina rettilinea vuota con quella di una bobina riempita con il liquido in esame.

Il metodo differenziale è molto conveniente per la determinazione di  $\chi$  nei liquidi e nei gas. A tale scopo si determina la suscettività magnetica  $\chi$  di qualsiasi corpo, prima nell'aria o nel vuoto, poi nel liquido o nel gas in esame. La differenza delle grandezze ottenute dà il valore di  $\chi$  per il mezzo che circonda il corpo. E. Becquerel (1851), Plücker, Iephimoff (1888), Fleming e Dewar (1898, ossigeno liquido) e altri ancora hanno applicato questo metodo.

Uno dei metodi più spesso impiegati è quello di Quincke (1885), che si basa sull'azione ponderomotrice nel campo magnetico. Quet (1854) ha osservato per la prima volta il movimento di un liquido in un tubo capillare, sotto l'influenza di un campo magnetico. Nel metodo di Quincke, il liquido è posto in vasi comunicanti: uno dei tubi, largo, è fuori dal campo magnetico; l'altro, stretto, è disposto in modo che il livello del liquido sia in un campo di intensità  $H$ . Si esercita allora, per unità di superficie del liquido, la pressione  $\frac{1}{2}(\chi - \chi')H^2$ , dove  $\chi$  si riferisce al liquido,  $\chi'$  al gas che è sopra il liquido; con questa pressione, il livello del liquido è modificato dall'altezza  $h$ , e si ha

$$\frac{1}{2}(\chi - \chi')H^2 = hg\delta \quad (13.0.131)$$

dove  $g = 981$  e dove  $\delta$  indica la densità del liquido. Il tubo è inclinato sull'orizzonte, in modo da aumentare lo spostamento del livello del liquido da misurare. Jäger e Stefam Meyer hanno compensato la pressione collegando il tubo ad un grande serbatoio, il cui volume può essere variato spostando il mercurio attraverso un tubo capillare in comunicazione con questo serbatoio. Du Bois (1881) ha proposto di preparare soluzioni acquose di sostanze paramagnetiche, nelle quali  $\chi = 0$ , essendo l'acqua diamagnetica; conoscendo  $\chi$  per l'acqua, si calcola facilmente questa quantità per la sostanza disciolta. Liebknecht e Wills (1900) hanno talmente perfezionato questo metodo (il tubo è quasi orizzontale), che si può rendere sensibile (con  $H = 40000$ ) la magnetizzazione persistente nella soluzione, anche quando non supera un centesimo della magnetizzazione dell'acqua. Il metodo di Quincke è stato utilizzato da Königsberger e altri.

Si vede facilmente che cambiando il gas che si trova al di sopra del liquido si può ottenere la quantità  $\chi'$  per gas diversi utilizzando la formula (48); Du Bois, A. Toepler, Hennig e altri hanno proceduto in questo modo.

## 12. Risultati dello studio di sostanze debolmente magnetiche

I vari autori sono ben lungi dal considerare le stesse grandezze fisiche nei risultati delle misure che hanno pubblicato. La questione è ulteriormente complicata dal fatto che si sono studiate a volte sostanze massive, a volte sostanze in polvere o in soluzione. Ci sembra quindi necessario anzitutto dare un'enumerazione completa delle grandezze, i cui valori numerici sono indicati nelle memorie dei vari sperimentatori. Adotteremo le seguenti notazioni:

$\chi$ , per la suscettività magnetica di una sostanza massiva; questa grandezza è indipendente dalla scelta delle unità fondamentali ed è legata alla permeabilità magnetica  $\mu$  dalla relazione  $\mu = 1 + 4\pi\chi$ ; la si può considerare riferita al volume, perché il momento magnetico  $\mathfrak{M} = \chi H v$ , dove  $v$  indica il volume della parte che si suppone separata dal corpo;

$\delta$ , per la densità del corpo massivo;

$\chi' = \chi : \delta$ , per la suscettibilità magnetica della sostanza massiva, riferita alla massa; essa è determinata dalla formula  $\mathfrak{M} = \chi' H M$ , dove  $M$  è la massa della parte staccata dal corpo.

Esperimenti su polveri e soluzioni hanno dimostrato che, per sostanze debolmente magnetiche,  $\chi$  è proporzionale alla densità della sostanza;  $\chi'$  è quindi uguale al valore di  $\chi$  che si otterrebbe, in una compressione o rarefazione (diluizione) della sostanza, tale che 1 g di sostanza sia contenuto in  $1 \text{ cm}^3$ . Ad esempio Curie, Curie e Chévenau, Meslin e altri.

$\chi_p$  è la densità di una polvere; si ha

$$\frac{\chi_p}{\chi} = \frac{\delta_p}{\delta} \quad (13.0.132)$$

$m$  sarà il peso molecolare o il peso atomico della sostanza studiata,  $k$  la suscettibilità molecolare (o atomica), che è uguale a

$$k = \frac{\chi m}{\delta} = \frac{\chi_p m}{\delta_p} \quad (13.0.133)$$

Come si vede facilmente,  $k$  è il valore che  $\chi$  assume, quando una grammo-molecola della sostanza si trova in  $1 \text{ cm}^3$ .

La quantità  $k(M)$ , dove  $M$  richiama il nome di Stefan Meyer, sarà la suscettibilità molecolare o atomica, quando una grammo-molecola della sostanza è contenuta in un litro; si ha

$$k(M) = \frac{\chi m}{1000\delta} = \frac{\chi_p m}{1000\delta_p} \quad (13.0.134)$$

Tra le grandezze  $\chi, \chi_p, \chi', k$  e  $k(M)$  esistono le relazioni seguenti:

$$k(M) = \frac{\chi' m}{1000} \quad (13.0.135)$$

$$\chi = \chi' \delta = \frac{1000\delta k(M)}{m} = \frac{k\delta}{m} \quad (13.0.136)$$

$$\chi = \frac{\chi_p \delta}{\delta_p} \quad (13.0.137)$$

La formula (52,b) serve a calcolare la suscettibilità ordinaria (riferita al volume) mediante il valore numerico di  $\chi'$  dato da Curie, del valore di  $k(M)$  dato da Jäger e Stefan Meyer, o infine del valore di  $k$  dato, ad esempio, da Liebknecht e Wills. Si ha  $k(M) = k : 1000$ .

Ci limiteremo anzitutto alla distinzione puramente qualitativa che si può stabilire tra le sostanze. Tra gli elementi, i seguenti (comprese le sostanze ferromagnetiche) sono *paramagnetici*,



secondo la ricerca di Stefan Meyer: Be, B, O, Mg, Al, Si, Ti, V, Cr, Mn, Fe, Co, Ni, Y (?), Nb (?), Mo, Ru, Rh, Pd, Sn (?), Ce, Pr, Nd, Eu, Sa, Gd, No, Er, Yb, Ta (?), W, Os, Ir, Pt, Th (?), U; sono *diamagnetici*: Li, C, F, Na, P, S, Cl, K, Ca, Cu, Zn, Ga, Ge, Se, Br, Rb, Sr, Zr, Ag, Cd, In, Sb, Te, I, Cs, Ba, La, Au, Hg, Tl, Pb, Bi. Wedekind (1911), sulla base delle più recenti osservazioni di Honda, ha stabilito la seguente serie, che inizia con le sostanze più fortemente paramagnetiche (+) e termina con le sostanze più fortemente diamagnetiche (-): (+) (sostanze ferromagnetiche), Mn, Pd, Cr, Ce (?), La (?), Ti, V, Nb (?), Rh, Pt, Ta, U, Al, Ru, Mg, Na, K, W, Th, Zr, Mo, Os, Sn (metallo); (-) Cu, Cd, Pb, Si, Au, Zn, Hg, Ag, Tl, Sn (grigio), As, Se, Te, I, Br, C (diamante), Sr, S, B, P, Sb, Bi, C (carbonio lampada ad arco). È importante notare che Na e K devono essere classificati tra le sostanze paramagnetiche. Tracciando in ascissa i pesi atomici, in ordinata i volumi atomici, otteniamo, come ha mostrato Stefan Meyer, una curva che presenta massimi e minimi successivi; gli elementi paramagnetici sono posti sulle parti discendenti della curva, quelli diamagnetici sulle parti ascendenti.

Tra le altre sostanze menzioneremo per il momento solo l'acqua, l'alcool, l'etere e il solfuro di carbonio, che sono diamagnetici. Tra i gas, l'ossigeno è più fortemente magnetico dell'aria; sono meno magnetici:  $CO^2$ , CO,  $AzO$ ,  $Az^2O$ ,  $H^2$ ,  $C^2H^4$ ,  $SO^2$ , HCl, HI,  $AzH^3$ ,  $C^2Az^2$ , i vapori di Br, I e altri ancora.

Vediamo come la grandezza  $\chi$  dipende, per le sostanze debolmente magnetiche, dall'intensità del campo e dalla temperatura.

E. Becquerel (1851), Tyndall (1851), Reich (1856) e altri ancora avevano già osservato che il momento magnetico dei corpi debolmente magnetici è proporzionale all'intensità  $H$  del campo, cioè che  $\chi$  è indipendente da  $H$ . Lo stesso risultato è stato trovato in seguito da numerosi autori, in particolare G. Wiedemann (1865, soluzione di cloruro di ferro), Eaton, Du Bois (1888, da  $H = 700$  a  $H = 9800$  per l'acqua, le soluzioni di  $MnCl^2$ ,  $FeCl^3$ ,  $CuCl^2$ , ecc.), Ettingshausen (1882), Curie (1892, da  $H = 50$  a  $H = 1350$ ), Henrichsen (1892), Townsend (1896 da  $H = 0,001$  a  $H = 0,01$ ), Königsberger (1898, da  $H = 3400$  a  $H = 12510$ ), Stefan Meyer (1899, diversi sali, ossidi, ecc., tranne  $Fe^2O^3$ , da  $H = 6000$  a  $H = 10000$ ), Du Bois e Liebknecht (1900, da  $H = 2000$  a  $H = 40000$ ), Lombardi (1897, soluzioni di cloruro di ferro) e altri ancora. Alcuni sperimentatori hanno anche osservato una dipendenza tra  $\chi$  e  $H$ . Così Ziloff ha trovato che  $\chi$ , in una soluzione di cloruro di ferro, prima aumenta e poi diminuisce, quando  $H$  aumenta; il massimo si raggiunge per il piccolissimo valore  $H = 2,15H_0$ , essendo  $H_0$  la componente orizzontale del magnetismo terrestre. Schuhmeister ha anche riconosciuto, per una serie di liquidi e gas, una diminuzione di  $\chi$ , quando  $H$  aumenta. Stefan Meyer (1899) ha osservato che  $\chi$  diminuisce in  $Fe^2O^3$ , quando  $H$  cresce. Königsberger ha trovato  $\chi = cost$  nei liquidi e nelle sostanze diamagnetiche; ma per molte sostanze paramagnetiche,  $\chi$  dipende da  $H$ . Heydweiller (1903) ha cercato di determinare, da tutte le ricerche di vari autori, se  $\chi$  varia, quando  $H$  varia da 0 a 40000. Le sue stesse osservazioni hanno mostrato che nelle soluzioni di  $FeCl^3$ ,  $MnCl^2$ ,  $Fe^2(SO^4)^3$ ,  $FeSO^4$  e  $MnSO^4$ ,  $\chi$  non varia tra  $H = 0,1$  e  $H = 1,2$ . Quando  $H$  aumenta fino a 40000, la grandezza  $\chi$  aumenta dal 30 a 40% nei solfati indicati. Per  $FeCl^3$  e  $FeCl^2$ , le variazioni di  $\chi$  sono molto piccole, per  $MnCl^2$  sono un po' più grandi. Heinrich e Freitag hanno trovato, in una serie di sostanze organiche, che  $\chi$  è inversamente proporzionale a  $H$ . Questo risultato poco verosimile è contraddetto dalle osservazioni di Henrichsen (1892) e Stefan Meyer.

Honda, in un grande lavoro, ha studiato 43 elementi; questo lavoro fu continuato da Morris Owen (1912) per altri 15 elementi. Questi scienziati hanno osservato, per un gran numero delle sostanze considerate, una riduzione di  $\chi$ , all'aumentare dell'intensità del campo; ma questo fenomeno si spiega con la presenza di tracce di ferro; in prodotti assolutamente privi di ferro,  $\chi$  è indipendente dall'intensità del campo. Ihde (1912) ha trovato per il Mn, che  $\chi$  dipende fortemente dall'intensità del campo.

In un piccolo numero di corpi debolmente magnetici è stato osservato magnetismo residuo, ma in misura molto bassa. Così, Tumilz ne ha trovato nei cristalli di quarzo e nel cristallo di

rocca, Lodge in alcuni metalli e altre sostanze. Königsberger non ha confermato le osservazioni di Tumlirz, ma ha scoperto il magnetismo residuo nell'ossido di ferro. Joubin ha osservato tracce di isteresi nel Bi.

Passiamo alla dipendenza tra le proprietà magnetiche di corpi debolmente magnetici e la temperatura. Siano  $\chi_0$  e  $k_0$  i valori di  $\chi$  e  $k$  a  $0^\circ$ , la relazione tra  $\chi$  e  $k$  è data dalla (50). Indichiamo con  $\alpha, \beta, \gamma$  i coefficienti di temperatura del volume e delle grandezze  $\chi$  e  $k$ . Si ha allora, per la densità,  $\delta = \delta_0 : (1 + \alpha t)$ , e inoltre

$$\chi = \chi_0 (1 + \beta t) \quad k = k_0 (1 + \gamma t) \quad (13.0.138)$$

La formula (52,b) dà  $1 + \gamma t = (1 + \beta t) : (1 + \alpha t)$ , o approssimativamente

$$\gamma = \beta - \alpha \quad (13.0.139)$$

Non va dimenticato che alcuni autori danno la quantità  $\beta$ , altri la  $\gamma$ . Indicheremo successivamente i valori numerici; presenteremo solo i risultati generali in questa sede.

Faraday (1846), Plücker (1848) e Matteucci (1853) avevano già osservato che all'aumentare della temperatura diminuisce il magnetismo sia dei corpi paramagnetici che delle sostanze diamagnetiche; hanno studiato gli ossidi di Fe, Co e Ni, e vari minerali, il bismuto, nonché i gas. Altre ricerche si devono a G. Wiedemann, Plessner, Curie, Quincke, Henrichsen, Jäger e Stefan Meyer, Mosler, Piaggese e altri. G. Wiedemann e Plessner hanno trovato che, per soluzioni di sali di Fe, Mn, Ni e Co,  $\beta$  è uguale a 0,00356, cioè che  $\chi$  varia approssimativamente in modo inversamente proporzionale alla temperatura assoluta. Curie ha dedotto dai suoi esperimenti che, nei corpi diamagnetici (nell'acqua, per esempio), la quantità  $\chi'$ , il cui coefficiente di temperatura è ovviamente uguale a  $\gamma$ , è del tutto indipendente da  $t$ ; Bi e Sb fanno eccezione e per essi  $\chi'$  diminuisce abbastanza rapidamente quando  $t$  aumenta. Per quanto riguarda le sostanze paramagnetiche, Curie ha rilevato che  $\chi$  varia inversamente con la temperatura assoluta. Questo risultato vale anche per l'ossigeno, la formula (50) mostra che  $\chi$ , che deve essere sottratta per gli esperimenti in aria, è inversamente proporzionale al quadrato della temperatura assoluta.

Honda e Morris Owen, nelle loro ricerche precedentemente citate, hanno determinato per 58 elementi la dipendenza di  $\chi$  dalla temperatura; Honda lo ha fatto fino a  $0^\circ$ , Morris Owen, in molti casi, fino a  $-170^\circ$ . I risultati ottenuti da Curie non sono stati confermati da questi sperimentatori. Essi hanno riconosciuto come  $\chi'$  è indipendente dalla temperatura, per gli elementi paramagnetici Na, K, Ca, V, Cr, Mn, Rb, W, Os, Li. Tra gli elementi paramagnetici, Cr, Mo, Ba, Th, ecc., ad esempio, hanno mostrato un aumento, altri elementi una diminuzione, all'aumentare della temperatura. In molti elementi diamagnetici,  $\chi'$  diminuisce con l'aumentare della temperatura; aumenta invece solo in Be, B, Ag, I, Hg e diamante. P. Weiss e Kamerling-Onnes (1910) hanno studiato Mn, Cr e V a  $13^\circ$  ass. (idrogeno liquido), ma non hanno osservato alcuna variazione essenziale nel paramagnetismo molto debole di queste sostanze.

Kamerling-Onnes e Perrier (1910) hanno studiato l'ossigeno liquido, tra  $-183^\circ$  e - con il metodo dell'elevazione e quello dell'ossigeno solido, sotto forma di un ellissoide, tra  $-253^\circ$  e  $-259^\circ$ , misurando il momento di rotazione nel campo magnetico. Hanno trovato che, in entrambi i casi,  $\chi$  è inversamente proporzionale a  $\sqrt{T}$  e che al momento della fusione,  $\chi$  sale improvvisamente del 50%. Fino a 16000 gauss,  $\chi$  è indipendente dall'intensità del campo. La legge di Curie può essere applicata solo ad alte temperature. In un nuovo lavoro (1911), gli stessi scienziati si sono occupati del solfato di gadolinio  $Gd^2(SO^4)^3 \cdot 8H^2O$ , del solfato di ferro, dell'ossido di disprosio  $Dy^2O^3$  e del Bi elettrolitico fino a  $14^\circ$  ass. La legge di Curie appare rigorosamente esatta nel solfato di gadolinio fino a  $17^\circ$  ass., nel solfato di ferro fino a  $64^\circ$  ass.; a temperature inferiori si verificano deviazioni. Queste, nell'ossido di disprosio, raggiungono già il 4% tra  $+18^\circ$  C e  $170^\circ$  ass. Nel Bi,  $\chi$  sembra essere indipendente da  $T$  a temperature molto basse. Jäger e Stefan Meyer hanno determinato  $\gamma$  per tutta una serie di soluzioni, così come per

l'acqua; hanno trovato per esso un coefficiente di temperatura negativo. Questo risultato è stato confermato da Piaggese. Fleming e Dewar (1898) hanno mostrato che la legge di Curie rimane vera nelle sostanze paramagnetiche fino a temperature molto basse.

Indicheremo alcuni risultati numerici delle misure di  $\chi$  o  $k$  per corpi debolmente magnetici, limitandoci ai più recenti, che meritano la massima fiducia. Si noti che il numero astratto  $\chi$  è generalmente pari a pochi milionesimi di unità; per questo diamo ovunque il valore numerico di  $10^6\chi$ .

Consideriamo dapprima alcune sostanze speciali, che sono di particolare interesse.

L'acqua è diamagnetica; la sua densità  $\delta = 1$  e quindi  $\chi' = \chi$ . Ecco alcune delle misure di  $-10^6\chi$ ; non è facile riconoscere i numeri che si riferiscono all'aria e quelli relativi al vuoto.

Schumeister, 1881	0,44	Jäger e St. Meyer, 1899 (0°)	0,69
Wöhner, 1887	0,54	Königsberger, 1901 (vuoto)	0,78
Quincke, 1888	0,84	Piaggese, 1902	0,77
Du Bois, 1888 (15°)	0,84	Stearns, 1903	0,73
Henriches, 1892	0,75	Scarpa, 1905 (vuoto)	0,77
Curie, 1895 (vuoto)	0,79	Jolley, 1910	0,79
Townsend, 1896	0,77	Haas e Draper, 1912	0,73
Königsberger, 1898	0,80	Sève, 1912 (vuoto) 24°	0,723

Il lavoro speso da Sève (1912) ha un valore del tutto particolare; questo autore ha fatto anche uno studio critico delle misure precedenti.

Sono state proposte tre formule per la dipendenza tra  $\chi$  e la temperatura:

Du Bois, 1888	$10^6\chi = -0,837 \{1 - 0,0025(t - 15)\}$
Jäger e St. Meyer, 1899	$10^6\chi = -0,689 (1 - 0,0016t)$
Piaggese, 1902	$10^6\chi = -0,80 (1 - 0,00175t)$

Per il mercurio, si ha  $\chi' = \chi : \delta = -0,18 \cdot 10^{-6}$ .

Il bismuto, che è il corpo più fortemente diamagnetico, è stato oggetto di molte ricerche. La sua densità è  $\delta = 0,92$ , per cui si ha  $\chi = 9,82\chi'$ . Non menzioneremo in dettaglio i risultati della misura; indicheremo solo che si può porre in media

$$\chi' = -1,4 \cdot 10^{-6} \quad \chi = -13,7 \cdot 10^{-6}$$

Mendenhalle e Kent (1911) hanno trovato, per il bismuto puro,  $\chi = -14,32 \cdot 10^{-6}$ .

Curie ha studiato il Bi fino al punto di fusione (273°) e al di sopra, fino a 408°, Ha trovato, tra 20° e 273°,

$$10^6\chi = -1,35 \{1 - 0,00115(t - 20)\}$$

A 273°, per il bismuto ancora solido, si ha  $\chi = 10^6\chi' = -0,96$ ; per il bismuto fuso e indipendentemente dalla temperatura, si ha  $10^6\chi' = -0,038$  o  $\bullet/\bullet = -0,038$ . Fleming e Dewar hanno ottenuto, per la stessa grandezza,  $-1,37$  a 15° e  $-1,59$  a  $-182^\circ$ ; la formula di Curie dà, invece dell'ultimo valore,  $-1,68$ .

Il ferro, alle alte temperature, appartiene, come hanno mostrato gli esperimenti di Curie, alle sostanze debolmente magnetiche. Curie ha trovato, per  $10^5\chi'$ , i seguenti numeri:

$t^\circ = 756$	758	760	780	800	840	900	940	1280	1336
$10^6\chi' = 7500$	5800	4680	1480	776	348	61	28,4	23,9 38,3	32,3

Si vede che avviene una rapida diminuzione fino a  $940^\circ$ , una costanza quasi completa tra  $940^\circ$  e  $1280^\circ$ , un salto a  $1280^\circ$  e una lenta diminuzione fino a  $1336^\circ$ . Curie ha ottenuto, per la ghisa,  $10^6\chi' = 0,0385: T$ , tra  $850^\circ$  e  $1267^\circ$  ( $T$  = temperatura assoluta); per il minerale di ferro magnetico, si ha  $10^6\chi' = 0,0280: T$ .

I metalli che entrano nella composizione delle leghe di Heusler, possiedono una suscettibilità magnetica molto bassa. Scegliremo, arbitrariamente tra i valori un poco incerti trovati da diversi sperimentatori, alcuni numeri destinati soltanto a mostrare l'ordine di grandezza di  $\chi \cdot 10^6$ ; si ha 0,2 per il rame, 1,9 per l'alluminio, 50 per il manganese,  $-5,2$  per l'antimonio,  $+0,3$  per lo zinco, 1,0 per il piombo. Tutti questi valori sono estremamente piccoli rispetto a quelli di  $\chi$  che si ottengono per le leghe di Heusler.

Gli elementi sono in parte paramagnetici, in parte diamagnetici. Riportiamo alcuni valori numerici, tralasciando però quelli che si riferiscono agli elementi allo stato gassoso. Stefan Meyer ha determinato la quantità  $k(M)$ , la cui relazione con  $\chi$  è data dalla formula (52,b). Ha calcolato (vedi la correzione di Auerbach nel *Phys. Zeitschr.* 7, p. 175, 1906) i valori di  $10^6\chi$  per i seguenti elementi:

Sb	-3,6	Er	1260	Th	757
Be	142	Mg	1,0	Ti	70,6
B	10,5	Os	8,7	V	18,3
Ce	1627	P (rosso)	-0,5	Bi	-9,5
Di	715	Si	0,5	Zr	-0,65

Si rimane colpiti dai valori relativamente molto grandi ottenuti per gli elementi paramagnetici Ce, Er, Di (vedi sotto per maggiori dettagli); ma si ha ancora, anche per Ce, solo  $\chi = 0,0016$ , e conseguentemente  $\mu = 1,02$ ; questo valore di  $\chi$  è solo un centomillesimo di quello relativo al ferro. St. Meyer dà ancora, per la quantità  $k(M) \cdot 10^6$ , i seguenti valori:

Selenio	Yttrio	Niobio	Osmio
-0,0013	3,2	0,49	0,074

Königsberger ha determinato  $\chi \cdot 10^6$  per i seguenti elementi:

Cu	-0,30	Pb	-1,1	Grafite	2,0
Cu'	-0,82	Tl	-4,61	Al	1,7
Zn	-0,70	S	-0,86	Pt	29,0
Sn	0,14	Se	-1,28	Pd	55,0
Sn'	0,46	Te	-2,10	W	14,0

Cu e Cu' indicano qui i metalli ottenuti elettroliticamente; Se è il selenio fuso; S è lo zolfo rombico.

Curie ha dato per  $\chi' \cdot 10^6$ :

Se	Te	Br	I	P (bianco)	Sb
-0,31	-0,31	-0,41	-0,385	-0,92	-0,47

Egli ha trovato per il palladio, fino a  $1370^\circ$ :

$$\chi' = \frac{0,00152}{T}$$

da cui si deduce  $10^6 \cdot \chi = 61$  a  $20^\circ$ ; ha ottenuto per il Pt,  $10^6 \cdot \chi = 29$ .

Negli ultimi anni, molte misure di  $\chi \cdot 10^6$  sono state ancora pubblicate per diversi metalli e leghe.

Gebhardt (1909) ha trovato, per il manganese (in polvere), il valore 34,5; Kamerling-Onnes e Weiss (1910) hanno scoperto che il manganese in polvere, fuso in un forno elettrico in presenza di idrogeno, è ferromagnetico, assumendo  $\chi$  circa lo 0,01 del suo valore nel ferro. Anche Ihde (1912) è giunto alla conclusione che il Mn, in base alla sua caratteristica (dipendenza dall'intensità del campo), debba essere classificato tra le sostanze ferromagnetiche. Per Mn massivo, ha trovato con 1500 gauss il valore  $\chi \cdot 10^6 = 78,6$ . Gray e Ross (1909) hanno riconosciuto nel rame, in certe condizioni, magnetismo residuo. Behnsen (1911) ha osservato che il rame elettrolitico è diamagnetico e non mostra magnetismo residuo, al contrario CuO e  $Cu_2O$  sono paramagnetici. Chévenau (1910) ha mostrato che il Cu puro è diamagnetico e ha trovato  $\chi \cdot 10^6 = -0,090$ . Loutchinsky (1909) ha ottenuto il piombo  $\chi \cdot 10^6 = 2,4$ , quando è fuso e cristallizzato; al contrario,  $\chi \cdot 10^6 = 0,2$  soltanto, quando è sottoposto a un lavoro meccanico, ad esempio martellato o trafilato. Finke (1910) ha studiato Pt, Pd, Ir, Rh e ha trovato per  $\chi \cdot 10^6$  i seguenti valori: Pt 22,6, Pd 66,26, Ir 4,89, Rh 12,58. Clifford (1908) ha ottenuto per lo zinco puro  $\chi \cdot 10^6 = 0,31$ , per il rame  $\chi \cdot 10^6 = -1,22$ . Per una lega di Cu e Sn, con il 30% in volume di zinco, si ha  $\chi \cdot 10^6 = -2,7$ . Gnesotto e Binghinotto (1910) si sono occupati di leghe Sn-Bi, Cd-Bi, Pb-Bi, Cd-Pb, Cd-Sn, Sn-Pb, con varie composizioni.

Joukow (1908) ha portato al rosso diversi metalli nell'azoto; Mg, Ca, Al, Ti, Cr, Mn e Mo assorbono il gas e si formano soluzioni o combinazioni, che sono magnetiche. Il manganese con il 12% di Az è fortemente ferromagnetico. Wedekind e Veit ha anche studiato le combinazioni di Mn con Az, S, Se, Te e ha trovato, ad esempio,  $Mn^7Az^2$  fortemente magnetico.

Diversi ossidi sono stati studiati da Liebknecht e Wills, Königsberger, Stefan Meyer, Curie e Chévenau, Meslin, R. H. Weber (1906, 1911), Berndt (1908) e altri; questi lavori contengono un insieme considerevole di materiali interessanti l'argomento che stiamo qui trattando. Gli ossidi e i sali dei metalli rari, di cui Stefan Meyer ha fatto uno studio molto approfondito, (tra gli altri quelli dei metalli La, Ce, Pr, Nd, Sm, Gd, Er, Yb, V, Ho, Y, Th, Eu) sono di particolare interesse. Daremo solo alcuni numeri relativi a ossidi, sali e poche altre sostanze solide. Königsberger ha dato per  $\chi \cdot 10^6$ :

Quarzo	Gesso	Fluorite	Celluloide	Tormalina	Vetri diversi
-1,20	-0,86	-1,30	-0,2	-1,4	da -0,6 a -1,0

Lombardi ha ottenuto per l'ebanite 34, per l'argentana 4,8, per l'ottone -1,3, per la paraffina -0,78; Wills indica per il legno da -0,16 a -0,51, per il marmo -0,8. Curie e Chévenau (1903) hanno scoperto che il cloruro di radio puro è paramagnetico e che si ha  $\chi' = \chi : \delta = 1,05 \cdot 10^{-6}$ ; il cloruro di bario puro è diamagnetico e si ha  $\chi' = -0,40 \cdot 10^{-6}$ ; per cloruro di bario contenente  $1/6$  di cloruro di radio, si ha  $\chi' = -0,20 \cdot 10^{-6}$ .

Tra i risultati di St. Meyer per  $\chi \cdot 10^6$ , citeremo i seguenti:

NaCl	-0,89	$Al^2O^3$	-1,50	$CaFl^2$	-0,95	$CUSO^4$	+36	AgI	-1,62
$Na^2CO^3$	-0,47	KCl	-0,94	$CaCl^2$	-0,88	$CuCl^2$	+3,5	HgO	-2,22
MgO	-0,64	KBr	-0,95	$CaSO^4$	1,13	$CuBr^2$	-0,76	HgCl	-1,28
$MgSO^4$	-0,95	KI	-0,95	$Cr^2O^3$	+120,0	AgCl	-1,56	$HgCl^2$	-0,81
$MgCO^3$	-1,22	CaO	-0,86	CaO	+19,8	AgBr	-1,64	PbO	-1,1

Berndt è stato in grado, per l'ossido di ferro  $Fe^2O^3$  e per l'idrossido di ferro  $Fe(OH)^3$  in un campo fino a 400 gauss, di trovare curve di isteresi. Il cloruro di ferro  $FeCl^3$ , il solfato di ferro  $FeSO^4$  e il solfato ferrico  $Fe^2(SO^4)^3$  non hanno mostrato isteresi.

Le proprietà magnetiche delle soluzioni sono state studiate da molti sperimentatori. I lavori di G. Wiedemann, di Königsberger e in particolare di Jäger e Stefan Meyer hanno chiaramente stabilito che la suscettività magnetica di molte soluzioni è la risultante additiva delle suscettibilità della sostanza disciolta e del solvente. Alcuni autori, ad esempio Königsberger, hanno scoperto che ciò vale per la grandezza  $\chi : \delta = \chi'$ . Jäger e Stefan Meyer hanno concluso dai loro esperimenti che  $\chi$  è, nelle soluzioni, una funzione lineare del numero  $p$  di grammo-molecole contenute in un litro di soluzione. Quando  $p = 0$ , si ottiene il valore di  $\chi$  per l'acqua; quando  $p = -1$ , è evidente che si ha proprio la quantità  $k(M)$  della sostanza disciolta, la quale è legata a  $\chi$  dalla relazione (51).

Le prime misure di  $\chi$  per le soluzioni sono dovute a Borgmann e a Ziloff. Il primo ha trovato, per una soluzione di cloruro di ferro di densità  $\delta = 1,487$ , il valore  $\chi = 48,8$ ; un altro metodo ha dato  $37,0$ , per  $\delta = 1,52$ . Ziloff ha ottenuto valori compresi tra  $72$  e  $179$  per  $\delta = 1,475$ , e valori varianti da  $61$  a  $157$  per  $\delta = 1,52$  a seconda dell'intensità del campo. Borgmann ha inoltre trovato il valore  $15,2$  per una soluzione di solfato di ferro ( $\delta = 1,24$ ). Ziloff il valore  $185$  per una soluzione di cloruro di manganese ( $\delta = 1,25$ ).

Königsberger ha espresso i risultati delle sue osservazioni con una formula del tipo

$$10^6 \chi' = \chi'_1 \cdot \frac{p}{100} - 0,80 \left(1 - \frac{p}{100}\right)$$

dove  $\chi'$  si riferisce alla soluzione,  $\chi'_1$  alla sostanza composta che si scioglie:  $p$  è il numero di grammi disciolti in  $100 g$  di soluzione, il numero  $-0,80$  è il valore di  $10^6 \chi$  per l'acqua pura. Si ha, ad esempio, per una soluzione di solfato di rame

$$\chi' = 10,4 \frac{p}{100} - 0,80 \left(1 - \frac{p}{100}\right)$$

Studley (1907) ha confermato i risultati di Königsberger per le soluzioni di  $CuSO^4$  e di  $MgSO^4$ . Jäger e Stef. Meyer hanno studiato le soluzioni di  $FeCl^3$ ,  $FeSO^4$ ,  $Fe^2(AzO^3)^6$ ,  $FeCl^2$ ,  $MnSO^4$ ,  $Mn(AzO^3)^2$ ,  $CaCl^2$ ,  $CoSO^4$ ,  $Co(AzO^3)^2$ ,  $NiCl^2$ ,  $NiSO^4$ ,  $Ni(AzO^3)^2$ ,  $CrCl^3$  e  $Cr^2(SO^4)^3$ , per diversi gradi di concentrazione e a diverse temperature, da quelle più vicina a  $0^\circ$  fino a quelle vicine a  $90^\circ$ . Hanno trovato che  $\chi$  è una funzione lineare decrescente della temperatura; il coefficiente di temperatura di  $\chi$  oscilla tra  $-0,0022$  e  $-0,0032$ . Mosler ha rilevato che varia tra  $-0,00266$  e  $-0,00358$ , Piaggese tra  $-0,00271$  e  $-0,00293$  per i sali di ferro, tra  $-0,00262$  e  $-0,00301$  per i sali di Mn e Co; questi valori sono circa gli stessi dei precedenti.

Tra i liquidi inorganici, citeremo  $CS^2$ , per il quale si ha  $\chi = -0,77 \cdot 10^{-6}$ . Fleming e Dewar hanno ottenuto, per l'ossigeno liquido,  $\chi = 325 \cdot 10^{-6}$ , per l'aria liquida  $\chi = 180 \cdot 10^{-6}$ ; l'idrogeno liquido è debolmente diamagnetico, in base alle osservazioni di Dewar.

I liquidi organici sono stati studiati da Henrichsen (1888), Königsberger (1898), St. Meyer (1904) e Meslin (1906). Tutti questi liquidi si sono mostrati diamagnetici. Citeremo alcuni valori di  $\chi \cdot 10^6$ :

Acetone	0,51	Cloroformio (H.)	0,78	Xilolo	0,69
Etere etilico	0,61	Cloroformio (M.)	0,86	Acido acetico	0,61
Alcol etilico	0,67	Bromoformio	1,02	Amilina	0,73
Alcol metilico	0,60	Glicerina	0,82	Olio di paraffina	0,48
Alcol amilico	0,69	Benzina	0,70	Olio di vaselina	0,73

In questa tabella, H. designa Henrichsen, M. Meslin. Le miscele di acqua e alcool furono studiate da Meslin e March (1907). Quest'ultimo ha determinato  $\chi$  per soluzioni di miscele di  $CuCl^2$ ,  $MnCl^2$  e  $AlCl^3$  e anche di miscele di  $CuSO^4$ ,  $MnSO^4$  e  $Al^2(SO^4)^3$ , cioè per i sali dei

tre metalli che entrano nella composizione delle leghe di Heusler; non è stato osservato alcun aumento del magnetizzazione e  $\chi$  risulta avere, per la miscela, una proprietà additiva.

Per i gas, la quantità  $\chi$  è direttamente proporzionale alla densità  $\delta$  o alla pressione  $p$ ;  $\chi' = \chi : \delta$  è quindi una grandezza costante, indipendente dalla pressione. Qui diamo alcuni numeri per l'ossigeno (raccolti da Du Bois):

	Temperatura	Pressione	$\chi \cdot 10^6$ sotto	$\chi \cdot 10^6$ sopra
		1 = 750 mm	750 mm	750 mm
Du Bois	15°	1	+0,115	87
Quincke	16°	1 - 8	0,121	91
Quincke	16°	40	0,156	117
Curie	20°	18	0,151	116
Hennig	25°	1 - 4	0,119	95
Iéphimoff	—	—	0,125	—

Secondo Curie,  $\chi'$  è 145 volte maggiore per  $O^2$  che per l'acqua (a parità di massa). Per quanto riguarda la dipendenza rispetto alla temperatura assoluta  $T$ , Curie fornisce la formula (applicabile tra 20° e 450°):

$$10^6 \cdot \chi' = \frac{33700}{T}$$

Per l'aria, si ha  $10^6 \cdot \chi' = 7830 : T$  e, alla pressione di 760 mm:

$$10^6 \cdot \chi' = \frac{2760}{T}$$

A 20°, si ottiene  $10^6 \chi = 0,0322$ , cioè il 4% del valore di  $\chi$  per l'acqua (uguali volumi). La correzione da introdurre, nella determinazione di  $10^6 \chi$  per qualsiasi corpo in aria, è pari a  $0,0322 : d$ , dove  $d$  è la densità del corpo. Quincke ha trovato che il coefficiente di temperatura di  $\chi'$  per l'aria varia da  $-0,0043$  a 20° a  $0,0011$  a 100°. L'ozono è ancora più magnetico dell'ossigeno.

Rispetto ad altri gas, Iéminoff ha indicato i seguenti valori relativi:

Aria	AzO	$C^2H^4$	$CH^4$	$CO^2$	$Az^2O$	Az	CO
1	4,83	1,60	-0,068	-0,063	-0,033	-0,018	-0,009

Quincke ha dato i valori:

	AzO	$Az^2O$	$CO^2$	$CH^4$	Az	CO
$\chi \cdot 10^6 =$	0,053	0,031	0,0029	0,011	0,0009	0,0003

Tänzler (1907) ha ammesso per l'idrogeno il valore medio  $\chi \cdot 10^6 = 0,123$  e ha trovato i numeri seguenti:

	Aria	Argon	Elio
$\chi \cdot 10^6 =$	+0,0264	-0,00953	-0,00175

Pascal (1909) ha determinato  $\chi$  per i gas liquefatti  $SO^2$ ,  $AzH^3$ ,  $C^2Az^2$ ,  $Az^2O^4$ ,  $CH^3AzH^2$ ,  $CH^3Cl$  e  $Cl$  e ha calcolato la suscettibilità specifica di questi gas a  $0^\circ$  e alla pressione di  $760\text{ mm}$ . Roop (1911) ha osservato, secondo il metodo di Töpler (Volume II), la forma di una rete di  $CO^2$  nell'aria, sotto l'azione di un campo magnetico non uniforme. Ponendo  $\chi = 0$  per la  $CO^2$ , ha ottenuto, mediante la curvatura della rete,  $10^6\chi = 0,0260$  per l'aria.

Molti sperimentatori hanno cercato di trovare una relazione tra le proprietà magnetiche di una sostanza e la sua composizione chimica. Indicheremo alcuni dei risultati ottenuti.

G. Wiedemann ha trovato che, in molti casi, la suscettibilità molecolare  $\chi'_m$  si deduce in modo additivo dalle suscettibilità atomiche  $\chi'_i$ , così che si ha

$$\chi'_m = \sum p_i \chi'_i \quad (13.0.140)$$

con  $p_i$  che indica il numero di atomi di un dato tipo nella molecola. Ha osservato inoltre che il magnetismo molecolare dei sali della stessa sostanza dipende poco dall'acido, cioè dall'anione.

Henrichsen ha riconosciuto che  $\chi'_m$  ha quasi lo stesso valore negli isomeri e che inoltre ogni introduzione del radicale  $CH^2$  nella molecola aumenta il magnetismo molecolare della stessa quantità. Abbiamo parlato dei sali di, Fe, Mn, Co, Ni e Cr, le cui soluzioni sono state studiate da Jäger e Stef. Meyer (nel seguito, St. Meyer ha studiato anche V). Questi autori hanno evidenziato il fatto assai notevole che  $\chi$  dipende solo dal catione; per esempio, per tutti i sali di ferro, eccetto  $FeCl^3$ ,  $\chi$  ha lo stesso valore, quando, in un litro di soluzione, è contenuta la stessa quantità di ferro o, che è la stessa cosa, lo stesso numero di grammo-molecole del sale disciolto, a condizione, naturalmente, che la valenza del metallo sia la stessa in tutti i sali.

Chiamiamo il magnetismo atomico  $\chi(a)$  di un metallo il valore di  $\chi$  per una soluzione in cui un grammo-atomo del metallo si trova in un litro della soluzione del sale; allora si ha

$10^6\chi(a)$	V	Ni	Cr	$Fe(FeCl^2)$	Co	Fe (altri sali vedere prima)	Mn
o	1,25	4,95	6,25	7,5	10,0	12,5	15,0
	$\frac{1}{2} \cdot 2,5$	$2 \cdot 2,5$	$2,5 \cdot 2,5$	$3 \cdot 2,5$	$4 \cdot 2,5$	$5 \cdot 2,5$	$6 \cdot 2,5$

La legge è abbastanza chiara. Stef. Meyer ha dedotto dalle sue numerose misurazioni una serie di altre conseguenze, delle quali ne citeremo alcune. Un composto di due elementi diamagnetici è sempre diamagnetico. Un composto di due elementi paramagnetici è molto spesso paramagnetico, ma ci sono delle eccezioni; quindi,  $Be^2O^3$ ,  $MgO$ ,  $Al^2O^3$ ,  $SiO^2$ ,  $Mo^2O^3$ ,  $WO^3$ ,  $ThO^2$  sono diamagnetici.

I metalli rari V, Pr, Eu, Nd, Yb, Sa, Gd, Er, Ho sono, nei loro composti, fortemente paramagnetici. Il più paramagnetico di tutti gli elementi, in composti analoghi, è Ho. I valori relativi delle suscettibilità molecolari di questi metalli rari, così come dei metalli ferromagnetici, sono i seguenti:

V	Pr	Eu	Ni	Nd	Yb	Cr	Co	Sa	Fe	Mn	Gd	Rr	Ho
1,3	3,3	4,9	5	5,2	6	6,3	10	11,2	12,5	15	27,3	38,2	50

Tra i rari elementi appena citati, Yb e Ho sono stati recentemente riconosciuti come composti. L'itterbio è stato scomposto in due elementi che sono stati chiamati da Urbain lutezio e neoytterbio, e da Auer von Welsbach aldebaranium (Ad) e cassiopeiium (Cp). Stefan Meyer (1908) ha trovato, per le suscettibilità molecolari di questi nuovi elementi,  $Ad = 10$ ,  $Cp = 2$ . Allo stesso modo, l'olmio è stato scomposto in neolmio (Nh), disprosio (Dy) e terbio (Tb). Urbain (1908) ha ottenuto, per la suscettibilità specifica dell'ossido di disprosio, rapportata all'unità di massa, il valore  $290 \cdot 10^{-6}$ , che è 12,8 volte maggiore di quello relativo all'ossido di



ferro. Da questo risultato Stef. Meyer ha calcolato il magnetismo atomico del disprosio e ha trovato il valore 53,7 con una misura diretta, da lui eseguita.

Urban e Iantsch (1908) hanno determinato il valore di  $\chi$  per una serie ossidi di metalli rari (neodimio, samario, europio, gadolinio, terbio, disprosio) e Urban (1910) ha mostrato che, in certi casi, si può, secondo le proprietà magnetiche delle miscele, definirne la composizione.

L'acqua di cristallizzazione ha una debole influenza sul magnetismo; al contrario, l'aggiunta di acqua, che dà gruppi idrossili, modifica fortemente il magnetismo molecolare; questo è il caso, ad esempio, di  $\text{CaO}$  e  $\text{Ca}(\text{OH}^2)$ . Rispetto alla formula (54), Stef. Meyer è arrivato al seguente risultato: quando tutte le  $\chi'_i$  sono  $> 0$ , il magnetismo molecolare  $\chi'_m$  è minore della somma dei magnetismi atomici; quando invece tutti gli  $\chi'_i$  sono  $< 0$ ,  $\chi'_m$  è maggiore o minore di questa somma, secondo che il volume molecolare è minore o maggiore della somma dei volumi atomici.

Pascal (1908-1912) ha pubblicato negli ultimi anni un gran numero di ricerche magneto-chimiche, che sono analoghe al lavoro di Brühl sulla rifrazione molecolare e sono di grande importanza per la chimica organica. Il prodotto  $\chi'_m = \chi' \cdot m$  della suscettibilità specifica  $\chi'$  per il peso molecolare  $m$  ha ricevuto da Pascal il nome di suscettibilità molecolare, e analogamente il prodotto  $\chi'_a = \chi' \cdot a$ , dove  $a$  è il peso atomico, il nome della suscettibilità atomica. In molte combinazioni, si ha

$$\chi'_m = \sum p\chi'_a + \lambda$$

essendo  $p$  il numero di atomi di uno stesso elemento nella molecola, e  $\lambda$  un numero che rappresenta l'influenza della struttura della molecola;  $\chi'_a \cdot 10^7$  è uguale, ad esempio, per C a  $-62,5$ , per H a  $-30,5$ , per Az a  $-53,0$ , per Cl a  $-209,5$ , per Br a  $-319,2$ , per I a  $-465,0$ , per S a  $-156,0$ . Per un anello benzenico, si ha  $\lambda = -15,0$ , per un legame etilenico  $\lambda = +57,0$ , ecc. In una serie di composti di idrocarburi e alogeni, i valori calcolati di  $\chi'_m$  concordano molto bene con i valori osservati. Non possiamo qui entrare in altri dettagli, che appartengono al dominio della chimica organica.

E. Feytis (1911) ha studiato il magnetismo di un gran numero di sali ordinari e complessi di Fe, Mn, Co, Bi, ecc, e determinato l'influenza dei radicali che contengono.

### 13. Magnetismo di sostanze anisotrope.

I corpi anisotropi si possono dividere in corpi artificialmente anisotropi, come i corpi sottoposti a compressione lineare, i vetri temperati, ecc., e in corpi naturalmente anisotropi, ai quali appartengono le sostanze cristalline. Dal punto di vista delle loro proprietà magnetiche, i corpi anisotropi ferromagnetici si distinguono essenzialmente dai corpi anisotropi debolmente magnetici. Ci occuperemo prima di questi ultimi.

La facoltà posseduta dai corpi anisotropi di potersi magnetizzare, che è caratterizzata dalla grandezza  $\chi$ , non è la stessa in tutte le direzioni. Vi sono, in ciascuno dei corpi, tre direzioni rettangolari, che si chiamano assi magnetici principali e che hanno le seguenti proprietà: a queste tre direzioni corrispondono tre determinate grandezze  $x_1, x_2, x_3$ ; quando il campo  $H$  ha la direzione di uno di questi assi, anche la magnetizzazione del corpo anisotropo ha questa stessa direzione; il momento magnetico  $m$  del corpo è uguale a  $m = \chi_i v H$ , essendo  $v$  il volume del corpo e  $\chi_i$  quello delle tre grandezze menzionate che corrisponde all'asse considerato. Per qualsiasi altra direzione del campo  $H$ , la direzione del momento magnetico forma con  $H$  un certo angolo  $\omega$ , la cui grandezza calcoleremo in seguito.

Quando un corpo anisotropo è posto in un campo uniforme, l'asse a cui appartiene il massimo valore assoluto  $\chi_i$ , tende ad essere disposto assialmente, cioè nella direzione delle linee di forza, se il corpo è paramagnetico; tende ad essere posto equatorialmente, cioè perpendicolare alle linee di forza, se il corpo è diamagnetico. La direzione dell'asse, che corrisponde alla massima magnetizzazione, può non coincidere con la direzione di massima estensione lineare del corpo, e

può quindi accadere che un'asta paramagnetica sia posta equatorialmente e una diamagnetica assialmente.

Nei cristalli uniassiali (sistema quadratico e sistema esagonale) esiste un asse magnetico principale interamente determinato, che appare sempre coincidente con l'asse ottico; designiamo con  $\chi_1$  la quantità che corrisponde a questo asse. In tutte le direzioni perpendicolari a questo asse, la grandezza  $\chi$  ha uno stesso valore  $\chi_2$ , quindi si può porre  $\chi_3 = \chi_2$ ; le direzioni del secondo e del terzo asse magnetico principale diventano quindi indeterminate. Quando  $H$  ha la direzione dell'asse ottico (asse del cristallo), il momento magnetico  $m_1$  è uguale a  $m_1 = \chi_1 v H$ ; quando il campo è perpendicolare all'asse ottico, il momento magnetico  $m_2$  è uguale a  $m_2 = \chi_2 v H$ , indipendentemente dalla particolare direzione che il campo può assumere. Un cristallo è detto *positivo* quando le sue proprietà paramagnetiche o diamagnetiche sono più fortemente pronunciate nella direzione dell'asse ottico che perpendicolarmente ad esso; in caso contrario, si dice che sia *negativo*. Da quanto detto si può facilmente riconoscere come deve essere disposto l'asse ottico di un cristallo, posto in un campo magnetico uniforme:

Tipo di magnetizzazione	Segno	Suscettibilità	Posizione dell'asse
Paramagnetico	+	$\chi_1 > \chi_2$	assiale
Paramagnetico	—	$\chi_1 < \chi_2$	equatoriale
Diamagnetico	+	$-\chi_1 > -\chi_2$	equatoriale
Diamagnetico	—	$-\chi_1 < -\chi_2$	assiale

Ai cristalli paramagnetici positivi appartiene il ferro spatico ( $FeCO^3$ ), il corindone ( $Al^2O^3$ ), la cassiterite o stagno ossidato ( $SnO^2$ ); il rutilo ( $TiO^2$ ); ai cristalli negativi, la tormalina, il berillo, la dioplasio, l'idocrasio o vesuviano,  $NiSO^4 \cdot 6H^2O$ ,  $AzH^4Cl$ ,  $CuCl$ ,  $2H^2O$ . Ai cristalli diamagnetici positivi appartengono gli spati calcarei,  $NaAzO^3$ ,  $CaSO^4 \cdot 4H^2O$ ; a cristalli negativi, Bi, Sb, Ar, ghiaccio,  $Hg^2Cl$ , Zr,  $H^2(AzH^4)$ ,  $AsO^4$ ,  $Hg(CAz)^2$ ,  $MgPt(CAz)^4 \cdot 7H^2O$ ,  $H^2AzH^4PO^4$ ,  $H^2KPO^4$ ,  $H^2KAsO^{4*}$ , urea ( $CH^4Az^2O$ ).

Le proprietà magnetiche dei cristalli furono scoperte da Plücker (1847) e Faraday (1848). Il primo ha osservato che l'asse della tormalina paramagnetica è disposto equatorialmente e lo stesso vale per l'asse di un cilindro di vetro temperato paramagnetico. Faraday ha scoperto che l'asse di un cristallo di bismuto diamagnetico si dispone assialmente. Knoblauch e Tyndall hanno preparato barre con farina, gomma e acqua, che si sono disposte equatorialmente; queste barre essendo compresse longitudinalmente in dischi circolari, le cui basi rimanevano nella posizione assiale, sebbene l'asse dei dischi fosse minore del diametro della base; la sostanza in esame ha infatti un valore assoluto maggiore di  $\chi$  nella direzione di compressione. La stessa osservazione è stata fatta su una barra realizzata con polvere di bismuto e colla. Viceversa, le basi di un disco, ottenuto per compressione di un'asta contenente ferro, sono disposte equatorialmente. Tyndall ha scoperto che nel legno le fibre si dispongono equatorialmente.

Tyndall (1851) ha misurato direttamente le attrazioni o repulsioni esercitate da un polo magnetico su cristalli diversamente disposti rispetto a questo polo; così un cubo di solfato di ferro veniva attratto nella direzione del suo asse con una forza pari a 41, 5, e, in una direzione perpendicolare, con una forza pari a 35, 4; misurazioni simili furono fatte da Hankel (1851) sul bismuto. Rowland e Jacques (1879) hanno misurato  $\chi$ , per la prima volta, in diverse direzioni, nel Bi e nello spato calcareo.

Faraday aveva già notato che i valori di  $\chi$  diminuiscono, quando la temperatura aumenta. Uno studio molto approfondito dell'influenza della temperatura è stato fatto da Lutteroth (1879), che ha trovato che le differenze tra due delle grandezze  $\chi_1, \chi_2, \chi_3$ , sono funzioni lineari della temperatura (tra  $0^\circ$  e  $50^\circ$ ); per i cristalli isomorfi, i rapporti dei coefficienti di temperatura di

queste grandezze sono uguali tra loro. Per  $NiSO^4$  e  $ZnSO^4$ , questi coefficienti hanno segno diverso e il loro rapporto è pari a  $-0,37$ .

I cristalli biassiali sono stati studiati da Plücker e Beer, Grailich e v. Lang, ecc., ma non ci soffermeremo sui risultati dei loro lavori.

I cristalli del sistema regolare, che sono isotropi dal punto di vista ottico (volume II), ma anisotropi rispetto alle proprietà elastiche, sono stati considerati isotropi rispetto ai fenomeni magnetici. Tuttavia P. Weiss (1896) ha dimostrato che i cristalli di magnetite o ferro ossidato ( $Fe^3O^4$ ), che appartengono al sistema cubico, sono anisotropi dal punto di vista magnetico, in particolare in campi deboli.

O. Lehmann ha stabilito che il campo magnetico agisce sui cristalli liquidi, da lui scoperti; si produce, sotto l'azione del campo, una rotazione delle molecole del cristallo e contemporaneamente l'intera goccia mostra una tendenza a ruotare in modo che l'asse ottico occupi la posizione equatoriale.

Nuove ricerche sperimentali sul magnetismo dei cristalli sono state fatte da Westmann (ematite, 1896), Bavink (ilmenite, igo4), P. Weiss (magnetite, 1896 e pirrotite, 1905), P. Weiss e Kunz (pirrotite, 19005), P. Weiss e Planer (pirrotite, 1908), Quittner (magnetite, 1909), W. Voigt e Kinoshita (1907), Fincke (1910) e altri.

Voigt e Kinoshita hanno determinato il valore assoluto di  $\chi$  per una serie di cristalli, tagliando dischi circolari (da 5,2 mm, a 2,5 mm di diametro e da 1 mm a 1,5 mm di spessore); le facce di ogni disco erano perpendicolari ad uno degli assi del cristallo corrispondente. Questi dischi sono stati sospesi, nel piano equatoriale di un elettromagnete (eccentricamente), da una bilancia di torsione e la forza  $F$ , che agisce sul cristallo nella direzione di un raggio vettore del piano equatoriale, è stata misurata quindi perpendicolarmente alle linee di forza. Questa forza è uguale a

$$F = \frac{v}{2} (\chi_i - \chi_0) \frac{dH^2}{ds}$$

$v$  è il volume del disco,  $\chi_i$  la suscettibilità normalmente al disco,  $\chi_0$  la suscettibilità all'aria e  $H^2$  il valore medio del quadrato dell'intensità del campo che agisce sul disco. Il valore  $H^2$  è stato misurato direttamente utilizzando una spirale di bismuto (Volume V). Sono stati studiati cristalli magnetici regolari uniassiali e triassiali. Ecco alcuni valori della quantità  $\chi \cdot 10^7$ , che sono stati ottenuti in questo modo:

	Spatto calcareo	Dolomite	Quarzo	Berillo	Rutilo	Tormalina
Parallelamente all'asse	-11,01	+34,9	-12,3	+10,4	+88,9	+23,2
Perpendicolarmente all'asse	-9,87	+22,6	-12,2	+22,3	+88,3	+34,7

Tra i cristalli con tre assi magnetici, il topazio e la celestina hanno dato quasi lo stesso valore di  $\chi \cdot 10^7$  nelle tre direzioni principali, mentre si è trovato, per l'arragonite,  $-11,5$ ,  $-11,3$  e  $-13,0$ . Finke ha perfezionato il metodo di Voigt dal punto di vista sperimentale e, oltre ai metalli pesanti, ha ulteriormente approfondito i solfati di Fe, Ni, Co, Co+K, Fe+Az $H^4$ , Ni+Az $H^4$ , Co+Az $H^4$  e Co+Cu, che, eccetto il cristallo rombico  $NiSO^4+7H^2O$ , sono tutti monoclini; si occupava maggiormente dello zucchero di canna e di alcuni minerali. In pochi casi (solfato di cobalto ammonico, solfato di cobalto e solfato di potassio, augite) sono apparse differenze molto significative tra i tre valori di  $\chi$  (fino al 40% nell'augite).

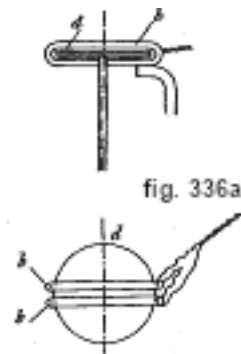
Westmann (1896) ha osservato, nell'ematite ( $Fe^2O^3$ , romboedrica), una magnetizzazione da 1,8 a 1,9 perpendicolare all'asse, da 0,05 a 0,09 solo parallela all'asse.

Di grande importanza sono le ricerche di P. Weiss e Quittner sulla magnetite e quelle di P. Weiss e Kunz sulla pirrotite.

I cristalli di magnetite ( $Fe^3O^4$ ) appartengono al sistema regolare e assumono la forma del cubo, dell'ottaedro e del dodecaedro. Presentano tre assi di simmetria, che sono perpendicolari

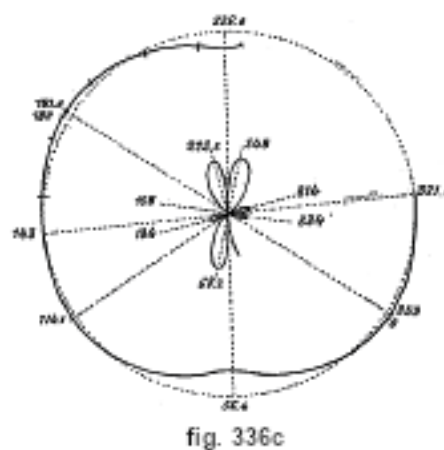
a una faccia delle tre forme cristalline. Siano  $\varphi, \psi, \theta$  gli angoli di uno di questi assi con i tre lati del cubo; si ha, per il primo asse,  $\cos \varphi = 1, \cos \psi = 0, \cos \theta = 0$ ; per il secondo asse,  $\cos \varphi = 1, \cos \psi = \cos \theta = 1 : \sqrt{2}$ ; per il terzo asse,  $\cos \varphi = \cos \psi = \cos \theta = 1 : \sqrt{3}$ . Il primo asse è parallelo a un lato del cubo, il secondo alla diagonale di una faccia del cubo, il terzo a una retta che congiunge due vertici opposti del cubo.

Weiss ha dapprima studiato bacchette aventi uno di questi tre assi come direzione longitudinale. Ha riconosciuto che tutte queste bacchette erano ferromagnetiche; la loro magnetizzazione non era proporzionale all'intensità del campo. Ha inoltre osservato che la magnetizzazione è diversa nelle tre direzioni principali. L'isteresi non è la stessa in diversi campioni di magnetite. Nessuna saturazione è stata raggiunta con le intensità di campo utilizzate (fino a 500 gauss). Weiss ha considerato poi dei dischi circolari, le cui facce erano perpendicolari a uno dei tre assi di simmetria. Tale disco era disposto orizzontalmente tra i poli di un magnete d'acciaio a forma di ferro di cavallo; le linee di forza del magnete erano orizzontali.



Il disco  $d$  (fig. 336,a) era avvolto da due bobine di filo sottile  $bb$  (40 avvolgimenti) e poteva ruotare attorno al suo asse verticale di un angolo misurabile; nelle bobine venivano indotte correnti la cui misura permetteva di determinare la variazione di magnetizzazione nelle diverse direzioni (diametri) del disco. Essendo la normale alle spire perpendicolare alle linee di forza, si otteneva una magnetizzazione parallela a queste linee. Ma P. Weiss ha considerato anche il caso in cui la normale alle bobine di induzione è parallela alle linee di forza e di conseguenza la magnetizzazione perpendicolare a queste linee.

La figura 336,b fornisce i risultati per un disco, che era perpendicolare al primo asse di simmetria, quindi parallelo a una faccia del cubo. Sui raggi vettori uscenti da un punto sono state prese lunghezze proporzionali alla magnetizzazione. La curva esterna che rappresenta la componente della magnetizzazione parallela al campo mostra chiaramente la simmetria quaternaria; i massimi di magnetizzazione corrispondono agli assi binari, i minimi agli assi quaternari. La curva più piccola al centro rappresenta la componente della magnetizzazione normale al campo. Come previsto, essa passa per l'origine per i raggi vettori che corrispondono ai massimi e ai minimi della magnetizzazione parallela al campo. Tra due direzioni per le quali è nulla, la magnetizzazione normale al campo passa per un massimo, che è più vicino alla posizione del minimo della magnetizzazione parallela al campo che al massimo. La magnetizzazione quindi ruota più velocemente del campo quando devia da un asse di minima magnetizzazione e meno rapidamente quando devia da un asse di magnetizzazione massima.



La curva di magnetizzazione normale al campo è quindi costituita da otto anelli che occupano ciascuno una regione angolare di  $45^\circ$ . Solo sei di essi sono stati determinati e sono rappresentati in fig. 336,b. Le asimmetrie abbastanza ampie che presentano sono probabilmente dovute a fessure nel disco. La loro influenza tuttavia, non maschera la simmetria quaternaria, che è chiaramente indicata dalla posizione dei sei massimi. Se il cristallo fosse magneticamente isotropo, la curva esterna sarebbe un cerchio e la curva interna sarebbe ridotta a un punto.

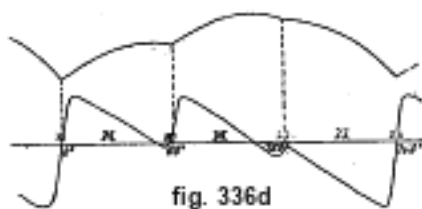
La figura 336,c rappresenta le osservazioni su un disco parallelo alla faccia del dodecaedro; l'aspetto generale delle curve che rappresentano le magnetizzazioni parallele e perpendicolari al campo è ancora conforme a quanto supposto dalla simmetria cubica.

Esperimenti su un disco parallelo alla faccia dell'ottaedro hanno mostrato proprietà sostanzialmente identiche in tutte le direzioni.

Quittner (1908) ha pubblicato nuovi studi sulla magnetite e in particolare considerazioni teoriche sulla struttura interna di questo minerale. Egli avanza l'ipotesi che il cristallo sia attraversato da innumerevoli microscopiche fessure che, rispetto agli elementi del reticolo cubico, sono comunque molto ampie e si dispongono parallelamente alle quattro facce dell'ottaedro.

La pirrotite (approssimativamente  $\text{FeS}$ , ma con un eccesso di S, forse  $\text{Fe}^n\text{S}^m$ ) appartiene ai cristalli del sistema esagonale. È stata studiata da Abt (1896), Streng (1882) e, in modo particolarmente approfondito, da P. Weiss e dai suoi collaboratori Kunz e Planer. Ci limiteremo a una breve sintesi dei risultati.

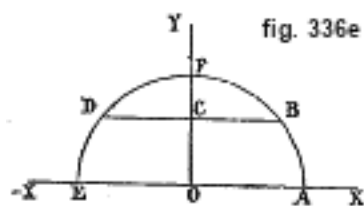
Nella direzione dell'asse principale del cristallo naturale, la magnetizzazione è nulla. Nel piano perpendicolare a questo asse, che P. Weiss chiama il piano magnetico, non si riconosce la simmetria esagonale. Quando il campo magnetico è in questo piano, si ottiene, per le diverse direzioni dell'intensità del campo, una magnetizzazione che è rappresentata graficamente nella figura 336,d. Le ascisse sono gli azimuth; la curva superiore dà la magnetizzazione parallela alle linee di forza, la curva inferiore perpendicolare a queste linee. Lo studio di queste curve per diversi cristalli e per diverse intensità di campo ha portato al risultato che la pirrotite naturale è un'associazione di tre gruppi di cristalli rombici elementari, i cui assi principali sono tutti paralleli all'asse principale del cristallo naturale. Questi cristalli sono associati nel piano magnetico ad angoli di  $60^\circ$ , o, che è la stessa cosa, di  $120^\circ$ . L'ampiezza delle variazioni repentine della componente di magnetizzazione perpendicolare al campo dà l'importanza relativa delle tre componenti elementari.



La pirrotite è quindi un cristallo gemellato, i cui elementi sono strettamente uniti tra loro.

I cristalli elementari hanno le seguenti notevoli proprietà. Nella direzione dell'asse principale sono paramagnetici e si ha  $\chi = 3,14 \cdot 10^{-6}$ ; nel piano magnetico perpendicolare a questo asse sono ferromagnetici. In questo piano ci sono due direzioni particolari che indicheremo con  $OX$  e  $OY$  e che chiameremo, l'una  $OX$  direzione di facile magnetizzazione, l'altra  $OY$  di difficile magnetizzazione. Qualsiasi forza magnetica  $H$ , anche estremamente piccola, che agisce nella direzione  $OX$ , dà luogo ad una magnetizzazione fino a saturazione. Nella direzione  $OY$  la magnetizzazione è proporzionale all'intensità del campo fino a circa 7800 gauss; per  $H = 12000$  gauss si raggiunge la saturazione ed ha la stessa intensità di quella nella direzione  $OX$ , mentre  $H$  è molto piccolo. Se l'intensità  $H$  nel piano magnetico forma un qualsiasi angolo con la direzione  $OX$ , la magnetizzazione  $I$  forma un angolo più piccolo con questa direzione.

Supponiamo di portare a partire dal punto  $O$  (fig. 336,e) i valori di  $H$  e di  $I$  in tutte le possibili direzioni e sia AFE il cerchio di saturazione.



Quando  $H$  descrive quasi completamente l'angolo AOF, la fine di  $I$  si sposta sull'arco AB del cerchio di saturazione. Quando il campo  $H$  raggiunge la direzione di difficile magnetizzazione, l'estremità di  $I$  descrive istantaneamente la corda BCD, e, quando il campo percorre l'angolo  $YO(-X)$ , la magnetizzazione descrive l'arco DE. Più grande è  $H$ , più grandi sono gli archi AB e DE; per  $H$  molto grande, ABCDE si trasforma nel cerchio ABFDE. La dipendenza della magnetizzazione longitudinale (componente parallela al campo) rispetto all'azimut dell'intensità  $H$  è rappresentata graficamente, in figura 336,f, per quattro diversi valori di  $H$ ; si contano gli angoli (da  $0^\circ$  a  $90^\circ$ ) dalla direzione  $OX$  di facile magnetizzazione. La figura 336,g riporta in scala ingrandita la magnetizzazione trasversale (componente perpendicolare al campo) per cinque valori di  $H$ ; le curve 1, 2, 3 e 5 corrispondono agli stessi valori di  $H$  delle curve della figura precedente, la curva 4 si riferisce al valore  $H = 10270$  gauss. Il punto medio ( $0^\circ$ ) appartiene alla direzione  $OX$ ; per  $\pm 90^\circ$  (direzione  $OY$ ), la magnetizzazione trasversale è nulla. Non possiamo qui affrontare gli altri interessantissimi risultati di questa ricerca sui fenomeni di isteresi magnetica e sull'influenza della temperatura; ci limiteremo ad indicare che P. Weiss distingue tra cristalli normali di pirrotite e cristalli anomali. I cristalli normali non mostrano isteresi termica e la magnetizzazione scompare a  $348^\circ$ . I cristalli anomali mostrano isteresi termica tra  $170^\circ$  e  $230^\circ$ .

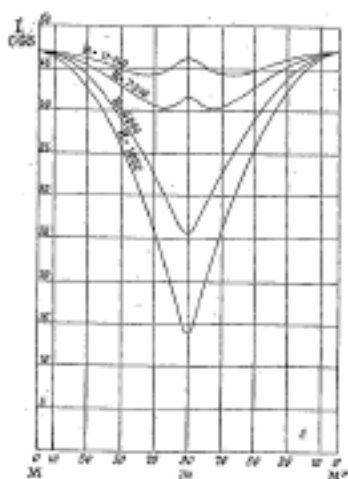


fig. 336f

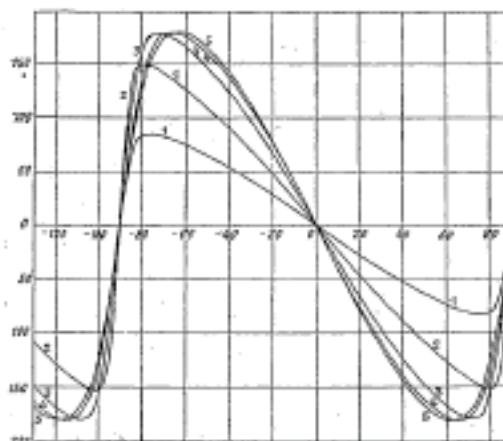


fig. 336g

Esponiamo ora brevemente i fondamenti della teoria dell'induzione magnetica in corpi anisotropi debolmente magnetici; questa teoria fu introdotta da W. Thomson (Lord Kelvin) nel 1851. Prendiamo tre assi di coordinate e indichiamo con  $\alpha, \beta, \gamma$  gli angoli che la direzione del campo  $H$  forma con questi assi. Thomson ammette che ognuna delle tre componenti  $m_1, m_2, m_3$  del momento magnetico  $m$  del corpo è una funzione lineare delle tre componenti dell'intensità  $H$ , per cui, nelle formule, compaiono nove coefficienti. Un ragionamento molto semplice mostra che sei di questi coefficienti sono uguali a due a due e che inoltre esistono tre direzioni, in cui le direzioni di  $m$  e  $H$  coincidono. Quando si prendono gli assi delle coordinate lungo queste direzioni, i sei coefficienti si riducono a tre,  $\chi_1, \chi_2, \chi_3$ , che sono le suscettività magnetiche in queste tre direzioni principali. Si ha quindi ( $v$  che denota il volume del corpo):

$$m_1 = v\chi_1 H \cos \alpha \quad m_2 = v\chi_2 H \cos \beta \quad m_3 = v\chi_3 H \cos \gamma \quad (13.0.141)$$

da cui si deduce, per il momento magnetico

$$m = vH \sqrt{\chi_1^2 \cos^2 \alpha + \chi_2^2 \cos^2 \beta + \chi_3^2 \cos^2 \gamma} \quad (13.0.142)$$

Gli angoli  $\varphi, \psi, \theta$  che forma l'asse magnetico del corpo, cioè il momento  $m$ , con gli assi coordinati, sono determinati dalle formule

$$\cos \varphi = \frac{\chi_1 \cos^2 \alpha + \chi_2 \cos^2 \beta + \chi_3 \cos^2 \gamma}{\sqrt{\chi_1^2 \cos^2 \alpha + \chi_2^2 \cos^2 \beta + \chi_3^2 \cos^2 \gamma}} \quad (13.0.143)$$

Sia  $m_H$  la componente del momento  $m$  lungo la direzione di  $H$ ; si ha  $m_H = m \cos \omega$ . Se si pone  $m_H = v\chi H$ , si ottiene, dalle (55,b) e (55,c)

$$\chi = \chi_1 \cos^2 \alpha + \chi_2 \cos^2 \beta + \chi_3 \cos^2 \gamma \quad (13.0.144)$$

Tracciamo da un punto qualsiasi i raggi vettori  $r = 1 : \sqrt{\chi}$ ; le loro estremità giaceranno sulla superficie dell'ellissoide  $\chi_1 x^2 + \chi_2 y^2 + \chi_3 z^2 = 1$ , che è del tutto analogo all'ellissoide di elasticità della teoria di Fresnel; può essere chiamato l'ellissoide di magnetizzazione.

Un corpo, posto in un campo magnetico uniforme, è sottoposto ad una coppia, il cui momento  $M$  è uguale a

$$M = mH \sin \omega \quad (13.0.145)$$

L'asse di questo momento di rotazione è perpendicolare al piano passante per  $H$  e  $m$ . Un calcolo molto semplice dà, per  $M$  e le sue componenti  $M_1, M_2, M_3$ , le formule

$$\begin{cases} M_1 &= vH^2 (\chi_2 - \chi_3) \cos \beta \cos \gamma \\ M_2 &= vH^2 (\chi_3 - \chi_1) \cos \gamma \cos \alpha \\ M_3 &= vH^2 (\chi_1 - \chi_2) \cos \alpha \cos \beta \end{cases} \quad (13.0.146)$$

$$M = \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2} \quad (13.0.147)$$

Poiché queste formule contengono solo le differenze delle tre grandezze  $\chi_i$ , è chiaro che il momento di rotazione è indipendente dal mezzo circostante. Quando un corpo può ruotare attorno ad uno dei tre assi magnetici principali, e tale asse è perpendicolare al campo uniforme  $H$ , l'equilibrio è stabile, se l'asse a cui corrisponde la maggiore suscettibilità è parallelo al campo  $H$ . Quando un corpo è portato da una sospensione bifilare parallela, ad esempio, all'asse  $z$  e il doppio filo è attorcigliato dell'angolo  $\theta$ , il corpo ruota, a partire dalla sua posizione di equilibrio, di un certo angolo  $\alpha$ , tale che  $\beta = (90^\circ - \alpha)$

$$C \sin (\theta - \alpha) = vH^2 (\chi_1 - \chi_2) \cos \alpha \sin \alpha \quad (13.0.148)$$

essendo  $C$  il coefficiente di torsione del doppio filo e  $\chi_1 > \chi_2$  per ipotesi. La durata  $T_3$  delle oscillazioni molto piccole ( $\cos \alpha = 1$ ,  $\sin \alpha = \alpha$ ) è uguale a

$$T_3 = \frac{\pi}{H} \sqrt{\frac{K}{v(\chi_1 - \chi_2)}} \quad (13.0.149)$$

dove  $K$  è il momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione. Siano  $n_1, n_2, n_3$  ( $= 1 : T_3$ ) i numeri di oscillazioni rispettivi attorno ai tre assi di un corpo sferico; si ottengono le uguaglianze:

$$\frac{\chi_2 - \chi_3}{n_1^2} = \frac{\chi_1 - \chi_3}{n_2^2} = \frac{\chi_1 - \chi_2}{n_3^2}$$

da cui, supponendo  $\chi_1 > \chi_2 > \chi_3$ ,

$$n_2^2 = n_3^2 + n_1^2 \quad (13.0.150)$$

Plücker ha verificato quest'ultima formula per la formiato del rame. Le formule (57) e (58) possono essere utilizzate per misurare le differenze tra le tre quantità  $\chi_i$ .

Nei cristalli uniassiali si ha  $\chi_2 = \chi_3$ , assumendo che  $\chi_1$  si riferisce alla direzione dell'asse del cristallo. Se prendiamo l'asse di rotazione perpendicolare all'asse del cristallo e, come prima, al campo  $H$ , le formule (57) e (58) sono applicabili, a condizione di sostituire  $\chi_1 - \chi_2$  con  $\chi_2 - \chi_1$ , se  $\chi_2 > \chi_1$ .

Queste formule possono essere utilizzate per determinare la differenza  $\pm(\chi_1 - \chi_2)$ . È facile vedere come si semplifichino tutte le relazioni introdotte, nel caso di un cristallo uniassiale.

La teoria di W. Thomson è stata verificata da W. König, Stenger e altri ancora; Lutteroth ha mostrato che si possono stabilire tutte le equazioni di questa teoria partendo dalla concezione di magneti molecolari rotanti. P. Duhem ha fornito una teoria, nella quale parte dalla nozione di potenziale termodinamico di un sistema magnetico.

## 14, Le nuove teorie molecolari del magnetismo di J. J. Thomson, W. Voigt e P. Langevin

Vari scienziati hanno recentemente introdotto teorie sul magnetismo, che si basano sull'ipotesi dell'esistenza degli elettroni. Queste teorie si devono in particolare a J. J. Thomson (1903), W. Voigt (1900-1903), P. Langevin (1904); è anche opportuno citare in modo molto particolare il lavoro di P. Weiss (dal 1907), che ha portato al concetto di *magnetone*.

J. J. Thomson è partito dall'ipotesi che, in un atomo, siano contenuti degli elettroni, che si muovono sotto l'azione di forze centrali quasi elastiche in traiettorie circolari, dove la loro velocità rimane piccola rispetto alla velocità della luce. Egli ha studiato prima le onde elettromagnetiche (Volume V) generate da un singolo elettrone, poi due e più elettroni, equidistanti nella stessa orbita circolare. Ha mostrato poi che un campo magnetico esterno non esercita alcun effetto su una sostanza in cui le traiettorie circolari degli elettroni sono disposte in qualsiasi modo, e ciò indipendentemente dalla legge che regola l'azione della forza centrale sugli elettroni. Ma, se gli elettroni non sono liberamente mobili, cioè sono soggetti a legami all'interno dell'atomo, e se esiste una resistenza al movimento analoga all'attrito, la sostanza assume proprietà paramagnetiche. J. J. Thomson ha solo indicato la possibilità di spiegare allo stesso modo diamagnetismo e ferromagnetismo.

La teoria del magnetismo cristallino, proposta da W. Thomson ed esposta nel paragrafo precedente, che non è applicabile ai cristalli ferromagnetici, è stata estesa anche a questi ultimi da W. Voigt (1900, 1903). Sano (1902), Wallerant (1901), Beckenkamp (1902) e lo stesso W. Voigt (1903) hanno sviluppato questa teoria più generale, originariamente valida solo per i cristalli centralmente simmetrici, in modo da poter includere le altre forme cristalline.



Ma W. Voigt (1902) ha proposto anche, prima di J. J. Thomson, una teoria elettronica del magnetismo. Come quest'ultimo, considera solo gli elettroni soggetti a legami tali da rimanere, nel loro moto, all'interno dell'atomo, e studia l'influenza di un campo magnetico esterno sul campo a cui danno origine gli elettroni di una sostanza. Allo stato naturale, le orbite degli elettroni devono essere distribuite in modo del tutto irregolare, in modo che anche un piccolissimo elemento di volume non generi alcun campo magnetico esterno. Quando si parte da un tale stato naturale, un campo esterno può modificare le traiettorie degli elettroni, ma il campo ad essi dovuto rimane nullo, per cui non viene indotta alcuna magnetizzazione nella sostanza. Per spiegare l'induzione magnetica, bisogna ammettere che gli elettroni, nel loro movimento irregolare, subiscono delle collisioni, che si possono attribuire forse ai loro urti reciproci; dopo ogni collisione, un elettrone percorre una traiettoria modificata e, anche in un intervallo di tempo molto piccolo, molti elettroni iniziano, in tutte le direzioni possibili e con velocità molto diverse, a seguire nuove orbite circolari. L'elemento di volume del corpo dà quindi origine a un campo magnetico esterno, il momento magnetico di questo elemento essendo proporzionale all'intensità del campo inducente. Il corpo appare paramagnetico o diamagnetico, a seconda che possieda, subito dopo le collisioni, un eccesso medio di energia potenziale o cinetica. Si deve supporre che, nelle sostanze anisotrope, tutte le direzioni di moto non si presentino con uguale frequenza per effetto della percussione.

W. Voigt ha considerato anche il caso in cui le masse elettriche nell'atomo sono in rotazione su se stesse. Il campo magnetico inducente provoca una variazione di questo movimento rotatorio e di conseguenza dà luogo, nel corpo, ad una polarizzazione diamagnetica. Perché appaia il paramagnetismo, si deve ammettere che la rotazione è ammortizzata da una determinata resistenza, spiegabile con l'emissione di onde elettromagnetiche.

Passiamo ora all'importantissima teoria che fu introdotta da P. Langevin (1904). Ammette anche che gli elettroni sono soggetti a legami all'interno di una molecola o di un atomo e si muovono in traiettorie chiuse con grandissima velocità. Considereremo solo il caso in cui gli elettroni descrivono orbite circolari. La teoria di P. Langevin porta, come vedremo, al risultato che diamagnetismo e paramagnetismo sono fenomeni essenzialmente differenti, dovuti a cause totalmente distinte. Ci limiteremo a indicare i tratti fondamentali di questa teoria.

Quando un singolo elettrone si muove in un'orbita circolare, produce, nello spazio circostante, un campo magnetico la cui intensità media è uguale a quella del campo di un magnete avente l'asse normale al piano dell'orbita e momento magnetico  $M_0$  dato dalla formula

$$M_0 = \frac{eS}{\tau} \quad (13.0.151)$$

dove  $e$  è la carica dell'elettrone,  $S$  l'area delimitata dalla traiettoria e  $\tau$  la durata di una rivoluzione su questa traiettoria. La totalità degli elettroni nella molecola dà il momento  $M$  della stessa, che può essere o differire da zero, o nullo quando sono soddisfatte determinate condizioni di simmetria. Anche in quest'ultimo caso, dove c'è mutua compensazione delle diverse correnti particolari nella molecola, questa compensazione non impedirà ad esse di esistere e alla molecola di produrre un campo magnetico più o meno complesso a distanze paragonabili alle sue dimensioni; questo campo potrà svolgere un ruolo importante nelle azioni di coesione e nell'orientazione reciproca di molecole molto vicine, che devono intervenire per determinare la struttura cristallina.

Sotto l'azione di un campo magnetico esterno, uniforme nell'estensione di una molecola complessivamente simile magneticamente neutra, questa non avrà tendenza ad orientarsi, non ci sarà paramagnetismo. Vedremo in seguito come il caso del momento risultante non nullo fornisce invece la rappresentazione dei fatti del paramagnetismo e permette di trovare la legge sperimentale di Curie relativa alla variazione del magnetismo debole con la temperatura. Ma P. Langevin si è proposto di mostrare come un sistema molecolare simile, avente o meno un

momento risultante, si modifichi al momento della produzione di un campo magnetico esterno, indipendentemente dall'orientazione complessiva, per dar vita al fenomeno del diamagnetismo, una proprietà generale della materia, visibile solo quando il momento molecolare risultante è nullo, e semplicemente mascherata dal paramagnetismo molto più intenso che risulta dall'orientamento delle molecole quando il momento che ne deriva non è nullo.

Si trova facilmente che, con l'instaurazione di un campo esterno  $H$ , il momento magnetico di una sola corrente particolare riceve un incremento

$$\Delta M_0 = -\frac{He^2S}{4\pi m} \quad (13.0.152)$$

essendo  $m$  la massa dell'elettrone. Il segno  $-$  mostra che l'instaurarsi del campo  $H$  dà luogo ad una polarizzazione diamagnetica. Il risultato è invece indipendente dal fatto che  $M$  possa essere inizialmente nullo o diverso da zero. Il diamagnetismo appare quindi come una proprietà generale di tutti i corpi e deve sempre manifestarsi nell'introduzione di un campo. Il fenomeno che abbiamo appena considerato avviene all'interno della molecola, e, quando si ha  $M = 0$ , questa non può subire alcuna azione meccanica; l'energia cinetica del suo moto calorifico resta quindi invariata e gli urti reciproci delle molecole avvengono esattamente come prima: non essendo alterato il moto complessivo di alcuna molecola, nessuna variazione di temperatura segue la variazione diamagnetica. Da ciò risulta che, al contrario, la temperatura non può avere alcuna influenza sull'entità della polarizzazione diamagnetica, come ha osservato Curie. Lo spettro di una sostanza è causato dal movimento degli elettroni, e poiché lo spettro risulta essere indipendente dalla temperatura entro ampi limiti, un'altra spiegazione dell'indipendenza della suscettività  $\chi$  dei corpi diamagnetici può essere vista, in questo fatto. P. Langevin ha trovato per  $\chi$  la seguente espressione:

$$\chi = \frac{Ne^2}{12m} \bar{r}^2 = \frac{\rho}{12} \left(\frac{e}{m}\right)^2 \bar{r}^2 \quad (13.0.153)$$

dove  $N$  indica il numero di elettroni nell'unità di volume e  $\bar{r}^2$  la media del quadrato dei raggi delle traiettorie;  $\rho = mN$  è la densità elettronica media. La dipendenza della grandezza  $\chi$  rispetto alla temperatura nel Bi e Sb è forse legata, come ipotizzato da J. J. Thomson, alla presenza nel metallo di corpuscoli catodici liberi che gli conferiscono la conducibilità e il cui campo magnetico esterno curva, nel verso che corrisponde al diamagnetismo, i cammini liberi, particolarmente lunghi nel bismuto. Per l'acqua si ha  $\chi = 0,8 \cdot 10^{-6}$ ; la densità  $\rho$  degli elettroni negativi che costituiscono soltanto una parte della molecola è inferiore all'unità, e probabilmente molto superiore a  $1/2000$ , rapporto tra la massa di un elettrone negativo e quella dell'atomo di idrogeno. Il rapporto  $e/m$  è d'altra parte noto e uguale a  $1,8 \cdot 10^7$ . Si può dedurre da ciò un limite inferiore e un limite superiore per il raggio quadratico medio  $r$ ,

$$2 \cdot 10^{-10} < r < 10^{-8}$$

risultato perfettamente in accordo con quanto si conosce sulle grandezze molecolari.

Le formule (60) e (61) danno

$$\frac{\Delta M_0}{M_0} = \frac{H\tau}{4\pi} \frac{e}{m} < 10^{-9} H$$

se si introduce per il rapporto  $e : m$  il valore sopra indicato e se si ammette che  $r$  è dell'ordine di  $10^{-15}$  (durata di oscillazione nella radiazione luminosa). Il campo più forte  $H = 10^5$  che si sia praticamente raggiunto finora produce quindi una variazione, nel momento dei magneti elementari, che non arriva a 0,0001.

Secondo la teoria di P. Langevin, il paramagnetismo nasce in modo completamente diverso. Come abbiamo appena visto, in tutti i corpi, quando viene ripristinato il campo  $H$ , compare

prima il diamagnetismo e tale rimane poi, quando si ha  $M = 0$ . Ma supponiamo ora che  $M$  non sia nullo, cioè che il corpo sia costituito da magneti molecolari distribuiti irregolarmente. Nel campo  $H$ , ogni magnete ha l'energia potenziale

$$-MH \cos(M, H)$$

Sotto l'influenza del campo si verifica una rotazione dei magneti molecolari e di conseguenza una diminuzione dell'energia potenziale e un aumento dell'energia cinetica del movimento molecolare; ma la conseguente disuguaglianza che ne risulta nella distribuzione dell'energia cinetica tra i diversi orientamenti e i diversi gradi di libertà del moto complessivo delle molecole (rotazione e traslazione) non sono compatibili con l'equilibrio termico. Al momento degli urti si verifica quindi il riarrangiamento durante il quale compare la polarità paramagnetica. Langevin paragona questo fenomeno a quello che avviene in un gas, inizialmente non soggetto alla gravità, quando improvvisamente appare un campo gravitazionale. Le molecole del gas prenderanno un'accelerazione diretta verso il basso e, in assenza di urti reciproci, ciascuna molecola avrà una velocità maggiore sul fondo che alla sommità del contenitore; ma questa disuguaglianza di velocità è incompatibile con l'equilibrio termico, e si verificherà un riassetto grazie agli urti reciproci, in seguito al quale si stabilisce la distribuzione data dalla formula del livellamento barometrico: il baricentro si abbassa e, per mantenere il gas alla temperatura iniziale, è necessario prelevare da esso una quantità di calore pari al prodotto del peso del gas per questo abbassamento del baricentro.

Analogamente, nel riassetto al momento degli urti, durante i quali compare la polarità paramagnetica, la quantità di calore  $dQ = HdM$  è liberata, ed essendo  $M$  una funzione di  $H$  e della temperatura assoluta  $T$ , si ha

$$dQ = H \left( \frac{\partial M}{\partial H} dH + \frac{\partial M}{\partial T} dT \right)$$

Scrivendo che  $dQ/T$  è un differenziale esatto, si ottiene

$$H \frac{\partial M}{\partial H} + T \frac{\partial M}{\partial T} = 0$$

equazione alle derivate parziali il cui integrale generale è

$$M = f \left( \frac{H}{T} \right) \quad (13.0.154)$$

dove  $f$  è il segno di una funzione qualsiasi. Per  $H$  piccolo, si può supporre che  $M$  sia della forma  $M = kH$ . Dalla (63) segue che, in questo caso,  $k$  è inversamente proporzionale alla temperatura assoluta, come richiesto dalla legge di Curie. Per trovare la forma generale della funzione  $f$ , Langevin considera un corpo paramagnetico allo stato gassoso, ossigeno per esempio, e cerca di determinare l'azione del campo magnetico sullo stato cinetico delle molecole in un modo analogo a quello con cui Boltzmann ha generalizzato la legge del livellamento barometrico. Ottiene così, per l'intensità  $I$  della magnetizzazione (momento dell'unità di volume) la formula

$$I = MN \left( \frac{\cos ha}{\sin ha} - \frac{1}{a} \right) \quad (13.0.155)$$

dove

$$a = \frac{MH}{rT} \quad (13.0.156)$$

In queste formule,  $N$  è il numero di molecole nell'unità di volume e  $rT$  rappresenta i  $2/3$  dell'energia cinetica traslazionale media di una singola molecola, cioè il doppio dell'energia

cinetica corrispondente a ciascuno dei tre gradi di libertà di questa traslazione. L'espressione tra parentesi nella (64) è nulla contemporaneamente ad  $a$ , proporzionale a  $H$ , e tende all'unità quando  $a$  cresce indefinitamente, l'intensità di magnetizzazione tende allora al valore massimo  $I_0 = MN$ , che corrisponde alla saturazione, alla orientazione parallela al campo di tutti i magneti molecolari.

Per raggiungere una data frazione della saturazione, cioè per dare ad  $a$  un determinato valore, sarà richiesta un'intensità di campo  $H$  proporzionale alla temperatura assoluta secondo la definizione di  $a$ . La curva di magnetizzazione di un gas magnetico a temperatura costante, che rappresenta  $I/I_0$  in funzione di  $a$ , cioè di  $H$  (fig. 336,h), sarà quindi rappresentata dalla funzione

$$\frac{I}{I_0} = \frac{\cos ha}{\sin ha} - \frac{1}{a} = f\left(\frac{H}{T}\right)$$

Si vede che la suscettività magnetica non sarà costante e  $I$  potrà essere proporzionale a  $H$  solo per valori di  $a$  significativamente inferiori all'unità.

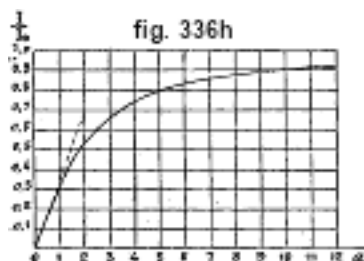
L'assenza in questa curva del punto di flesso che esiste nella curva di magnetizzazione del ferro è dovuta all'assenza di azioni reciproche tra le molecole. Usando i noti sviluppi in serie del coseno e del seno iperbolici, otteniamo, limitandoci ai termini di primo grado rispetto alla grandezza  $a$ , piccola fintanto che si è lontani dalla saturazione,

$$I = \frac{1}{3}MN a = \frac{M^2 N}{3rT} H \quad (13.0.157)$$

corrispondente a una suscettibilità magnetica

$$\chi = \frac{M^2 N}{3rT} = \frac{(MN)^2}{3RT} = \frac{(MN)^2}{3p} = \frac{I_0^2}{3p} \quad (13.0.158)$$

essendo  $R$  la costante dei gas perfetti per l'unità di volume ( $v = 1$ ) e  $p$  la pressione del gas alla quale  $\chi$  è misurata, poiché si ha  $RT = pv = p$ , per  $v = 1$ .



Vedremo che sarebbero necessari campi estremamente forti per raggiungere, nel caso dei gas, la regione nettamente incurva della curva in fig. 336,h.

Curie ha ottenuto per l'ossigeno, alla pressione normale uguale a  $10^6$  e alla temperatura di  $0^\circ$ ,  $\chi = 1,43 \cdot 10^{-7}$ , che dà  $I_0 = 0,65$ . Ciò corrisponderebbe, per l'ossigeno liquido con densità almeno 500 volte maggiore, ad una magnetizzazione massima  $I_0 > 325$ , che non è molto inferiore a quella del ferro; questo spiega perché l'ossigeno liquido ha proprietà magnetiche intense, al punto da formare un ponte liquido tra i due poli di un elettromagnete.

Si può vedere di quale ordine di grandezza è la quantità  $a$  in condizioni sperimentali ordinarie. Si può scrivere

$$a = \frac{MH}{rT} = \frac{MNH}{NrT} = \frac{I_0 H}{NrT}$$

$Nr$  è la costante dei gas ideali per l'unità di volume che si suppone contenga  $N$  molecole; nelle condizioni normali per le quali è stato calcolato  $I_0$ , si avrà

$$\begin{aligned} NrT &= p = 10^{-6} \\ a &= 0,65 \cdot 10^{-6} H \end{aligned}$$

per un campo di 10000 unità,  $a$  sarà minore a  $1/100$  e si sarà ancora pienamente nella regione iniziale della curva di magnetizzazione. Per arrivare ad  $a = 1$ , verso l'inizio della regione curva, occorrerebbero campi maggiori a  $10^6$ , che non sappiamo come produrre.

Vediamo quindi quale è, nelle sostanze ferromagnetiche, l'importanza delle mutue azioni tra molecole, che sole rendono possibile la saturazione magnetica, ancora estremamente remota, per uno stesso campo esterno, nel caso di sostanze debolmente magnetiche dove le mutue azioni non sono sensibili. Da questo punto di vista è pienamente giustificata l'assimilazione operata da Curie della transizione dal magnetismo debole al ferromagnetismo con la transizione dallo stato gassoso a quello liquido, dove le azioni reciproche giocano un ruolo essenziale. Nello stato gassoso puro, come nel magnetismo debole, ogni molecola reagisce individualmente con la sola energia cinetica alle azioni esterne, alla pressione o al campo magnetico.

In sintesi, il paramagnetismo, posteriore al diamagnetismo e ad esso sovrapposto, risulta da un equilibrio statistico tra l'agitazione termica che fa ruotare le molecole su se stesse e tende ad orientarle indifferentemente in tutte le direzioni, e l'azione direttrice del campo magnetico esterno. P. Langevin ha stabilito secondo quale legge la polarizzazione magnetica così prodotta deve variare con il campo magnetizzante e ha dimostrato che in assenza di azioni mutue delle molecole non si potrebbe mai, con i campi realizzabili sperimentalmente, discostarsi dalla proporzionalità. La legge ottenuta mostra immediatamente che la costante paramagnetica deve variare inversamente alla temperatura assoluta, dando così la dimostrazione teorica della legge sperimentale trovata dalla Curie. La legge teorica ottenuta da P. Langevin per il paramagnetismo ha ricevuto, grazie al lavoro di P. Weiss, una notevole conferma sperimentale, poiché ha permesso a questo autore di prevedere quantitativamente come varia con la temperatura la magnetizzazione di saturazione della magnetite.

P. Weiss ha esteso, come vedremo, la teoria di P. Langevin, tenendo conto delle azioni mutue tra molecole che devono avvenire nei corpi ferromagnetici. Ha ottenuto ciò attraverso l'ipotesi del campo molecolare dove ammette che queste azioni mutue danno come risultato la produzione di un campo proporzionale all'intensità della magnetizzazione. Questo campo, a causa della sua enorme intensità, può orientare le molecole in modo molto più efficace del solo campo esterno, e permette quindi di verificare la legge che P. Langevin ha previsto per questo orientazione.

## 15. La teoria di P. Weiss; il magnetone

I numerosi lavori di P. Weiss (dal 1907) si possono dividere in due gruppi; il primo gruppo è dedicato alla teoria del campo molecolare, il secondo alla teoria dei magnetoni. Inizieremo con l'esposizione della prima teoria e delle numerose applicazioni fatte da Weiss. Egli parte dalla teoria di Langevin prima esposta; secondo questa teoria,  $I$  è espresso in funzione dell'intensità  $H$  del campo magnetizzante e della temperatura assoluta  $T$  mediante le formule (64) e (65). P. Weiss si propone di mostrare come si possa fondare una teoria del ferromagnetismo su un'ipotesi estremamente semplice riguardante le azioni mutue tra le molecole che devono poi intervenire. Si suppone che *ciascuna molecola subisca dall'insieme delle molecole circostanti un'azione uguale a quella di un campo uniforme proporzionale all'intensità  $I$  di magnetizzazione e nella sua stessa direzione*. L'intensità  $H$  di questo campo molecolare è quindi uguale a

$$H = bI \quad (13.0.159)$$

essendo  $b$  una costante (che P. Weiss denota con  $N$ ). Si potrebbe dare a  $b$  il nome di campo interno, per sottolineare l'analogia con la pressione interna di Van der Waals. Questo campo, infatti, sommandosi al campo esterno, renderà conto della grande intensità di magnetizzazione dei corpi ferromagnetici mediante le leggi dei corpi paramagnetici, come la pressione interna, sommata alla pressione esterna, dà conto della forte densità dei liquidi invocando la comprimibilità dei gas. Ma questa espressione darebbe luogo a frequenti confusioni e P. Weiss ha preferito quella

di *campo molecolare*. Ammette inoltre che non esistono altre azioni che derivano da un'energia potenziale di rotazione delle molecole, cioè che si traducono in momenti esercitati su di esse. In altre parole, a parte le mutue azioni espresse dal termine  $bI$ , le rotazioni sono, nei corpi ferromagnetici, libere come in un gas. L'energia potenziale traslazionale non è oggetto di alcuna ipotesi determinata.

P. Weiss presuppone innanzitutto che esista solo il campo interno e mostra che, proprio come i liquidi possono esistere a pressione esterna nulla (o addirittura negativa), i corpi ferromagnetici possono assumere un'intensità di magnetizzazione finita, sorgente spontaneamente, in assenza di un campo esterno.

Portiamo nella (65) il valore nella (68) di  $H$ ; si ottiene

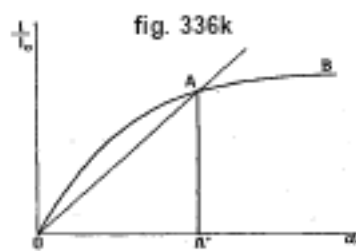
$$a = \frac{MbI}{rT}$$

da cui

$$I = \frac{rT}{Mb}a \quad (13.0.160)$$

Le equazioni (64) e (69) devono essere soddisfatte contemporaneamente; la prima è espressa dalla curva OAB, la seconda dalla retta OA (fig. 336,k); i punti di intersezione della curva e della retta daranno quindi i valori di  $I$ . Una soluzione è evidente: si tratta di  $I = 0$ ,  $a = 0$ , e di conseguenza  $H = 0$ . Ma è facile vedere che non è questa, ma quella data dal punto A, che corrisponde ad uno stato stabile. Immaginiamo infatti che, modificando l'orientamento delle molecole con un intervento diretto, si dia all'intensità di magnetizzazione un valore poco inferiore ad AA'. Il valore di  $a$ , dato dalla retta, sarà allora un po' più alto di quello dato dalla curva per la stessa intensità di magnetizzazione. Tuttavia questi valori di  $a$  sono proporzionali al campo molecolare e al campo richiesto dalla formula di Langevin. Il primo quindi prevale e la magnetizzazione salirà al valore AA'. Allo stesso modo, una magnetizzazione leggermente superiore ad AA' diminuirà fino a questo valore.

Per conciliare questa concezione piuttosto inaspettata di una magnetizzazione finita ottenuta in un campo nullo con i fatti sperimentali del ferromagnetismo in cui il campo esterno gioca un ruolo considerevole, P. Weiss ha dovuto invocare, come si vedrà più avanti, le proprietà ferromagnetiche dei cristalli.



Notiamo qui solo che, a causa della piccolezza della suscettibilità paramagnetica, sarebbero necessari campi enormi per aumentare ulteriormente questa magnetizzazione spontanea; non può quindi che essere uguale a quella che comunemente viene chiamata intensità di magnetizzazione di saturazione alla temperatura  $T$  considerata.

Se, nonostante la sua grande intensità, il campo molecolare è non rivelabile all'esterno del corpo, ciò è dovuto alle sue piccolissime dimensioni: la sua direzione è casuale e, anche in un volume molto piccolo, esistono tutte le possibili direzioni del campo, così che il corpo appare neutro. Il campo esterno quindi non provoca la magnetizzazione, ma rende accessibile all'osservazione la magnetizzazione preesistente.

P. Weiss ha sviluppato una lunga serie di applicazioni della sua teoria. Dobbiamo qui limitarci ad alcune brevi indicazioni.

Dalla (69) risulta che all'aumentare della temperatura  $T$  aumenta l'angolo  $AOa$ ;  $AA'$ , così come il campo molecolare diventano quindi più piccoli. Ad una certa temperatura  $\theta$ , la retta  $OA$  è tangente in  $O$  alla curva  $OAB$ . Per  $a$  molto piccolo, abbiamo ottenuto la formula (66)  $I = \frac{1}{3}I_0a$ ; d'altra parte, dalla (69),  $I = r\theta a : Mb$ ; si ha quindi

$$\frac{1}{3}I_0a = \frac{r\theta a}{Mb}$$

da cui

$$\theta = \frac{1}{3} \frac{I_0 Mb}{r} \quad (13.0.161)$$

Le equazioni (69) e (70) danno allora l'interessante relazione

$$\frac{T}{\theta} = \frac{3}{a} \cdot \frac{I}{I_0} \quad (13.0.162)$$

essendo  $a$  la funzione di  $I$  :  $I_0 = I : MN$ , che è definita dalla (64). P. Weiss ha verificato sperimentalmente la formula (71) per diverse sostanze e trovato, con magnetite, pirrotite e  $Fe^3Ni$ , un notevole accordo con la teoria; per Fe, Ni, Go la curva teorica mostra solo una somiglianza generale con quella ottenuta sperimentalmente.

P. Weiss ha spiegato le proprietà magnetiche dei cristalli nel modo seguente. In ogni cristallo vi sono tre direzioni rettangolari, per le quali il coefficiente  $b$  dell'equazione (68) assume rispettivamente i tre valori  $b_1 > b_2 > b_3$ . Prendiamo gli assi delle coordinate lungo queste direzioni. Siano  $H_x, H_y, H_z$  le componenti del campo esterno e  $I_x, I_y, I_z$  le componenti della magnetizzazione  $I$ , in un punto qualunque del corpo. Sommando le componenti  $b_1 I_x, b_2 I_y, b_3 I_z$  del campo molecolare, si ottengono le componenti  $H_x + B_1 I_x, H_y + b_2 I_y, H_z + b_3 I_z$  del campo esistente realmente nel punto considerato; la direzione di questo campo deve coincidere con quella di  $I$ , per cui si ha

$$\frac{H_x + B_1 I_x}{I_x} = \frac{H_y + b_2 I_y}{I_y} = \frac{H_z + b_3 I_z}{I_z} \quad (13.0.163)$$

Se si suppone che  $H$  e  $I$  sono posti nel piano delle  $xy$  e che gli angoli  $(H, x) = \alpha$ ,  $(I, x) = \varphi$ , si ha

$$\frac{H \cos \alpha + b_1 I \cos \varphi}{I \cos \varphi} = \frac{H \sin \alpha + b_2 I \sin \varphi}{I \sin \varphi} \quad (13.0.164)$$

da cui risulta

$$H \sin(\alpha - \varphi) = (b_1 - b_2) I \sin \varphi \cos \varphi \quad (13.0.165)$$

con equazioni analoghe per i piani  $(x, z)$  e  $(y, z)$ . Questa equazione (73) era già stata introdotta in precedenza empiricamente da P. Weiss, per la pirrotite. Dal confronto con le osservazioni, ha ottenuto, per le differenze dei campi molecolari componenti, nella pirrotite,

$$\begin{cases} (b_1 - b_2) I = 7300 \text{ gauss} \\ (b_2 - b_3) I = 150000 \text{ gauss} \end{cases} \quad (13.0.166)$$

P. Weiss, in un ampio lavoro, ha applicato la sua teoria al ferro ferromagnetico, che egli considera un conglomerato di cristalli che soddisfano isolatamente le equazioni (72). Ha studiato l'azione dei campi deboli, medi e forti, l'influenza della temperatura e i fenomeni di isteresi. Non possiamo riprodurre i calcoli dell'autore, che sono un po' lunghi, e ci limiteremo ad indicare alcuni risultati. Con campi molto deboli, P. Weiss ha trovato la suscettibilità

$$\chi = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{b_1 - b_2} + \frac{1}{b_1 - b_3} \right) \quad (13.0.167)$$

cioè un'espressione indipendente dalla temperatura, cosa verificata per il ferro tra 6° e 100°. Invece dell'equazione (71), ha ottenuto, per il ferro, la relazione

$$\frac{T}{\theta} = \frac{3}{a} \frac{I}{I_0} + \frac{3H}{abI_0} \quad (13.0.168)$$

$H$  è il campo esterno e  $\theta$  la temperatura alla quale il ferromagnetismo svanisce.

Dalla (64) e (75), si deduce la dipendenza tra  $T : \theta$  e  $I : I_0$  per  $H$  dato. Quando  $H$  è piccolo, la (66) dà

$$\frac{T}{\theta} = 1 - \frac{H}{bI} \quad (13.0.169)$$

La differenza  $T - \theta$  è quindi inversamente proporzionale alla magnetizzazione residua  $I$ , il che concorda in maniera notevole con le esperienze di P. Curie. Per le alte temperature P. Weiss ha ottenuto, invece della formula Curie  $\chi' T = \text{cost}$ , la relazione

$$\chi'_m (T - \theta) = \text{cost} \quad (13.0.170)$$

riferendosi  $\chi'_m$  a una temperatura superiore al punto di trasformazione di Curie. Uno studio più approfondito delle proprietà del ferro, sopra i tre diversi punti di trasformazione, ha evidenziato l'enorme valore del campo molecolare

$$bI = 80000000 \text{ gauss} \quad (13.0.171)$$

Weiss e Foëx (1911) hanno verificato la relazione (77) in Fe, Ni.Co, magnetite e 9 leghe Fe-Ni e hanno determinato il valore delle costanti corrispondenti per gli intervalli tra i punti di trasformazione.

Weiss e Beck (1908) hanno applicato anche la teoria del campo molecolare alla questione della variazione di calore specifico alla temperatura di trasformazione. Il calore specifico  $c$  di un corpo magnetico è costituito da due parti:

$$c = c_0 + c_m \quad (13.0.172)$$

$c = c_0$  quando il corpo non è magnetico, e si ha

$$c_m = A \frac{dE}{dt} \quad (13.0.173)$$

dove  $A$  è l'equivalente termico del lavoro e  $E$  l'energia magnetica dell'unità di massa. Si ha

$$E = -\frac{1}{2} H I \quad (13.0.174)$$

dove  $H = bI$  è l'intensità del campo molecolare. Il secondo termine della (79), che esprime il lavoro di magnetizzazione nascente molecolare, si annulla improvvisamente alla temperatura  $\theta$  e si verifica un salto nel valore di  $c$ ; questo salto, pari a  $c_m(\theta)$ , può essere calcolato mediante i dati magnetici. Nella tabella seguente sono riportati i valori calcolati di  $c_m(\theta)$  e quelli misurati termicamente:

	Valore calcolato	Valore osservato
Ferro	$\theta = 753^\circ + 273^\circ$	$758^\circ + 273^\circ$
	$c_m(\theta) = 0,136$	0,112
Nickel	$\theta = 376^\circ + 273^\circ$	$376^\circ + 273^\circ$
	$c_m(\theta) = 0,025$	0,027
Magnetite	$\theta = 588^\circ + 273^\circ$	$580^\circ + 273^\circ$
	$c_m(\theta) = 0,048$	0,050



L'accordo è notevole.

Passiamo ora all'importantissima teoria dei *magnetoni* di P. Weiss, che è analoga alla teoria degli elettroni. L'idea fondamentale è la seguente. Sia  $I_0$  l'intensità di saturazione di un grammo-atomo della sostanza magnetica. Se si determina questa grandezza  $I_0$  per diverse sostanze, si osserva che i numeri  $I_0$  sono multipli di un unico e stesso numero  $K$ , che P. Weiss ha chiamato *magnetone-grammo*. Dividendo  $K$  per il numero  $N$  di Avogadro, cioè per il numero di atomi presenti in un atomo-grammo, si ottiene il momento magnetico  $m$  del magnete elementare o magnetone. Le esperienze di P. Weiss e Kamerlingh-Onnes hanno dato, per l'intensità di saturazione alla temperatura dell'idrogeno liquido, nel ferro  $I_0 = 13360$ , nel nichel  $I_0 = 3370$ ; si ha così

Ferro	13360 : 11 =	1123,6
Nichel	3370 : 3 =	1123,3
Media		1123,5

Il *magnetone-grammo* è quindi uguale a  $K = 1123,5$ . P. Weiss assume  $N = 68,5 \cdot 10^{22}$  e ottiene, per il momento  $m$  del magnetone

$$m = 16,40 \cdot 10^{-22}$$

Una molecola di ferro contiene 11 magnetoni, una molecola di nichel 3 magnetoni.

P. Weiss ha mostrato che  $I_0$  è proporzionale a  $\sqrt{C}$ , essendo  $C$  la costante di Curie. Per la magnetite, P. Weiss ha determinato il valore di  $C$  in 5 intervalli di temperatura, tra i vari punti di trasformazione, cioè  $581^\circ - 622^\circ$ ,  $622^\circ - 680^\circ$ ,  $680^\circ - 710^\circ$ ,  $710^\circ - 770^\circ$ ,  $770^\circ - 900^\circ$  e sopra i  $900^\circ$ . Ne risultano i valori relativi delle grandezze che assume  $I_0$ , e si trova che questi valori stanno tra loro molto approssimativamente come  $4 : 5 : 6 : 8 : 10$ . Nelle trasformazioni, il momento di una molecola cambia secondo un semplice rapporto razionale.

P. Weiss ha studiato inoltre le soluzioni di sali paramagnetici e, utilizzando i coefficienti di temperatura dell'intensità magnetica rilevati da Pascal, ha calcolato le corrispondenti costanti di Curie e quindi le intensità di saturazione molecolare. Per 17 sostanze (su 27) ha ottenuto un ottimo accordo, tanto che l'esistenza del magnetone è da considerarsi dimostrata per Fe, Ni, Co, Mn, Cu, Hg e U. Come valore medio, P. Weiss ha trovato, con questi calcoli,  $K = 1122,1$ , risultato che differisce ben poco dal numero 1123,5 sopra indicato, ottenuto per i metalli ferromagnetici solidi Fe e Ni.

P. Weiss, mediante misurazioni Liebkecht e Wills su diversi sali di nichel, ha trovato 16,06 - 16,11 - 16,06 - 16,01 - 15,95 - 16,02, cioè, con grande precisione, 16 magnetoni nella molecola del nichel. Ha utilizzato anche gli esperimenti di M.elle Feytis (1911) sui sali magnetici solidi di Fe, Mn, Co e Cr e ha ottenuto concordanze dello stesso ordine.

Molto interessanti sono anche i risultati che P. Weiss ha dedotto dai suoi esperimenti in comune con Foëx (1911) sui metalli ferromagnetici al di sopra del punto Curie. Per il Ni puro ha trovato 8 magnetoni, per il ferro al nichel 9 magnetoni. Anche Bloch (1911) ha trovato i numeri 8 e 9. È notevole che a temperature molto basse si sono trovati solo 3 magnetoni nella molecola di nichel e, nelle soluzioni di sali di nichel, 16 magnetoni. Nel cobalto ci sono 15 magnetoni, sia per il metallo puro che per le leghe Ni-Co.

Nel Fe, P. Weiss ha distinto tre modificazioni: il ferro  $\beta_1$  tra  $774^\circ$  e  $828^\circ$ , ferro  $\beta_2$  tra  $828^\circ$  e  $920^\circ$ , e ferro  $\gamma$  tra  $920^\circ$  e  $1395^\circ$ . Ammettendo che il ferro  $\beta$  sia costituito da  $Fe^3$  e il ferro  $\gamma$  da  $Fe^2$ , si trovano nel ferro  $\beta_1$ , 12 magnetoni, nel ferro  $\beta_2$  10 e nel ferro  $\gamma$  20.

Per mezzo delle ricerche di Urbain sulle terre rare, P. Weiss (1911) ha ottenuto per il grammo-magnetone il valore  $K = 1122,7$ . Nel settembre 1912, P. Weiss ha fatto sapere che l'esistenza del magnetone è dimostrata per Fe, Ni, Co, Cr, Mn, V, Cu e U (forse Hg deve essere sostituito a V?) .

Menzioneremo brevemente alcune altre opere relative al presente argomento. Kunz (1910) ha esteso la teoria dell'isteresi e l'ha applicata a Fe, Ni e magnetite. Bloch (1912) ha studiato di nuovo Ni e Co e trovato che il Ni puro, tra  $T = 770^\circ$  e  $1200^\circ$ , contiene 8 magnetoni, ma a temperature più elevate 9. Il cobalto contiene, tra  $T = 1460^\circ$  e  $1645^\circ$ , 15 magnetoni. R. H. Weber (1911) ha studiato le proprietà magnetiche dei sali di Fe, Ni, Co, Mn e Cr e confrontato i risultati con la teoria del magnetone. Indicando con  $n$  il numero di magnetoni, si ottiene :  $n = 19$  in  $CrCl^3$ ,  $n = 25$  in  $CrCl^2$ ,  $n = 25$  in  $MnPO^4$ ,  $n = 27$  in  $FeSO^4$ ,  $n = 16$  in  $NiSO^4$ . Al contrario  $CoSO^4$ ,  $MnSO^4$  e  $Fe^2(SO^4)^3$  non hanno mostrato alcun accordo con la teoria. Stifler (1911) si è occupato delle proprietà magnetiche del cobalto e ha determinato il punto Curie  $\theta_2$ , l'intensità  $H$  del campo molecolare, il momento  $m$  di un magnetone e il numero  $n$  di magnetoni in un magnete elementare. Ha ottenuto  $\theta = 1075^\circ C$ ,  $H = 8870000$  gauss,  $m = 6,21 \cdot 10^{-20}$  C.G.S. e  $n = 4$ . Wedekind e Horst (1912) hanno determinato il numero di magnetoni per le combinazioni di vanadio VO, VS, VAz e VOCl. Heydweillwer (1911) ha espresso dubbi sulle basi sperimentali della teoria dei magnetoni, ma R. Gans (1912) ha dimostrato che erano infondati. P. Langevin, in una riunione di scienziati tenutasi a Bruxelles dal 30 ottobre al 3 novembre 1911, sotto gli auspici di E. Solvay, sottolineò una notevole relazione tra l'ipotesi dei magnetoni e quella degli elementi d'azione di Planck, nella forma datagli da Sommerfeld (vedi *Rapporti e discussioni sulla teoria della radiazione e dei quanti*, pubblicati da P. Langevin e De Broglie, Parigi 1912, p. p. 313-392, 393-404).

# 14. Azione del campo magnetico sui corpi che contiene

## 1. Introduzione

Abbiamo studiato nel Cap. III, l'azione del campo elettrico sui corpi in esso contenuti. Il campo magnetico agisce, e sembra in modo più intenso e profondo, anche sulle proprietà dei corpi; non solo cambiando quantitativamente le varie grandezze fisiche che caratterizzano le sostanze, ma in molti casi i fenomeni che si manifestano in un corpo o in un sistema di corpi presentano un nuovo aspetto qualitativo quando avvengono in un campo magnetico. L'azione del campo magnetico assume forme molteplici e molto diverse. Abbiamo già considerato la magnetizzazione, cioè l'acquisizione da parte dei corpi di ferromagnetismo, paramagnetismo o diamagnetismo; abbiamo visto che si deve considerare anche un'azione dei corpi sul campo magnetico, dove le linee di forza ricevono una nuova distribuzione in presenza di questi corpi. Nel § 4 dello stesso Capitolo abbiamo studiato l'azione particolare del campo magnetico sulla forma e sulle dimensioni di un dato corpo.

Tutta una serie di fenomeni notevolissimi, dovuti all'influenza del campo magnetico, saranno oggetto dei capitoli successivi di quest'opera. Tale è l'azione del campo magnetico sulla conducibilità elettrica, che sarà considerata nel Capitolo XV. Più avanti (Volume V), faremo conoscere l'importante gruppo di fenomeni, in cui l'azione del campo magnetico sull'energia radiante propagata nei corpi o da essi emessa (rotazione magnetica del piano di polarizzazione, fenomeno di Zeemann), nonché l'insieme dei fenomeni che compaiono nei corpi in cui è presente una corrente elettrica o termica (fenomeno di Hall e suoi analoghi). Incontreremo ancora altre azioni del campo magnetico, ma sarebbe prematuro parlarne ora.

## 2. Reazioni chimiche, forza elettromotrice e cristallizzazione

Il campo magnetico sembra non avere quasi alcuna azione sulle reazioni chimiche. Le ricerche di Cavallo (1787), d'Arnim (1800), Rendu (1828), Erman (1829) ed altri hanno portato a risultati negativi o dubbi. Lo stesso vale per i nuovi lavori di Fossti (1890, Azione del cloruro di ferro sullo zinco) e Löb (1891). Risultati più chiari furono ottenuti da Andrews (1892), il quale ha osservato che l'acciaio magnetizzato, posto in una soluzione di  $CuCl^2$ , subisce una diminuzione di peso più rapidamente dell'acciaio non magnetizzato. Nichols, ancora più recentemente, ha trovato che il ferro si scioglie negli acidi più rapidamente e con maggior sviluppo di calore, quando la dissoluzione avviene in un campo magnetico; ma Berndt (1908) ha dimostrato che l'aumento del calore liberato è un fenomeno secondario, e che il campo magnetico, distribuendo le particelle di ferro lungo le linee di forza, modifica la caratteristica della soluzione, rendendola più ordinata; non crede che ci sia, in questo caso, un'azione specifica del campo. Hemptinne (1900) ha stabilito che, teoricamente, il campo magnetico deve agire sull'equilibrio chimico di un sistema complesso; ma, in pratica, questa azione è troppo insignificante per essere rilevata; gli esperimenti da lui effettuati non hanno mostrato alcuna azione del campo sulla velocità di combinazione di cloro e idrogeno. Allo stesso modo, Schweitzer (1902) non ha trovato alcuna azione del campo magnetico sui sali di argento e ferro sensibili alla luce, né sulle reazioni fotochimiche in questi sali.

Molto più chiara è l'azione del campo magnetico sulla forza elettromotrice. Quando due lastre di ferro identiche sono immerse in un liquido e una di esse è sottoposta all'azione di un campo, si genera una forza elettromotrice  $E$ . Tale fenomeno è stato osservato per la prima volta da Gross (1885), Andrews (1887), Nichols e Franklin (1887), Rowland e Bell (1888), Grimaldi (1889), Squier (1893) ed altri. Nichols e Franklin hanno trovato che, nel liquido, una corrente va dal ferro magnetizzato al ferro non magnetizzato; ma Rowland e Bell hanno osservato una corrente nella direzione opposta. Nichols e Franklin hanno scoperto anche che un campo intenso modifica la forza elettromotrice  $E$  di un elemento costituito da Fe e Pt in acido solforico diluito con un doppio sale di cromo e potassa. Recentemente si sono occupati della stessa questione Bucherer (1896), Sala e Fournier (1896), Paillot (1900), Wyss (1900) e Hurmuzescu (1894 - 1900) si sono occupati dello stesso questione. Paillot ha trovato che, per due lastre di ferro,  $E$  può raggiungere 0,04 volt, per Bi 0,002 volt; Bucherer ritiene tuttavia che questi numeri siano troppo elevati.

Remsen (1881) ha fatto un'esperienza interessante; ha posto un vaso di ferro, riempito con una soluzione di solfato di rame, sui poli di un potente elettromagnete; si osserva che il rame precipita in modo diseguale, ed in minore quantità nei luoghi più fortemente magnetizzati, dove l'azione chimica è conseguentemente più debole.

Janet (1887), Duhem (1888), J. J. Thomson (1888) e Hurmuzescu (1895) hanno fornito formule teoriche per la forza  $E$ . Secondo Hurmuzescu, si ha

$$E = \frac{l}{\delta} \frac{I^2}{2\chi}$$

dove  $l$  è l'equivalente elettrochimico,  $\delta$  la densità del ferro,  $I$  la tensione (intensità) magnetica,  $\chi$  la suscettibilità magnetica. Hurmuzescu ha concluso dai suoi esperimenti che, in un elemento, il ferro magnetizzato svolge, rispetto al ferro non magnetizzato, il ruolo di polo positivo; lo stesso vale per il nichel; per i corpi diamagnetici (bismuto) si osserva il contrario. Wyss (1900) ha trovato che il valore di  $E$ , nell'elemento Pt-soluzione di sale di ferro-Fe, diminuisce sotto l'azione del campo magnetico; attribuisce questo fenomeno alla variazione di concentrazione della soluzione dovuta all'attrazione del sale da parte del Fe.

Posejpal (1909) non ha osservato alcuna azione significativa del campo magnetico sulla forza elettromagnetica al contatto di due metalli, quando tutte le saldature sono alla stessa temperatura. Adams (1910) è giunto allo stesso risultato negativo, studiando le coppie di metalli Au|Zn, Pt|Zn, Au|Fe; la variazione non ha raggiunto 0,001 volt.

Urbach (1900) ha osservato i movimenti dell'acido, sotto l'azione del campo magnetico, durante la dissoluzione di vari metalli, cioè quando gli ioni di questi metalli passano in soluzione. Queste osservazioni hanno portato ad una lunga controversia tra lui e Drude, il quale riteneva che i movimenti del liquido fossero spiegati dall'azione del campo sulle correnti termoelettriche che si formavano tra le regioni diversamente calde del liquido.

Stephan Meyer (1899) ha notato un'azione del campo magnetico nella cristallizzazione di  $CuSO^4$ ,  $MnSO^4$ ,  $COCl^2$  e di alcuni altri sali; gli assi dei cristalli tendono a disporsi lungo le linee di forza o trasversalmente a queste linee; per molti altri,  $FeSO^4$ ,  $CuSO^4$ ,  $NiSO^4$ ,  $ZnSO^4$ , non è stata osservata alcuna azione del campo.

### 3. Elasticità, attrito interno e tensione superficiale

Considereremo innanzitutto l'azione del campo magnetico sul modulo di Young  $E$  e sul modulo di taglio (scorrimento)  $N$ .

Il modulo di Young  $E$  varia sicuramente molto poco sotto l'azione del campo magnetico. Gli esperimenti di Wertheim (1842), Tomlinson (1886), Barus (1887) e Bock (1890) non hanno portato a risultati apprezzabili; Brackett (1897) e Stevens (1900) hanno trovato che il modulo  $E$  del filo di ferro aumenta con la magnetizzazione, ma Shakspear (1899) ha osservato che

diminuisce. Tangl (1901) ha dedotto dalle sue ricerche che il modulo  $E$  di Fe e Ni aumenta per magnetizzazione. Gli scienziati giapponesi Honda, Shimizu e Kusagade (1902) hanno fatto uno studio molto approfondito sulla questione, riconoscendo che, per Fe, acciaio e cobalto, il modulo  $E$  aumenta in funzione del campo seguendo la stessa legge della magnetizzazione  $I$ ; per il Ni si osserva una diminuzione di  $E$  nei campi deboli e un aumento in quelli forti; la variazione di  $E$  raggiunge, in alcuni casi il 3,6%.

J. J. Thomson (1888), Houllevigue (1899), Kolacek (1904), Heydeweller (1903), Gans (1904) e Sano (1904) hanno studiato teoricamente l'azione del campo magnetico sulle proprietà elastiche delle sostanze ferromagnetiche. Come era prevedibile, esiste una stretta relazione tra le leggi della magnetostrizione - deformazione dovuta alla magnetizzazione -, l'influenza della magnetizzazione sulle proprietà elastiche ( $E$  e  $N$ ) e quella della deformazione sulle proprietà magnetiche dei corpi. Houllevigue ha trovato che  $dE : dI$  deve avere un segno diverso da  $dl : dp$ , dove  $p$  designa la forza di estensione in un filo; ciò si verifica in un filo di nichel, dove la prima quantità è negativa, la seconda positiva. Gans ha indicato una formula molto completa; essendo la permeabilità magnetica del mezzo circostante uguale a uno (aria), si ha

$$\frac{\partial e}{\partial H} = \frac{\partial I}{\partial p} + \frac{I(1-2\sigma)}{E} + \frac{2\pi}{E} \frac{\partial I^2}{\partial H} \quad (14.0.1)$$

dove  $e$  indica l'allungamento relativo esistente già nel filo,  $p$  la forza di estensione (per unità di area della sezione trasversale),  $\sigma$  il coefficiente di Poisson,  $H$  l'intensità del campo magnetico. Dalla definizione del modulo di Young, si ha  $Ede = dp$ ; l'equazione (1) dà pertanto

$$\frac{1}{E^2} \frac{\partial E}{\partial H} = -\frac{\partial^2 I}{\partial p^2} - \frac{1-2\sigma}{E} \frac{\partial I}{\partial p} - \frac{2\pi}{E} \frac{\partial I^2}{\partial H \partial p} \quad (14.0.2)$$

Se si ammette che gli ultimi termini sono relativamente piccoli, si può porre

$$\frac{1}{E^2} \frac{\partial E}{\partial H} = -\frac{\partial^2 I}{\partial p^2} \quad (14.0.3)$$

Introducendo la suscettibilità magnetica  $\chi = I : H$  dove l'induzione magnetica  $B = \mu H = (1 + 4\pi\chi) H$ , si ha infine

$$\frac{\partial E}{\partial H} = -E^2 H - \frac{\partial^2 \chi}{\partial p^2} = -\frac{E^2}{4\pi} \frac{\partial^2 B}{\partial p^2} \quad (14.0.4)$$

Queste uguaglianze danno un'idea molto chiara della relazione che esiste tra la dipendenza delle proprietà elastiche rispetto allo stato magnetico e la dipendenza delle proprietà magnetiche rispetto alla deformazione elastica dovuta a forze esterne. Rensing (1904), Cantone (1904), e in particolare Honda e Terada (dal 1905 al 1907) hanno verificato queste formule, che concordano in modo soddisfacente con i risultati delle loro misure sperimentali. La teoria su cui si basano, però, non tiene conto dei fenomeni di isteresi, il cui effetto si è manifestato negli esperimenti di Honda e Terada, dove l'ordine di successione della magnetizzazione e dell'estensione ha influenzato l'esito di entrambe le azioni.

A quanto detto si collega l'azione del campo magnetico sul numero  $n$  di vibrazioni di un diapason. Gli esperimenti di Wartmann (1848) non avevano dato risultati molto chiari. Tréve (1868) ha osservato che le figure di Lissajous cambiano, quando uno dei due diapason è magnetizzato, ciò che si può spiegare con l'azione immediata del campo sui rami del diapason, e non con una variazione delle loro proprietà elastiche. Maurain (1895) ha riscontrato che  $n$  diminuisce quando le linee di forza sono parallele al piano di vibrazione, e aumenta quando sono normali ad esso. Kirstein (1903) è arrivato allo stesso risultato; ha riconosciuto inoltre che la variazione di  $n$  è proporzionale all'intensità  $H$  del campo; per  $H$  assegnato, la diminuzione di  $n$

è maggiore del suo aumento; quando  $H$  forma un angolo di  $45^\circ$  con il piano di vibrazione,  $n$  è indipendente da  $H$ .

Gli autori precedenti e soprattutto Löffler (1901) hanno studiato l'azione del campo magnetico sul modulo di taglio  $N$ . Si nota che il modulo  $N$  di un filo aumenta per magnetizzazione; questo aumento è indipendente dall'entità della torsione; supera quello del modulo  $E$ . Bisogna quindi aspettarsi che il coefficiente di Poisson  $\sigma$  diminuisca per la magnetizzazione; gli esperimenti di Bock (1895), invece, hanno dato il risultato opposto, ma necessitano di essere verificati. Si possono così stabilire, per il modulo  $N$ , formule teoriche analoghe a quelle sopra indicate.

Abbiamo in precedenza considerato l'azione esercitata da un'estensione o da una torsione sulla magnetizzazione del ferro. Osserviamo in modo simile un'azione di magnetizzazione sulla deformazione del ferro per cause esterne. Di questa questione si occuparono particolarmente G. Wiedemann (1858) e Moreau (1896); un'esposizione dettagliata delle loro ricerche si trova nell'opera di G. Wiedemann, *Die Lettre der Electricität*, Tomo III, pp. 790-812, 1895. In generale si può dire che quando una deformazione di una determinata natura aumenta (diminuisce) la magnetizzazione per un dato  $H$ , il campo  $H$  aumenta (diminuisce) la stessa deformazione preesistente. Pertanto la torsione del ferro diminuisce ( $N$  aumenta) nel campo magnetico e la magnetizzazione diminuisce per la torsione. Per il Ni, si osserva il contrario nei campi deboli.

Tomlinson (1886), così come Gray e Wood (1902), hanno considerato l'azione del campo magnetico sull'attrito interno di ferro e nichel e hanno osservato il decremento logaritmico  $\lambda$  delle vibrazioni di torsione. Sono arrivati a risultati contraddittori, che dipendono dalla storia precedente del filo. Gray e Wood hanno trovato che, per il ferro,  $\lambda$  diminuisce all'aumentare del campo  $H$ .

W. König (1885) ha studiato soluzioni di  $MnSO_4$  e non ha trovato alcuna azione del campo magnetico sull'attrito interno. Carpinì (1903) ha operato con vari liquidi (cloruro di ferro e altri) e ha osservato variazioni non superiori allo 0,3%, probabilmente derivanti dagli inevitabili sbalzi di temperatura che si verificano quando si crea il campo magnetico. Sembra che anche la coesione e la tensione superficiale dei liquidi non varino sotto l'azione del campo magnetico, secondo gli esperimenti di Brunner e Mousson (1850).

#### 4. Pressione di vapore, capacità termica e conducibilità termica

Abbiamo visto che nel campo magnetico l'altezza della colonna di liquido in un tubo capillare varia della quantità  $h$  determinata dalla formula

$$h = \frac{(\chi - \chi') H^2}{2g\delta} \quad (14.0.5)$$

essendo  $\chi$  e  $\chi'$  le suscettibilità magnetiche rispettive del liquido e del gas o del vapore che si trova al di sopra del liquido,  $H$  l'intensità del campo,  $\delta$  la densità del liquido e  $g = 981$ . Consideriamo un tubo chiuso a forma di rettangolo (piegato quattro volte ad angolo retto), disposto verticalmente; il ramo orizzontale inferiore ed i rami laterali contengono un liquido sormontato dal suo vapore. Quando uno dei rami laterali viene portato in un campo magnetico  $H$ , il liquido sale in questo ramo di  $h$  cm più in alto che nell'altro. Siano  $p_0$  e  $p$  le tensioni di vapore al di sopra del liquido, rispettivamente all'esterno e all'interno del campo magnetico. Per l'equilibrio, si deve avere

$$p = p_0 - hg\delta \quad (14.0.6)$$

essendo  $\delta$  la densità del vapore. Königsberger (1898) ha stabilito la formula (6) nel modo ovviamente non rigoroso che abbiamo appena indicato. P. Duhem (1890) ha introdotto una formula molto più completa, che si può scrivere, per  $p - p_0$  piccolo, come segue:

$$p = p_0 - 2(1 + c) \left( 1 + \frac{c}{2v} \frac{dv}{dc} \right) hg\sigma \quad (14.0.7)$$

dove  $c$  indica la concentrazione,  $v$  il volume specifico della soluzione;  $h$  è determinato dalla formula (5). In ogni caso non c'è dubbio che il campo magnetico agisce sulla tensione di un vapore saturo. Du Bois (1898) è pervenuto alla seguente espressione, per la variazione  $\Delta T$  della temperatura assoluta di ebollizione del liquido:

$$\Delta T = \frac{T\chi H^2}{2s\delta} \quad (14.0.8)$$

dove  $s$  indica il calore latente di vaporizzazione. Questa formula, con  $H = 50000$  unità C.G.S., dà, per l'ossigeno liquido  $\Delta T = +0,01^\circ$ , per l'acqua  $\Delta T = -0,000015^\circ$ , per l'etere etilico  $\Delta T = -0,0001^\circ$ , per l'amalgama di ferro studiato da Nagaoka  $\Delta T = 0,05^\circ$ .

Sano (1905) ha studiato in modo molto generale le condizioni di equilibrio di un sistema di liquidi elettrolitici in un campo magnetico.

Stefan (1871) e Wassmuth (1882) hanno mostrato teoricamente che la capacità termica  $C$  del ferro magnetizzato deve essere maggiore della capacità termica  $c$  del ferro non magnetizzato; Stefan ha ottenuto il valore limite  $C - c = 2,7 \cdot 10^{-8}$ . Si può dire che in pratica la capacità termica del ferro non cambia per magnetizzazione, un risultato completamente diverso si ottiene con certe leghe irreversibili di Fe e Ni, le quali, come abbiamo visto, possono, alla stessa temperatura, esistere in due stati diversi, uno magnetico, l'altro non magnetico.

B. Hill ha osservato che la capacità termica  $c$  di una lega non magnetica è maggiore della capacità termica  $C$  della lega magnetica. Ecco alcuni dei suoi numeri:

	$C$	$c$
0 - $18^\circ$	0,0924	0,0992
20 - $100^\circ$	0,1136	0,1158
20 - $270^\circ$	0,1222	0,1235

Dobbiamo considerare, come finora irrisolta, la questione molto interessante dell'azione del campo magnetico sulla conducibilità termica del ferro. Maggi (1850) fu il primo a constatare, col metodo di Senarmont, che il ferro magnetico ha una conducibilità termica inferiore, nella direzione delle linee di forza, rispetto a quella perpendicolare a queste linee, nel rapporto di 5 a 6. Tuttavia gli esperimenti di Holmgren (1862), Matteucci (1863), Naccari e Bellati (1877, metodo di Senarmont e metodo di misura delle temperature mediante il termometro), Trowbridge e Penrose (1883), Fossati (1890, metodo di Despretz) non hanno rivelato alcuna azione di magnetizzazione sulla conduttività termica  $k$ . Ma Tomlinson (1878, metodo di Despretz) ha osservato un aumento di  $k$  mediante una magnetizzazione trasversale e una diminuzione di  $k$  mediante magnetizzazione longitudinale. Le variazioni hanno raggiunto in alcuni casi il 3,3% e anche di più; ferro e acciaio hanno dato gli stessi risultati. Battelli (1886), che ha migliorato notevolmente il metodo di Tomlinson, ha trovato una riduzione di  $k$  per magnetizzazione longitudinale, non solo nel ferro, ma anche nel rame; per il ferro la variazione è stata di  $0,002k$ . Poi sono venuti gli esperimenti di Schweitzer (1900), Korda (1899, 1902), Blyth (1903) e Lafay (1903). Schweitzer ha usato il metodo degli anelli di Neumann; ha trovato che  $k$  diminuisce, nella direzione delle linee di forza, di una quantità  $\Delta k$  approssimativamente proporzionale alla magnetizzazione  $I$ . Korda (metodo Sénarmont) aveva precedentemente dedotto dai suoi esperimenti che  $k$  non varia perpendicolarmente alle linee di forza, ma diminuisce parallelamente alle stesse (fino al 12%); ha trovato, mediante considerazioni teoriche, che  $\Delta k$  deve essere proporzionale a  $I^2$  e non varia di conseguenza quando si verifica un cambio di direzione, cioè un cambio di segno di  $I$ . Blyth (metodo Despretz) ha ottenuto, per l'acciaio, una riduzione di  $k$  del 3% per magnetizzazione trasversale e per magnetizzazione longitudinale del 4%; con il ferro dolce la riduzione è del 10,5% per magnetizzazione longitudinale e del 1% per magnetizzazione trasversale. Lafay ha fatto esperimenti molto interessanti con il metodo Sénarmont e ha

riconosciuto per primo che l'asse maggiore dell'ellisse (isoterma) è disposto trasversalmente alle linee di forza, non solo per il ferro e il nichel, ma anche per il vetro e altri cattivi conduttori di calore. Ma, rinnovando le sue esperienze nel vuoto, ha trovato un cerchio, invece di un'ellisse, cioè lo stesso valore di  $k$  in tutte le direzioni. Ha concluso che, negli esperimenti di Maggi, Kordha e altri, il fenomeno osservato era dovuto ad una corrente d'aria calda normale alle linee di forza. Un'altra serie di esperimenti ha mostrato che, per il ferro, la grandezza  $k$  diminuisce leggermente con la magnetizzazione e della stessa quantità in tutte le direzioni. Da tutto quanto precede risulta che si deve considerare ancora del tutto aperta la questione dell'influenza della magnetizzazione sulla conducibilità termica del ferro.

Con il bismuto è diverso. Righi e Leduc hanno trovato simultaneamente (1887) che, nel bismuto, la conducibilità termica  $k$  diminuisce (così come la conducibilità elettrica) sotto l'azione del campo magnetico. Nernst (1887) non ha osservato questa influenza, ma Ettinghausen (1888) ha confermato che  $k$  diminuisce dal 2 al 3% in un forte campo magnetico. Blyth (1903) ha scoperto che la variazione di  $k$  raggiunge al massimo lo 0,5%.

## 5. Polarizzazione dielettrica, forza termoelettromotrice, effetto Peltier e dissoluzione

Hall (1880), Van Aubel (1885), Palaz (1887) e Drude (1894) hanno dedotto dai loro esperimenti che il campo magnetico non ha alcuna influenza sulla polarizzazione dielettrica dei non conduttori, e di conseguenza anche sulla costante dielettrica  $K$ . Van Aubel ha studiato la paraffina, la guttaperca, il vetro e lo zolfo, e dimostrato che, negli esperimenti di Kimball (1885), che aveva riscontrato un'influenza del campo, alcune fonti di errore non erano state considerate. Koch (1897) non ha osservato alcuna influenza del campo sull'indice di rifrazione  $n$  di un gran numero di corpi solidi, liquidi e gassosi, il che indica anche l'invariabilità di  $K = n^2$ . Duane (1896) ha notato un'influenza ritardante del campo su un dielettrico animato da un movimento rotatorio; ma più tardi (1897) ha riconosciuto che questo fenomeno si spiega con la presenza di tracce di ferro nel dielettrico. Campetti (1897) ha spiegato teoricamente il fenomeno osservato da Duane, ma Benndorf ha mostrato che la sua analisi era inesatta.

W. Voigt (1910) ha stabilito che deve esserci una variazione di concentrazione nella soluzione di un sale paramagnetico, che si trova all'interno di un campo magnetico non uniforme; Statescu ha effettivamente osservato questo fenomeno con una soluzione da 20 gr. di  $FeCl^3$  in 100 gr di acqua.

Abbiamo già indicato che il campo magnetico esercita una notevole influenza sulla forza termoelettromotrice  $e$ . Consideriamo innanzitutto i corpi ferromagnetici. Si osserva che la magnetizzazione modifica la posizione del ferro nella serie termoeletttrica, rendendola più positiva; in altre parole la corrente passa attraverso la saldatura calda andando dal ferro non magnetizzato a quello magnetizzato. Questo fenomeno fu dimostrato per la prima volta da W. Thomson (1856); ha scoperto inoltre che la corrente passa attraverso la saldatura calda andando dal ferro magnetizzato trasversalmente al ferro magnetizzato longitudinalmente. Strouhal e Barus (1881), Th. Pétrouschewski (1882), Ewing (1886), P. Bachmétieff (1891), Battelli (1893), Chassagny (1893), Houllevigue (1895), Posejpal (1909) ed altri ancora hanno ottenuto lo stesso risultato. Il valore di  $e$  è molto piccolo; Strouhal e Barus hanno trovato che, nella formula di Avenarius  $e = a(t_2 - t_1) + e(t_2^2 - t_1^2)$ , si ha, con la coppia ferro-rame,  $a \cdot 10^5 = 13,05$  e  $c \cdot 10^7 = -2,62$ ; ma, con una coppia di ferro magnetizzato e non magnetizzato,  $a \cdot 10^5 = 0,037$  e  $c \cdot 10^7 = 0,015$ . Bachmétieff ha magnetizzato fili di ferro e nichel per poi sottoporli ad allungamento; ha trovato che l'effetto della magnetizzazione, che produce una variazione di lunghezza, è lo stesso dello stiramento dovuto a causa meccanica; in altre parole, la variazione di  $e$  dovuta alla magnetizzazione è una conseguenza della magnetostirazione. Chassagny ha studiato la coppia Cu-Fe e osservato che quando il campo aumenta,  $e$  prima cresce, poi diminuisce. Houllevigue ha



determinato con molta cura i valori di  $e$  per le coppie ferro-rame e acciaio-rame; ha espresso  $e$  sotto forma di funzione empirica dell'intensità  $H$  del campo; la sua formula per la coppia ferro-rame è la seguente:

$$e = 10^{-7} \left\{ 125 (t_2 - t_1) + 0,508 (t_2^2 - t_1^2) \right\} \frac{H (350 - H)}{1 + 0,0428H}$$

Houllevigue ha dedotto dalla formula che segue, per la forza termoelettromotrice del ferro rispetto al piombo:

$$[Fe, Pb] = -14,39 + 0,430t - 10^{-7} (125 + 1,016t) \frac{H (350 - H)}{1 + 0,0428H}$$

Posejpal ha studiato le coppie Fe-Zn, Fe-Cu e Cu-Zn; è assai significativo che abbia riconosciuto anche un'azione del campo sulla coppia Cu-Zn.

Grimaldi (1887) si è occupato del bismuto diamagnetico. Una barra di bismuto occupava una posizione equatoriale tra i poli di un elettromagnete; i suoi punti di saldatura con fili di rame vengono mantenuti rispettivamente a  $0^\circ$  e  $100^\circ$ . Il bismuto commerciale ha mostrato una diminuzione (3%) della forza termoelettromotrice  $e$  e il bismuto puro, al contrario, un aumento. In una posizione polare dell'asta, l'azione del campo è più debole e rimane la stessa per tutti i tipi di bismuto. La variazione relativa di  $e$  sembra proporzionale a  $H^2$ . Successivamente Defregger (1897) ha trovato che l'azione del campo dipende dalla direzione considerata nel cristallo di bismuto; essa aumenta contemporaneamente all'angolo tra l'asse del cristallo e la direzione delle linee di forza. Spadavecchia (1899) ha studiato ulteriormente il Bi e le sue leghe con Sn. L'azione del campo sulla coppia rame-lega BiSn, cioè il valore di  $\Delta e$ , diminuisce dapprima al crescere della quantità in stagno e si annulla per dallo 0,056% allo 0,113% di stagno; poi,  $\Delta e$  cambia segno; tra lo 0,237% e il 2% di stagno si produce un secondo cambiamento di segno, e un terzo tra 80% e 83% di stagno. Per le stesse quantità di stagno, la forza  $e$  (senza la presenza di un campo) cambia segno. Spadavecchia ha ottenuto risultati analoghi per le coppie formate di rame e di leghe di Bi con Pb. Battelli ha mostrato che il fenomeno di Peltier cambia anche sotto l'azione del campo magnetico; è rafforzato negli elementi Fe-Cu e Fe-Ni, indipendentemente dalla direzione della magnetizzazione. Houllevigue (1896), Pocchetino (1899) e Van Aubel (1902) si sono occupati dello stesso fenomeno. Houllevigue ha osservato anche un'azione del campo sull'effetto Thomson; ha scoperto inoltre che quando una corrente passa attraverso una banda magnetizzata in modo diseguale, le cui parti sono tutte alla stessa temperatura, avviene qualcosa come un trasferimento di calore, per cui la temperatura cessa di essere uniforme.



# 15. Misura delle resistenze elettriche.

## Metodi e risultati<sup>1</sup>

### 1. Introduzione

Abbiamo descritto nel cap. IV i più importanti metodi di misura delle grandezze che intervengono nell'elettrostatica. Dobbiamo ora considerare i metodi di misura di alcune grandezze che abbiamo incontrato nei precedenti capitoli, dedicati allo studio delle grandezze elettromagnetiche; indicheremo inoltre, lungo il percorso, i risultati delle misure che, per vari motivi, potrebbero offrire interesse. È assolutamente impossibile e del resto non è affatto necessario considerare, in un unico Capitolo, la misura di tutte le grandezze elettromagnetiche. Siamo necessariamente portati a distribuire l'esposizione dei metodi impiegati nei diversi Capitoli, soprattutto se ci lasciamo guidare da considerazioni di carattere didattico. Lo abbiamo già fatto per la misura della resistenza degli elettroliti (i metodi stessi verranno spiegati più avanti); abbiamo inoltre descritto dettagliatamente i metodi di misura della suscettività magnetica  $\chi$  e la permeabilità magnetica  $\mu$  delle sostanze ferromagnetiche, paramagnetiche e diamagnetiche, nonché i risultati forniti da questi metodi.

Rimanderemo invece al Volume V lo studio dei metodi di misura delle grandezze che incontreremo occupandoci del campo magnetico variabile. Per ora ci soffermeremo sulla misura delle resistenze elettriche, su quella dell'intensità delle correnti, della forza elettromotrice, dell'intensità del campo magnetico, ed infine su quella del rapporto  $v$  dell'unità elettromagnetica di quantità di elettricità a l'unità elettrostatica. Spesso saremo portati a supporre noti dei fenomeni e ad utilizzare leggi, che riguardano lo studio del campo magnetico variabile. Tali deroghe ad una logica rigorosa sono inevitabili e non è la prima volta che si verificano.

Abbiamo dato, nel Volume I (Parte 3, Cap. I), alcune indicazioni generali sull'arte di misurare le grandezze fisiche. Abbiamo poi detto (§ 1) che è impossibile, in un Trattato di Fisica Generale, entrare in tutti i dettagli e considerare tutti i casi particolari. Le misure elettriche costituiscono, in particolare, un campo di studi autonomo e molto vasto, essendo oggetto di insegnamenti specifici in numerose università e istituti tecnici superiori. Non si può imparare l'arte di effettuare misure elettriche dai libri; può essere padroneggiata solo con la pratica.

Alle misure elettriche sono dedicate numerose opere speciali, nonché ampie parti di trattati, che si occupano da un punto di vista generale della misura delle grandezze fisiche. Vi si troveranno esposti in dettaglio i molteplici metodi di misura di tutte le possibili grandezze elettromagnetiche; essi contengono la descrizione della strumentazione utilizzata e indicazioni complete sulle modalità operative. Non possiamo entrare qui in questi sviluppi e dobbiamo limitarci a far conoscere il principio dei metodi principali. Il numero degli strumenti che possono essere usati per misurare ciascuna delle grandezze di cui abbiamo parlato è estremamente vasto; se ne immaginano costantemente di nuovi o si perfezionano quelli esistenti. La descrizione ed i disegni di questi strumenti si troveranno nelle pubblicazioni appositamente dedicate all'elettricità o agli apparecchi di misura, nonché nei cataloghi delle case produttrici. La nostra descrizione si limiterà ad alcuni strumenti, i più tipici tra gli apparecchi moderni.

---

<sup>1</sup>Ho potuto avvalermi ampiamente, per la scrittura di questo Capitolo, dei consigli e delle indicazioni dell'amico Professor A. L. Gerschoun, al quale rivolgo qui i miei più sinceri ringraziamenti.

## 2. Scelta delle tre principali unità pratiche: ohm, ampere e volt

Abbiamo fatto conoscere il sistema di unità elettromagnetiche (el. mag.) e in particolare il sistema el. mag. C.G.S. Abbiamo ulteriormente indicato le unità pratiche impiegate nella tecnica; tra questi ci sono l'*ohm*, unità di resistenza, l'*ampere*, unità di intensità di corrente, e il *volt*, unità di forza elettromotrice o differenza di potenziale. Queste unità pratiche sono espresse in termini di unità el. mag. C.G.S. come segue:

$$\begin{cases} 1 \text{ ohm} = 10^9 \text{ unità el. mag. C.G.S. di resistenza} \\ 1 \text{ ampere} = 0,1 \text{ unità el. mag. C.G.S. di intensità di corrente} \\ 1 \text{ volt} = 10^8 \text{ unità el. mag. C.G.S. di forza elettromotrice} \end{cases} \quad (15.0.1)$$

Abbiamo visto che queste unità rispettano alla legge di Ohm; ciò significa che se la resistenza  $R$  è espressa in ohm, l'intensità  $I$  della corrente in ampere e la forza elettromotrice  $E$  in volt, la formula di Ohm può essere scritta senza coefficiente di proporzionalità, cioè nella forma  $I = E : R$ . Abbiamo anche dimostrato che il sistema delle unità pratiche è un sistema assoluto; è regolarmente costruito, sulle unità fondamentali di lunghezza  $L = 10^9 \text{ cm}$ , di massa  $M = 10^{-11} \text{ g}$  e di tempo  $T = 1 \text{ s}$ . Le uguaglianze (1), che definiscono le tre unità principali, hanno un carattere puramente teorico e per certi versi astratto, che non le rende adatte ad un'immediata applicazione pratica. Sotto questo aspetto le uguaglianze (1) ricordano un po' la definizione del metro come parte determinata del meridiano terrestre. Teoricamente potremmo limitarci a stabilire un unico standard, ad esempio l'ohm, come indicava Guillaume (1911); in questo caso il volt e l'ampere sarebbero determinati dalle leggi di Ohm e Joule, mentre il watt, considerato come grandezza puramente meccanica, verrebbe definito non come volt-ampere, ma come la potenza prodotta, quando il punto di applicazione della forza, imprimendo a  $1 \text{ kg}$  un'accelerazione di  $\frac{1 \text{ m}}{1 \text{ s}^2}$ , si sposta nella direzione di questa forza con una velocità di  $\frac{1 \text{ m}}{1 \text{ s}}$ .

Consideriamo ora la questione della realizzazione pratica delle tre unità, sotto forma di norme quanto più convenienti possibile, le cui modalità di preparazione e le cui proprietà potrebbero essere sancite da una convenzione internazionale e, in ciascuno Stato, da leggi precise. Ciascuna delle tre unità che possono essere oggetto di tale regolamentazione, le prenderemo in esame in successione.

1. UNITÀ DI RESISTENZA. Qualsiasi corpo allo stato solido o liquido, la cui resistenza è considerata uguale all'unità, può fungere da standard. Devono essere ben determinate la sostanza che lo costituisce, il metodo con cui va preparata, le dimensioni geometriche del corpo e le condizioni fisiche nelle quali la sua resistenza è pari all'unità.

Wheatstone (1843) ha proposto, come standard di resistenza, un filo di rame lungo 1 piede e pesante 100 grani, e Jacobi (1848) un filo di rame lungo 25 piedi ( $7,62 \text{ m}$ ) e spesso circa  $\frac{2}{3}$  di mm. (peso  $22,4493 \text{ g}$ ); Jacobi ha inviato i modelli di quest'ultima unità a vari laboratori di fisica. Entrambe queste unità si rivelarono scomode, la resistenza del rame dipendendo dalle sostanze estranee che può fortuitamente contenere, e la resistenza di un filo come quelli proposti variando nel tempo. L'unità Jacobi era uguale a circa  $0,551 \text{ ohm}$ .

Pouillet, Marié-Davy e De la Rive hanno proposto il mercurio come sostanza e, a partire dal 1860, W. Siemens ha costruito dei campioni la cui resistenza era uguale a quella di una colonna di mercurio lunga  $1 \text{ m}$  e di sezione  $1 \text{ mm}$  a  $0^\circ$ . Si tratta della famosa unità di Siemens, che per circa 25 anni è stato fatto un uso generale, sotto forma di bobine di filo rispetto al campione normale costituito da una colonna di mercurio in un tubo di vetro.

II. UNITÀ DI CORRENTE. Naturalmente non si può, per questa unità, stabilire un campione nel senso comune del termine. L'unità deve essere definita da una delle azioni della corrente, i caratteri qualitativi e quantitativi di questa azione devono essere determinati in modo preciso. La scelta più naturale è quella dell'azione elettrolitica; è stato infatti proposto in tempi diversi di prendere come unità l'intensità di una corrente, che in un secondo (o un minuto) scompone  $1 \text{ mg}$  d'acqua (cioè separa  $1 \text{ mg}$  di idrogeno), o produce  $1 \text{ cm}^3$  di gas tuonante (sotto i  $760 \text{ mm}$  e

a  $0^\circ$ ) in un minuto (Jacobi). Successivamente ci siamo fermati all'elettrolisi di un sale d'argento, misurando l'intensità di una corrente in base al peso dell'argento separato, nell'unità di tempo; dall'unità di intensità di corrente (per l'equivalente elettrochimico dell'argento); ovviamente i particolari di costruzione del voltmetro e di tutte le operazioni durante la misura dovranno essere fissati con cura.

III. GRUPPO DI TORCIA ELETTROMOTRICE. Questa unità può essere definita utilizzando un elemento normale. Così si è preso per lungo tempo, per unità, la forza elettromotrice dell'elemento Daniell. Devono essere ben determinate le parti costitutive dell'elemento scelto e la loro preparazione, la costruzione di questo elemento, le condizioni fisiche in cui deve essere utilizzato e il suo metodo di utilizzo.

Si vede così che ciascuna delle tre unità principali può essere scelta e istituita in un modo particolare. Per arrivare ad una definizione conveniente, dal punto di vista pratico, dell'ohm, dell'ampere e del volt, si può procedere come segue:

A. Ciascuna delle tre unità riceve una definizione fissata giuridicamente: l'ohm, mediante la lunghezza di una colonna di mercurio di sezione determinata a  $0^\circ$ , l'ampere mediante il peso dell'argento depositato in un tempo assegnato, il volt mediante il fattore numerico per il quale è necessario moltiplicare la forza elettromotrice di un elemento, definito da ogni punto di vista con precisione.

B. Solo due unità fondamentali ricevono una definizione fissata legalmente. La terza unità deriva dalle prime due e dalla legge di Ohm; resta aperta la questione della sua determinazione pratica.

Non c'è dubbio che una delle unità fondamentali debba essere l'ohm. Si possono facilmente costruire, conservare e trasportare standard di filo, equivalenti al normale standard di mercurio; si può anche scegliere per queste copie la sostanza che subisce meno modifiche nel tempo e che ha, rispetto alla resistenza, un coefficiente di temperatura il più piccolo possibile.

Quale unità dovrebbe essere considerata la seconda unità fondamentale? L'ampere o il volt? Questa questione fu definitivamente risolta a favore dell'ampere solo nel 1908 (vedi sotto). Lord Kelvin ha indicato nella 1884 le seguenti soluzioni:

1. L'ampere è definito dal lavoro elettrico svolto con 1 ohm di resistenza in 1 secondo.
2. L'ampere è definito dall'azione elettrolitica.
3. Il volt è definito utilizzando un elemento normale.

Come unità derivata si ha, nei primi due casi, il volt; nell'ultimo, l'ampere. Lord Kelvin ha proposto questa seconda soluzione.

Tutta una serie di congressi di studiosi si sono riuniti per risolvere le diverse questioni di cui abbiamo appena parlato; alcuni ebbero carattere ufficiale e internazionale, in particolare i congressi di Parigi (1884), Chicago (1893) e Londra (1908). Descriviamo brevemente i lavori dei congressi che si sono riuniti in tempi diversi ed i principali risultati delle loro deliberazioni.

Va preliminarmente precisato che è una commissione scelta nel 1862 dalla British Association che ha introdotto le denominazioni di ohm e di volt e che si è occupata della realizzazione pratica dell'ohm, uguale a  $10^9$  unità el. mag. C.G.S. Ma l'unità (B,A) così costruita era, come Rowland (1878) ha mostrato per primo, inferiore all'ohm di oltre l'1% (0,0866 ohm circa). Il Congresso di Parigi del 1881 ha confermato le proposte generali dell'Associazione britannica, ha aggiunto la denominazione di ampere, per l'intensità della corrente prodotta da 1 volt con 1 ohm e ha riconosciuto la necessità di nuove misure per determinare la lunghezza dell'ohm, cioè la lunghezza di una colonna di mercurio di 1 mm di sezione a  $0^\circ$  avente una resistenza uguale all'ohm teorico. Il Congresso di Parigi del 1882 non aggiunse nulla di essenziale a queste conclusioni.

Il congresso internazionale di Parigi del 1884 è stato molto importante, perché ha introdotto l'ohm legale di 106 cm di lunghezza, secondo le misure effettuate fino alla data della sua riunione; si è usato questo ohm fino al 1893.

Benoît (1885), Lorenz (1885), Strecker e Kohlrausch (1885), Glazebrook e Fitzpatrick (1889), Salvioni (1889), Passavant (1890) e Lindeck hanno costruito standard normali dell'ohm legale. Dorn (1893) ha confrontato molti di questi standard e trovato tra loro differenze fino allo 0,01%. Per quanto riguarda il volt, la tensione dell'elemento Clark è stata fissata provvisoriamente nel 1884 a 1,457 volt, ma senza indicare per quale temperatura questo valore fosse valido. Il Congresso di Parigi del 1889 non ha modificato in alcun modo lo stato della questione.

Nel 1892, contemporaneamente al congresso della British Association, si tenne ad Edimburgo un convegno al quale parteciparono Helmholtz, Guillaume, Jäger, Kahle, Carhart ed altri studiosi. Helmholtz avendo fatto conoscere che DORN aveva sottoposto ad un accurato esame critico tutte le determinazioni degli ohm e aveva trovato 106,28 *cm* per la lunghezza più probabile dell'ohm, la conferenza ha ritenuto opportuno fermarsi al numero 106,3; ha proposto inoltre di caratterizzare la colonna di mercurio non mediante l'area della sua sezione trasversale, ma con il suo peso a 0° uguale a 14,4521 *g*. Inoltre l'ampere è stato definito da un peso di 1,118 *mg* d'argento depositato in un secondo, e il volt considerato come un'unità derivata dall'ohm e dall'ampere. Infine è stato accuratamente specificato che l'elemento Clark a 15° dà 1,434 volt, con un errore non superiore a 0,001. Il lavoro di questa conferenza è servito come preliminare a quello del Congresso Internazionale di Chicago, così come alle successive deliberazioni dell'American Institute of Electrical Engineers e della International Society of Electricians a Parigi.

Il Congresso Internazionale di Chicago si è riunito nel 1893. Purtroppo ebbe l'imprudenza di proporre dati da fissare legalmente per ciascuna delle tre unità separatamente:

L'ohm, cioè  $10^9$  unità C.G.S., era determinato da una lunghezza di 106,3 *cm* di mercurio a 0° e da un peso di 14,4521 *g*; ha ricevuto la denominazione di ohm internazionale, per distinguerlo da quello legale.

L'ampere, cioè 0,1 unità C.G.S., è stato determinato dal peso di 1,118 *mg* di argento depositato al secondo.

Il volt, cioè  $10^8$  unità C.G.S., è stato definito, con una precisione ritenuta sufficiente, dalla frazione  $\frac{1000}{1435} = 0,6974$  e la forza elettromotrice dell'elemento Clark a 15°.

Gli Stati Uniti, l'Inghilterra con tutte le sue colonie e la Francia si affrettarono a consolidare queste tre determinazioni mediante una legislazione, che pose queste nazioni in una posizione molto difficile, poiché fu presto riconosciuto che la forza elettromotrice dell'elemento Clark è di circa lo 0,1% inferiore a quella adottata a Chicago (1,4328 volt invece di 1,435 volt). La Germania e, successivamente, l'Austria e il Belgio non hanno accettato la terza risoluzione presa a Chicago, il che per un certo periodo ha suscitato anche qualche critica. La Reichsanstalt di Charlottenburg, che aveva preparato nel 1891 e 1892 gli standard di due ohm legali (106 *cm*), ne ha stabilito altri tre, dopo il congresso di Chicago, di  $\frac{1}{2}$  e 2 ohm internazionali (106,3 *cm*). Il Congresso di St. Louis (1904) si è limitato ad esprimere la volontà di istituire una commissione internazionale per risolvere i problemi posti dalle diverse interpretazioni date alle risoluzioni di Chicago. Ha proposto, a questo scopo, di convocare un congresso internazionale a Londra nel 1906. Per l'elaborazione preliminare delle proposte da sottoporre a questo congresso, Warburg ha indetto una conferenza non ufficiale, che ebbe luogo dal 13 al 25 ottobre 1905, alla quale presero parte delegati dalla Germania (Warburg, Kohlrausch, Lewald, Hagen, Jäger), dall'Austria (v. Lang, Kusminski), dalla Francia (Mascart, presidente), dall'Inghilterra (Glazebrook), dal Belgio (Eric Gerard, Clement) e dagli Stati Uniti (Carhart); non si sono convocati rappresentanti di altri paesi per un motivo sconosciuto. Da questo convegno sono emerse le seguenti proposte:

L'ohm e l'ampere internazionali devono essere considerati unità fondamentali e fissate legalmente; il volt è un'unità derivata, la cui dipendenza da un elemento specifico non deve ancora essere decisa. Gli Stati Uniti (Bureau of Standards a Washington e Carhart) hanno insistito nella loro particolare proposta di considerare il volt fondamentale e l'ampere come un'unità derivata.

Invece dell'elemento Clark, si è deciso di prendere l'elemento Weston.

3. Le definizioni teoriche, cfr. formula (1), non devono essere sanzionate dalla legge; la lunghezza (ohm) ed il peso dell'argento (ampere) devono essere fissati una volta per tutte ed indipendentemente da successive determinazioni più precise del rapporto tra le misure prescelte e le misure teoriche (1), analogamente a quanto avvenuto per il metro e il chilogrammo.

Il Physikalische Reichsanstalt ha inoltre proposto l'uso di fili di manganina per la costruzione di standard normali; la discussione di questa questione non ha portato ad una conclusione.

Pochi giorni prima (19 ottobre), in una riunione del Comitato per le Misure Elettriche presso la British Association (dove erano presenti Lord Rayleigh, Glazebrook., Ayrton, Forster, Trotter e altri ancora), si è deciso inoltre di considerare l'ohm e l'ampere come unità fondamentali, ma il volt come unità derivata.

Il Congresso Internazionale di Londra si è riunito solo nell'ottobre 1908 (sotto la presidenza di Lord Rayleigh). Prima dello scioglimento del congresso, per l'ulteriore studio delle questioni dettagliate fu scelta una commissione di fisici composta da 15 membri (aumentata poco dopo a 20 membri, presidente Warburg). Il congresso ha approvato le seguenti risoluzioni:

1. *Le unità fondamentali internazionali sono l'ohm e l'ampere; il volt è un'unità derivata.* Non solo i rappresentanti degli Stati Uniti, ma anche quelli della Francia (Lippmann, Benoit, De Neuville) si sono pronunciati inizialmente contro questa risoluzione e hanno proposto di considerare il volt come un'unità fondamentale e l'ampere come un'unità derivata; al termine del congresso, però, hanno firmato la risoluzione finale, che fu così adottata all'unanimità.

2. *L'ohm internazionale è uguale alla resistenza a 0° di una colonna di mercurio a sezione costante, di massa 14,4521 g e lunga 106,300 cm.*

3. *L'ampere internazionale è uguale all'intensità della corrente, che separa 1,11800 mg d'argento in 1 secondo.*

4. *Il volt internazionale è la forza elettromotrice che, con un ohm internazionale, dà un ampere internazionale. Si può provvisoriamente supporre che l'elemento Weston dia 1,0184 volt a 20°.*

Non ci soffermeremo sulle decisioni e sulle varie indicazioni del congresso, relative alle scadenze per la realizzazione pratica di queste unità internazionali. Di capitale importanza è la sostituzione dei numeri 106,3 e 1,118 con i numeri 106,300 e 1,11800; ciò significa che le unità concrete devono ritenersi stabilite una volta per tutte e indipendenti da future determinazioni più esatte delle unità teoriche.

Nel 1910 si è riunita a Washington una commissione composta da rappresentanti dei laboratori nazionali di America, Germania, Francia e Inghilterra. Ha determinato la forza elettromotrice dell'elemento Weston a 20°; Warburg (1911) ha reso noto per la prima volta che tale forza è uguale a

$$1,0183 \text{ volt internazionale}$$

Siccome in Francia, esiste una definizione legale, secondo la quale la forza elettromotrice dell'elemento Clark è uguale a 1,434 volt senza indicazione della temperatura, è stato proposto (1911) di ammettere che tale numero si riferisca alla temperatura di 13,8°; in questo caso il volt francese sarebbe identico al volt internazionale.

Attualmente (1913), resta da fondare un ufficio internazionale permanente, composto dai delegati ufficiali dei vari stati, nonché da riunire un nuovo congresso internazionale e sancire legalmente le unità fondamentali nei vari stati.

### 3. Misura assoluta delle resistenze: determinazione dell'ohm

Le misure di resistenza possono essere di due tipi. In primo luogo, si possono effettuare misure assolute, cioè determinare la resistenza  $R$  di un conduttore lineare in unità el. mag. C.G.S., o in ohm teorici, vedere § 1. Strettamente connessa a tali misure assolute è quella che viene chiamata la misura dell'ohm, cioè la determinazione della lunghezza  $L$  di una colonna di mercurio di sezione pari a 1 mm e la cui resistenza a 0° è quanto più vicina possibile all'ohm teorico.

Tale determinazione è possibile, se si confronta una resistenza  $R$  già espressa in ohm teorici con la resistenza di una colonna di mercurio (di sezione  $1\text{ mm}$  e a  $0^\circ$ ) di lunghezza arbitraria  $L_0$ , oppure con la resistenza di un filo precedentemente calibrato con tale colonna di mercurio, ad esempio lo standard accuratamente verificato dell'unità Siemens, per la quale si ha  $L_0 = 100\text{ cm}$ , o anche all'ohm legale ( $L_0 = 106,3\text{ cm}$ ). Parleremo, nel paragrafo seguente, degli standard di mercurio e di altre resistenze di confronto. In secondo luogo, le misure della resistenza possono essere relative; consistono poi nel confrontare la resistenza cercata con resistenze sotto forma di fili già pronti, accuratamente calibrati ed espresse in ohm. A volte si tratta di un semplice confronto delle resistenze di due corpi dati. Considereremo qui solo le misurazioni assolute.

Tra il 1880 e il 1894 sono state pubblicate molte misure assolute di resistenza e relative determinazioni dell'ohm, cioè della lunghezza  $L$  dell'ohm in centimetri. Queste misure sono state effettuate con vari metodi; G. Wiedemann ne ha contati fino a 13, ma solitamente se ne distinguono solo 6: tre metodi dovuti a W. Weber e ai rispettivi metodi di Kirchhoff, Lorenz (di Copenhagen) e Lippmann. Una descrizione dettagliata dei vari metodi di misura assoluta e delle particolarità operative di questi metodi si trova in G. Wiedemann, *Die Lehre von der Elektrizität*, Tomo IV, pp. 642-728, Braunschweig, 1898; A. Gray, *Absolute Measurements in Electricity* 2, pp. 538-602, 1893; J. Borgmann, *Principi della teoria dei fenomeni elettrici e magnetici* (in russo) 2, pp. 586-599, 1899. Wiedemann (1882), Lord Rayleigh (1882) e in particolare Dorn (1893) effettuarono uno studio critico comparativo dei metodi di misura assoluta; del lavoro di quest'ultimo abbiamo già parlato nel § 2.

Nella presentazione che faremo dei metodi più importanti per la determinazione dell'ohm, è necessario, come abbiamo sottolineato in precedenza, considerare come noti alcuni fenomeni di cui non abbiamo ancora affrontato lo studio, ad esempio i fenomeni di induzione, e di utilizzare le formule che stabiliremo più avanti su questo argomento.

I. PRIMO METODO DI W. WEBER. - Su un telaio verticale è avvolto un filo sottile (armatura), in modo tale che la sezione trasversale della bobina così costituita formi un rettangolo; il telaio può ruotare attorno ad un asse verticale, situato nel piano delle spire medie della bobina; l'armatura è collegata ad un galvanometro. Si tratta di esprimere in unità assolute la resistenza totale  $R$  dell'intero circuito, cioè dell'armatura e del galvanometro. Il telaio viene innanzitutto collocato in una posizione in cui i piani di avvolgimento del filo sono perpendicolari al piano del meridiano magnetico. Viene quindi ruotato rapidamente di  $180^\circ$ ; si sviluppa quindi una forza di elettromotrice  $E = 2FH$ , dove  $F$  è la somma delle aree di tutte le spire del filo dell'armatura (in  $\text{cm}^2$ ) e  $H$  la componente orizzontale dell'intensità del magnetismo terrestre (in unità C.G.S.) nel luogo in cui si trova l'armatura. Nel circuito si manifesta una corrente istantanea, misurata dalla grandezza  $I = 2FH : R$ , dove  $I$  è la quantità totale di energia elettrica che attraversa il circuito; si ha quindi

$$R = \frac{2FH}{I} \quad (15.0.2)$$

Il magnete del galvanometro riceve, sotto l'azione della corrente  $I$ , un impulso derivante dall'azione di una coppia per un breve istante. Se il magnete non può, durante la durata di questo impulso, deviare sostanzialmente dalla sua posizione di equilibrio, abbandona quest'ultima con una velocità angolare  $v_0$ , che è la sua velocità iniziale di rotazione; si osserva la prima deviazione  $\varphi$  del galvanometro. La velocità  $v_0$  è uguale a  $IDM : k$ ;  $M$  è il momento magnetico dell'ago magnetizzato,  $k$  il suo momento di inerzia rispetto all'asse di rotazione;  $D$  è uguale a  $2n\pi : r$ , essendo  $n$  il numero di spire del filo del galvanometro,  $r$  quello che viene chiamato il raggio ridotto della bobina, cioè il raggio di  $n$  spire identiche, che eserciterebbero sul magnete la stessa azione della bobina considerata. Si ha ora  $I = kv_0 : DM$  e quindi

$$R = \frac{2FHD M}{kv_0} \quad (15.0.3)$$



Il momento d'inerzia  $k$  è determinato dalla durata  $T$  dell'oscillazione, mediante la relazione

$$(1 + \beta) MH'T^2 = \pi^2 k \quad (15.0.4)$$

dove  $H'$  è la componente orizzontale dell'intensità del campo magnetico terrestre nel posto che occupa il galvanometro,  $\beta$  il coefficiente di torsione del filo che supporta l'ago magnetico. La velocità  $v_0$  è determinata dalla formula (7-69,e), nella quale  $a_1 = \varphi$  e dove  $p$  e  $q$  si devono sostituire con il decremento logaritmico  $\lambda$  e la durata dell'oscillazione  $T$ , secondo la formula (7-69,b)  $\lambda = \pi p : q$  e (7-69,c)  $T = \pi : q$ . Tutte le quantità che rientrano nella formula (2) sono quindi note. Si noti che eliminando  $k$  tra la (2) e la (3), il momento  $M$  scompare. La resistenza  $R$  si ottiene in unità el. mag. C.G.S, quando si esprime  $r$  in centimetri e  $T$  in secondi.

Misure sono state effettuate secondo questo metodo da W. Weber (1852), W. Weber e Zöllner (1880), Mascart, De Neuville e Benoît (188/1), G. Wiedemann (1891); i risultati di quest'ultimo sono stati ricalcolati da Peter (1894).

II. SECONDO METODO DI W. WEBER. - Un anello chiuso di filo, disposto verticalmente, ruota, come nel caso precedente, attorno ad un asse verticale; la rotazione è continua ed avviene ad alta velocità. Al centro dell'anello è sospeso un ago magnetico, che subisce una certa deflessione costante  $\varphi$ , sotto l'azione della corrente indotta dal campo magnetico terrestre nell'anello rotante.

Una teoria di questo metodo, elementare ma lungi dall'essere completa, è la seguente. Sia  $\psi$  l'angolo formato dal meridiano magnetico e dal piano dell'anello all'istante  $t$ ; la velocità angolare è  $\omega = d\psi : dt$ . In questo istante  $t$  agisce la forza elettromotrice  $E = FH \cos \psi \frac{d\psi}{dt}$ , avendo  $H$  lo stesso significato del primo metodo. La corrente  $I = E : R$  esercita sul magnete una coppia il cui momento è uguale a  $MDI \cos(\psi - \varphi)$ ; se ne deduce, per l'impulso nel tempo  $dt$

$$\frac{MDFH}{R} \cos(\psi - \varphi) \cos \psi d\psi$$

Si ottiene il momento totale, calcolando l'impulso nell'intervallo di un secondo: questo impulso è uguale a

$$\frac{nMDFH}{R} \int_0^{2\pi} \cos(\psi - \varphi) \cos \psi d\psi = \frac{\omega MDFH \cos \varphi}{2R}$$

dove  $n$  è il numero di giri al secondo e  $\omega = 2n\pi$  la velocità angolare della rotazione. Per l'equilibrio, il momento precedente deve essere uguale al momento  $MH \sin \varphi$  della coppia dovuta al magnetismo terrestre. Si ha pertanto

$$R = \frac{DF\omega}{2 \tan \varphi} \quad (15.0.5)$$

Per completare questo calcolo è necessario tenere conto dell'autoinduzione nell'anello rotante, non essendo la corrente  $I$  costante, e dell'induzione prodotta dallo stesso ago magnetizzato. Si deve allora scrivere

$$Edt = IRdt = FH \cos \psi d\psi + MD \cos(\psi - \varphi) d\varphi - LdI \quad (15.0.6)$$

dove  $L$  è il coefficiente di autoinduzione. Poiché  $\frac{d\psi}{dt} = \omega$ , si ha

$$IR + L \frac{dI}{dt} = \{FH \cos \psi + MD \cos(\psi - \varphi)\} \omega$$

Integrando questa equazione e trascurando il termine in  $e^{-\frac{Rt}{L}}$ , che tende ad annullarsi rapidamente con il tempo, si ottiene, per l'intensità di corrente costante  $I$  della corrente dell'anello

$$I = \frac{\omega}{R^2 + L^2 \omega^2} \{HF(R \cos \psi + L\omega \sin \psi) + MD[R \cos(\psi - \varphi) + L\omega \sin(\psi - \varphi)]\} \quad (15.0.7)$$

Il valore medio del momento della coppia, che agisce sull'ago magnetico deve essere uguale al momento della coppia dovuto al campo terrestre e alla torsione del filo. Si ha quindi l'uguaglianza

$$\frac{MD}{2\pi} \int_0^{2\pi} I \cos(\psi - \varphi) d\varphi = MH (\sin \varphi + \beta \varphi) \quad (15.0.8)$$

Introducendo il valore della (6) di  $I$ , si ottiene per  $R$  un'espressione, che si trasforma nella formula (4) per  $L = 0$  o  $\beta = 0$ .

La commissione istituita nel 1963 sec. dalla British Association effettuò le sue misure secondo questo metodo. Lord Rayleigh e Schuster (1881), così come Lord Rayleigh (1882) hanno effettuato misure con lo stesso metodo. H. Weber (1882) lo ha modificato, disponendo l'asse di rotazione orizzontalmente, in modo che questo potesse coincidere con l'asse del magnete deflesso, grazie ad una rotazione di tutto lo strumento attorno ad un asse verticale. La corrente era prodotta dalla componente verticale  $H \tan i$  della forza magnetica terrestre, dove  $i$  indica l'inclinazione magnetica; in questa disposizione scompare l'azione induttiva dell'ago magnetico sull'anello rotante.

III. TERZO METODO DI W. WEBER. Un ago magnetico è sospeso, in posizione orizzontale, al centro di un telaio moltiplicatore realizzato in spesso filo di rame. Quando il circuito costituito da questo filo è chiuso, tutta la massa di rame in esso contenuta funge da ammortizzatore. Le correnti indotte nel circuito dalle oscillazioni dell'ago rallentano e attutiscono il movimento di quest'ultimo. Designiamo con  $R$  la resistenza del filo, che si tratta di esprimere in unità assolute, e sia  $DM$  il momento della coppia esercitata sull'ago magnetico, quando l'unità di intensità di corrente attraversa il filo;  $M$  è il momento magnetico dell'ago,  $T$  la durata dell'oscillazione dell'ago a circuito aperto,  $\tau$  la durata dell'oscillazione e  $\lambda$  il decremento logaritmico a circuito chiuso. L'ago viene deviato e poi lasciato a se stesso; esegue allora oscillazioni smorzate. Le quantità  $\lambda$  e  $T_0$  vengono prima misurate direttamente. Si ottiene l'equazione del movimento dell'ago magnetico nel modo seguente. Sia  $\varphi$  l'angolo di deflessione variabile dell'ago; quando la velocità angolare  $d\varphi/dt$  dell'ago è uguale all'unità, la forza elettromotrice indotta nel filo è  $DM$ ; di conseguenza la forza elettromotrice nell'istante considerato è  $MD^{d\varphi/dt}$  e si ha, per l'intensità della corrente,

$$I = \frac{MD}{R} \frac{d\varphi}{dt}$$

Questa corrente esercita sull'ago magnetico una coppia resistente il cui momento  $m$  è uguale a

$$m = MDI = \frac{M^2 D^2}{R} \frac{d\varphi}{dt}$$

Il campo terrestre  $H$  e la torsione del filo danno una coppia, il cui momento, per piccoli valori di  $\varphi$ , può essere assunto uguale a  $-(1 + \beta) MH\varphi$ , dove  $\beta$  rappresenta il coefficiente di torsione del filo di sospensione. L'equazione del moto dell'ago magnetico è quindi

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{M^2 D^2}{R} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{(1 + \beta) MH}{k} \varphi = 0 \quad (15.0.9)$$

dove  $k$  indica il momento d'inerzia dell'ago magnetico rispetto all'asse di rotazione. Abbiamo in precedenza scritto l'equazione delle oscillazioni smorzate nella forma

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2p \frac{d\varphi}{dt} + c^2 \varphi = 0 \quad (15.0.10)$$

e introdotto le formule seguenti, ponendo  $q = \sqrt{c^2 - p^2}$

$$T = \frac{\pi}{c} \quad (15.0.11)$$

$$\tau = \frac{\pi}{q} = T \frac{\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}}{\pi} \quad (15.0.12)$$

$$\lambda = \frac{\pi p}{q} \quad (15.0.13)$$

le ultime due danno

$$p = \frac{\lambda}{\tau} = \frac{\pi \lambda}{T \sqrt{\pi^2 + \lambda^2}} \quad (15.0.14)$$

e dalle (9,a) e (9,d), si ha

$$\frac{p}{c^2} = \frac{\lambda T}{\pi \sqrt{\pi^2 + \lambda^2}} \quad (15.0.15)$$

Confrontando la (8) e la (9), si vede che

$$p = \frac{D^2 M^2}{2 R k} \quad c^2 = \frac{(1+\beta) M H}{k}$$

Se si introducono questi valori nella (9,e), il momento d'inerzia  $k$  scompare e si trova

$$R = \frac{D^2 M \pi \sqrt{\pi^2 + \lambda^2}}{2 (1 + \beta) \lambda H T} \quad (15.0.16)$$

Lasciamo da parte la questione delle varie correzioni che occorre apportare a questa formula. A questo proposito bisogna tenere conto dello smorzamento prodotto dall'aria, della dipendenza delle grandezze  $\lambda$  e  $D$  rispetto a  $\varphi$ , dell'influenza della temperatura e delle forze magnetiche locali, dell'azione della corrente  $I$  sul momento  $M$ . Schering e l'autore hanno studiato teoricamente come il decremento  $\lambda$  dipenda da  $\varphi$ . La quantità  $M : H$  può essere determinata con un metodo che indicheremo in questo Capitolo. La grandezza  $D$  può essere calcolata utilizzando le dimensioni geometriche del moltiplicatore. Il metodo precedente è stato utilizzato da H. F. Weber (1878) e F. Kohlrausch (1874, 1882). È, tuttavia, più conveniente determinare  $D$  facendo passare la stessa corrente  $i$  attraverso un galvanometro delle tangenti accuratamente calibrato, e di grandi dimensioni, ponendo il moltiplicatore in derivazione. Le indicazioni del galvanometro delle tangenti permettono di determinare  $i$  in unità assolute e  $D$  è quindi dedotto dalla deflessione dell'ago del moltiplicatore. Misure assolute di  $R$  ed anche una determinazione dell'ohm (mediante confronto di  $R$  con una unità normale di Siemens) sono state effettuate da Dorn (1882 e 1889), Wild (1884), Baille (1884) e F. Kohlrausch (1888).

IV. METODO KIRCHHOFF. Si ha l'abitudine di intendere sotto questo nome tutta una serie di metodi più o meno diversi tra loro, che hanno in comune il fatto che l'induzione elettrodinamica ha la parte principale. Ci sono due bobine A e B con un asse comune, poste una accanto all'altra o una dentro l'altra. Nel caso più semplice lo schema è il seguente: la bobina A è percorsa dalla corrente costante  $i$ ; la bobina B è collegata ad un galvanometro balistico G; si tratta di misurare in unità assolute la resistenza  $R$  del circuito secondario, che comprende la bobina B. Indicheremo con  $L$  il coefficiente di mutua induzione delle due bobine. Se la corrente  $i$  viene interrotta improvvisamente, si ottiene, nel circuito secondario, una corrente indotta istantanea  $I$  (corrente integrale), la cui intensità può essere misurata con il galvanometro G. Si ha  $I = \frac{Li}{R}$ , e di conseguenza

$$R = \frac{Li}{I} \quad (15.0.17)$$

Rowland (1878) fu il primo ad impiegare questo metodo; la corrente  $i$  è stata misurata mediante un galvanometro delle tangenti, il cui ago magnetico poggiava su una punta, il che evidentemente porta a delle imprecisioni. F. Weber (1877, 1884), Glazebrook, Dodds e Sargent (1883) che, invece di interrompere la corrente  $i$ , ne cambiava il verso, anche Mascart, de Neuville e Benoit (1884) l'hanno applicato. Infine Roiti (1886) e Himstedt (1886) hanno apportato una

modifica essenziale. La corrente  $i$  era aperta e chiusa  $n$  volte al secondo; la bobina B era percorsa da correnti indotte di chiusura o di apertura, tanto che l'ago magnetico del galvanometro G subiva una deviazione costante  $\varphi$ . Un'altra deviazione  $\psi$  si otteneva facendo passare in G una certa frazione  $ai$  della corrente  $i$ . In questo caso, si ha  $\frac{\varphi}{\psi} = \frac{nLi}{aiR}$  e quindi

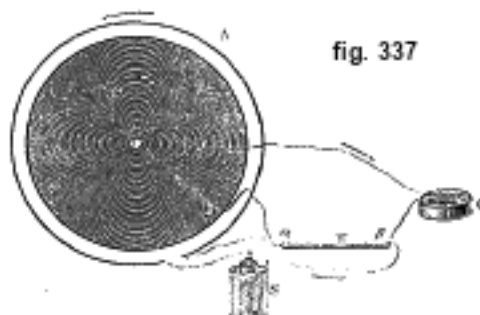
$$R = \frac{nL\psi}{a\varphi} \quad (15.0.18)$$

Anche lo schema a due circuiti era completamente diverso da quello sopra riportato, ma non possiamo entrare in questi dettagli.

V. METODO DI LORENZ. L'idea di base di questo metodo può essere spiegata dalla figura schematica 337. Un disco circolare di rame B ruota con velocità costante attorno ad un asse orizzontale, compiendo  $n$  giri al secondo. Esso è circondato da una stretta bobina di filo A, che si trova nel circuito di uno o più elementi S. In questo stesso circuito è inserito anche il corpo  $w$ , di cui si deve misurare in unità assolute la resistenza  $R$ . Dalla rotazione del disco B, vengono indotte, in quest'ultimo, correnti che hanno direzione radiale. Tra il centro C del disco e un punto D qualsiasi del suo bordo agisce una forza elettromotrice, la cui entità può essere calcolata mediante le dimensioni della bobina A e del disco B. Supponiamo che sia uguale a  $E$  unità el. mag. C.G.S, quando l'intensità della corrente in A è uguale all'unità e il disco B fa un giro al secondo; quando l'intensità della corrente in A è  $I$  e il numero di giri del disco al secondo è uguale a  $n$ , la forza elettromotrice di induzione  $E_n = nIE$ . Nei punti C e D ci sono contatti striscianti, che conducono la corrente ai capi  $\alpha$  e  $\beta$  del corpo  $w$ ; nel circuito così ottenuto è inserito un galvanometro sensibile G. Si può regolare la velocità di rotazione, cioè il numero  $n$ , in modo che la corrente si annulli nel circuito indotto, e che si riconosca quando l'ago magnetico di G non subisce più alcuna deviazione. Siccome in questo caso, la differenza di potenziale  $IR$  dei punti  $\alpha$  e  $\beta$  è bilanciata dalla forza elettromotrice  $E_n$ , si ha  $nIE = IR$ , da cui

$$R = nE \quad (15.0.19)$$

Lorenz ha utilizzato per la prima volta questo metodo nel 1873 e lo applicò nuovamente nel 1885 con dispositivi migliorati. Il corpo  $w$  era un tubo di vetro accuratamente calibrato e riempito di mercurio, in modo che la resistenza di una data colonna di mercurio fosse determinata in unità assolute; se ne poteva quindi dedurre la lunghezza  $L$  dell'ohm del mercurio. Lord Rayleigh e Mrs Sidgwick (1883), R. E. Lenz (1884), Rowland, Kimball e Duncan (1884), Rowland (1887), Duncan, Wilkes e Hutvhinson (1889) e Jones (1890) usarono lo stesso metodo. Una modifica fu proposta da Rosa (1909).



VI. METODI DI LIPPMANN. Lippmann (1881, 1882) ha proposto tre diversi metodi, uno dei quali è stato indicato, quasi contemporaneamente, anche da Carey Foster. Considereremo qui solo quello effettivamente utilizzato per la determinazione degli ohm (Wuilleumier, 1890). In una lunga bobina fissa passa una corrente  $i$ ; nel circuito a cui appartiene si trova la resistenza

da misurare  $R$ , di cui chiameremo le estremità con A e B. All'interno della bobina, gira un anello di filo attorno ad un asse situato nel piano della sezione trasversale della bobina; ad ogni giro, questo anello entra in contatto, per un brevissimo intervallo di tempo, con i punti A e B, nel momento in cui la forza elettromotrice di induzione  $E$  nell'anello raggiunge il suo massimo. Se la bobina ha  $N$  spire per centimetro, si ha  $E = 4\pi Ni\omega F$ , essendo  $\omega$  la velocità angolare di rotazione,  $F$  l'area interna ad ogni giro dell'anello. La grandezza  $\omega$  deve essere scelta in modo che un galvanometro o un elettrometro capillare, inserito nel circuito indotto, non subisca alcuna deviazione. Si ha, in questo caso,  $E = Ri$ , e di conseguenza

$$R = 4\pi NF\omega \quad (15.0.20)$$

VII. Altre metodi, che non descriveremo, sono dovute a M. Brillouin (1883), Mengarini (1884), Joubert (1882), J. Frölich (1883) e F. Weber (1877). Indicheremo semplicemente che il metodo calorimetrico di quest'ultimo si basa sulla misura della quantità di calore liberata nel passaggio della corrente attraverso il conduttore studiato.

## 4. Campioni di resistenza

Abbiamo già accennato al § 2 che al Reichsanstalt di Charlottenburg furono costruiti 5 campioni in mercurio. Informazioni molto dettagliate sul modo in cui venivano preparati si trovano nelle memorie di Jäger (1896), v e Kaule (1901), nonché in un'opera di Strecker (1885) relativa alla costruzione dell'unità normale di Siemens in mercurio. La scelta, lo spostamento e la calibrazione del tubo di vetro, il suo riempimento con mercurio pulito, il modo di introdurlo nel circuito, la misura della sua resistenza in unità assolute e il calcolo della lunghezza  $L$  corrispondente all'ohm sono tutte operazioni di grande importanza. Anche i congressi internazionali hanno dato alcune indicazioni su questi diversi punti.

Il peso di una colonna di mercurio, la cui resistenza è quella dell'ohm internazionale ( $L = 106,300 \text{ cm}$ ), è  $14,4521 \text{ g}$ ; si ha quindi, per la resistenza  $r$  di una colonna di mercurio la cui lunghezza è  $1 \text{ cm}$  e il peso  $p \text{ gr}$ , l'espressione

$$r = \frac{14,4521 Cl^2}{(1063)^2 p} = 12,78982 \frac{Cl^2}{p} \text{ ohm} \quad (15.0.21)$$

dove  $C$  è un fattore leggermente diverso dall'unità, la cui presenza fa sì che il tubo non sia mai rigorosamente cilindrico. Un metodo per calcolare  $C$ , mediante i risultati delle misure effettuate nella taratura del tubo, si trova nell'opera di Jäger (1896). Per i cinque campioni preparati a Reichsanstalt, la quantità  $C$  oscilla tra  $1,001878$  e  $1,000021$ . Quando la colonna di mercurio viene introdotta nel circuito, la si fa sboccare dalle sue estremità in grandi vasi pieni di mercurio.

Entrando o uscendo dall'apertura relativamente stretta del tubo, la corrente prova nella massa estesa del mercurio, una certa resistenza all'espansione che chiameremo  $s$ . Il calcolo di  $s$  ricorda quello della resistenza di uno spazio indefinito, nel quale sono presenti due elettrodi sferici; è dovuto a Maxwell e porta all'espressione

$$s = \frac{a}{1063\pi} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \text{ ohm} \quad (15.0.22)$$

dove  $r_1$  e  $r_2$  sono i raggi delle due aperture del tubo, espresse in millimetri,  $a$  una costante compresa, secondo Maxwell, tra  $0,785$  e  $0,849$ . Lord Rayleigh (1875) ha mostrato che si ha  $a < 0,8242$ . Benoit, Kohlrausch, Schrader, Glazebrook e Fitzpatrick e altri ancora hanno determinato la quantità  $a$  empiricamente e hanno ottenuto numeri compresi tra  $0,789$  e  $0,805$ . Attualmente, il numero generalmente adottato è

$$a = 0,80 \quad (15.0.23)$$

La resistenza totale  $R$  della colonna di mercurio introdotta nel circuito è, dalle formule (14) e (14,a)

$$R = r + s \quad (15.0.24)$$

Per gli standard del Reichsanstalt il valore di  $s$  è compreso tra 0,0007579 ohm e 0,001219 ohm. Oltre ai campioni fondamentali di mercurio a forma di tubo rettilineo, ne sono stati costruiti anche di secondari di mercurio a forma tubo elicoidale, in U e W, e la loro resistenza è stata determinata mediante confronto con i campioni fondamentali.

In pratica si utilizzano preferibilmente resistenze a filo, che possono essere composte da un solo filo (ad esempio, per i normali campioni dell'ohm, di suoi multipli o sottomultipli) oppure da tutta una serie di fili posti in scatole, che si possono introdurre nel circuito separatamente o combinandoli a piacimento; questi sono chiamati cassette di resistenze; ciascun filo, che rappresenta una determinata resistenza, è ordinariamente avvolto a forma di bobina.

Sono state condotte ricerche molto accurate, in particolare da parte del Physikalisch-Technische Reichsanstalt, per risolvere varie questioni relative al modo migliore per costruire campioni di resistenza con fili.

Poiché la resistenza dei metalli e delle leghe aumenta, in genere, piuttosto fortemente con l'aumento della temperatura, è chiaro che ogni campione possiede solo la resistenza che è stata inscritta su di esso ad una determinata temperatura; questa temperatura, così come il coefficiente di temperatura del resistore, devono essere noti per poter utilizzare il campione.

La sostanza del filo deve soddisfare due condizioni principali: l'invariabilità della resistenza nel tempo e la massima indipendenza possibile rispetto alla temperatura. È inoltre desiderabile che la forza termoelettromotrice che si genera al contatto del metallo con il rame sia la più piccola possibile, poiché tale contatto è inevitabile quando il campione è inserito in un circuito.

In passato venivano utilizzati fili di argentana, di costantana ( $60Cu + 40Ni$ ), di nichelina ( $Ni + Zn$ ), di patentnickel ( $75Cu + 25Ni$ ) ed altre leghe; ma queste non soddisfano sufficientemente la terza delle condizioni precedenti. Recentemente, l'uso del filo di manganina ( $84Cu + 12Mn + 4Ni$ ) è notevolmente aumentato. Le ricerche effettuate accuratamente da Lindeck, Feussner, Jäger, Raps, Wolf e altri hanno mostrato che questa lega ha un elevato grado di invariabilità nel tempo ed un coefficiente di temperatura molto piccolo (tra +0,00001 e +0,00002), che non viene attaccata dalla lacca, dalla trementina e da altre sostanze simili, e che dà origine al contatto con il rame solo a una forza termoelettromotrice molto piccola (1,5 microvolt per grado); è infine è molto economica.

Il filo di un resistore deve essere isolato; Burstall (1896) ha utilizzato un filo nudo, ma immerso nell'olio. La dimensione della sezione del filo deve essere scelta in modo che la resistenza non vari sensibilmente per effetto del riscaldamento dovuto al passaggio di corrente. Molto spesso viene utilizzato filo di sezione circolare, ma in alcuni casi, e per maggiore comodità, ci si serve di un metallo in nastro.

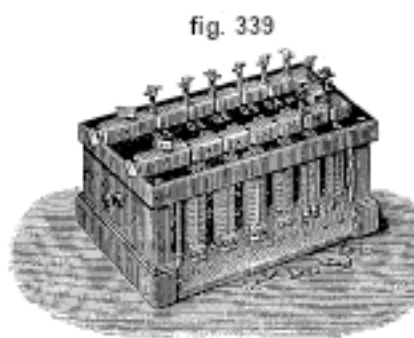
Il modo di avvolgere il filo in una bobina è di grande importanza, soprattutto se deve essere introdotto nel circuito di una corrente variabile, perché è allora necessario ridurre il più possibile l'autoinduzione. Il modo più semplice è quello di avvolgere il filo raddoppiato piegandolo su se stesso al centro, oppure di avvolgerne due affiancati e saldare le estremità vicine, in modo che la corrente passi attraverso la bobina in due direzioni opposte. Maxwell ha mostrato che il miglior risultato si ottiene utilizzando un filo a forma di nastro.

Chaperon (1889) avvolge il filo a strati, cambiando la direzione dell'avvolgimento ad ogni nuovo strato. Ayrton e Mather (1891) e Ohrlich (1909) hanno utilizzato (per correnti intense) un conduttore a nastro. Paterson e Rayner (1909) hanno costruito campioni a tubo di manganina attraversato dall'acqua; grazie al particolare modo in cui viene portata la corrente (tubo di rame che avvolge quello di manganina), l'autoinduzione è quasi annullata.

I campioni ad alta resistenza hanno una capacità considerevole, che può introdurre errori quando si tratta di correnti variabili. Chaperon (1889) e Ohrlich (1910) hanno mostrato come il filo debba essere arrotolato per ridurre il più possibile questa causa di errore.

I campioni normali, cioè le unità di resistenza confrontate direttamente con le unità fondamentali del mercurio, sono solitamente posti in scatole di legno o di metallo (fig. 338), da cui emergono grandi aste metalliche orizzontali, provviste talvolta a un'estremità di una vite di pressione e dall'altra piccole aste verticali che possono essere immerse nel mercurio; il filo presente nella scatola ha, ad una data temperatura (solitamente  $20^\circ$  o  $16,5^\circ$ ), una resistenza uguale ad esempio ad un ohm.

Esistono moltissimi dispositivi, di varia forma, che servono a inserire resistori in un circuito; sono disposti in modo da poter variare la resistenza introdotta per salti (cassette di resistenze, reostati) o in modo continuo (reocordi, reostati). Anche le cassette di resistenza hanno costruzioni molto diverse. Una cassetta tipica molto semplice, con tappi, è mostrata nella Figura 339.



All'interno di una scatola di legno chiusa (nella figura la parete frontale è rimossa), si trovano le bobine, i cui fili hanno le estremità collegate a spesse e corte strisce metalliche, poste sul coperchio della scatola. Negli intervalli conici tra queste strisce possono essere inseriti dei tappi; quando tutte le spine sono in posizione, formano con le bande un conduttore ininterrotto a bassissima resistenza, alle cui estremità si trovano viti di serraggio che consentono l'inserimento della assetta in un circuito. Se si rimuove una delle spine, si introduce nel circuito la resistenza della bobina posta sotto nella scatola. Le varie bobine hanno rispettive resistenze che variano come i pesi di una scatola di pesi, ad esempio nel modo seguente:

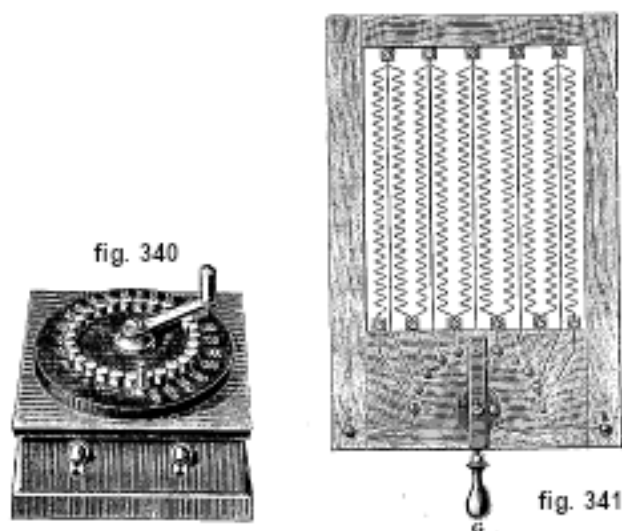
0, 1; 0, 2; 0, 2; 0, 5; 1; 2; 5; 10; 20 *ohm*, ecc

o

0, 1; 0, 1; 0, 2; 0, 5; 1; 1; 2; 5; *ohm*, ecc

A volte si impiegano i cosiddetti resistori a decadi, che contengono, in gruppi di dieci, resistenze pari a 00, 1; 1; 10 *ohm*, ecc. Considereremo più avanti le resistenze a ponti comprendenti tre rami del ponte di Wheatstone. La figura 340 rappresenta un reostato a manetta; in esso le estremità dei fili delle bobine portano a terminali metallici, disposti in cerchio. La manetta mobile è provvista nella sua parte inferiore di una molla, che la preme fortemente su ciascun terminale, e, ruotandola, le varie resistenze vengono successivamente introdotte nel circuito o soppresse.

Talvolta sono presenti più serie circolari di terminali di contatto, ciascuna corrispondente a dieci bobine, la prima di 1 *ohm*, la seconda di 10 *ohm*, ecc. La figura 341 rappresenta un reostato aperto, formato da una serie di fili nudi avvolti ad elica. Ruotando la manopola G, si inserisce o si rimuove una lunghezza maggiore o minore di filo tra i terminali  $k$  e  $k'$ .



Diversi dispositivi permettono di introdurre in un circuito una resistenza che può essere variata in modo continuo. Una parte essenziale di questi dispositivi è costituita da un filo, lungo il quale scorre un contatto; questo, assieme ad uno dei capi del filo, viene introdotto nel circuito. La lunghezza della porzione di filo tra questa estremità e il contatto determina l'entità della resistenza intercalata. Tali sono il reocordo di Poggendorff, il reostato di Jacobi, ecc.

La figura 342 rappresenta l'apparecchio di Jacobi, in uso ancora oggi. Su un cilindro di sostanza non conduttiva (marmo, porcellana) è avvolto un filo nudo, un'estremità del quale è collegata all'asse metallico attorno al quale ruota il cilindro. Sull'asta *ab* scorre una rotella *r*, che abbraccia il filo per la scanalatura del suo cerchio. L'asse del cilindro è collegato al terminale *s*, l'asta *ab* a un secondo terminale. Quando si fa ruotare la manovella *h*, *r* scorre lungo il filo e, contemporaneamente, lungo l'asta *ab*; la porzione di filo compresa tra *r* e *b* è intercalata nel circuito. Poiché il contatto in *r* è imperfetto, questo apparecchio viene oggi utilizzato solo quando esiste una derivazione in *r*; in questo caso, ciascuna estremità del filo è collegata a un terminale e la rotella di contatto *r* al terminale *t*. Si possono ancora citare i reostati a cursore spesso utilizzati in elettrotecnica e in generale quando si ha a che fare con correnti intense.

La figura 343 rappresenta uno di questi reostati; il filo della resistenza è avvolto su un'asta a sezione rettangolare, lungo la quale scorre il cursore di contatto. Reostati per correnti intense, a basso coefficiente di autoinduzione, sono stati costruiti da Ohrlich (1909), che ha trattato in modo completo la teoria di questi strumenti. Spesso sono utilizzati anche reostati detti resistori a lampade, formati da una serie di lampade ad incandescenza (fig. 344), anche la loro autoinduzione è molto debole.

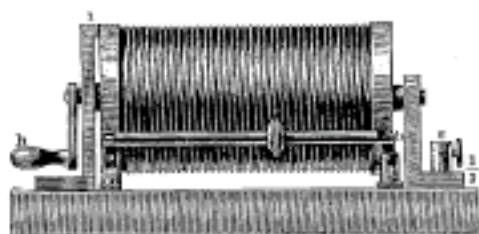


fig. 342

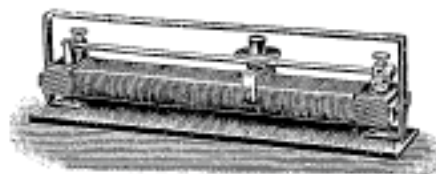


fig. 343



fig. 344



Müller, così come Jacobi, hanno costruito reostati la resistenza variabile è determinata da una colonna di mercurio, posta in un tubo verticale che può essere affondato a varie profondità in un grande recipiente pieno di mercurio. L'autore ha studiato e descritto il dispositivo di Jacobi, dopo la morte di questo scienziato.

Resistenze molto elevate si ottengono tracciando linee sottili con grafite su vetro opaco, ebanite, ecc.; due tratti di questo tipo lunghi 40 cm possono raggiungere una resistenza di 100 megohm. Tubi riempiti con vari liquidi (resistori liquidi) possono ancora fungere da grandi resistori. Hittorf consiglia una soluzione di una parte di  $CdI_2$  per 10 parti di alcool amilico tra gli elettrodi d'amalgama di cadmio. La soluzione di solfato di zinco e l'amalgama di zinco sono pure abbastanza convenienti. Nernst ha utilizzato una soluzione di 181 g di mannite e 62 g di acido borico in 1,5 litri di acqua. E. Voigt (1903) ha usato per le misure di grandi resistenze, resistenza di legno; aste di 7 mm di spessore erano avvolte in una massa di 2 parti di paraffina e 1 parte di cera.

Scatole di resistenza, reostati, ecc. devono essere attentamente calibrati. Una descrizione dettagliata dei metodi di calibrazione di fili e intere scatole di resistori si trova, ad esempio, nell'opera di Heydeller, *Hülfsbuch für die Ausführung elektrischer Messungen*, Lipsia, 1892, pp. 129-136. Metodi di calibrazione dei fili sono stati forniti da Strouhal e Barus (1880), Giese (1880), Carey Foster (1885), Ascoli (1885), Heerwagen (1889), G. Wiedemann (1891) e altri. L'autore ha indicato nel 1880 un metodo di taratura, per cassette resistive di particolare costruzione.

## 5. Principali metodi di misura delle resistenze

C'è un gran numero di metodi per misurare o, il che è lo stesso, confrontare le resistenze. La scelta del metodo dipende, in ciascun caso particolare, dalla sostanza del corpo di cui si vuole determinare la resistenza, dall'entità assoluta di tale resistenza, dal grado di precisione desiderato e infine dall'apparecchio di cui dispone l'operatore. Nei libri dedicati alle misure fisiche si troveranno indicazioni su tutti i dettagli relativi al modo di effettuarle con i differenti metodi. Quando si vuole procedere ad una misura di resistenza e conoscere nei dettagli il metodo che si è scelto, bisogna ovviamente rivolgersi ad una di queste opere speciali e non ad un Trattato di Fisica Generale. Dobbiamo qui limitarci a esporre i principi fondamentali di alcuni dei metodi più importanti, selezionando quelli oggi più utilizzati: degli altri metodi citeremo solo brevemente.

La misura delle resistenze si riduce quasi sempre al confronto di una resistenza  $X$  sconosciuta con la resistenza  $R$  di qualche parte di una scatola di resistori o, in casi più rari, con un filo precedentemente tarato.

1. In molti metodi è necessario misurare un'intensità di corrente e seguendo le sue variazioni oppure riportandola più volte ad assumere lo stesso valore. Tutti questi metodi sono inaffidabili, poiché presuppongono che la forza elettromagnetica agente nel circuito, nonché le resistenze che presenta, non varino (ad esempio, se cambia la temperatura) durante la durata delle misurazioni. Questo è il metodo di sostituzione semplice: il circuito contiene, tra le altre cose, un galvanometro  $G$ , una resistenza  $X$  e un reostato  $A$ . Si osserva l'intensità  $I$  della corrente, si toglie  $X$  e si introduce, mediante il reostato, una resistenza  $R$  per la quale il galvanometro indica la stessa intensità  $I$  di prima; è chiaro che  $X = R$ . Si può ancora stabilire una derivazione nel circuito e porre  $G$  su un ramo,  $X$  e  $A$  sull'altro; è così nel vecchio metodo Horsford per misurare la resistenza di un liquido, che viene versato in un grande recipiente rettangolare e introdotto nel circuito mediante due grandi elettrodi immersi alle estremità del recipiente. Quando la corrente  $I$  è diventata costante, cioè quando la polarizzazione ha raggiunto il suo massimo, si avvicina uno degli elettrodi all'altro e si introduce una resistenza  $R$  tale che l'intensità della corrente riprende il valore originario  $I$ ;  $R$  è allora uguale alla resistenza di una colonna di liquido di lunghezza pari allo spostamento dell'elettrodo.

II. Diversi metodi si basano sulla misura della caduta di potenziale lungo la resistenza  $X$  da misurare. Il conduttore studiato, di cui chiameremo le estremità con A e B, è inserito in un circuito dove l'intensità è  $I$ . Nei punti A e B si collega una derivazione portante un amperometro, un voltmetro o un elettrometro. Supponiamo che sia un amperometro, la resistenza della derivazione è uguale a  $r$  e l'amperometro segna l'intensità  $i$ . In questo caso, la caduta di potenziale lungo  $X$  è  $X(I - i)$ , poiché la resistenza  $X$  è percorsa dalla corrente  $I - i$ . Questa caduta è anche uguale a  $ri$ ; si ha quindi  $X = ri : (I - i)$ . Quando si inserisce un voltmetro o un elettrometro sulla derivazione, lo strumento indica la differenza di potenziale  $e$  tra i punti A e B e si ha  $e = XI$ , da cui  $X = e : I$ .

È preferibile introdurre, nel circuito della corrente  $I$ , successivamente la resistenza  $X$  e una certa resistenza costante  $R$  oppure un reostato di cui si varia la resistenza  $R$ . Se è stato interposto un reostato, la sua resistenza  $R$  viene scelta in modo che il dispositivo posto sul ramo (amperometro, voltmetro o elettrometro) dia le stesse indicazioni nei due stati del circuito. Se invece  $R$  è una resistenza invariabile e se è stato interposto un amperometro che indica l'intensità di corrente  $i$ , quando la derivazione è collegata ai capi di  $X$ , e l'intensità  $i_1$ , quando è collegato ai capi di  $R$ , si ha  $(I - i)X = ri$  e  $(I - i_1)R = ri$ . Eliminando  $I$ , si ottiene una espressione che, per  $r$  sufficientemente grande, si può scrivere

$$\frac{X}{R} = \frac{i}{i_1} \left\{ 1 + \frac{R(i - i_1)}{ri_1} \right\} \quad (15.0.25)$$

Quando  $r$  è molto grande rispetto a  $X$  e a  $R$ , si ha

$$\frac{X}{R} = \frac{i}{i_1} \quad (15.0.26)$$

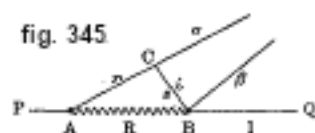
Se si posto nella derivazione un voltmetro o un elettrometro, che danno le indicazioni  $e$  e  $e_1$ , si ha

$$\frac{X}{R} = \frac{e}{e_1} \quad (15.0.27)$$

Successivamente indicheremo ancora un altro metodo di confronto di resistenze  $X$  e  $R$ , introdotte successivamente nello stesso circuito, mediante derivazioni a partire dai capi delle resistenze stesse. In tutti i casi di questo genere, l'ingegnoso metodo di Lord Rayleigh (1883) può rendere grande servizio, se la resistenza  $X$  è molto piccola (ad esempio, 0,01 ohm o meno), mentre  $R$  ha un valore di grandezza media (ad esempio, 10 ohm). Sia PQ (fig. 345) il circuito in cui passa la corrente  $I$ , A e B i capi della resistenza  $R$  che si tratta di confrontare con la piccola resistenza  $X$  introdotta nello stesso circuito PQ. Indichiamo con  $\alpha$  e  $\beta$  i fili di giunzione della derivazione, in cui è inserito un voltmetro o un elettrometro, ed infine sia  $r$  una resistenza grande,  $s$  una piccola. Se le estremità dei fili  $\alpha$  e  $\beta$  fossero fissati ai punti A e B, una forza elettromotrice  $E = RI$  agirebbe nella derivazione. Quando la derivazione ACB esiste, vi passa una corrente  $i = RI : (R + r + s)$  e i punti C e B hanno una differenza di potenziale  $e = si$ . Si ha quindi

$$e = \frac{s}{R + r + s} E$$

Se, ad esempio,  $R = 1$ ,  $s = 1$  e  $r = 98$ , si ha  $e = 0,01E$ ; il risultato è lo stesso che se al posto di  $R$  fosse stata inserita solo una resistenza da 0,01 invece di  $R$ , cosa che sarebbe molto difficile da ottenere praticamente con una certa precisione.



III. Altri metodi si basano sull'utilizzo di un galvanometro differenziale, cioè di un galvanometro il cui avvolgimento è costituito da due bobine separate o da due fili avvolti uno accanto all'altro. In ogni caso ci sono due avvolgimenti attraverso i quali passano due correnti di direzione tale che agiscono sull'ago del galvanometro in versi contrari. Si usa sempre il *metodo dello zero*, nel quale queste azioni hanno la stessa grandezza, in modo che l'ago magnetico rimanga a riposo. Se si suppone le due bobine assolutamente identiche, le si può introdurre in due derivazioni parallele di uno stesso circuito, una delle quali contiene un reostato, con l'aiuto del quale si porta a zero la deviazione del galvanometro. Si inserisce poi la resistenza  $X$  nell'altro ramo e si dà al reostato una resistenza tale che l'ago rimanga sempre nella posizione di equilibrio. E Becquerel (1846) ha applicato questo metodo. Siemens (1867) e Maiche (1865) hanno costruito strumenti opportuni, in cui le due bobine separate sono ad una certa distanza l'una dall'altra. L'ago magnetico fissato ad un'asta mobile, disposta lungo l'asse comune delle due bobine, viene portato in una posizione in cui non subisce alcuna deviazione quando le due bobine vengono introdotte nei due rami paralleli del circuito. Questo strumento viene utilizzato per confrontare due resistenze che devono essere uguali tra loro. Quando si intercalano nei rami del circuito, è necessario spostare un poco l'asta con l'ago, per riportarla a zero. Dall'entità di questo spostamento, che può essere misurata con grande precisione, si può giudicare, con l'aiuto di determinazioni empiriche preliminari, la differenza delle resistenze da confrontare.

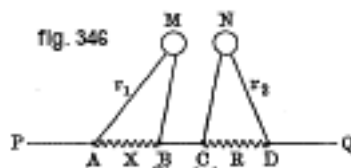
Supponiamo che le resistenze  $r_1$  e  $r_2$  dei due rami paralleli (bobine e conduttori) non siano uguali e che l'ago rimanga fermo se le intensità delle correnti nelle bobine sono le stesse. In questo caso introduciamo  $X$  in un ramo e una resistenza  $R_1$  nell'altro, in modo che l'ago non subisca alcuna deviazione. Poi  $X$  ed il reostato vengono fatti passare, mediante un commutatore, da un ramo all'altro; sia  $R_2$  la resistenza del reostato che dà deviazione nulla. Le intensità delle correnti possono essere uguali solo se le resistenze dei due rami sono uguali. Quindi si ha

$$r_1 + X = r_2 + R_1 \quad r_2 + X = r_1 + R_2$$

da cui

$$X = \frac{1}{2}(R_1 + R_2)$$

È molto più conveniente introdurre successivamente la resistenza  $X$  e il reostato  $R$  in uno stesso circuito PQ (fig. 346), come nei metodi II. Designiamo con M e N i due avvolgimenti del galvanometro differenziale; sono uniti alle estremità A, B, C e D delle resistenze  $X$  e  $R$ , in modo che le correnti in M e N siano di verso opposto (metodo Heaveside, 1873); le bobine M e N sono impostate per correnti uguali.



Quando le loro resistenze  $r_1$  e  $r_2$  sono uguali, si ha  $X = R$ . Quando non sono uguali, ma comunque note, si ha ovviamente

$$X : R = r_1 : r_2$$

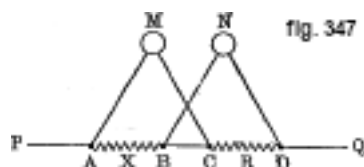
Se  $X$  è molto piccola, si può usare il metodo di Lord Rayleigh oppure il seguente proposto da Kirchhoff (1880). Si introduce, nel ramo CND (fig. 346), una resistenza aggiuntiva  $R_2$  tale che l'ago non devii; nell'altro ramo AMB è poi interposto un secondo resistore complementare  $R_1$ , che compensa la prima. Le intensità delle correnti sono uguali nei rami, quando le loro resistenze sono tra loro nel rapporto  $X : R$ . Dalle proporzioni  $X : R = r_1 : r_2$  e  $X : R = (r_1 + R_1) : (r_2 + R_2)$  si deduce

$$X : R = R_1 : R_2$$

Strecker (1885) ha studiato a fondo questo metodo perfezionandolo. Il metodo di F. Kohlrausch (1883) offre notevoli vantaggi; è indicato schematicamente nella fig. 347. Sia  $R$  una resistenza tra C e D, tale che non vi sia deflessione dell'ago. Con l'ausilio di un interruttore si spostano i rami laterali in modo che le estremità dei conduttori, che terminavano in B e C, arrivino rispettivamente in D e A e viceversa; si produce così lo stesso effetto come se si avesse trasportato tra B e C la sorgente della corrente, posta da qualche parte nel circuito PQ, all'esterno della sezione AD. Sia ora  $R_4$  una resistenza tra C e D, che dà una deviazione nulla. Il calcolo, che non effettueremo, mostra che si ha, in questo caso,

$$X = \frac{1}{2} (R_1 + R_2)$$

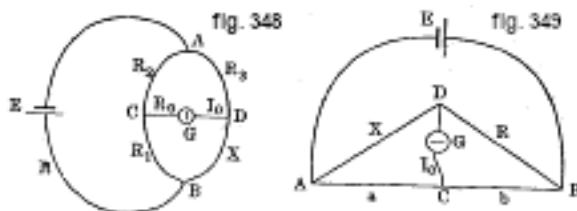
Jäger (1904) ha studiato molto approfonditamente questo metodo.



IV. METODO DEL PONTE DI WHEATSTONE (1843). La maggior parte delle misure ordinarie della resistenza vengono ora effettuate con questo metodo, che è quindi il più generalmente utilizzato. Abbiamo visto quale era lo schema del ponte; lo riproduciamo nuovamente nella figura 348. La sorgente di corrente è in E; AC, AD, BC e BD sono i del ponte; il ponte CD contiene un galvanometro G o, quando in E è presente una sorgente di corrente variabile, un telefono. Come abbiamo mostrato, la corrente  $I_1$  nel ponte si annulla quando le resistenze dei rami del ponte formano una proporzione geometrica. Il dispositivo G può prendere il posto del generatore di corrente E e viceversa, senza che venga modificata la condizione  $I_0 = 0$ . Sia  $X$  la resistenza da misurare, inserita nel ramo BD e  $R_1, R_2, R_3$  dei conduttori (reostati), le cui resistenze possono essere variate fino ad ottenere  $I_0 = 0$ . La resistenza cercata  $X$  è quindi data dalla seguente proporzione:

$$X : R_3 = R_1 : R_2 \quad (15.0.28)$$

È molto comodo sostituire i due rami AC e CB con un unico filo, lungo il quale può scorrere l'estremità C del ponte CD; lo schema di tale disposizione è data dalla figura 349. AB è un filo di platino, argento, nichel o manganina; è teso su una scala, che permette di determinare esattamente la posizione del contatto scorrevole per il quale si ha  $I_0 = 0$ ; questo filo di misura deve essere calibrato attentamente.



Designiamo con  $a$  e  $b$  le lunghezze dei tratti CA e CB, Si inserisce nel ramo AD la resistenza da misurare  $X$ , e nell'altro ramo DB una resistenza  $R$ , la più vicina possibile a  $X$ , che è determinata dalla proporzione

$$X : R = a : b \quad (15.0.29)$$

Se la lunghezza totale del filo è  $L$  e se non vi sono due scale i cui zeri si trovano alle sue estremità, si ha

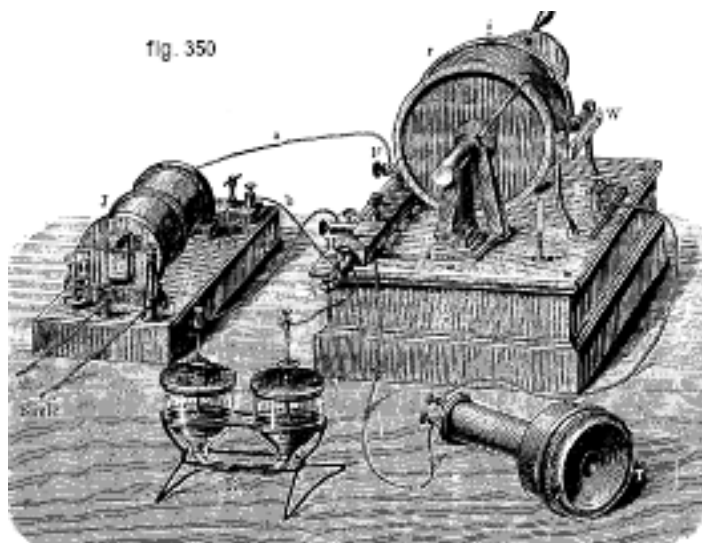
$$X : R = a : (L - a) \quad (15.0.30)$$

Si può così conoscere la lunghezza totale  $L$ ; scambiando con un commutatore i rami  $X$  e  $R$ , si ottiene, nel secondo modo di connessione,  $R : X = a_1 : (L - a_1)$ ; ma  $L = a + a_1$  e  $X : R = a : a_1$ ; siccome  $2a = L + (a - a_1)$  e  $2a_1 = L - (a - a)$ , si può scrivere

$$X : R = (L + d) : (L - d) \quad (15.0.31)$$

dove  $d = a - a_1$  è uguale allo spostamento del contatto scorrevole C, quando si scambiano  $X$  e  $R$ . La lunghezza  $L$  viene determinata una volta per tutte, introducendo resistenze di grandezza nota al posto di  $X$  (Slotte, 1882). Il galvanometro G può essere collegato anche ai capi A e B del filo rettilineo e alla sorgente di corrente posta tra D e al contatto scorrevole C.

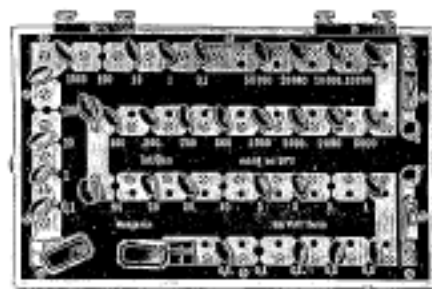
Al posto del filo rettilineo si può utilizzare il reostato di Jacobi (fig. 342), la rotella sostituisce il contatto scorrevole. La figura 350 rappresenta il dispositivo di F. Kohlrausch per misurare la resistenza degli elettroliti. Una descrizione molto completa di tutti i dettagli delle misure con questo apparecchio si trova nell'opera di F. Kohlrausch e L. Holborn, *Das Leitvermögen der Elektrolyte*, Lipsia 1898. Dieci spire di filo nudo sono avvolte su un cilindro di marmo, ebanite o altra sostanza non conduttrice; le estremità del filo sono collegate metallicamente a due terminali  $k$  e F, corrispondenti ai punti A e B in figura 348. A questi terminali sono fissati i fili  $a$  e  $b$ , che vanno ad una piccola bobina di induzione  $J$ . Questo funge da sorgente di corrente, poiché per la misura è necessaria una corrente alternata; una corrente di direzione costante produrrebbe la polarizzazione nell'elettrolita. Il punto di contatto della rotella mobile con il filo corrisponde al punto C di figura 348.



La posizione di questo punto è determinata dalla scala W e dall'indice fisso  $i$ ; si scrive sul primo il numero di avvolgimenti interi del cilindro e con il secondo, su un cerchio diviso in 100 parti e fissato alla base del cilindro, le frazioni di avvolgimenti; la rotella è collegata al terminale L. All'interno della cassetta K sono presenti resistenze in filo da 10, 100 e 1000 ohm, le cui estremità fanno capo a bande metalliche poste sui terminali  $k$  ed F; rimuovendo il piolo corrispondente ad una determinata resistenza, questa viene introdotta. Il recipiente R contiene il liquido studiato, nel quale sono immersi due elettrodi di platino collegati ai terminali  $k$  e H; il terminale corrisponde al punto D di figura 348. Tra H e la rotella collegata a L è inserito un telefono T. Occorre ora far ruotare il cilindro con una manovella, per cercare una posizione tale che nel telefono non venga prodotto alcun suono; arrivati a ciò, la resistenza cercata  $X$  nel contenitore R è uguale alla resistenza introdotta tra H e F, come sono tra loro le lunghezze dei due tratti di filo sul cilindro. Per determinare la resistenza specifica di un liquido, si deve prima riempire H con un liquido, la cui resistenza specifica è già nota. Si possono impiegare a questo

scopo diverse soluzioni di acido solforico, di solfato di magnesio, di NaCl, di KCl e di solfato di calcio, indicate con F. Kohlrausch. Wien (1891) ha proposto di utilizzare un telefono, in cui le vibrazioni della lamina vengono trasmesse ad un piccolo specchio, dove un raggio luminoso viene riflesso verso l'obiettivo di un cannocchiale (telefono ottico). Si può ancora sostituire il telefono con un galvanometro a vibrazione della Rubens (1898). Si utilizzano anche, al posto del recipiente R, contenitori di altra forma.

Quando si utilizza il metodo del ponte, sono necessarie tre resistenze  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  (fig. 348), che possono variare entro ampi limiti, a seconda dell'entità della resistenza cercata  $X$ . Si sono costruiti a tale scopo numerosi e molto vari resistenze a ponte, che rappresentano in qualche modo combinazioni di tre scatole di resistori, a cui è collegata la  $X$  desiderata, le estremità del circuito che contiene la sorgente di corrente, e quelle dei conduttori che portano al galvanometro, che vale a dire le estremità del ponte, così da realizzare lo schema di quest'ultimo. Un strumento di questo tipo è rappresentato nella fig. 351. Nella riga superiore, partendo da quella centrale, due rami contengono ciascuno 1, 10 e 100 ohm e corrispondono alle resistenze  $R_1$ , e  $R_2$  della figura 348. Poi vengono, in tre file a zigzag, resistenze da 0,1 a 50000 ohm, corrispondenti alla resistenza  $R_3$  della figura 348. Si può così ottenere con un opportuno utilizzo degli spinotti una resistenza compresa tra 0,1 e 100000 ohm. Il quarto ramo, che deve contenere la resistenza da misurare, è inserito tra le due grandi viti visibili sul lato destro.



Il ponte contenente il galvanometro è collegato alla vite che si trova al centro della fila superiore e alla vite G all'estremità destra della fila inferiore; infine, i fili, che partono dalla sorgente della corrente, terminano in due viti, poste alle estremità della fila superiore. La Figura 352 rappresenta i modelli di precisione costruiti da J. Carpentier per cassette di resistenza negli ultimi decenni, con ponte di Wheatstone. Non descriveremo le altre numerose resistenze a ponte, così come i vari strumenti cosiddetti universali, che servono per la misura delle resistenze e delle forze elettromotrici. Si troverà sull'argomento tutte le informazioni necessarie nelle apposite opere che dovranno essere indirizzate a coloro che vorranno usufruirne.

Esistono numerosi studi teorici sul ponte di Wheatstone e sulla forma migliore da dargli per ottenere la massima sensibilità, cioè in modo che una variazione relativa sia la più piccola possibile nella resistenza  $R_3$  (fig. 348) produce nel ponte una corrente  $I_0$  molto intensa. Abbiamo già introdotto la formula (8-32,b), l'espressione di  $I_0$  in funzione di  $R$ ,  $R_0$ ,  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  e  $R_4$ . La questione della sensibilità è stata studiata teoricamente da Maxwell, Heavis (1873), Gray (1888), Lehfeltdt (1891), Lord Rayleigh (1891), Levy (1890), Schuster (1895), Armagnac (1897), Child e Stewart (1897), Crehore e Squier (1897) e altri. Ci limiteremo alla seguente osservazione: quando  $R_1 = N$  è noto approssimativamente e sono date  $R$  e  $R_0$ , si ottiene la massima sensibilità, quando si ha (vedi fig. 348):

$$R_1 = \sqrt{R_0 X \frac{R+X}{R_0+X}} \quad R_2 = \sqrt{R R_0} \quad R_3 = \sqrt{R X \frac{R_0+X}{R+X}} \quad (15.0.32)$$



fig. 352

Se  $R_0$  e  $R$  possono essere scelti anche arbitrariamente, la massima sensibilità si ottiene quando le sei resistenze sono tutte uguali tra loro. Per la misura di resistenze molto piccole ci si può avvalere del metodo di Lord Rayleigh, di cui abbiamo parlato sopra (fig. 345). Tuttavia, si utilizza più spesso il ponte di Thomson (Lord Kelvin); riproduciamo nuovamente lo schema di questo ponte (fig. 353). Come abbiamo visto, se l'intensità  $I$  è nulla nel ponte CH e se due dei rapporti  $R_1 : R_2$ ,  $R_3 : R_4$  e  $R_5 : R_6$  sono uguali, anche il terzo è loro uguale. In pratica, si stabilisce il ponte in modo da avere  $R_1 = R_3$  e  $R_2 = R_6$ ; si ha allora  $I = 0$ ,

$$\frac{R_3}{R_4} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{R_5}{R_6} \quad (15.0.33)$$

Inoltre, si rende  $R_1$  grande rispetto a  $R_2$ . Si pone tra F e B la resistenza cercata, in modo che  $R_1 = X$ . Tra A e D è inserito un filo grosso, accuratamente calibrato, provvisto di scala. L'estremità D del filo HD scorre lungo  $R_3$ , ed è disposta in modo che  $l = 0$ . Si ha allora  $X : R_3 = R_2 : R_1$ , da cui si deduce X.



Una modifica di questo ponte fu indicata da Reeves (1896) e Appleyard (1896). Jäger, Lindeck e Diesselhorst (1903) hanno effettuato uno studio teorico e sperimentale approfondito del ponte Thompson. Abbiamo visto in quali condizioni  $I = 0$ , quando i rapporti  $R_1 : R_2$  e  $R_5 : R_6$  non sono uguali. Gli autori precedenti hanno studiato le correzioni da apportare alla proporzione  $X : R_3 = R_2 : R_1$ , quando i rapporti  $R_1 : R_2$  e  $R_5 : R_6$  differiscono poco tra loro.

Sul ponte Thompson sono presenti anche speciali resistenze a ponte. Menzioneremo quelli adottati da J. Carpentier. Il metodo di Lord Kelvin richiede l'uso di due serie di resistenze proporzionali e una lineare che funge da resistenza di confronto. Il modello di J. Carpentier porta in sé (fig. 354), tutti i collegamenti dei vari organi necessari per la misura e lascia all'operatore solo la cura di stabilire i collegamenti con la sorgente di corrente, il galvanometro e il resistenza da misurare. Permette quindi di evitare sicuramente tutti gli errori di montaggio che frequentemente si commettono quando si utilizziamo dispositivi indipendenti. Le due serie di resistori sono simili tra loro e sono divise ciascuna in sei sezioni  $a, b, c, d, e, f$ ; il valore di ciascuna di tali sezioni è calcolato in modo da soddisfare le seguenti condizioni:

$$\begin{aligned} (a) &= \frac{1}{100} (b + c + d + e + f) \\ (a + b) &= \frac{1}{10} (c + d + e + f) \\ (a + b + c) &= 1 (d + e + f) \\ (a + b + c + d) &= 10 (e + f) \\ (a + b + c + d + e) &= 100 (f) \end{aligned}$$



fig. 354

Le resistenze di ciascuna delle due serie sono collegate a un combinatore circolare che permette, con il semplice azionamento di un cursore diametrico, di produrre contemporaneamente, in ciascuna delle due serie di resistenze, il raggruppamento che fornisce il rapporto cercato  $\frac{1}{100}$ ,  $\frac{1}{10}$ , 1,  $\frac{10}{1}$  o  $\frac{100}{1}$ . La barra calibrata, che serve da resistenza di confronto, è un'asta di alpacca ben calibrata, di 4 mm di diametro e lunga 50 cm. La sua resistenza totale è determinata con la massima cura possibile. Il valore di questa resistenza è indicato da un rigolo diviso e graduato posto parallelamente; su di esso scorre un cursore con una maniglia la cui estremità inferiore porta una rotella che permette di prendere contatto con l'asta campione; l'intervallo tra due grandi divisioni è diviso in 20 parti uguali corrispondenti ciascuna a  $\frac{1}{20000}$  di ohm. Una chiave per batteria  $K^1$  (fig. 355) e una chiave per galvanometro  $K^2$  completano lo strumento.

È sufficiente, per installare questo ponte, collegare il galvanometro ai terminali 5-6, il generatore di corrente ai terminali 7-8, inserire tra i terminali 1-2 il circuito da testare e derivare sui terminali 3-4 la parte di questo circuito di cui si deve misurare la resistenza.

Per effettuare la misura si porta in equilibrio il galvanometro spostando il cursore M nel verso opportuno lungo la barra campione; una volta stabilito l'equilibrio, il valore della resistenza è dato dal numero del regolo graduato, corrispondente alla posizione del cursore, moltiplicato per il coefficiente indicato, sul combinatore, dal cursore diametrico N.

Questo strumento permette di misurare resistenze comprese tra

$$\frac{1}{100} \times 0,0001 = 0,000001 \text{ ohm} \quad e \quad 100 \times 0,01 = 1 \text{ ohm}$$

Matthiesen e Hockik, oltre a Foster, hanno indicato altri strumenti per la misura di piccole resistenze.

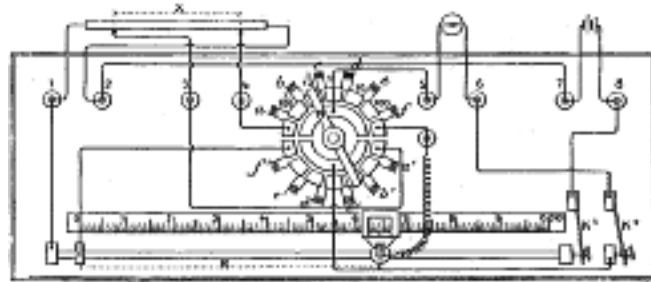


fig. 355

## V. Metodi differenti per la misura delle resistenze

Tra gli altri metodi di misura, che sono molti, citeremo solo i seguenti.

Parleremo innanzitutto il *metodo delle oscillazioni smorzate*. In un moltiplicatore, oscilla un ago magnetico; sia  $\lambda'$  il decremento logaritmico delle oscillazioni a circuito aperto, mentre lo smorzamento è prodotto solo dalla resistenza dell'aria.

Quando il moltiplicatore, la cui resistenza propria è pari a  $R_0$ , viene improvvisamente chiuso, si ottiene il decremento  $\lambda_0$ ; quando è chiuso da una resistenza  $R$  nota, si ha il decremento  $\lambda_1$  e infine, quando è chiuso dalla resistenza cercata  $X$ , si ha il decremento  $\lambda$ .



Le differenze  $\lambda_0 - \lambda'$ ,  $\lambda_1 - \lambda'$  e  $\lambda - \lambda'$  sono inversamente proporzionali alle resistenze  $R_0, R_0 + R, R_0 + X$ . Si deduce molto semplicemente che

$$X = R_1 \frac{(\lambda_0 - \lambda)(\lambda_1 - \lambda')}{(\lambda_0 - \lambda_1)(\lambda - \lambda')} \quad (15.0.34)$$

Se i valori di  $\lambda_0$ ,  $\lambda_1$  e  $\lambda$  sono grandi, li si può sostituire con  $\lambda_0 - 0,269\lambda_0^3$ , ecc., o, con una sufficiente precisione con  $\lambda_0 - \frac{1}{4}\lambda_0^3$ , ecc. Questo metodo fu studiato teoricamente e sperimentalmente da F. Kohlrausch (1871) e Dorn (1882); modifiche furono apportate da Mayrhofer (1890) e R. H. Weber (1899).

La *bilancia di induzione* di Hughes (1879) può, come dimostrato dal lavoro di Lodge (1880), Lord Rayleigh (1880), Oberbeck e Bergmann (1887, 1891), Elsas (1888, 1891) e M. Wien (1893), utilizzabile per la misura della resistenza.

Esistono diversi metodi per misurare grandi resistenze, ad esempio quello di cattivi conduttori. Il metodo più semplice consiste nel far passare attraverso un dato conduttore una corrente  $I$ , la cui intensità viene misurata con un amperometro e la differenza di potenziale tra due suoi punti con un voltmetro; abbiamo allora  $X = E : I$ .

Di particolare interesse è il metodo di Siemens (1860) ovvero la *scarica di un condensatore*. Un condensatore, collegato ad un elettrometro, si carica e poi si scarica attraverso il corpo di cui si vuole determinare la resistenza  $X$ . Questo corpo può essere preso sotto forma di una lastra, posta tra le armature di un condensatore piano. Sia  $q$  la capacità del condensatore e supponiamo che il potenziale del condensatore sia diminuito da  $V_1$  a  $V_2$  nel tempo  $t_2 - t_1$ . Siano ancora  $V$  e  $t$  i valori variabili del potenziale e del tempo; durante il tempo  $dt$  l'intensità della corrente è  $V/x$  e la quantità di elettricità, fluita, è  $Vdt : X$ ; essa provoca una variazione di potenziale  $dV = Vdt : Xq$ , e integrando si ottiene

$$X = \frac{t_2 - t_1}{q(\log V_1 - \log V_2)} \quad (15.0.35)$$

Fuchs (1873), Lippmann (1876), Klemencic (1886), Cardew (1892) e Rood (1900) hanno proposto varie modifiche a questo metodo.

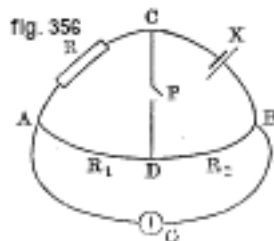
La misura delle resistenze di isolamento o quello che viene chiamato *isolamento dei cavi* gioca un ruolo importante in telegrafia; lo stesso vale nell'elettrotecnica, per l'isolamento delle macchine sui loro basamenti, quello dei circuiti, ecc.; non considereremo qui i metodi e gli strumenti utilizzati a tale scopo.

Di grande interesse è il metodo utilizzato da J. Curie (1889), nei suoi lavori sulla conduttività dei cristalli. Una lamina di cristallo è ricoperta su entrambi i lati da uno strato d'argento che si carica; una delle facce della lamina è a terra, l'altra è in comunicazione con una coppia di quadranti di un elettrometro, l'altra coppia del quale è anch'essa a terra: l'ago viene caricato da una batteria. La prima coppia di quadranti è collegata a un piezoelettrometro al quarzo, la cui carica riporta l'ago a zero. La caduta di potenziale  $V_1 - V_2$  è misurata dalla carica che deve essere aggiunta o rimossa dal piezoelettrometro.

La resistenza della bobina di un galvanometro può ovviamente essere determinata con uno qualsiasi dei metodi sopra considerati, quindi è possibile utilizzare il dispositivo stesso per misurare la corrente che lo attraversa. Da qui alcune varianti dei metodi descritti, sui quali non ci soffermeremo, perché non offrono nulla di essenziale.

La misura della resistenza interna degli elementi un tempo svolgeva un ruolo importante, quando le pile erano quasi l'unica fonte di corrente utilizzata. Furono allora ideati tutta una serie di metodi per misurare la resistenza interna degli elementi. Attualmente le pile non vengono quasi più utilizzate; sono state sostituite da dinamo e accumulatori, e questi ultimi hanno una resistenza interna così piccola che spesso può essere trascurata.

Un metodo semplice di misura della resistenza  $X$  di un elemento è chiudere l'elemento con un voltmetro e un amperometro (collegati in parallelo), introducendo l'eventuale resistenza nel circuito del secondo. Supponiamo che, essendo il circuito dell'amperometro aperto, il voltmetro indichi una tensione nulla, e che una volta chiuso lo stesso circuito, si legga sul voltmetro la tensione  $e'$  e sull'amperometro l'intensità  $I$ . Si ha allora  $X = (e - e') : I$ .



Interessante è il metodo di Mance (fig. 356). L'elemento è posizionato su uno dei rami CB di un ponte di Wheatstone; tra A e B è posto un galvanometro, tra C e D un commutatore P. Se le altre resistenze sono scelte in modo che una chiusura mediante P non modifichi l'intensità della corrente in AB, si deduce  $X$  dalla proporzione  $X : R = R_2 : R_1$ . L'esattezza di questa formula risulta dallo schema generale del Fröhlich. Lodge, Guillaume, Zolotareff (1882) ed altri hanno modificato questo metodo. Tra gli altri metodi è da citare anche quello di Nernst e Haagn (1896).

In conclusione di questo paragrafo citeremo le importanti ricerche di Schuster (1895), Jäger (1906) e Smith (1906), che hanno confrontato teoricamente e sperimentalmente i vari metodi di misura delle resistenze dal punto di vista della loro sensibilità.

## 6. Alcuni risultati della ricerca sulla conducibilità. Metalli puri

Presenteremo ora gli interessanti risultati ottenuti nello studio della conducibilità di diverse sostanze. Ci limiteremo ai conduttori della prima classe, cioè ai non elettroliti, perché abbiamo già considerato in precedenza la conducibilità degli elettroliti.

Dobbiamo considerare due questioni: come la conducibilità dipende dalla sostanza del conduttore, e come dipende, per una data sostanza, da cause esterne, come la temperatura, l'illuminamento, le azioni meccaniche, l'azione del campo magnetico, ecc.

Si è soliti distinguere i corpi (più esattamente le sostanze) in conduttori e non conduttori o dielettrici, e si è poi elencato un certo numero di rappresentanti dell'uno e dell'altro gruppo. Senza voler né ripetere né estendere questa enumerazione, aggiungeremo che non esiste evidentemente alcuna differenza ben marcata tra conduttori e dielettrici. Un gran numero di sostanze presentano proprietà intermedie; sono chiamati semiconduttori o cattivi conduttori. Assumeremo, in generale, che la sostanza formi una massa compatta. Diremo solo poche parole sulla conducibilità delle polveri (coerenti) e non ci occuperemo della conducibilità dell'insieme di due corpi, della stessa natura o meno, le cui superfici non sono in intimo contatto (microfoni).

Oltre alla resistenza elettrica si è soliti considerare la grandezza inversa, la conducibilità elettrica (o *conduttanza*). Se  $r$  è la resistenza di un filo di lunghezza  $l$  e sezione  $q$ ,  $s = 1 : r$  è la conducibilità di questo filo; si ha

$$r = \rho \frac{l}{q} \quad s = \sigma \frac{q}{l} \quad (15.0.36)$$

essendo denominate  $\rho$  e  $\sigma$  rispettivamente resistenza specifica o *resistività* e conducibilità specifica o *conduttività*;  $\rho$  e  $\sigma$  sono numericamente uguali alla resistenza e alla conduttività di un filo per il quale  $l = 1$  e  $q = 1$ . Esprimeremo la resistenza  $r$  in ohm e la conducibilità  $s$  in  $ohm^{-1}$ . È stato proposto di dare all'ohm inverso, cioè alla conducibilità di un corpo la cui resistenza è

uguale a un ohm, la denominazione di mho (ottenuta capovolgendo la parola ohm), ma tale denominazione non è entrata nell'uso.

Abbiamo visto che, nel sistema elettromagnetico, la resistenza  $r$  ha dimensione  $L : T$ ; pertanto, la conducibilità  $s$  ha dimensione  $T : L$ . Le formule (22) danno inoltre

$$[\rho] = L^2 T^{-1} \quad [\sigma] = L^{-2} T \quad (15.0.37)$$

Talvolta, si eguagliano le grandezze  $\rho_0$  e  $\sigma_0$  relative alla misura a  $0^\circ$ ; indicando con  $\rho'$  e  $\sigma'$  i valori numerici che si ottengono, si ha

$$\rho' = \frac{\rho}{\rho_0} \quad \sigma' = \frac{\sigma}{\sigma_0} \quad (15.0.38)$$

$\rho'$  e  $\sigma'$  sono hanno naturalmente dimensione zero. Attualmente, si riferiscono  $\rho$  e  $\sigma$  a un corpo per il quale  $l = 1$  e  $q = 1$ , essendo  $l$  e  $q$  espressi in unità corrispondenti, ad esempio  $l = 1 \text{ cm}$ ,  $q = 1 \text{ cm}^3$ ; ciò significa che  $\rho$  e  $\sigma$  sono misurati dalla resistenza o conducibilità di un centimetro cubo della sostanza. Più comunemente, questa resistenza è misurata in ohm, di modo che l'unità della resistenza specifica è la resistenza di una sostanza, di cui un centimetro cubo ha un ohm di resistenza. Questa unità è chiamata ohm-centimetro; la corrispondente unità di conducibilità specifica è un  $(ohm \cdot cm)^{-1}$  o un  $(mho : cm)$ . Una sostanza, per la quale  $1 \text{ cm}^3$  ha una resistenza di  $1 \text{ ohm}$ , ha l'unità di resistenza e conducibilità specifica. Per il mercurio ( $\rho_0$  e  $\sigma_0$ ), si ha

$$\rho_0 \frac{106,3}{10^{-2}} = 1 \text{ ohm}$$

se ne deduce

$$\begin{cases} \rho_0 &= \frac{1}{10630} \text{ ohm} \cdot \text{cm} \\ \sigma_0 &= 10630 (\text{ohm} \cdot \text{cm})^{-1} = 10630 \text{ mho/cm} \end{cases} \quad (15.0.39)$$

Per una sostanza qualunque, si ha:

$$\begin{cases} \rho &= \frac{\rho'}{10630} \text{ ohm} \cdot \text{cm} \\ \sigma &= 10630 \sigma' (\text{ohm} \cdot \text{cm})^{-1} = 10630 \sigma' \text{ mho/cm} \end{cases} \quad (15.0.40)$$

Quando si esprimono  $\rho$  e  $\sigma$  in unità C.G.S., i numeri sopra devono essere moltiplicati per  $10^9$  e  $10^{-9}$  e si ottiene

$$\begin{cases} \rho_0 = \frac{10^5}{1,063} \frac{\text{cm}^2}{\text{s}} & \sigma_0 = 1,063 \cdot 10^{-5} \frac{\text{s}}{\text{cm}^2} \\ \rho = \frac{10^5 \rho'}{1,063} \frac{\text{cm}^2}{\text{s}} & \sigma = 1,063 \cdot 10^{-5} \sigma' \frac{\text{s}}{\text{cm}^2} \end{cases} \quad (15.0.41)$$

Nelle tabelle, si esprime talvolta in metri la lunghezza  $L$  di un filo, per il quale  $q = 1 \text{ mm}^2$  e  $r = 1 \text{ ohm}$ . Si ha

$$L = \frac{1,063}{\rho'} \text{ m} \quad (15.0.42)$$

In pratica è comodo indicare nelle tabelle la resistenza  $R$  di un filo, per il quale  $l = 1 \text{ m}$  e  $q = 1 \text{ mm}^2$ ; poiché  $RL = 1$ , si ha

$$R = \frac{\rho'}{1,063} \text{ ohm} \quad (15.0.43)$$

Quando la temperatura  $t$  aumenta, anche la resistenza  $\rho$  della maggior parte dei non elettroliti cresce. Empiricamente, la dipendenza tra  $\rho$  e  $t$  è solitamente espressa da una formula del tipo

$$\rho = \rho_0 (1 + at + bt^2 + ct^3 + \dots) \quad (15.0.44)$$

dove  $\rho_0$  si riferisce a  $0^\circ$  e dove  $a, b, c, \dots$  sono coefficienti costanti. Esistono però anche, per esprimere questa dipendenza, formule stabilite teoricamente, di cui parleremo più avanti. La costruzione del bolometro si basa sull'azione della temperatura sulla resistenza.

Il numero di ricerche dedicate alla conducibilità è considerevole; estrarremo solo i risultati che presentano un interesse particolare o che si distinguono in qualche modo per il loro carattere generale. Non forniremo tabelle dei valori numerici delle conducibilità; li ritroveremo, ad esempio, nelle famose tavole di Landolt-Börnstein-Meyerhoffer, 3a ed. 1904, pag. 716-734, nonché nella *Raccolta delle costanti fisiche* recentemente pubblicata sotto gli auspici della Società francese di fisica da H. Abraham e P. Sacerdote, Parigi, 1913.

Affrontiamo innanzitutto la conducibilità dei metalli puri. Le prime misure accurate su metalli il più possibile chimicamente puri, si devono a Matthiessen e Bose (1862), Lucien De la Rive (Tl, 1863), Erhard (In, 1881), Emo (1884), H. F. Weber (1880), Oberbeck e Bergmann (1887), Van Aubel (Bi, 1889) e altri ancora. La dipendenza tra la conducibilità dei metalli puri e la temperatura è stata studiata non solo dagli autori appena citati, ma anche e in modo del tutto particolare da Benoit (1870), Vicentini e Omodei (1889), e da altri ancora. Non citeremo i numeri; si troveranno nelle tavole da noi citate, nonché nell'opera di G. Wiedemann, *Die Lehre von der Elektrizität*, Tomo I, pp. 468 e seguenti, 1893.

Ricerche su metalli molto puri sono state recentemente effettuate da Dewar e Fleming (1893) e, al *Phys.-Techn. Reichsanstalt*, di Jäger e Diesselhorst (1900). Ecco alcuni valori numerici di  $\sigma$ , che mostrano la grande differenza tra i risultati ottenuti; per il mercurio, vedere (24,b), si ha  $\sigma = 1,063 \cdot 10^4 \text{ (ohm cm)}^{-1}$ .

Metalli	Dewar e Fleming	Jäger e Diesselhorst
Ag (molle)	$63,3 \cdot 10^4$	$61,4 \cdot 10^4$
Oro (duro)	$42,3 \cdot 10^4$	$41,3 \cdot 10^4$
Zn	$16,2 \cdot 10^4$	$15,98 \cdot 10^4$
Pt	$9,17 \cdot 10^4$	$9,24 \cdot 10^4$

Per esprimere la dipendenza tra la resistenza  $\rho$  o la conducibilità  $\sigma$  dei metalli puri e la temperatura  $t$ , si possono utilizzare formule empiriche come la (25); in molti casi ci si può accontentare di tre termini, cioè di una formula come

$$\rho = \rho_0 (1 + at + bt^2) \quad (15.0.45)$$

dove  $a > 0$ . Per i metalli perfettamente puri, il coefficiente  $b$  è in genere molto piccolo, per cui si può porre

$$\begin{cases} \rho &= \rho_0 (1 + at) \\ \sigma &= \sigma_0 (1 - at) \end{cases} \quad (15.0.46)$$

Vecchie misure avevano portato alcuni autori a pensare che, per i metalli puri,  $a$  è vicino  $\frac{1}{273} = 0,00366$ , cioè al coefficiente di dilatazione termica dei gas perfetti. Ma le ricerche di Dewar e Fleming (1893), così come quelle di Jäger e Diesselhorst (1900) non hanno confermato questa ipotesi; lo si vede per alcuni dei seguenti valori di  $a$  trovati da questi autori:

Metalli	Dewar e Fleming	Jäger e Diesselhorst
Ag	0,00400	0,00400
Oro	0,00377	0,00368
Zn	0,00406	0,00382
Cu	0,00428	0,00415

Le medie di questi numeri sono 00,0412 e 0,00411; sono quasi identici, ma sono abbastanza lontani dal numero 0,00366. Del resto Auerbach aveva da tempo indicato (1879) che gli esperimenti di Matthiessen danno il valore medio  $a = 0,00415$ . Considerazioni teoriche lo

avevano portato a questo risultato che, per i metalli, si ha  $a = \frac{1}{273} + 2\beta$ , dove  $\beta$  è il coefficiente di temperatura della capacità termica.

Oltre la (26,a) o la (25,b), sono state proposte altre formule. Ihle (1896) ha determinato la dipendenza tra  $\sigma$  e  $t$  per una serie di barre metalliche, preparate da W. Voigt per la determinazione delle costanti di elasticità, attrito interno, dilatazione termica e delle capacità termiche  $c_p$  e  $c_v$ . Ihle parte dalla formula  $d\sigma = k\sigma dt$ , cioè dall'espressione

$$\sigma = \sigma_0^{-kt(t-t_0)} \quad (15.0.47)$$

e determina i valori di  $k$  tra  $t_0$  (20° circa) e  $t_1$  (92,5° circa). Marvix (1910) ha trovato che si ha per il Ni

$$\log \rho = a + mt \quad (15.0.48)$$

con  $a$  e  $m$  costanti. La teoria dell'elettrone sviluppata da Riecke, Drude, J. J. Thomson e H. Lorentz porta al risultato che  $\rho$  deve aumentare proporzionalmente alla  $\sqrt{T}$ , essendo  $T$  la temperatura assoluta; ma questa conclusione non è confermata. Koenigsberger e Reichenheim (1906) hanno dato la formula

$$\rho = A \left(1 + at + bt^2\right) e^{\frac{c}{T}} \quad (15.0.49)$$

dove  $A, a, b, c$  sono costanti e  $A = \rho_0 e^{-\frac{c}{273}}$ , con  $\rho_0$  riferito a 0°. Torneremo più avanti sul lavoro degli autori precedenti. Per il momento indichiamo alcuni risultati delle misure.

Il mercurio è di particolare interesse, sia per il ruolo che svolge nella determinazione dell'ohm, sia per la relativa facilità con cui può essere ottenuto allo stato purissimo: la costante  $a$  assume, per il mercurio, un valore molto piccolo. Le ultime ricerche al di sopra di 0° e fino a temperature moderatamente elevate sono state effettuate da Kreichgauer e Jäger (1892), che hanno trovato, tra 0° e 30°,

$$\rho = \rho_0 \left(1 + 0,000833t + 0,00000126t^2\right)$$

da Guillaume (1892) tra 0° e 60°, che ha ottenuto

$$\rho = \rho_0 \left(1 + 0,000881t + 0,000001010t^2\right)$$

infine da F. E. Smith (1904) tra 0° e 22°, che ha trovato

$$\rho = \rho_0 \left(1 + 0,0008803t + 0,00000104t^2\right)$$

Il platino è di grande interesse per il ruolo che svolge nella pirometria. Abbiamo già parlato dei lavori relativi a questo metallo nel Volume III, Cap. II, § 12. La resistenza  $\rho$  del tantalio ha, secondo Pirani (1907), un coefficiente di temperatura relativamente piccolo; si ha in particolare

	-190° a 0°	20° a 100°	20° a 380°	0° a 1750°
$a =$	0,0032	0,0029	0,0026	0,0025

Streintz (1910) ha trovato che, per i metalli,  $a$  è proporzionale a  $\sqrt[3]{v}$ , con  $v$  che rappresenta il volume atomico (peso atomico diviso per la densità). Williams (1902) ha fornito altre relazioni tra  $v$  e i coefficienti di temperatura di resistenza, volume e capacità termica.

Lo studio della resistenza  $\rho$  dei metalli puri a temperature molto basse, in particolare la determinazione del limite che  $\rho$  raggiunge, quando la temperatura assoluta tende allo zero, sono di grandissima importanza sia dal punto di vista sperimentale che da quello teorico. Le prime ricerche fatte su questo argomento si devono a Cailletet e Bouty (1880), così come a Wroblenski (1885); hanno scoperto che  $a$  aumenta quando la temperatura diminuisce. Una serie di accurati esperimenti furono fatti fino a -197° da Dewar e Fleming. Nel loro primo lavoro

(1892) avevano accusato una continua diminuzione della resistenza dei metalli puri, tanto che questa sembrava tendere verso zero o verso un valore molto piccolo a  $-273^\circ$ . In un secondo lavoro (1893), riuscirono, per certi metalli, a scendere fino a  $-222^\circ$ , e riconobbero che nei metalli puri, tutte le curve  $\rho = f(t)$  estrapolate intersecano l'asse delle ascisse verso  $t = -273^\circ$ . Hanno ottenuto nel 1896 lo stesso risultato con bismuto puro prodotto elettroliticamente; lo stesso modo Fleming (190) con nichel puro.

Successivi esperimenti condotti da vari fisici non hanno confermato questa conclusione. Lord Kelvin per primo ha avanzato l'idea che  $\rho$  deve avere un minimo per poi aumentare indefinitamente quando ci si avvicina a  $-273^\circ$ . Dewar (1901) per ha osservato che, per il platino e il ferro a  $-252,3^\circ$  (ebollizione dell'idrogeno liquido),  $\rho$  è notevolmente maggiore di quello ipotizzato che tenderebbe a zero a  $-273^\circ$ . Poi Meilink (1901) e in particolare Kamerlingh-Onnes e Clay (1904 - 1906) hanno trovato, per il Pt e Au, che le curve  $\rho = f(t)$  piegano bruscamente al di sotto di  $-200^\circ$  e mostrano chiaramente l'esistenza di un minimo verso  $-208^\circ$  per il Pt e circa  $-265^\circ$  per l'Au. Anche la formula (25,e) indica un rapporto di questo tipo tra  $\rho$  e  $t$ ; per grandi valori di  $T$ , l'ultimo fattore è uguale a  $r$ , quindi la formula cambia nella (25,a); ma, per valori molto piccoli di  $T$ , questo fattore diventa molto grande, e, quando  $T$  tende a 0 ( $t = -273^\circ$ ), si ottiene  $\rho$  infinito. Koenigsberger e Schilling (1908) hanno ottenuto, in nuovi esperimenti su silicio, titanio e zirconio metallici, come temperature di minor resistenza, rispettivamente  $+800^\circ$ ,  $+150^\circ$  e  $-100^\circ$ ; una menzione a parte merita il titanio, perché la sua temperatura di minore resistenza ( $150^\circ$ ) viene raggiunta molto facilmente. Questi autori ritengono che la temperatura di minima resistenza sia relativamente facile da raggiungere, vale a dire non troppo bassa, per metalli a basso peso atomico (Li, Na, Be, Mg, Al, ecc.). Va inoltre aggiunto che Kamerlingh-Onnes e Clay, nei loro successivi lavori su Au (fino a  $-262^\circ$ ), Hg, Ag, Bi e Pb (fino a  $-259^\circ$ ), non hanno potuto trovare un minimo di resistenza. Hanno dato per  $\rho$  la seguente espressione empirica:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = 1 + at + bt^2 + ct^3 + e \left( \frac{1}{T^3} - \frac{1}{T_0^3} \right) + f \left( \frac{1}{T^5} - \frac{1}{T_0^5} \right) \quad (15.0.50)$$

dove  $T = 273,09$  e  $\rho$  riferito a  $0^\circ$ . Per il mercurio puro, hanno ottenuto (fino a  $-25,81^\circ$ )

$$\rho = \rho_0 (1 + 0,003581t - 0,000000588t^2) \quad (15.0.51)$$

Una colonna di mercurio, per la quale  $\rho_0 = 97,152$  ohm a  $0^\circ$ , ha a  $-83^\circ$  una resistenza  $\rho = 7,265$  ohm e a  $-258,8^\circ$  una resistenza  $\rho = 0,7534$  ohm.

Gli esperimenti di Nicolai (1908), che ha misurato  $\rho$  per Al, Ag, Fe, Mg, Ni, Co, Au, Pb, Pt e Cu fino a  $-189^\circ$ , hanno dato risultati analoghi a quelli di Dewar e Fleming.

La resistenza  $\rho$  dei metalli puri alle alte temperature è stata studiata da Benoit (1873), Hopkinson (1889), Le Chatelier (1890), Gleichmann (1894), Harrison (1902), Strutt (1902) e Nicolai (1908) fino a  $860^\circ$  (ebollizione del Cd); ha espresso  $\rho$  con formule come la (25,a). Alla temperatura di trasformazione si verifica una variazione repentina del coefficiente  $a$ . Così, Hopkinson ha osservato che, per il ferro,  $a$  aumenta da 0,0048 a  $20^\circ$  fino a 0,018 intorno a  $855^\circ$ ; a  $855^\circ$ ,  $a$  scende bruscamente a 0,0067. Le Chatelier ha trovato salti simili per diversi tipi di ferro, per il nichel (a  $340^\circ$ ) e per l'Ag in idrogeno (a  $650^\circ$ ).

Quando un metallo fonde, la sua conducibilità diminuisce drasticamente. Alla solidificazione, quella del mercurio diventa 4087 volte maggiore, come dimostrato da Cailletet e Bouty (1885). Per il Hg liquido a  $0^\circ$  si ha  $a = 0,00089$ ; per Hg solido, vedi (26,a),  $a$  è dello stesso ordine di grandezza degli altri metalli solidi. Risultati simili sono stati ottenuti anche da Matthiessen (1867) per K e Na, così come per Pb (1862), da Siemens (1861) per Sn, da De la Rive (1863) per Cd. Quest'ultimo ha trovato per Bi e Sb che il metallo liquido conduce meglio di quello solido; Vicentini e Omodei (1889), nonché Vassura (1892) hanno confermato questo risultato. Il rapporto  $\sigma_1 : \sigma_2$  delle conducibilità allo stato solido e allo stato liquido è stato riconosciuto

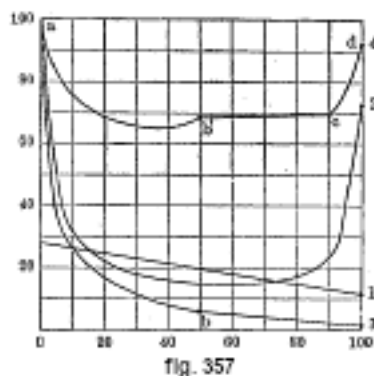
uguale a 2,21 per Sn, 1,95 per Pb, 1,96 per Cd e 0,45 per Bi. Infine, Bernini (1903) ha studiato attentamente K, Na e Li. Al punto di fusione, il salto  $\sigma_1 : \sigma_2$  per Na ( $97,63^\circ$ ) uguale a 1,337 e per K ( $62,04^\circ$ ) uguale a 1,392; il coefficiente di temperatura allo stato liquido è maggiore che allo stato solido. Per il Li ( $177,84^\circ$ ) si ottiene  $\sigma_1 : \sigma_2 = 2,51$ .

Quando un metallo si presenta sotto forma di cristallo anisotropo, si hanno, per  $\sigma$ , valori che variano con la direzione, come Matthiessen (1885) ha osservato nei cristalli di bismuto. Ha ottenuto, per il rapporto  $\sigma_1 : \sigma_2$ , delle conducibilità, perpendicolarmente e parallelamente ai piani di clivaggio (perpendicolarmente e paralleli all'asse principale), il numero 1,6. Van Everdingen (1900) ha trovato 1,68 (Voigt ha dedotto dai suoi esperimenti il numero 1,55). Lownds (1902) ha ottenuto  $\sigma_1 : \sigma_2 = 1,78$ .

La conducibilità di lamine metalliche molto sottili fu studiata da Stone (1898) e Vincent (1898), i quali osservarono che  $\sigma$  aumenta con il tempo in una sottile lamina d'argento; Longden (1900) ha scoperto che il coefficiente di temperatura è negativo per una lamina molto sottile di Pt, uguale a zero per uno strato più spesso e poi diventa positivo, quando lo spessore continua ad aumentare.

## 7. Conducibilità delle leghe

Lo studio della conducibilità delle leghe è di grande interesse. È importante dal punto di vista teorico, perché da solo contribuisce a risolvere la questione della struttura interna delle leghe, e, dal punto di vista pratico, può portare alla scoperta di leghe che permettono di produrre fili con preziose proprietà per l'elettrometria, e in generale per l'elettrotecnica, come la costanza e la piccolezza del coefficiente di temperatura. Considereremo principalmente le leghe formate da due metalli. Matthiessen (1862), che ha studiato questo tipo di leghe, ha trovato che i metalli da lui considerati potevano essere organizzati in due gruppi. Al primo gruppo appartengono Pb, Zn, Sn e Cd; nel secondo Cu, Ag, Au, Al, Pt, Sb, Fe, Bi e altri ancora. Nelle leghe dei metalli del primo gruppo, la conducibilità  $\sigma$  è una proprietà additiva, cioè può essere calcolata con la regola delle mescolanze. Nelle leghe dei metalli del secondo gruppo  $\sigma$  è molto più piccolo secondo la stessa regola. L'aggiunta di una piccola quantità di un metallo del primo gruppo ad un metallo del secondo gruppo diminuisce notevolmente la conducibilità  $\sigma$ . La Figura 357 rappresenta delle curve che indicano come la conducibilità della lega dipenda dalla proporzione dei due metalli  $M_1$  e  $M_2$ ; le ascisse danno la percentuale in volume del secondo metallo. La retta 1 si riferisce alle leghe di Zn e Sn, la curva 2 alle leghe di Ag e Au, la 3 alle leghe di Ag e Bi, la 4 alle leghe di Ag e Cu; parleremo poi di quest'ultima curva. Il coefficiente di temperatura  $\alpha$ , per le leghe del primo gruppo di metalli, differisce poco da quello dei corrispondenti metalli puri; per le altre leghe è molto inferiore al coefficiente relativo ai costituenti. Non ci soffermeremo sui tanti lavori di altri autori; citeremo solo alcuni risultati particolarmente interessanti.



Abbiamo già detto che le leghe con un coefficiente di temperatura molto piccolo sono di grande importanza pratica. Tali sono le seguenti:

Argentana (60 Cu, 21 Ni, 19 Zn)	$a = 0,00037$
Nickeline (54 Cu, 26 Ni, 20 Zn)	$a = 0,0005$
Manganina (84 Cu, 4 Ni, 12 Zn)	$a = 0,00002$
Costantana (58 Cu, 41 Ni, 1 Zn)	$a = -0,00003$

Le ultime due leghe sono di particolare interesse. La manganina fu studiata da Jäger e Lindeck (1898, 1906) e le notevoli proprietà che riscontrarono in essa portarono a proporla per la fabbricazione di campioni di resistenza. F. E. Smith (1908) ha dimostrato che l'umidità influenza la conduttività della manganina. La costantana ha un coefficiente di temperatura negativo. Il platinoide (Ni, Zn, Cu e Wo) ha un coefficiente  $a$  vicino a 0,00003. Reichardt (1901) ha considerato le leghe di Cu e Co; ma ha riconosciuto che non hanno un coefficiente di temperatura così piccolo come quello delle leghe di Cu e Ni; il piccolo valore di  $a$  ( $a = 0,0008$ ) corrisponde dal 3 al 5% di Co, mentre il valore più piccolo di  $\sigma$  ad un contenuto di rame compreso tra lo 0 e il 10%. Leghe di Fe e N furono studiate da Guillaume (1897): ha trovato che  $\sigma$  e  $a$  variano regolarmente con la composizione della lega, senza alcuna discontinuità; non è stata mostrata alcuna relazione con le loro proprietà magnetiche. F. A. Schulze (1910) si è occupato della conduttività delle leghe di Heusler che sono formate da metalli non magnetici e possiedono particolari proprietà ferromagnetiche. Ha riscaldato queste leghe per un periodo prolungato a varie temperature comprese tra 140° e 300°. Tale trattamento termico aumenta la conducibilità del 50%; a 140° il massimo si raggiunge solo dopo 250 ore; ci vogliono solo 7 ore a 300°.

È notevole la grande influenza esercitata sulla conduttività dei metalli puri da piccolissime aggiunte di altri metalli o metalloidi, come S, P, As, C e altri. Pertanto, Le Chatelier (1891, 1898) ha trovato che  $\sigma$  diminuisce per il ferro, aggiungendo ad esso carbonio. Per il rame puro,  $\sigma = 93,08$  ( $\text{Ag} = 100$ ); un'aggiunta dello 0,05% di carbonio abbassa  $\sigma$  fino a 74,91. Rietzsch (1900) ha riscontrato che lo 0,87% di P abbassa il valore di  $\sigma$  per il rame da 100 a 20,6 e il 2,5% di P a 7,77; inoltre col 2,8% di As fino a 13,12.

I metalli che contengono gas occlusi, non appartengono alle leghe; tuttavia, li considereremo qui. Il palladio, dopo l'assorbimento dell'idrogeno, è stato studiato da Dewar (1881), Knott (1892), A. A. Krakaou (1892), Brucchieri (1893), Mc Elfresh (1904) e Fischer (1906). Knott ha trovato che, per il Pd saturo di idrogeno,  $\sigma = 1,83$  volte più piccolo del Pd puro; Brucchieri ha ottenuto il numero  $k = 1,553$ . Krakaou ha riconosciuto che l'influenza di piccole quantità di idrogeno è dovuta al fatto che questo è disciolto nel Pb o forma con esso una combinazione chimica. Fino all'assorbimento di 30 volumi di idrogeno, la resistenza  $\rho$  aumenta proporzionalmente al volume  $v$  assorbito; tra  $v = 30$  e  $v = 50$  (prendendo il volume del Pd uguale a 1),  $\rho$  aumenta più lentamente, e poi di nuovo proporzionalmente alla variazione di  $v$ . Elfresh ha trovato  $k = 1,67$ , Fischer ha confermato i risultati di Krakaou:  $\rho$  aumenta rapidamente proporzionalmente a  $v$  fino a  $v = 30$ , poi rimane costante fino a  $v = 950$  ed infine aumenta molto più lentamente, fino alla saturazione che si ha per  $v = 1000$ ; una sovrasaturazione non modifica  $\rho$ . Tra  $v = 30$  e  $v = 950$ , si ha  $k = 1,092 + 0,000668v$ ; il massimo di  $k$  è 1,69. Joukoff (1910) ha constatato che una soluzione di azoto in un metallo (Mn, Cr, Ti) influisce poco sulla conducibilità, mentre le combinazioni metalliche dell'azoto ( $\text{AlAz}$ ,  $\text{Ca}^3\text{Az}^2$ ,  $\text{Mg}^3\text{Az}^2$ ) hanno una conducibilità quasi nulla. Secondo Belloc (1909), i gas occlusi nel ferro producono al contrario un aumento della resistenza.

Gli amalgami sono stati studiati da molti autori, più recentemente da Gressmann (1899), Willows (1899), H. R. Weber (1899), Larsen (1900), ecc. Si è constatato che l'aggiunta di piccole quantità di un qualunque metallo al mercurio aumenta significativamente la conduttività  $\sigma$ . Quando l'aggiunta di metallo diventa più forte, il valore di  $\sigma$ , nel caso di Sn e Cd, si avvicina alla resistenza del metallo stesso; se aggiungiamo Bi o Pb,  $\sigma$  raggiunge prima un massimo, poi un minimo e continua a crescere. Talvolta sono presenti delle irregolarità nella forma della curva che determina il rapporto tra  $\sigma$  e la quantità di metallo aggiunto, indicando la formazione di



composti definiti. Ciò si manifesta anche nelle irregolarità nell'andamento del coefficiente di temperatura, come mostrato da Willows per gli amalgami di Zn, Sn, Cd e Mg. Gressmann ha riscontrato che nella solidificazione di un amalgama,  $\sigma$  aumenta improvvisamente, a volte del quintuplo. R. E. Lentz (1883) ha osservato che un'aggiunta di metallo al mercurio, che influisce in modo sensibile sull'aspetto esteriore e sulla densità del mercurio, non esercita alcuna azione sulla conducibilità, mentre l'aria disciolta si rivela maggiormente da una variazione di  $\sigma$  che da un cambiamento nell'aspetto o nella densità.

Dewar e Fleming hanno determinato la conduttività a basse temperature, non solo dei metalli puri, ma anche delle leghe. Hanno trovato nel bismuto impuro in commercio un massimo di conducibilità verso  $-2^\circ$ ; a  $-234^\circ$ , la conduttività è inferiore che  $+100^\circ$ . Le curve  $\rho = f(t)$  hanno, per le diverse leghe, un andamento molto variabile e non sembrano convergere a zero a  $-273^\circ$ . Un nuovo studio sulle leghe Ag e Au è dovuto al Clay (1909). Egli ha riconosciuto che l'eccesso del valore osservato di  $\rho$  rispetto al valore calcolato dalla regola delle miscele, che si chiama resistenza complementare, aumenta con la diminuzione della temperatura (fino a  $-252,9^\circ$ ; questo aumento è tanto maggiore quanto più basso è il contenuto di argento. Con il 20% di Ag, la resistenza aggiuntiva varia tra  $0^\circ$  e  $-252,9^\circ$  solo dello 0,5%.

Molte ricerche sono state fatte per stabilire le leggi a cui è soggetta la conducibilità  $\sigma$  delle leghe, o per dare una spiegazione teorica delle peculiarità da essa esibite. Queste domande sono state studiate da Matthiessen (1860), Barus (1888), Le Chatelier (1895), Lord Rayleigh (1896), Liebenow (1897), Guertler (1907), Kournakoff e Jemtschoujnyi (1907), Schenk (1907) e Rudolphi (1908).

Consideriamo innanzitutto quella che viene chiamata legge di Matthiessen. Sia

$$P(\sigma) = 100 \frac{\sigma_0 - \sigma_{100}}{\sigma_0} = 100 \frac{\sigma_{100} - \sigma_0}{\sigma_{100}} \quad (15.0.52)$$

l'incremento relativo espresso in centesimi della conducibilità  $\sigma$  tra  $0^\circ$  e  $100^\circ$ ; per i metalli puri abbiamo in media  $P(\sigma) = 29$ . Siano inoltre  $\sigma_m$  e  $P_m(\sigma)$  i valori numerici corrispondenti alla regola delle mescolanze. La legge di Matthiessen è data dall'equazione

$$\frac{\sigma}{\sigma_m} = \frac{P(\sigma)}{P_m(\sigma)} \quad (15.0.53)$$

$P_m(\sigma)$  è naturalmente vicino a 29. Una legge analoga è stata proposta da Barus, studiando da vicino l'espressione

$$P(\rho) = 100 \frac{\rho_{100} - \rho_0}{\rho_{100}} = 100 \frac{\sigma_1 - \sigma_{100}}{\sigma_{100}} \quad (15.0.54)$$

Per i metalli puri, si ha in media  $P(\rho) = 41$ .

Guertler, in una lunga serie di lavori, ha confrontato le due leggi. Ha trovato che bisogna rinunciare alle temperature particolari da  $0^\circ$  a  $100^\circ$  e considerare l'espressione

$$Q = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \quad (15.0.55)$$

la legge assume allora la forma

$$\frac{\sigma}{\sigma_m} = \frac{Q}{Q_m} \quad (15.0.56)$$

e si trova confermata da numerosi esempi.

Le Chatelier ha dato la seguente spiegazione della differenza tra le leghe dei metalli del primo gruppo (Pb, Zn, Sn, Cd) e quelle del secondo. Quando una lega è una miscela di cristalli di due metalli, la conducibilità  $\sigma$  si calcola secondo la regola delle mescolanze (vedi curva 1 di figura 357); ma se dalla miscela dei due metalli si formano cristalli,  $\sigma$  ha un altro valore. La

curva 2 corrisponde al caso in cui tali cristalli composti sono possibili per qualsiasi composizione centesimale della lega. Quando invece tali cristalli non possono avere una composizione qualsiasi, il rapporto tra  $\sigma$  e la composizione è più complesso. Così, nel caso della curva 3, si hanno da  $a$  a  $b$  solo cristalli della miscela Ag e Bi; da  $b$ , andando verso destra, la lega è costituita da una miscela di lega  $b$  e Bi puro. Nella curva 4 ci sono tra  $a$  e  $b'$  cristalli della miscela di Au e Cu, analogamente tra  $c$  e  $d$ ; tra  $b'$  e  $c$  la lega è formata da cristalli della stessa composizione di  $b'$  e  $c$ . Sebbene questa spiegazione sia probabilmente vicina alla verità, tuttavia non esaurisce completamente la questione, come hanno dimostrato Kournakoff e Jemtschoujnyi, e Guertler.

Lord Rayleigh e Liebenow hanno spiegato la comparsa della resistenza complementare  $\rho - \rho_m$  nelle leghe ( $\rho_m$  è il valore dato dalla regola delle mescolanze) dall'ipotesi che la lega sia costituita da strati di metalli diversi, tra i quali si verifica, al passaggio della corrente, il fenomeno Peltier, per cui si genera una forza termoelettromotrice inversa, che non è distinguibile da un aumento della resistenza; la resistenza complementare sarebbe quindi una pseudo resistenza. Ma le ricerche di Willows (1907), Guertler e Clay (1909) hanno mostrato che questa visione teorica è insostenibile. Non ci soffermeremo sulla teoria elettronica del Shenk.

## 8. Conducibilità di sostanze non metalliche

Consideriamo ora alcuni casi interessanti di conduttività di sostanze non metalliche.

Il diamante, come il carbone di legna e il carbone di terra puro, non conducono elettricità. Il carbone calcinato, il coke e la grafite sono buoni conduttori. Matthiessen per primo ha sottolineato il fatto notevole che la conduttività del carbonio diminuisce quando la temperatura si abbassa. Beetz (1876) ha dato una spiegazione di ciò notando che nel riscaldamento le molecole entrano in contatto più intimo. Borgmann (1877) ha studiato le bacchette di grafite e il carbone di storta utilizzato per l'illuminazione elettrica, il carbone di pino e l'antracite. Trovò i seguenti coefficienti  $a$  di temperatura:

Carbone di legno di pino	23° – 143°	$a = -0,00548$
	23° – 260°	$a = -0,00384$
Antracite	25° – 152°	$a = -0,00390$
	25° – 260°	$a = -0,00265$
Grafite	25° – 193°	$a = -0,00088$
	25° – 279°	$a = -0,000816$
Carbone di storta (per l'illuminazione elettrica)	26° – 187°	$a = -0,000319$
	26° – 346°	$a = -0,000248$

Quando la temperatura aumenta,  $a$  diminuisce secondo la formula (25,c). Sembra probabile che la temperatura di massima conduttività, che è prossima a  $-265^\circ$  per l'Au,  $-258^\circ$  per il Pt,  $-100^\circ$  per lo zirconio,  $+150^\circ$  per il titanio e  $800^\circ$  per il silicio, è molto elevato per il carbonio e che riscaldandosi al di sopra di questa temperatura la conducibilità comincia a diminuire. Borgmann ritiene inesatta la spiegazione di Beetz. Siemens (1880) è arrivato a risultati del tutto analoghi. Ricerche più recenti si devono a Muraoka (1881), Dewar e Fleming (1892, diminuzione di  $\sigma$  fino a  $-182^\circ$ ), Brion (1896), che ha studiato la trasformazione mediante riscaldamento del carbonio non conduttore in carbonio conduttore, e Cellier (1896). Della resistenza del selenio parleremo più avanti.

Occupiamoci ora della conducibilità dei vari minerali nei quali i metalli sono uniti con lo zolfo, l'ossigeno, ecc., nonché di quella dei cristalli e di differenti dielettrici. Il fatto stesso che alcune sostanze siano conduttrici è interessante, prescindendo dall'influenza della temperatura, della conducibilità disuguale secondo la direzione e della questione della conducibilità metallica o elettrolitica. Prima Faraday (1833), poi Hittorf (1851), Braun (1874), Beetz (1876), Bellati e

Lussana (1888) hanno studiato vari minerali e constatato che alcune piriti e ossidi conducono bene l'elettricità. Tali sono  $Cu^2S$  e  $Ag^2S$ , la cui conducibilità  $\sigma$  aumenta rapidamente con la temperatura: per  $Cu^2S$ ,  $\sigma$  diventa, a  $192^\circ$ , 572 volte maggiore che a  $0^\circ$ ; per  $Ag^2S$ , a  $195^\circ$ , 700 volte più grande che a  $84,1^\circ$ . Braun ha osservato che lo psilomelano o manganese ossidato idrato barliifero (che è una combinazione di ossido di manganese idrato con barite o potassa) ha diversi valori di  $\sigma$  in direzioni opposte (conduttività unipolare), la direzione di maggiore conduttività dipende dall'intensità della corrente; sotto l'azione di una corrente costante,  $\sigma$  aumenta. Beijerinck (1897) ha riconosciuto che, nella serie dei composti di un metallo dato con O, S, Se, Te, aumenta il valore  $\sigma$  e quello nella serie di composti con FI, Cl, Br, I diminuisce all'aumentare del peso atomico della parte elettronegativa del composto.

J. Curie (1888) ha determinato quali i minerali che possiedono la conducibilità metallica (elettronica) e quali possiedono la conducibilità elettrolitica. Bädecker (1907) ha mostrato che, ad esempio per  $CuS$  e  $PbO^2$ ,  $\sigma$  si avvicina già al potere conduttore di alcuni metalli (Bi). Molti ossidi, che a temperature relativamente basse sono pessimi conduttori, diventano ottimi conduttori ad alte temperature. Così, Horton (1906) ha trovato che, per  $CaO$ ,  $\rho = 7,25 \cdot 10^8$  a  $490^\circ$  e che si ha già  $\rho = 9,67 \cdot 10^2$  a  $1193^\circ$ ; per  $BaO$ , si ha  $\rho = 1 \cdot 10^6$  a  $34^\circ$  e si ha già  $\rho = 22,7$  a  $224^\circ$ . Gli ossidi di metalli rari e le loro miscele possiedono la stessa proprietà. È su quest'ultima che poggia la costruzione della lampada Nernst, la cui asta presenta alla temperatura ordinaria una resistenza  $\rho$  uguale a un gran numero di megaohm. Riscaldandola al rosso, diventa conduttrice e poi cambia in rosso-bianco sotto l'influenza della corrente che la attraversa, la sua resistenza  $\rho$  scende a circa 220 ohm. Nernst e Reynolds (1900), Bose (1902), Horton (1906) hanno studiato questo fenomeno, in cui si tratta, almeno in parte, di conduzione elettrolitica. Bose è riuscito ad osservare una riduzione dei metalli sotto l'azione prolungata di una corrente continua.

Koenigsberger ha mostrato che la sua formula (25,e), è applicabile a molti minerali; in quest'ultimo si manifesta chiaramente un minimo di conduttività. È questo che appare in modo molto particolare nella pirite, come mostrano i seguenti numeri:

$l = 340^\circ$	$121^\circ$	$20^\circ$	$0^\circ$	$-78^\circ$	$-1800$
$\rho = 0,0388$	$0,0300$	$0,0240$	$0,0240$	$0,0251$	$0,0550$

Al di sopra di  $20^\circ$ , il coefficiente di temperatura è circa lo stesso dei metalli. In un nuovo lavoro, Koenigsberger e Schilling (1910) hanno segnalato tra gli altri il magnete naturale ( $Fe^3O^4$ ), che presenta un minimo di  $\rho$  a  $220^\circ$ ; si trova a  $15^\circ$ ,  $\rho = 0,00794$ ; a  $220^\circ$ ,  $\rho = 0,00434$  e a  $485^\circ$ ,  $\rho = 0,0112$ . Invece della formula (25,e), questi due autori hanno utilizzato, per calcolare  $\rho$  in funzione di  $l$ , una formula più complicata, stabilita teoricamente. È stata determinata in particolare da Guinchant (1902,  $PbS$ ,  $FeS$  e  $SnS$ ) e Doelter (1910) la conducibilità dei minerali; quest'ultimo ha classificato i minerali da lui considerati in tre gruppi: 1. Cristalli che non presentavano polarizzazione;  $\sigma$  aumenta con la temperatura (rutilo, crisoberillo); 2. Cristalli che mostrano una debole polarizzazione ad alta temperatura (adularia); 3. Cristalli che mostrano per riscaldamento una forte polarizzazione (barite, zaffiro, topazio). Van Aubel (1902) ha studiato  $\rho$  a basse temperature, in particolare in  $PbS$  tra  $+81^\circ$  e  $-187^\circ$ ; ha trovato che un minimo di  $\rho$  deve avvenire a una temperatura ancora più bassa; nella pirite ha osservato un aumento di  $\rho$  da  $+60^\circ$  a  $-180^\circ$ .

Abbiamo già parlato dell'anisotropia dei cristalli di bismuto rispetto alla conducibilità elettrica. Lo stesso fenomeno è stato osservato anche su alcuni altri cristalli. Il cristallo di rocca ha una buona conducibilità lungo l'asse a  $225^\circ$ , mentre non conduce perpendicolarmente all'asse; la conducibilità di questo cristallo è sicuramente elettrolitica. Per il quarzo è lo stesso. Il salgemma (sistema regolare) è anisotropo rispetto alla conducibilità, come per le proprietà elastiche.

Backström si è occupato del ferro oligisto: la resistenza di questo minerale, nella direzione dell'asse, è a  $0^\circ$  1,98 volte maggiore che perpendicolarmente all'asse; a  $236,7^\circ$  questo rapporto

diventa 1,55; quando la temperatura aumenta,  $\rho$  diminuisce e più rapidamente parallelamente che perpendicolarmente all'asse. Koenigsberger e Reichenheim (1906) hanno ottenuto un risultato simile. Pierce (1907) ha scoperto una notevole conducibilità unipolare nei cristalli di carborundum;  $\sigma$  aumenta con l'intensità della corrente e fino a 4000 volte di più in una direzione che in quella opposta.

I sali solidi sono stati studiati da Braun (1870), Fousserieau (1884), Graetz (1886), Bouty e L. Poincaré (1888), Bädecker (1909) e molti altri. Si è osservato che i sali sotto forma cristallina non presentano gli stessi fenomeni che presentano allo stato amorfo (sale fuso). Nella forma cristallina manifestano conduttività metallica ed è solo in prossimità del punto di fusione che appare gradualmente la conduttività elettrolitica: i sali amorfi, che possono essere considerati liquidi dotati di enorme attrito interno, conducono prevalentemente elettroliticamente. È difficile dire quale ruolo giochi qui la presenza fortuita di sostanze estranee. Un esempio interessante, che dimostra come a volte questo ruolo possa essere importante, è stato scoperto da Bädecker; ha osservato che la conduttività dei solidi di CuI e AgI aumenta considerevolmente (24 volte) con l'aggiunta di iodio, che però non è di per sé un conduttore. Per piccole aggiunte il coefficiente di temperatura della resistenza è positivo; per addizioni forti e resistenze piccole è negativo; la conduttività è metallica.

La conducibilità del vetro è stata studiata da Becquerel (1853), Buff (1854), Beetz (1854), Gray (1880), Fousserieau (1882), Warburg (1884), Tegetmeier (1890), Denizot (1897), Leblanc e Kerschbaum (1910), ecc.; quello della porcellana da Fousserieau (1883), L. Poincaré (1889) e altri. La conducibilità  $\sigma$  aumenta rapidamente con la temperatura; è in gran parte elettrolitica.

È interessante notare che Cavendish (1774) aveva già scoperto che il vetro caldo conduce l'elettricità. Gray ha trovato che la resistenza del vetro compresa tra 10° e 200° è espressa da una formula del tipo  $\log \rho = a - bt$ ; Fousserieau ha posto  $\log \rho = a - bt + ct^2$ . Warburg per primo ha studiato l'elettrolisi del vetro, e osservato che a 300° il sodio contenuto nel vetro si sposta verso il catodo. Quando il vetro è posto tra amalgame di sodio, quest'ultimo metallo passa attraverso il vetro; qui la resistenza non varia e la legge di Ohm resta applicabile, come hanno dimostrato Le Blanc e Kerschbaum.

Lo studio del quarzo è stato fatto da Warburg e Tegetmeier (1887) e da Schapojnikoff (1910). Quest'ultimo ha riconosciuto che il quarzo (nella direzione dell'asse), per un'intensità di campo superiore a 4000 volt per centimetro, si discosta tanto più dalla legge di Ohm quanto il campo è più intenso e che il passaggio della corrente è più prolungato.

Molti autori hanno osservato il passaggio della corrente attraverso i non conduttori (dielettrici), cioè la bassissima conduttività che essi possiedono o acquisiscono in determinate condizioni. Per la conducibilità specifica  $\sigma$ , uguale a 10630 nel Hg, si ottengono valori molto piccoli, ad esempio  $10^{-15}$  nell'ebanite (a 20°) e nello S (a 69°),  $10^{-18}$  nella paraffina, ecc. Leick (1898) trovò che, in queste tre sostanze,  $1/\sigma$  aumenta con l'intensità della corrente, per cui la legge di Joule non è applicabile.

## 9. Relazione tra la conducibilità e altre proprietà del sostanza

Abbiamo già indicato che esiste approssimativamente proporzionalità tra la conducibilità termica  $k$  e la conducibilità elettrica  $\sigma$  (indicata in precedenza la lettera  $\lambda$ ) dei metalli e delle leghe. Quando si attribuiscono, per uno stesso metallo arbitrariamente scelto, gli stessi valori a  $k$  e  $\sigma$ , ponendo, per esempio per Ag,  $k = 100$  e  $\sigma = 100$ , si devono ottenere per tutti gli altri metalli circa gli stessi valori di  $k$  e  $\sigma$ . Quando si esprimono  $k$  e  $\sigma$  in unità C.G.S., si ottiene approssimativamente per Ag,  $k = 1$  C.G.S. e  $\sigma = 60 \cdot 10^{-5}$  C.G.S. e pertanto  $k : \sigma = 1666$ ; per Hg, si ha approssimativamente  $k = 0,015$ ,  $\sigma = 1,063 \cdot 10^{-5}$  di modo che  $k : \sigma = 1411$ . Così il

rapporto  $k : \sigma$  oscilla per i metalli attorno al valore medio

$$\frac{k}{\sigma} = 1500 \text{ C.G.S.} \quad (15.0.57)$$

La piccola caloria è qui presa per unità di quantità di calore, nella determinazione di  $k$ . Se ci atteniamo più strettamente al sistema C.G.S., dobbiamo prendere l'erg come unità di quantità di calore, e  $k$  si deve ancora moltiplicare per il fattore  $420 \cdot 10^5$ . Esprimendo inoltre  $\sigma$  in unità elettrostatiche C. G. S., occorre moltiplicare il suo valore numerico per  $9 \cdot 10^{20}$ . Con questa scelta di unità, si ottiene

$$\frac{k}{\sigma} = \frac{1500 \cdot 420 \cdot 10^5}{9 \cdot 10^{20}} = 0,7 \cdot 10^{-10} \text{ unità el. st. C.G.S.} \quad (15.0.58)$$

Il nome di legge di Wiedemann e Franz viene talvolta dato all'invariabilità del rapporto  $k : \sigma$  nei metalli. Abbiamo già parlato dei lavori di questi fisici, così come delle ricerche dovute a F. Kohlrausch, Jäger e Diesselhorst, Rietzsch, Van Aubel e Paillot, Giebe e Cellier. Abbiamo visto che  $k : \sigma$  è quasi costante anche per le leghe, che questo rapporto assume per Fe e Bi, per costantana e manganina valori molto più grandi di quello dato dalla (28) e che il coefficiente di temperatura di questo rapporto per i metalli puri è uguale a 0,004 (Jäger e Diesselhorst); è stato infine indicato che, secondo gli esperimenti del Cellier,  $k : \sigma$  ha valori molto diversi per i vari tipi di carbonio; aggiungeremo che questi valori sono da 15 a 20 volte maggiori del valore normale. Citiamo qualche altro lavoro. Fr. Weber ha riscontrato che le deviazioni del rapporto  $k : \sigma$  rispetto al valore medio sono piuttosto ampie; propose di porre

$$\frac{k}{\sigma} = a + bc\delta \quad (15.0.59)$$

dove  $a$  e  $b$  sono due costanti,  $c$  la capacità termica del metallo dato,  $\delta$  la densità di questo metallo. Kirchhoff e Hansemann (1881), L. Lorenz (1881), Berget (1890) e altri ancora hanno confermato questa legge; L. Lorenz, ha trovato che  $k : \sigma$  è proporzionale alla temperatura assoluta e che si può quindi scrivere

$$\frac{k}{\sigma} = aT \quad (15.0.60)$$

F. A. Schulze (1897) ha ottenuto, per diversi tipi di vetro e acciaio, valori di  $k : \sigma$  oscillanti tra 1406 (acciaio al 10% di Mn) e 2402 (acciaio) e per la ghisa l'enorme valore 7017. Grüneisen (1900) ha mostrato che la presenza di sostanze estranee in Cu e Fe influenza  $\sigma$  più fortemente di  $k$ .

Interessante è la scoperta da parte di Pfeleiderer (1910) dell'identità di  $k : \sigma$  per l'argento massiccio e per l'argento poroso o per la polvere d'argento compressa. I valori relativi di  $k$  e  $\sigma$  variano da 1 a 600, ma il loro rapporto rimane costante.

Ci sembra utile far conoscere in questo momento il risultato al quale ha portato la teoria degli elettroni, quando è stata applicata per la prima volta ai fenomeni che avvengono nei metalli. Drude (1900) ha stabilito, per  $k : \sigma$  espresso in unità el. st. C.G.S., la seguente formula:

$$\frac{k}{\sigma} = \frac{4}{3} \left( \frac{\alpha}{c} \right)^2 T \quad (15.0.61)$$

dove  $\alpha$  indica una costante universale, che lega la forza viva  $i$  della particella in movimento (molecola materiale o elettrone) alla temperatura assoluta  $T$  mediante la relazione  $i = \alpha T$  ed  $e$  rappresenta la carica di un elettrone espressa in unità el. st. Reinganum (1900) ha determinato il valore numerico di  $k : \sigma$ , ponendo dapprima  $\alpha = \frac{1}{2}mu^2 : T$ , dove  $m$  è la massa e  $u$  la velocità della molecola di idrogeno; si ottiene allora

$$\frac{k}{\sigma} = \frac{1}{3T} \left( \frac{mu^2}{e} \right)^2 \quad (15.0.62)$$

Per  $T = 291$  (cioè  $t = 18^\circ$ ), si deduce dalla teoria cinetica dei gas il valore  $u^2 = 3,605 \cdot 10^{10} \text{ cm}^2/\text{s}^2$ . Le misure elettrolitiche danno, mediante l'equivalente elettrochimico dell'idrogeno, la relazione seguente

$$\frac{2e}{m} = 9,654 \cdot 10^3 \times 3 \cdot 10^{10} \text{ unità el. st.}$$

dove  $F$  è uguale a  $2Ne : Nm = 2e : m$ , con  $N$  indicante il numero di molecole di un grammo-equivalente. Portando i valori di  $u^2$  e di  $2e : m$ , nella (30,a), si ha

$$\frac{k}{\sigma} = 0,7 \cdot 10^{-10} \text{ unità el. st. C.G.S.}$$

valore che concorda perfettamente con la (28,a). Si noti che la formula (30) concorda con la formula (29,a) di L. Lorenz. Drude ha stabilito la sua formula (30) supponendo che esistano nel metallo solo elettroni di carica  $\pm e$ , che si muovono isolatamente, ma non nuclei  $\pm 2e$ ,  $\pm 3e$  ecc. e che il loro numero è indipendente dalla temperatura. Ha ottenuto anche una formula più generale per il caso in cui il numero dei nuclei dipende dalla temperatura. Non ci soffermeremo sulla formula che è dovuta a Riecke.

Passiamo alla notevole dipendenza che esiste tra la conducibilità  $\sigma$  dei metalli e il loro potere emissivo  $e$  per radiazioni di lunghezza d'onda lunga  $\lambda$ . Sia  $R$  il potere riflettente del metallo espresso in centesimi per radiazioni di lunghezza d'onda  $\lambda$ , per cui  $a = 100 - R$  è la misura dell'assorbimento del metallo per le stesse radiazioni. Drude (1894) ha dedotto dalla teoria elettromagnetica della luce la seguente formula approssimativa, che lega le quantità  $\sigma$  e  $R$  per i metalli:

$$(100 - R) \sqrt{\sigma} = \frac{C}{\sqrt{\lambda}} \quad (15.0.63)$$

dove  $C$  è una costante indipendente dalla natura del metallo.

Sia  $\sigma$  la conducibilità, espressa in ohm inversi, di un filo lungo  $1 m$  e di sezione  $1 mm^2$ ; è evidente che i valori di  $\sigma$  saranno 10000 volte più piccoli di quelli ottenuti prendendo  $1(ohm - cm)^{-1}$  come unità di conducibilità. Assumeremo inoltre che  $\lambda$  sia espresso in micron ( $0,001 mm$ ). Si trova che, in questo caso,  $C = 36,5$  e si ha

$$(100 - R) \sqrt{\sigma} = \frac{36,5}{\sqrt{\lambda}} \quad (15.0.64)$$

Dalla legge di Kirchhoff, si ha  $100 - R = a = 100e : E$ , dove  $E$  indica il potere emissivo del corpo assolutamente nero; infine, sia  $1 : \sigma = \rho$  la resistenza in ohm di un filo lungo  $1 m$  e di sezione  $1 mm^2$ ; dopo la sostituzione di queste grandezze, si ottiene

$$\left( \frac{100e}{36,5E} \right)^2 \lambda = \frac{1}{\sigma} = \rho \quad (ohm, metro, mm^2) \quad (15.0.65)$$

Questa notevole formula permette di esprimere la resistenza specifica di un metallo in unità assolute, paragonando il suo potere emissivo a quello del corpo: assolutamente nero. Se si pone  $E = 1$  e se si esprime  $e$  in centesimi di  $E$ , si ha la formula più semplice

$$e = \frac{36,5}{\sqrt{\sigma \lambda}} \quad (15.0.66)$$

Non daremo la descrizione degli esperimenti che hanno confermato queste relazioni nel modo più completo; indicheremo solo che per  $\lambda = 26\mu$  (raggi di fluorite), l'accordo è risultato perfetto. Per le radiazioni visibili e anche per le radiazioni infrarosse, la cui lunghezza d'onda non è molto grande, le formule non possono essere esatte, perché  $R$  nella (31,a) e quindi  $e : E$  nella (31,b) o semplicemente  $e$  nella (31,c) sono quasi indipendenti dalla temperatura, mentre  $\sigma$  varia

molto con la temperatura. Le nostre formule mostrano che, per lunghezze d'onda grandi, il rapporto  $e : E$  deve variare con la temperatura nella stessa misura di  $\sqrt{\rho}$ . La formula (31,c) è approssimativa; la formula più esatta è

$$e = \frac{36,5}{\sqrt{\sigma\lambda}} - \frac{6,67}{\sigma\lambda} \quad (15.0.67)$$

essa è valida per tutte le lunghezze d'onda superiori a  $5\mu$ .

Broniewski (1907) ha trovato una relazione tra il coefficiente  $\rho$  e quello di dilatazione  $\alpha$  dei metalli. Egli divise i metalli in monoatomici (Ag, Al, Au, Cd, Cu, K, Pd, Pt, Ir) e poliatomici (Fe, Co, Ni, Bi, Sb, Tl, In, As) e giunse alla conclusione che  $\rho$  varia proporzionalmente allo spazio che rimane libero tra le molecole. Per i metalli monoatomici si ha  $\rho : (2T_0 + T)T = cost$ , dove  $T_0$  è la temperatura di fusione assoluta.

## 10. Influenza della struttura e delle azioni meccaniche

La struttura di una sostanza, che dipende dalla sua modalità di preparazione, influenza la resistenza specifica  $\rho$ . In tal modo, la resistenza dell'acciaio è tanto maggiore e il suo coefficiente di temperatura tanto più piccolo quanto più il metallo è stato temperato più fortemente, come dimostrato da Strouhall e Barus (1883), nonché da Chatelier. O. D. Chwolson (1877) ha trovato che un primo debole riscaldamento di un filo duro diminuisce il valore di  $\rho$ , ma una successiva ricottura ad alta temperatura lo aumenta; un nuovo indurimento ne aumenta ancora di più la resistenza. Gleichmann (1894) è arrivato allo stesso risultato. Barus (1897) ha osservato una graduale diminuzione di  $\rho$ , nell'acciaio temprato, durante 12 anni e a temperatura ordinaria. Durante questo periodo è diminuito in un pezzo di acciaio da 45 a 38,25, in un altro da 42 a 34,18. Chevalier (1900) ha studiato l'influenza di ripetute variazioni di temperatura sulla resistenza di una lega di Pt e Ag. Streintz (1900) ha misurato la resistenza di corpi polverulenti sottoposti a fortissime pressioni, come schiuma di platino, carbone, grafite, ossidi metallici e composti dello zolfo con metalli. Esperimenti simili si devono a Du Morcel (1875), Auerbach (1886) e altri ancora.

Consideriamo ora l'influenza delle azioni meccaniche sulla resistenza dei metalli. Mosson (1885), sottoponendo un filo ad una trazione, ha riconosciuto per primo che la resistenza  $r$  del filo aumenta più rapidamente di quanto ci si aspetterebbe dall'aumento della lunghezza e dalla diminuzione della sezione destra, che mostra che, in un estensione, aumenta la resistenza specifica  $\rho$  del metallo. Gli esperimenti di Tomlison (1876), così come quelli di O. D. Chwolson (1881) e molti altri, hanno portato allo stesso risultato. L'autore ha riscontrato che, nell'estensione di un filo di ottone (63,66% di Cu), la variazione relativa della resistenza specifica è in media 0,342 di allungamento relativo. Per tre fili di 0,91 mm, 0,79 mm e 0,46 mm di diametro, i cui moduli di estensione e torsione diminuiscono nell'ordine indicato dei diametri, tale rapporto aveva i valori 0,298, 0,316 e 0,413. Ulteriori ricerche sono dovute a Cantone (1897), Williams (1907), Ercolini (1907) e N.F. Smith (1909). Cantone ha osservato che nel Ni, quando l'allungamento aumenta, la resistenza prima diminuisce e poi aumenta. N. F. Smith ha riscontrato che per Fe, Cu, acciaio e ottone la variazione di  $\rho$  è molto inferiore a quella della conducibilità.

Lord Kelvin (1878) e Witkowschi (1881) hanno trovato che, nella torsione di un tubicino, la conducibilità diminuisce nella direzione dello sforzo maggiore. Czily (1899) ha studiato dei fili, soprattutto la costantana, e trovato che  $\rho$  aumenta più velocemente che in proporzionalmente all'angolo di torsione. N. F. Smith (1909) ha osservato, anche nel caso della torsione, che la variazione di  $\rho$  (0,1 allo 0,2%) è molto inferiore a quello della conduttività (dal 3 al 5%).

La questione dell'influenza della pressione sulla conduttività è di grande interesse. I primi esperimenti si devono a Wautmann (1859), che ha sottoposto dei fili a compressione laterali e osservato un aumento di  $\rho$ . O. D. Chwolson (1881) ha poi compresso quindi dei fili di

Cu, Pb e ottone (63,66 Cu, tracce di Pb, il resto Zn) in un piezometro (fino a 60 atm), la temperatura dell'acqua rimanendo vicina a 4°. Alla pressione di un'atmosfera, si trova, per la variazione relativa della resistenza di un filo di rame, il valore  $\Delta r : r = -0,13 \cdot 10^{-5}$ , per l'ottone  $\Delta r : r = -0,11 \cdot 10^{-5}$ , per il piombo  $\Delta r : r = -0,11 \cdot 10^{-4}$ , cioè dieci volte di più di Cu e ottone. Il modulo di Young, il modulo di torsione e il coefficiente di Poisson sono stati determinati contemporaneamente come variazione relativa  $\Delta \rho : \rho$  della resistenza specifica. Si è constatato che la compressione trasversale produceva una variazione di  $\Delta \rho$  due volte maggiore della compressione longitudinale. Ne segue che la variazione  $\Delta \rho : \rho$  è sempre proporzionale alla variazione relativa del volume  $\Delta v : v$ ;  $\Delta \rho : \rho$  è in media 3,6 volte più grande di  $\Delta v : v$ . L'azione della pressione sui metalli solidi è stata studiata anche da Lussana (1899), Lisell (1902), Williams (1907) e Lafay (1909). Lussana, che è giunto fino alla pressione di 1000 atm e Liesel (Cu, Ni, Pb, Ag, Pt, Pt-Ir, costantana, Mn-Cu) che si è servito del piezometro, hanno confermato il risultato che l'autore ha ottenuto riguardo alla diminuzione di  $r$  nella compressione dei metalli puri e delle leghe, tranne per la lega Mn-Cu. Williams ha trovato, per il Pb, il valore  $\Delta r : r = +0,143 \cdot 10^{-4}$ , che si avvicina molto a quello constatato dall'autore; ha ottenuto, per il Pt,  $\Delta r : r = -0,183 \cdot 10^{-5}$ , valore pure vicino ai valori osservati dall'autore per Cu e ottone. Infine, Lafay ha trovato, per il platino,  $\Delta r : r = -0,186 \cdot 10^{-5}$  e per la manganina  $\Delta r : r = 0,223 \cdot 10^{-5}$ .

L'influenza della pressione sulla conducibilità del mercurio è stata studiata per la prima volta da R. Lenz (1882), che ha riconosciuto che la resistenza specifica  $\rho$  diminuisce della quantità  $\Delta \rho : \rho = -2 \cdot 10^{-4}$  per atmosfera di pressione. Barus (1891) ha ottenuto il valore  $-30 \cdot 10^{-6}$ , Forest-Palmer (1897)  $-33,24 \cdot 10^{-6}$  a 9° e fino alla pressione di 4385 atmosfere; Bridgman (1909) ha fornito una relazione complicata tra la pressione, la temperatura e la resistenza: Lafay ha trovato  $\Delta \rho : \rho = -32,7 \cdot 10^{-6}$  a 15°; infine E. Biron (1910) ha ottenuto  $\Delta \rho : \rho = -32,96 \cdot 10^{-6}$  a 20°. L'esattezza, con la quale la variazione della resistenza a pressioni molto elevate ha dato a molti autori l'idea di costruire un manometro, dove la resistenza di un dato conduttore può essere utilizzata per misurare la pressione. Lisell (1902), utilizzando un filo di manganina, ha costruito per la prima volta un manometro di questo tipo; dobbiamo poi citare Forest-Palmer (1898, Hg e Biron (1910, Hg), il cui dispositivo permette di valutare pressioni che raggiungono 900 atmosfere, utilizzando una formula data da questo autore e con un errore che non supera lo 0,5%.

## 11. Influenza della radiazione luminosa e di altri raggi. Selenio

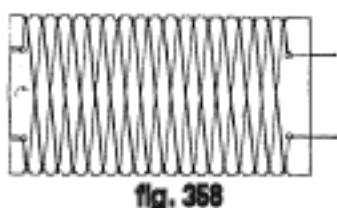
La radiazione luminosa agisce sulla conduttività di alcune sostanze, tra le quali il selenio occupa un posto del tutto speciale, essendo l'azione della luce su questo corpo incomparabilmente maggiore che su qualsiasi altra sostanza. Ci occuperemo quindi principalmente del selenio, la cui conduttività aumenta con la luce. Il selenio fonde a 217°; presenta tre modifiche allotropiche e forse un numero maggiore. Di solito si distinguono tre varietà di selenio: 1. selenio vetroso amorfo, poco conduttivo; 2. selenio rosso cristallizzato; 3. selenio cristallizzato o grigio metallico. Non c'è dubbio che il selenio cristallizzato a grani piccoli non va confuso con quello a grani grossi; il primo si ottiene riscaldando il selenio amorfo fino a 100°, il secondo mediante riscaldamento prolungato fino a 200°. I metodi di preparazione, nonché le proprietà delle diverse modificazioni del selenio hanno dato origine ad una letteratura molto vasta. È evidente che la velocità e l'ordine di successione del riscaldamento e del raffreddamento, la durata dell'azione di questa o quella temperatura, ecc. devono essere presi in considerazione; da queste circostanze dipendono la conducibilità, il coefficiente di temperatura e la sensibilità alla luce del prodotto ottenuto. I risultati delle varie ricerche che sono state fatte sono molto contraddittori e dobbiamo rimandare il lettore alla bibliografia. Un'esposizione di tutta l'opera dedicata al selenio fu curata da Amaduzzi (1904), Marc (1907) e Ries (1908); un breve riassunto dei principali risultati ottenuti



si troverà nel giornale russo *Questions de Physique* del 1910, p. 175. Indicheremo qui alcuni fatti essenziali.

Il selenio amorfo è un pessimo conduttore e non è sensibile alla luce. La varietà grigia a grana grossa è quella che ha la maggiore sensibilità; la sua conducibilità aumenta molto alla luce. Alcuni autori, Marx per esempio, pensano che la varietà sensibile alla luce sia una miscelanza di due modificazioni, di cui una sola è conduttrice, e nessuna delle quali, presa isolatamente, è sensibile alla luce. Ries (1908) ha scoperto anche che esistono due forme di selenio sensibili alla luce. Una di queste si ottiene mediante riscaldamento prolungato fino a  $195^{\circ}$ , seguito da un rapido raffreddamento; ha un coefficiente di temperatura negativo e una sensibilità alla luce positiva. La seconda forma si ottiene riscaldando oltre i  $200^{\circ}$ ; può, entro certi limiti, avere un coefficiente di temperatura positivo e una sensibilità alla luce negativa. In pratica si ottiene quasi sempre una miscela di queste due varietà di selenio. Come abbiamo detto, i risultati a cui giungono i vari autori sono estremamente contraddittori e diversi, per cui è molto difficile fare chiarezza su questo argomento. Quanto segue è tratto dai lavori più recenti di Marc, Pfund, Athanasiadis, Dowell, Brown, Ries, Schrott, Ruhmer e altri; alcuni sono in piena polemica e talvolta non sono nemmeno d'accordo nella terminologia che utilizzano. La questione delle forme del selenio è quindi ancora molto complessa; d'altro canto piccole aggiunte di corpi estranei influenzano notevolmente le proprietà di questa meravigliosa sostanza.

L'azione della luce sulla conducibilità del selenio fu scoperta da Mai, ma l'attenzione su questo fenomeno fu attirata solo da Wiloughby Smith (1873), al quale si attribuisce l'onore di averlo osservato per la prima volta. Il primo studio approfondito della nuova scoperta si deve a W. Siemens (1876). Egli ha riconosciuto che già in condizioni di luce diurna diffusa la conducibilità  $\sigma$  può diventare da 2 a 3 volte maggiore e fino a 10 volte in condizioni di illuminazione intensa, ad esempio alla luce solare diretta. Ruhmer ha osservato un caso in cui, alla luce di una lampada a 16 candele, la conducibilità diventava 80 volte maggiore. Anche una luce molto debole, come quella di una lastra fosforescente, produce un'azione sensibile. Per la ricerca o l'applicazione delle proprietà del selenio vengono utilizzati diversi recettori, di cui il più utilizzato attualmente è quello di Bidwell, rappresentato schematicamente in figura 358. È costituito da una lastra rettangolare (in mica, ardesia, porcellana o altra sostanza non conduttrice), due bordi dei quali presentano dentellature molto fini. Su questa piastra sono avvolti due sottili fili, ad esempio di Pt. Due estremità dei fili sono fissate alla lastra, mentre le altre due servono per introdurre il ricevitore nel circuito. La lastra viene riscaldata e ricoperta da uno strato di selenio, in modo che la corrente, passando attraverso di esso da un filo all'altro, segua un percorso molto breve attraverso un'ampia sezione trasversale. Per proteggere il ricevitore dall'umidità, lo si colloca all'interno di un contenitore di vetro (fig. 359), dove si crea il vuoto. La resistenza di un tale ricevitore al buio non è mai inferiore a 10000 ohm, ma a volte arriva a diverse centinaia di migliaia di ohm. Mercadier (1881), Oulianine (1888) e Ruhmer (1902) hanno costruito recettori di un'altra forma.



Tutte le parti dello spettro visibile agiscono sul selenio, ma il massimo di azione appartiene alle radiazioni di lunghezza d'onda  $0,7\mu$ , cioè alla parte centrale delle radiazioni rosse, come dimostrato da Pfund (1904 e 1909); la sensibilità alla luce diminuisce bruscamente verso  $0,4\mu$  e quindi verso  $1\mu$ ; esistono però recettori sensibili anche alle radiazioni ultraviolette.

Rosse (1874), Adams (1875), Siemens (1876) e Berndt (1904) hanno trovato che la diminuzione della resistenza è proporzionale alla radice quadrata dell'intensità luminosa  $i$ , ma questo è vero solo per piccoli valori di  $i$ , poiché per le grandi intensità la resistenza tende verso un certo limite. N. Hesehous e Ruhmer distinguono tra recettori molli e recettori duri; i primi si ottengono riscaldando il selenio a  $200^\circ$ , poi raffreddandolo lentamente, i secondi invece riscaldando fino a  $100^\circ$  o  $150^\circ$  e raffreddando rapidamente. I recettori molli sono molto sensibili alla luce debole e insensibili a quella intensa; i recettori duri mostrano proprietà opposte.

La velocità di azione della luce è dapprima molto elevata, poi decresce, per aumentare qualche volta in seguito; un valore limite viene raggiunto solo dopo poche ore; un fenomeno analogo si osserva, come dimostrato da Ruhmer (1901), Merritt (1907) e Dowell, sospendendo l'illuminazione.

Aumentando la temperatura, la sensibilità diminuisce e scompare del tutto intorno a  $200^\circ$ : ma aumenta la velocità con cui si raggiunge la conducibilità limite. Pocchetino (1902) ha trovato che a  $-185^\circ$  la sensibilità raggiunge ancora il 75% di quella che si osserva alla temperatura ordinaria. Browns e Stebbins (1907) hanno scoperto che la pressione (fino a 600 atm.) diminuisce la sensibilità alla luce del selenio. Ries (1908) ha studiato l'influenza dell'umidità, che è molto grande; in alcuni casi si osserva anche una diminuzione della conducibilità mediante illuminazione. Van Aubel (1903) ha osservato l'azione di certi corpi (gomma, canfora) trattati con l'ozono; posti al buio in prossimità di un ricevitore, producono un aumento della conducibilità. Il perossido di idrogeno e l'olio di trementina manifestano la stessa azione. Brown (1910) ha scoperto una nuova varietà di selenio, che conduce un milione di volte meglio di quello ordinario; la sua conducibilità diminuisce con la luce, in questo caso si osserva anche una diminuzione della conducibilità mediante illuminazione.

Abbiamo visto che, dagli esperimenti di alcuni autori, l'aumento  $s$  della conducibilità  $\sigma$  è proporzionale a  $\sqrt{i}$ , essendo  $i$  l'intensità dell'illuminazione. N. A. Hesehous (1883) ha fornito la formula

$$i = a(b^s - 1) \quad (15.0.68)$$

nella quale  $a$  e  $b$  sono costanti. Gopius (1903) ha posto

$$s = C\sqrt[3]{i} \quad (15.0.69)$$

Infine Athanasiadis (1908) ha dedotto dalle sue esperienze una relazione del tipo

$$i = bs(s - a) \quad (15.0.70)$$

essendo  $a$  e  $b$  come prima delle costanti.

Per finire con le proprietà del selenio e per completezza, considereremo ancora l'azione dei raggi di Röntgen e quella dei raggi emessi dal radio, anche se dobbiamo studiare quest'ultima solo più tardi. Perreau (1899) ed altri ancora hanno mostrato che la resistenza del selenio diminuisce sotto l'azione dei raggi Röntgen, ad esempio da 40000 a 33000 ohm in un certo caso. Athanasiadis (1908) ha studiato le leggi di questo fenomeno, osservando una diminuzione della resistenza da 41500 a 20900 ohm; l'azione era del tutto analoga a quella della luce, cioè poteva essere espressa con la formula (32,b), essendo  $i$  inversamente proporzionale al quadrato della distanza dal centro di emissione dei raggi.

Himstedt e Bloch (1901) hanno osservato che la resistenza del selenio diminuisce sotto l'azione dei raggi del radio. Questo fenomeno è stato studiato da Brown e Stebbins, i quali hanno trovato che sotto l'influenza dei raggi  $\beta$  la resistenza del selenio può diminuire del 33%.

Resta ancora da parlare dell'importante questione delle cause della variazione della resistenza del selenio alla luce. Bidwell (1883) ha avanzato l'ipotesi della formazione sotto l'azione della luce di seleniuri, nei luoghi dove il selenio è in contatto con conduttori metallici. Nel selenio non illuminato, queste sostanze formano nuclei isolati; nel selenio cristallizzato che viene illuminato

formano linee continue. Carpinì (1905) si è espresso a favore di questa concezione; ma è stata combattuta da Pfund (1904) e Berndt (1904), che hanno studiato il selenio assolutamente puro tra fili di carbonio; hanno osservato la consueta sensibilità alla luce e riscontrato il massimo verso la lunghezza d'onda  $0,7\mu$ .

Un'altra teoria, che potrebbe chiamarsi *teoria della dissociazione molecolare*, è stata proposta, nelle sue linee generali, da Siemens (1875), ma non è stata sviluppata completamente, né dal punto di vista teorico, né da quello del confronto con i risultati sperimentali di molti autori (Fritts, Ruhmer), e da N. Hesehous (1883-1906).

Questa teoria ammette l'esistenza di due forme di selenio, che possono essere designate con le lettere A e B. La forma A è non conduttrice; al contrario, la forma B è conduttrice. Sotto l'azione della luce, avviene una trasformazione di A in B, liberando un certo numero di elettroni o ioni, che nell'oscurità si uniscono nuovamente con le molecole di selenio. Partendo da questa ipotesi Hesehous ha potuto stabilire la formula (32). In base a ciò, N. Hesehous ha esaminato l'apparizione e la scomparsa della conduttività come del tutto analoghe alle altre azioni residue che osserviamo, ad esempio, nelle deformazioni elastiche, nei dielettrici polarizzati, ecc. L'azione della luce avviene quasi istantaneamente in un certo strato superficiale e poi penetra lentamente più in profondità all'interno della sostanza. N. Hesehous ha trovato che quando l'intensità luminosa  $i$  diventa 4 volte maggiore, l'aumento relativo della conducibilità deve variare da 4 a 1, se il valore iniziale di  $i$  stesso varia da zero a infinito. Ciò è confermato dalle osservazioni di Ruhmer, che ha ricavato per i limiti indicati i numeri 3, 8 e 1, 12. Gli urti accelerano l'azione residua della luce, come avviene in altre azioni dello stesso genere. La formula (32) è applicabile solo ai ricevitori molli, per i quali si ha circa  $a = 5$  e  $b = 2$ , se si misura  $i$  in lux (intensità di una candela ad un metro di distanza) e se intendiamo con  $s$  la variazione della conducibilità relativa, cioè la quantità  $(\sigma - \sigma_0) : \sigma_0$ . L'azione residua sembra seguire la legge:  $dx : dt = k\sqrt{n - x}$ ; in altre parole, la velocità di variazione è proporzionale alla radice quadrata della differenza tra il limite della grandezza variabile e il valore di tale grandezza. L'esistenza di due modificazioni del selenio, di cui una si trasforma nell'altra, è stata confermata anche dalle ricerche di Marc (1906), Schott (1906), ec.

Le proprietà del selenio sono state utilizzate in vari dispositivi. Siemens ha costruito un curioso giocattolo, il modello di un occhio con le palpebre mobili dove un recettore del selenio costituisce la retina; se si avvicina una candela, ad esempio, le palpebre si chiudono. Siemens ha inoltre sviluppato un fotometro con recettore al selenio. In diverse occasioni si è tentato di realizzare un fotofono in grado di fungere da telefono ottico; Korn (1907) ha impiegato con successo le proprietà del selenio nella telefotografia, cioè per la trasmissione di immagini a distanza. I tentativi di molti ricercatori di costruire un telescopio al selenio, cioè un dispositivo per vedere oggetti distanti, non hanno ancora dato risultati positivi.

Dobbiamo ancora considerare l'azione delle radiazioni luminose, come pure quella dei raggi del radio, sulla conducibilità delle sostanze diverse dal selenio. Adams (1875) ha osservato che il tellurio possiede una certa sensibilità alla luce, che è però quasi 1000 volte minore di quella del selenio. Monckmann (1889) ha notato un'azione della luce sullo zolfo, ma non è stata confermata, in particolare dagli esperimenti di Threfall, Brearley e Allen (1894). Bidwell (1885) ha trovato un'azione sul solfuro d'argento; questo risultato fu verificato da Mercadier e Chaperon (1890), nonché da Kharitonowski (1886), che ha osservato anche un'azione sullo zolfo puro. Secondo Tomlison (1881) e Tainter (1880), anche il nerofumo è sensibile alla luce. Jäger e altri hanno riscontrato una forte sensibilità alla luce dell'antimonite (solfuro di antimonio); l'azione più forte è esercitata dalle radiazioni rosse e blu chiaro.

Un particolare interesse rivestono le sostanze comunemente dette sensibili alla luce, perché danno luogo, sotto l'azione della radiazione luminosa, a reazioni chimiche; è il caso, ad esempio, dei sali alogenuri d'argento. Arrhenius (1887) ha studiato AgCl e AgBr allo stato solido. Ha scoperto che la loro conducibilità aumenta con la luce e riprende il suo valore originario nell'oscurità.

L'azione è proporzionale all'intensità della luce ed aumenta dall'estremità rossa a quella viola dello spettro (riga G o H di Fraunhofer), per poi diminuire nella gamma dell'ultravioletto. Fritsch (1897) ha riconosciuto che la conducibilità di AgCl e AgBr varia solo quando i sali non sono chimicamente puri. Scholl (1899) e Wilson (1907) si sono occupati dell'AgI, le cui proprietà sono analoghe a quelle osservate da Arrhenius in AgCl e AgBr. Infine Rudert (1909) ha studiato CuI, la cui conducibilità aumenta lentamente sotto l'azione della luce e diminuisce lentamente anche al buio; l'azione è tanto più vivace quanto più la lunghezza d'onda è corta; è molto probabile che lo iodio si liberi nella luce; questo iodio libero aumenterebbe notevolmente, secondo gli esperimenti di Bädcker, la conducibilità di CuI. Rudert ammette che lo iodio  $I^2$ , sciogliendosi in CuI, si dissocia in ioni iodio liberi, da qui l'aumento della conducibilità.

I numerosi tentativi fatti per scoprire se l'illuminazione influisce sui metalli puri non hanno portato a risultati certi. Ebanite, gomma, ceralacca, paraffina e altre sostanze subiscono alla luce un cambiamento chimico nello strato superficiale e la loro conducibilità aumenta.

P. Curie (1902) ha scoperto che la resistenza di alcuni dielettrici liquidi come  $CS_2$ ,  $CCl_4$ , amilene, benzina, aria liquida, diminuiscono sotto l'influenza dei raggi emessi dal radio. Ciò è stato confermato da Righi (1905), il quale ha scoperto che dopo la rimozione del radio la vecchia conducibilità viene lentamente ripristinata. Successivamente Jaffé ha studiato l'azione dei raggi  $\gamma$  sull'etere di nafta; ha osservato che si produce nel liquido una corrente di saturazione, e inoltre una corrente che obbedisce alla legge dell'Ohm. Infine Greinacher (1909) ha scoperto che la conducibilità dell'olio di paraffina e dell'etere di nafta aumenta sotto l'azione dei raggi  $\alpha$  (polonio).

I dielettrici solidi sono stati studiati da H. Becquerel (1903, paraffina), Becker (1903, lacca, paraffina, mica, ebanite), Bialorjeski (1909, zolfo), Hodgson (1909, paraffina, ebanite, vaselina). In tutti i casi è stato osservato un aumento della conducibilità sotto l'azione dei raggi del radio. Paillot (1904), ha trovato che la resistenza del bismuto diminuisce sotto l'azione dei raggi del radio; l'azione è istantanea; una resistenza di 15 ohm si riduce a 0,0052 ohm. Becker (1904) ha osservato che la resistenza della paraffina diminuisce sotto l'azione dei raggi catodici (vedi in seguito).

## 12. Influenza del campo magnetico

La resistenza di alcune sostanze variano sotto l'azione del campo magnetico; tale è il caso delle sostanze ferromagnetiche Fe, Ni e Co. Tra le altre sostanze, il bismuto diamagnetico occupa una situazione particolare; su di esso l'azione del campo è molto maggiore che su tutte le altre sostanze, esclusi Fe, Ni e Co. Numerose sono le ricerche effettuate allo scopo di determinare l'azione del campo magnetico sulla conducibilità delle sostanze (in particolare Bi, Fe, Ni e Co). Tra queste ricerche rivestono particolare importanza quelle dei fisici russi D. A. Goldhammer e A. I. Sadowski. Le questioni che devono essere particolarmente considerate nello studio dell'azione del campo sulla conducibilità sono le seguenti: segno ed entità della variazione della conducibilità a seconda delle sostanze; dipendenza dall'angolo delle linee di forza del campo con la direzione della corrente, cioè con la direzione secondo la quale si determina la conducibilità. Per i fili ci sono due posizioni principali: una parallela e l'altra perpendicolare alle linee di forza. Per le lastre bisogna distinguere tre posizioni principali: linee di forza parallele alla lastra e alla corrente, linee di forza parallele alla lastra e perpendicolari alla corrente, linee di forza normali alla lastra e alla corrente. C'è anche da chiedersi come il fenomeno dipenda dall'intensità  $H$  del campo, dal grado di magnetizzazione  $I$  (momento magnetico dell'unità di volume), dalla sostanza e dal carattere (costante o variabile) del campo, dalla temperatura, ecc.

Ci limiteremo ad indicare i risultati più importanti delle ricerche effettuate.

Il risultato principale, è il seguente: la resistenza  $\rho$  del ferro, del nichel e del cobalto aumenta in generale parallelamente alle linee di forza e diminuisce nella direzione perpendicolare; nel

bismuto e anche nell'antimonio, ma in misura incomparabilmente minore, si osserva un aumento della resistenza in tutte le direzioni. Considereremo prima i corpi ferromagnetici, poi il bismuto ed infine le altre sostanze.

W. Thomson (Lord Kelvin, 1856) fu il primo a mostrare, con precisi esperimenti, che nel ferro,  $\rho$  aumenta parallelamente e diminuisce perpendicolarmente alle linee di forza; la variazione di  $\rho$  non supera 1 : 300. Lo stesso risultato fu ottenuto nel Ni (1858). Queste osservazioni furono successivamente confermate da Beetz (1866), Adams (1876), O. D. Chwolson (1877), Auerbach (1878), De Lucchi (1882), Tomlinson (1882), Righi (1884) e molti altri. Adams, in particolare, riconobbe che l'aumento  $\Delta\rho$  della resistenza è proporzionale al quadrato dell'intensità della corrente di magnetizzazione.

Tomlinson ha cercato per la prima volta una relazione tra  $\Delta\rho : \rho$  e la magnetizzazione  $I$ ; ha trovato

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = aH + bI \quad (15.0.71)$$

essendo  $a$  e  $b$  delle costanti e  $H$  l'intensità del campo.

Le numerose ricerche teoriche e sperimentali di Goldhammer sono state pubblicate dal 1887 al 1890. Egli ha sottoposto in particolare ad un esame critico il lavoro dei suoi predecessori e dimostrato l'inesattezza della formula (33), che ha sostituito con un rapporto molto più vicino alla verità

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = aI^2 \quad (15.0.72)$$

Goldhammer ha studiato Fe, Ni, Co, Sb, Te e Bi (i risultati ottenuti con le sostanze diamagnetiche Bi, Sb e Te verranno indicati in seguito). Ha preparato lastre sottili di queste sostanze (esclusi Bi e Te) mediante precipitazione elettrolitica su una superficie di vetro rivestita. Ciascuna di queste lastre ha ricevuto tre posizioni: 1. Lastra e corrente parallela alle linee di forza del campo, 2. Lastra parallela e corrente perpendicolare alle linee di forza, 3. lastra perpendicolare alle linee di forza. Con Fe, Ni e Co si ottiene un aumento di  $\rho$  nella prima posizione, cioè parallela alle linee di forza e una diminuzione nella seconda e terza posizione, cioè perpendicolare alle linee di forza. Con Ni, la diminuzione di  $\rho$  nella posizione 2 è da 2 a 5 volte inferiore all'aumento nella posizione 1; la diminuzione di  $\rho$  è molto piccola nella posizione 3; nelle posizioni 1 e 2 si ha una variazione residua della resistenza, quasi identica in valore assoluto. Per Co l'aumento  $\Delta\rho$  nella posizione 1 è minore che per Ni; al contrario, la diminuzione nella posizione 2 è complessivamente da una a due volte inferiore a questo aumento. Con Fe tutte le variazioni di  $\Delta\rho$  sono minori, ma il loro carattere rimane lo stesso di Ni e Co. Per una variazione graduale dell'angolo tra le linee di forza e la direzione della corrente,  $\Delta\rho$  stesso varia in modo continuo e, per un certo valore di questo angolo, si ha  $\Delta\rho = 0$ . Beattie ha utilizzato il metodo Goldhammer, i cui risultati sono stati pienamente confermati.

Tra i lavori successivi indichiamo in particolare le seguenti. Dumermuth (1907) ha studiato attentamente il ferro; in una magnetizzazione ciclica si osserva anche un'isteresi per la resistenza. Per  $H = 100$  C.G.S. la resistenza aumenta dello 0,1%; il rapporto  $\Delta\rho : \rho$  ha un massimo intorno a  $H = 35$  C.G.S. a  $0^\circ$  e per un valore minore di  $H$  a  $18^\circ$ . Grunmmach e Weidert (1907) hanno studiato Fe, Ni e Co sotto forma di sottili spirali piane, disposte perpendicolarmente al campo magnetico, per cui ci si dovrebbe aspettare una diminuzione di  $\rho$ ; tuttavia hanno ottenuto con certi tipi di ferro, per  $H$  crescente, prima un aumento di  $\rho$ , che è massimo per  $H = 4000$  C.G.S.;  $\rho$  riprende il suo valore primitivo per  $H = 8000$  C.G.S. e poi diminuisce fino a che  $H = 30000$  C.G.S., si osserva anche per Ni un massimo di  $\Delta\rho : \rho = 0,0005$  per  $H = 600$  C.G.S. È il Ni che dà la maggiore diminuzione di  $\rho$ , per grandi valori di  $H$ ; questa diminuzione è minore con il Co e ancora minore con il Fe. Gli esperimenti di D'Agostino (1908) non hanno confermato il più importante di questi risultati; non ha riscontrato un aumento di  $\rho$  con Fe e Ni, in una magnetizzazione trasversale. Ma Grunmmach non aveva osservato questo fenomeno neppure su

tutti i tipi di ferro; inoltre Blake (1909) lo ha trovato sul Ni, ma non con assoluta certezza (vedi sotto).

Sono state dedotte dalle esperienze precedenti le relazioni più diverse tra  $\Delta\rho$  e  $H$  o  $I$ . Si è scoperto, ad esempio, che  $\Delta\rho$  è proporzionale a  $H$ ,  $H^2$ ,  $I$ ,  $I^2$ , e anche a  $I^4$  (Gray e Jones, 1901). La formula di Goldhammer (34) è probabilmente la più vicina alla verità. J. J Thomson (1901) ha trovato teoricamente che  $\Delta\rho$  deve essere proporzionale a  $H^2$ . Tenendo conto della magnetostrizione, Goldhammer (1888) ha proposto la formula

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = aI^2 + bHI \quad (15.0.73)$$

La dipendenza tra  $\Delta\rho$  e la temperatura è stata studiata per la prima volta, in una sostanza ferromagnetica, da Blake (1900). Ha portato una spirale piatta di nichel a  $-190^\circ$ ,  $-75^\circ$ ,  $0^\circ$ ,  $+18^\circ$ ,  $+100^\circ$  e  $+182^\circ$  e l'ha sottoposta all'azione di un campo trasversale, la cui intensità era elevata fino a 36600 C.G.S. Alle basse temperature ha osservato un aumento della resistenza, dovuto forse alla deformazione che la spirale potrebbe aver subito a causa della magnetizzazione longitudinale. La riduzione assoluta di  $\rho$ , per valori molto grandi di  $H$ , è tanto maggiore quanto più alta è la temperatura.

Passiamo ora alle sostanze diamagnetiche, tra le quali sono state particolarmente considerate Bi, Sb e Te. Il bismuto occupa, come abbiamo già osservato, una posizione del tutto eccezionale: la variazione subita dalla sua resistenza nel campo magnetico è maggiore di quella subita da tutte le altre sostanze; può raggiungere diversi decimi del valore iniziale della resistenza, che può essere anche più che raddoppiato. La resistenza  $\rho$  aumenta in tutte le posizioni rispetto al campo; tutte le sostanze diamagnetiche si distinguono dal resto delle sostanze ferromagnetiche per questo. Notiamo anche che la resistenza specifica  $\rho$  del bismuto, così come il suo coefficiente di temperatura, variano molto, e che quest'ultimo cambia addirittura segno per l'aggiunta di sostanze estranee, in quantità così piccole che la loro presenza non può essere rilevata dall'analisi spettrale; è ciò che ha mostrato Van Aubel (1889) e Lenard (1890). Per il bismuto assolutamente puro ottenuto elettroliticamente, il coefficiente di temperatura è positivo.

L'azione di un campo magnetico trasversale sulla resistenza del bismuto (in lamine) è stata scoperta nel 1883 quasi contemporaneamente da Leduc, Righi e Hurion; l'azione di un campo longitudinale era già stata osservata da Tomlinson (1881). Ricerche ulteriori sono dovute a v. Ettingshausen e Nernst (1886), van Aubel (1889), Lenard (1890), Kundt (1893) e altri. Nel lavoro precedentemente ricordato, Goldhammer (1887) ha studiato anche il bismuto. Ha trovato che, nelle posizioni 1 e 3, l'aumento  $\Delta\rho$  è lo stesso; nella posizione 2 (lamina parallela e corrente perpendicolare alle linee di forza),  $\Delta\rho$  è una volta e mezza maggiore che nelle altre due posizioni; una variazione graduale della posizione della lamina fa variare  $\rho$  in modo continuo. Lenard ha preparato fili sottili di bismuto elettrolitico puro, forzando il metallo attraverso una piccola apertura; ha formato con tali fili delle spirali piane (spirali di bismuto di Lenard, fig 360). Le estremità del filo di una spirale, che è protetta da entrambi i lati da sottili lamine di mica, sono saldate a due fili di rame  $aa_1$  e  $bb_1$ .



Quando Lenard ha posto questa spirale perpendicolarmente alle linee di forza, ha ottenuto i seguenti valori di  $\rho$

$H = 0$	2000	6000	10000	12000	14000	16000 C.G.S.
$\rho = 1$	1,049	1,217	1,420	1,527	1,634	1,740

Quando il piano della spirale è parallelo alle linee di forza si ha, per  $H = 7390$  C.G.S. il valore  $\rho = 1,203$ , e per  $H = 10930$  C.G.S. il valore  $\rho = 1,302$ , cioè valori inferiori rispetto al caso precedente. Lenard ha trovato, per la relazione tra  $\rho$  e l'angolo  $\varphi$  del piano della spirale con le linee di forza, l'espressione

$$\rho = a + b \sin^2 2\varphi \cos 2\varphi \quad (15.0.74)$$

dove  $a, b, c$  sono costanti. Carpini (1904) ha indicato, per questa dipendenza, la formula

$$\rho = \rho_0 + A(1 + \cos 2\varphi) \quad (15.0.75)$$

Patterson (1901) ha osservato che uno strato molto sottile di bismuto è meno sensibile all'azione del campo rispetto ad un filo. V. Everdingen (1897) ha studiato i cristalli di bismuto e scoperto che la più piccola variazione di  $\rho$  perpendicolare alle linee di forza si verifica quando l'asse dei cristalli è parallelo alle linee di forza. Quando le linee di forza sono perpendicolari all'asse, si ottengono, nel campo magnetico, tre diversi valori di  $\rho$ , nella direzione delle linee di forza, in quella dell'asse e perpendicolare a queste due direzioni.

La dipendenza tra  $\Delta\rho$  e  $H$  per il Bi è stata considerata da molti autori. Leduc (1886) ha trovato che  $z = \Delta\rho/\rho$  è legata a  $H$  da un'equazione della forma  $z^2 + \beta z - \alpha H^2 = 0$ , essendo  $\alpha$  e  $\beta$  delle costanti; in altri casi, ha ottenuto  $z = aH + bH^2 - cH^3$ . Carpini (1904) ha ricavato un'espressione identica alla prima relazione di Leduc. Goldhammer pensa che la sua formula (34), vale anche per il bismuto.

La dipendenza tra  $\Delta\rho$  e temperatura per Bi è stata studiata da Righi, Van Aubel, Leduc, Drude e Nernst (1891), Fleming e Dewar (1897), Jewett (1903), Lownds (1903), Blake (1909) e altri. Si è riscontrato che all'aumentare della temperatura,  $\Delta\rho$  diminuisce rapidamente. Drude e Nernst hanno trovato a  $18^\circ$  il valore  $\Delta\rho/\rho = 21,9$ ; a  $100^\circ$  già  $8,0$ ; a  $223^\circ$ ,  $0,96$  e a  $290^\circ$  (punto di fusione) solo  $0,41$ . Dewar e Fleming (1896) hanno ottenuto un risultato notevole alle basse temperature. Un filo di bismuto elettrolitico presenta a  $19^\circ$ , al di fuori dal campo, una resistenza  $\rho_0 = 1,46$  ohm; nel campo magnetico trasversale ( $H = 14150$  C.G.S.), si ha  $\rho = 2,34$  ohm, per cui  $\rho$  è diventato  $1,6$  volte maggiore. A  $-186^\circ$  si ha, al di fuori dal campo,  $\rho = 0,53$  ohm e, nel campo magnetico,  $\rho = 22,4$  ohm, ovvero  $42,2$  volte il valore iniziale. In un campo  $H = 22000$  C.G.S.,  $\rho$  diviene  $150$  volte maggiore. Con il bismuto commerciale non si ottengono numeri così elevati, ma si osserva comunque un aumento di  $\rho$  uguale a  $4,5$ ; in un certo caso, si trova a  $-202^\circ$  e per  $H = 0$  il valore  $\rho = 0,5723$ , che aumenta a  $\rho = 2,6801$  per  $H = 2756$  C.G.S. Quando la temperatura scende,  $\rho$  diminuisce, al di fuori del campo o per valori piccoli di  $H$ ;  $\rho$  aumenta per grandi valori di  $H$ , quando la temperatura diminuisce. È questo che si vede, con l'aiuto dei seguenti numeri, ad esempio, che sono dovuti a Everdingen (1901):

$T$ temperatura assoluta	$H =$	3000	6000 C.G.S.
$91^\circ$	$\rho = 1,711$	2,826	4,718
$250^\circ$	$\rho = 1,600$	1,744	2,020
$373^\circ$	$\rho = 2,094$	2,129	2,212

Lownds (1903) ha osservato che nei cristalli di Bi,  $\Delta\rho$  cresce sia parallelamente che perpendicolarmente all'asse, quando la temperatura cala. Ha ottenuto, ad esempio, per  $H = 4980$  C.G.S. e a  $22,5^\circ$ ,  $\Delta\rho = 19,8\%$  parallelamente all'asse,  $\Delta\rho = 14,3\%$  perpendicolarmente all'asse; a  $-186^\circ$ ,  $\Delta\rho = 56,5\%$  parallelamente all'asse,  $\Delta\rho = 11,4\%$  perpendicolarmente all'asse. L'influenza delle temperature molto basse è stata pure studiata da Du Bois e Wills (1899,  $\rho = 1$  per  $H = 0$  e  $t = 0^\circ$ ,  $\rho = 230$  per  $H = 37500$  C.G.S. e  $t = -180^\circ$ ), così come da Blake (1907). Quest'ultimo ha dato le isoterme di  $\rho = f(H)$  alle temperature comprese tra  $-192^\circ$  e  $+184^\circ$  e da  $H = 0$  a  $H = 36600$  C.G.S. Per  $H > 30000$ , si osserva un massimo di  $\rho$  tra  $-160^\circ$  e  $-190^\circ$ . Jewett (1903) ha trovato i seguenti incrementi di  $\rho$ , espressi in centesimi, in un campo  $H = 12000$  C.G.S. e a differenti temperature:

$t = 24^\circ$	$80^\circ$	$100^\circ$	$140^\circ$	$200^\circ$
$\Delta\rho = 16,3$	$6,6$	$5,6$	$5,4$	$0,52$

Van Aubel (1888) e Faë (1887) hanno studiato le leghe di Bi e Sn; per un contenuto di Sn del 20% l'azione del campo è già molto debole.

Ci rimane ancora da affrontare l'interessante questione della resistenza  $\rho$  del bismuto per una corrente non costante. Lenard e Howard (1888), nonché Lenard (1890) e Zahn (1891) hanno notato che al di fuori del campo o in un campo molto debole, si ottiene per  $\rho$  un valore leggermente inferiore (dello 0,23%) quando viene misurato mediante una corrente variabile anziché costante. *Ma nei forti campi magnetici avviene il contrario; la corrente variabile sembra incontrare maggiore resistenza (fino al 7%) rispetto alla corrente costante.*

Questo fenomeno è stato considerato in tutti i suoi aspetti da A. Sadowskyi (1895), il cui lavoro sembra essere stato ignorato da alcuni degli autori che successivamente si sono occupati della stessa questione.

Sadowskyi divide la corrente variabile, mediante un commutatore ingegnosamente costruito, in tre parti di uguale durata, corrispondenti la prima al valore crescente dell'intensità della corrente, la seconda al suo valore massimo e la terza al suo valore decrescente; per ciascuna di queste parti si misura la resistenza di quattro spirali di bismuto, fuori dal campo, e sotto l'azione di un campo trasversale. Una macchina magneto-elettrica dà correnti del tipo  $I_1 = I_0 \sin \frac{2\pi}{T}$ ,  $I_2 = I' + I_0 \sin \frac{2\pi}{T}$  con  $I' < I_0$  e  $I_3 = I'' + I_0 \sin \frac{2\pi}{T}$  con  $I'' > I_0$ . Il tempo  $T$  varia da  $\frac{1}{3}$  a  $\frac{1}{6}$  di secondo. Sia  $\rho$  la resistenza per la corrente costante,  $\rho'$  per la corrente crescente,  $\rho''$  per la corrente massima e  $\rho'''$  per la corrente decrescente. Il risultato ottenuto per la corrente  $I$ , è stato il seguente. A parte il campo magnetico, non si osserva alcuna differenza tra le quattro resistenze. Ma in un campo magnetico sotto l'azione del quale  $\rho$  diventa da 2,20 a 2,23 più grande, si trovano le disuguaglianze.

$$\rho' > \rho'' > \rho > \rho''' \quad (15.0.76)$$

La resistenza massima corrisponde alla corrente crescente ( $\rho'$ ), la minima a quella decrescente ( $\rho'''$ ); la corrente massima, non del tutto costante, dà una resistenza poco maggiore ( $\rho''$ ) di quella di una corrente del tutto costante ( $\rho$ ). Ponendo  $\rho'' = 1$ , si ottengono, per le quattro spirali di bismuto menzionate (con 4,5 oscillazioni di corrente al secondo), i seguenti valori:

$$\begin{array}{ccc} \rho' & \rho & \rho''' \\ 1,0056 - 1,0060 & 0,9988 - 0,9976 & 0,9984 - 0,9902 \end{array}$$

Per 3,5 oscillazioni della corrente al secondo, si trovano numeri più vicini all'unità. Con la corrente  $I_2$  la differenza tra le quattro resistenze è minore che con la corrente  $I_1$ , ma ancora più piccola con la corrente  $I_3$ , che già non produce più un cambio di segno. Tutte le differenze devono ovviamente scomparire, quando  $I''$  è molto grande rispetto a  $I_0$ . Sadowskyi ha proposto, per la relazione generale tra  $I$  e  $\rho$ , la formula

$$\rho = \rho_0 \left( 1 + \frac{k}{I} \frac{dI}{dt} \right) \quad (15.0.77)$$

La stessa questione fu studiata successivamente da Wolf (1897), Eichhorn (1899), Wachsmuth e Bamberger (1899), Bamberger (1901), Simpson (1901), Sagnac (1902), Schnorr von Carolsfeld (1904), Carpinì (T. 904), Pallme König (1908) e Seidler (1910).

Eichhorn ha studiato  $\rho$  in un campo magnetico variabile: ha trovato che il valore di  $\rho$  ritarda rispetto a quello dell'intensità del campo, cioè che quando il campo aumenta il valore di  $\rho$  è minore, e quando diminuisce maggiore di quanto sarebbe essere con un campo costante



della stessa intensità  $H$ . Il bismuto manifesta quindi una sorta di d'isteresi. Wolf, così come Wachsmuth e Bamberger, hanno semplicemente confermato i risultati di Lenard. Simpson ha scoperto che il passaggio di una corrente alternata, attraverso una spirale di bismuto posta in un campo magnetico, dà luogo in tale spirale ad una sorta di forza elettromotrice variabile  $e$ , sfasata di un certo angolo  $\varphi$  rispetto alla fase della corrente. Questo angolo è  $100^\circ$ , quando il numero  $n$  dei cambiamenti di segno della corrente è uguale a 3; è  $126,30^\circ$  per  $n = 60$ . La forza  $e$  è proporzionale all'intensità della corrente; è una funzione lineare dell'intensità della corrente, che aumenta con la frequenza  $n$  e ha un massimo a  $-70^\circ$ ; l'angolo  $\varphi$  non dipende né dall'intensità del campo né dalla temperatura. Pallme König e Seidler hanno effettuato uno studio approfondito della grandezza  $e$ . Tutti questi lavori hanno confermato i risultati essenziali della ricerca di Sadowskyi.

Tra le altre sostanze diamagnetiche, tellurio e antimonio sperimentano anche l'azione del campo magnetico. Goldhammer ha scoperto che il tellurio presenta gli stessi fenomeni del bismuto, ma in grado molto minore. Per l'antimonio l'aumento di  $\rho$  è lo stesso nelle tre posizioni principali. Lenard, Bamberger e altri ancora sono giunti agli stessi risultati. Bamberger ha trovato che  $\rho$  è minore, in Sb, con una corrente variabile che con una corrente costante, e questo qualunque sia il valore di  $H$ .

I metalli non magnetici sono stati studiati per la prima volta da Balfour Stewart e Schuster (1874), nonché da Auerbach (1878), che hanno trovato una debole azione del campo su Cu, Pb, grafite e altre sostanze. Patterson (1902), Grunmach (1907), d'Agostino (1908) e Lawa (1910) hanno inoltre esaminato l'azione del campo sulla conducibilità dei metalli. Patterson ha trovato, per un campo trasversale  $H$ , i seguenti incrementi della resistenza.

	Cu	Hg	Cd	Zn	Au	Pt	Sn	Ag	Carbonio
$H$ (C.G.S.)	26500	24900	29200	29200	29200	29200	29200	29200	24400
$\Delta\rho/\rho 10^4$	2,01	3,18	21,16	6,35	3,02	0,44	1,87	2,02	2,73

$\Delta\rho$  è approssimativamente proporzionale al quadrato dell'intensità del campo. Con un campo longitudinale si ottengono valori più piccoli di  $\Delta\rho$ . Grunmach ha riscontrato anche un aumento della resistenza per dieci metalli paramagnetici e diamagnetici, in un campo magnetico trasversale. Questi metalli sono disposti nel seguente ordine: Cd, Zn, Ag, Au, Cu, Sn, Pd, Pb, Pt, Ta. Con Cd, si ha  $\Delta\rho/\rho = 0,000683$  per  $H = 16220$  C.G.S.; con Ta  $\Delta\rho/\rho = 0,0000079$  per  $H = 16180$  C.G.S. D'Agostino ha osservato un aumento di  $\rho$  in Cd, Au, Zn, Mg, Pd, nessuna azione su Cu, Ag, Al, una diminuzione in Pt, argentana, manganina e invar. Laws ha studiato Cd, Zn e grafite; la legge di Goldhammer ( $\Delta\rho = cH^2$ ) è stata confermata. Quando la temperatura diminuisce,  $\Delta\rho$  aumenta rapidamente, e nel Cd e nello Zn, l'aumento  $\Delta\rho$  a  $-186^\circ$  è 20 volte maggiore che a  $-16^\circ$ , nella grafite 3 volte maggiore. Si è ottenuto per la grafite un'azione del campo straordinariamente grande, perché si è trovato  $\Delta\rho/\rho = 0,01$  per  $H = 11000$  C.G.S.

Neesen (1884) non ha osservato alcuna azione di un campo trasversale sulla resistenza  $\rho$  di una soluzione di solfuro di ferro, mentre un campo longitudinale ne produceva una piccola diminuzione. Lussana (1897), Hurmuzescu (1897) e Milani (1897) non hanno osservato alcuna azione del campo sulla conducibilità di soluzioni di sali di ferro. Bagard (1899) ha studiato soluzioni di solfato di rame e osservato una variazione di  $\rho$  nel campo magnetico, ma che deve essere attribuita ad altre cause. Infine Berndt (1907) si è occupato di una lunga serie di soluzioni di sali di ferro, nichel, cobalto, bismuto e rame, nonché di mercurio e Bi disciolti; non è apparsa alcuna azione del campo sulla conducibilità di queste sostanze.



# 16. MISURA DELL'INTENSITÀ DI CORRENTE, DELLA FORZA ELETTROMOTRICE E DELL'INTENSITÀ DEL CAMPO MAGNETICO<sup>1</sup>

## 1. Misura dell'intensità di una corrente

L'intensità di una corrente può essere espressa con l'unità assoluta di intensità di corrente C.G.S. (weber) oppure con l'ampere internazionale; quest'ultima unità, che deve essere uguale a 0,1 unità C.G.S. di intensità di corrente, è stata però definita ufficialmente (1908) come l'intensità di una corrente, che separa in un secondo 1,11800 mg d'argento da una soluzione di nitrato d'argento.

A. *Misura dell'intensità di corrente in unità assolute.* Le numerose definizioni che si possono dare dell'unità assoluta C.G.S. di intensità di corrente equivalgono tutte ad esprimere l'unità di intensità di corrente mediante l'intensità del campo magnetico che genera tale corrente in determinate condizioni. Di conseguenza, misurare l'intensità di una corrente in unità assolute si riduce a determinare il campo magnetico che produce la corrente. Questo campo magnetico può essere misurato confrontandolo con il campo magnetico terrestre (metodi elettromagnetici) o mediante la sua azione meccanica su un conduttore percorso da un'altra corrente (metodi elettrodinamici).

a. METODI ELETTROMAGNETICI. Abbiamo visto che una corrente circolare di intensità  $I$  crea un campo magnetico la cui intensità al centro della corrente è uguale a

$$H_0 = \frac{2\pi I}{R}$$

dove  $R$  indica il raggio della corrente circolare. Quando la corrente è disposta nel piano del meridiano magnetico, fa deviare un piccolo ago magnetizzato posto nel suo centro di un angolo  $\varphi$ , tale che

$$\tan \varphi = \frac{2\pi I}{RH}$$

dove  $H$  è la componente orizzontale dell'intensità del magnetismo terrestre. Se la corrente passa non in una sola spira del filo, ma in  $n$  spire di raggio  $R$ , fitte l'una contro l'altra, l'intensità del campo è  $n$  volte più grande, per cui

$$\tan \varphi = \frac{2\pi I}{RH} n$$

Mediante questa uguaglianza, si può determinare  $I$  in unità assolute, misurando  $R$  e  $\varphi$ , contando  $n$  e determinando  $H$  con uno dei metodi noti. Si ha

$$I = \frac{RH}{2\pi n} \tan \varphi = C \tan \varphi \quad (16.0.1)$$

---

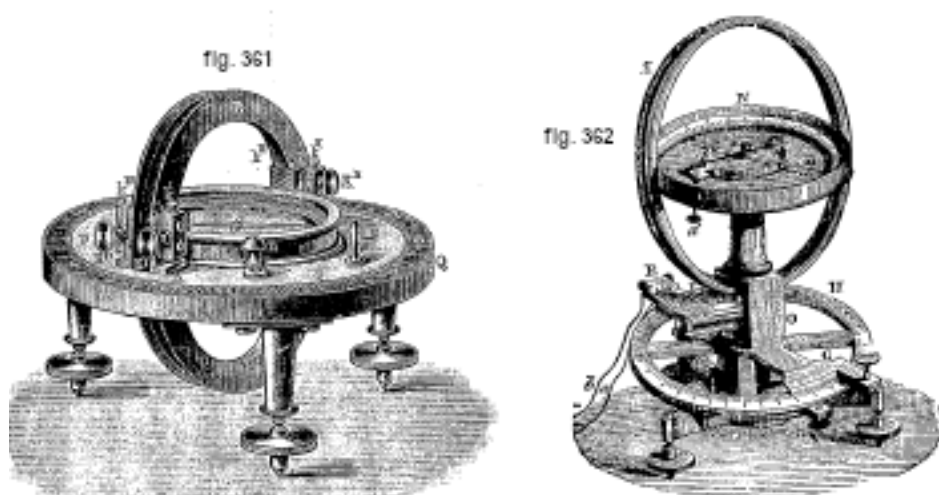
<sup>1</sup>La stesura di questo Capitolo è dovuta fino al § 7 a A. L. Guerschoun.

Differenziando e dividendo il risultato per  $I = C \tan \varphi$ , ponendo poi  $2\varphi = \alpha$ , si ottiene l'equazione

$$\frac{dI}{I} = \frac{d\alpha}{\sin \alpha} \quad (16.0.2)$$

Si vede quindi che l'errore in centesimi nella determinazione di  $I$ , che deriva dall'errore  $d\varphi$  nella lettura dell'angolo  $\varphi$ , è tanto minore quanto più ci si avvicina a  $45^\circ$ .

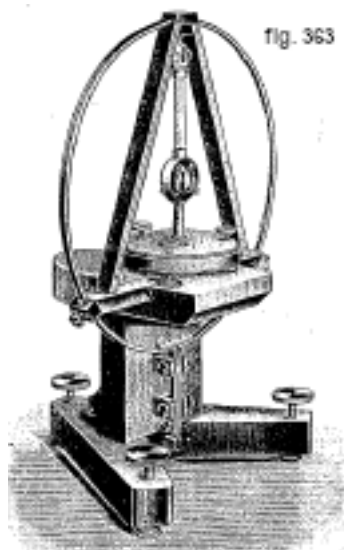
Uno strumento per la misura dell'intensità di corrente, basato sul principio precedente, è il compasso delle tangenti, proposto da Pogil (1837) e utilizzato per la prima volta da W. Weber. Per molto tempo la bussola delle tangenti è stato l'unico e fondamentale strumento di misura nello studio della corrente elettrica. Molto spesso veniva utilizzato per confrontare l'intensità delle correnti; si vede infatti dalla formula (1) che le intensità di due correnti stanno come le tangenti degli angoli di deviazione prodotti da queste correnti in una bussola delle tangenti. Tra i numerosi tipi di questo strumento, uno dei più noti è quello di Siemens e Halske (fig. 361), ancora conservato in molti laboratori (può pure servire da bussola dei seni); l'anello R porta due differenti bobine e si sceglie, per la misura, quella che dà, per la corrente considerata, angoli di deviazione il più vicini possibili a  $45^\circ$ .



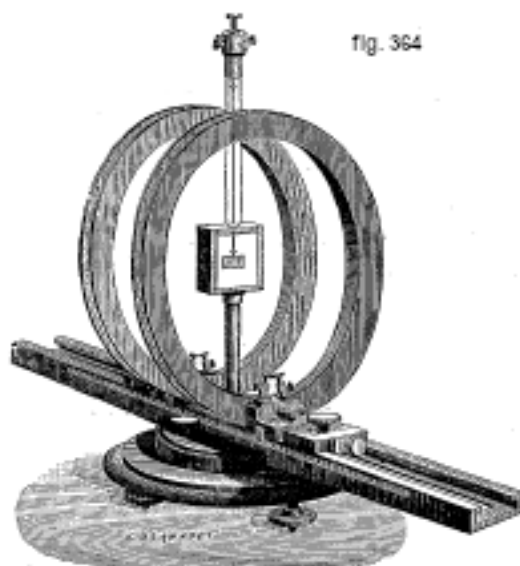
La Figura 362 rappresenta la bussola delle tangenti e dei seni costruito da J. Carpentier; il cerchio verticale ha un diametro di  $305\text{ mm}$ ; due circuiti formati, uno da 46 spire, l'altro da 36 spire di filo di rame, del diametro di  $1\text{ mm}$ , corrispondono a 4 terminali fissati sul supporto. Contemporaneamente allo sviluppo dell'elettrotecnica, si è riconosciuta la necessità di un nuovo dispositivo in grado di eseguire misure precise e di essere utilizzato per correnti più intense. Tra le numerose modifiche della bussola di Pouillet che sono state proposte a tale scopo, citeremo solo quelle di Obach, di Himstedt e di Oberbeck.

Oggi si utilizza la bussola delle tangenti solo per la determinazione precisa dell'intensità di corrente in misura assoluta. Tali bussole delle tangenti assolute sono solitamente dotate di una sola spira o di un piccolo numero di spire di filo, al centro delle quali si trova un piccolissimo magnete dotato di uno specchio; gli angoli di deviazione si misurano con una regola graduata e un cannocchiale. La figura 363 ne rappresenta un esempio (F. Kohlrausch). G. Quincke ha descritto una forma semplice di bussola delle tangenti assoluta. Quando un tale dispositivo viene utilizzato per misure precise, è necessario introdurre nella formula (1) dell'intensità di corrente tutta una serie di correzioni, perché nello stabilirla si è assunto che l'ago magnetizzato sia estremamente sottile, che tutte le spire siano concentrati su una stessa linea circolare, che la modalità di sospensione dell'ago non introduca un momento di torsione, ecc., tutte ipotesi che non si realizzano nella pratica. La teoria completa di queste correzioni (vedi Cap. VII, § 3) è stata riportato nelle opere di R. Kohlrausch e W. Weber, nonché in quelle di F. Kohlrausch e

di F. e W. Kohlrausch. Vi si troverà l'esposizione dei numerosi accorgimenti da prendere nelle misure con la bussola delle tangenti, e le procedure da adottare per la determinazione precisa delle quantità che entrano nella formula (1). La precisione che in definitiva si può ottenere nella misura dell'intensità di una corrente con una bussola delle tangenti assoluta dipende soprattutto dall'accuratezza con cui si determina  $H$ : attualmente, però, questa grandezza può essere misurata con un errore inferiore a 0,01%.



Abbiamo visto, che l'influenza delle dimensioni finite dell'ago magnetizzato diminuisce sensibilmente quando il centro dell'ago è posto non nel piano della corrente circolare, ma lungo il suo asse, a una distanza  $b = R/2$  dal piano della corrente. Helmholtz e, indipendentemente da lui, Gaugain hanno proposto per questo motivo di costruire una bussola delle tangenti, in cui l'ago è spostato lateralmente dalla quantità  $R/2$ . Quando il galvanometro porta una serie di spire, queste sono disposte su una parte della superficie di un cono, di altezza uguale alla metà del raggio della base (l'angolo di apertura del cono è  $126^\circ 52'$ ); in questo caso l'ago magnetico soddisfa, per ogni spira, alla condizione precedente. La debole influenza, esercitata dalla lunghezza dell'ago, sull'entità della deviazione, mostra che il campo magnetico, prodotto dalla corrente circolare lungo il suo asse alla distanza  $R/2$  dal suo piano, è sufficientemente uniforme su una distanza notevole. Helmholtz ha ulteriormente aumentato l'omogeneità del campo, ponendo l'ago magnetizzato tra due bobine coniche disposte simmetricamente e percorse successivamente dalla corrente. La teoria di questo tipo di bussola delle tangenti è stata studiata approfonditamente da Bravais. La figura 364 rappresenta la bussola delle tangenti a due cerchi che Mascart ha fatto costruire da J. Carpentier. Questa bussola è interamente realizzata in legno. Ciascuno dei due telai è portato da un supporto che, scorrendo su due righe di legno, può essere fissato mediante una vite di pressione e spostato da una vite di ritorno; due noni permettono di misurare la distanza delle telai. Il magnete, provvisto di uno specchio e sospeso ad un filo di seta, è posto sull'asse delle bobine. La lettura degli angoli si fa con un telescopio e una scala graduata. L'intero dispositivo, ruotando attorno ad un asse verticale, può essere regolato in modo che il magnete sia parallelo ai piani dei telai. I due telai circolari di legno hanno un diametro esterno di 30 cm; ciascuno di essi è ricoperto da 280 spire di rame del diametro di 1 mm.



Maxwell e F. Neumann hanno mostrato che la formula precisa che dà  $\varphi$  in funzione di  $I$  può essere notevolmente semplificata, se si aggiunge alla bussola delle tangenti una serie di spire complementari, opportunamente disposte su vari piani attorno all'ago magnetizzato. Tutte le modifiche così proposte hanno lo scopo di creare un campo magnetico attorno all'ago il più uniforme possibile. Mascart ha fatto costruire da J. Carpentier una bussola delle tangenti a tre cerchi; in questo modello le tre strutture sono fissate permanentemente a un telaio circolare con viti di livellamento; due di queste hanno lo stesso diametro di 42,6 cm; la terza, più grande, di 57,11 cm: i due piccoli sono disposti parallelamente, ai lati della cornice grande, ad una distanza, da asse ad asse, di 19,6 cm. Le bobine si possono considerare come rappresentanti tre cerchi della sfera avente come centro il centro della grande cornice. Riecke ha cercato di ottenere lo stesso risultato, ponendo l'ago magnetico all'interno di una spirale avvolta sulla superficie di un ellissoide di rivoluzione; tale modalità di avvolgimento crea un campo completamente omogeneo all'interno dell'ellissoide. Ma le difficoltà di costruzione di una bussola di forma così complicata non vengono superate dalla semplificazione delle formule e si impiegano quindi, per misure di alta precisione, le forme di bussola più semplici, del tipo sopra descritto. Per misurare correnti molto intense (fino a 1000 ampere) in misura assoluta, Chopin ha recentemente costruito una bussola delle tangenti, in cui una spira ausiliaria circolare, perpendicolare all'avvolgimento principale, rinforza il campo terrestre.

Nella bussola dei seni, proposta anch'essa da Pouillet, la bobina, al centro della quale è disposto l'ago magnetico parallelamente alle spire, può ricevere un movimento rotatorio attorno ad un asse verticale. La si fa ruotare verso l'ago deviato dalla corrente, finché il piano della bobina torna parallelo all'ago. Se l'angolo di questa rotazione è uguale a  $\varphi$ , si ha

$$H_0 = \frac{2\pi I}{R} = H \sin \varphi$$

dove  $H_0$  è l'intensità del campo prodotto dalla corrente e  $H$  la componente orizzontale del campo terrestre. Si ha pertanto

$$I = \frac{RH}{2\pi} \sin \varphi = C \sin \varphi \quad (16.0.3)$$

Lo strumento rappresentato in fig. 361 può anche servire come bussola dei seni; la bobina R ruota contemporaneamente al disco A attorno ad un asse verticale e gli angoli di rotazione si leggono sulla graduazione fissa T. Questa bussola, oggi non più in uso, ha lo svantaggio di non poter misurare correnti di  $I > C$ , vedi formula (3); le sue indicazioni sono invece ovviamente

sempre proporzionali al seno dell'angolo di rotazione, qualunque sia la dimensione e la forma dell'ago magnetizzato.

Anche il galvanometro bifilare di W. Weber (1840) appartiene ai dispositivi di misura assoluta del tipo precedente, grazie del quale l'illustre scienziato ha determinato per la prima volta la quantità d'acqua scomposta, nell'unità di tempo, dall'unità assoluta di intensità di corrente. Lo strumento è costituito da una bobina circolare a sospensione bifilare, posta nel piano del meridiano magnetico. Sia  $n$  il numero di spire della bobina,  $S$  l'area delimitata da ciascuna spira,  $I$  l'intensità della corrente inviata nella bobina. Questa è soggetta, nel piano del meridiano magnetico, all'azione del campo terrestre, a un momento di rotazione  $SnHI$ , e si discosta, di conseguenza, dal piano del meridiano, di un angolo  $\alpha$  tale che la componente  $SnHI \cos \alpha$  del momento precedente diviene uguale al momento della sospensione bifilare, che agisce in senso contrario. Quindi si ha

$$SnHI \cos \alpha = C \sin \alpha$$

dove  $C$  indica il coefficiente della sospensione bifilare. Se ne deduce

$$I = \frac{C}{SHn} \tan \alpha \quad (16.0.4)$$

F. Kohlrausch ha mostrato che si può trovare l'intensità di una corrente in misura assoluta, senza conoscere  $H$ , lanciando successivamente la corrente in una bussola delle tangenti e in un galvanometro bifilare. Infatti, uguagliando le espressioni (1) e (4), si può calcolare  $H$  e riportare il valore trovato nella (1) o nella (4). Una variante di questo metodo, che combina la bussola delle tangenti e il galvanometro bifilare nello stesso strumento, è stata proposta da W. Thomson.

Il seguente metodo, proposto da Helmholtz e applicato da Küspel, merita un posto a parte. Tra due bobine rettangolari, percorse dalla corrente, in direzioni opposte, è sospeso verticalmente un magnete a una delle estremità di un'asta di equilibrio. Il centro del magnete si trova nello stesso piano orizzontale dei centri delle bobine, ma leggermente fuori dal loro asse comune. Quando una corrente attraversa le bobine, sul magnete viene esercitata una forza verticale; l'entità di questa forza è determinata mediante una pesata. Tuttavia, nella relazione che lega  $I$  alla forza misurata, compare il momento magnetico del magnete, il che fa perdere precisione al metodo.

*b. METODI ELETTRODINAMICI.* L'azione reciproca di due correnti di intensità  $I_1$  e  $I_2$  è data dalle formule

$$\begin{aligned} P &= I_1 I_2 \mu \frac{\partial L_{1,2}}{\partial x} = C_1 I_1 I_2 \\ \mathfrak{M} &= I_1 I_2 \mu \frac{\partial L_{1,2}}{\partial \alpha} = C_2 I_1 I_2 \end{aligned}$$

Quando una delle correnti è fissa, mentre l'altra può muoversi solo parallelamente a se stessa.  $P$  è la forza che tende a spostare la linea di percorso mobile e a variare la distanza  $x$  tra le due correnti;  $L_{1,2}$  è il coefficiente di mutua induzione delle correnti distanti  $x$ . Quando una delle linee di percorso è fissa, mentre l'altra può ruotare attorno ad un determinato asse,  $\mathfrak{M}$  indica il momento che tende a far ruotare la linea di percorso mobile e a cambiare l'angolo  $\alpha$  compreso tra i piani delle due correnti; in questo caso  $L_{1,2}$  è il coefficiente di mutua induzione delle correnti per la posizione caratterizzata dall'angolo  $\alpha$ . Se nelle due linee di percorso passa la stessa corrente  $I$ , si ottengono per  $P$  e  $\mathfrak{M}$  le seguenti espressioni:

$$\begin{cases} P = C_1 I^2 \\ \mathfrak{M} = C_2 I^2 \end{cases} \quad (16.0.5)$$

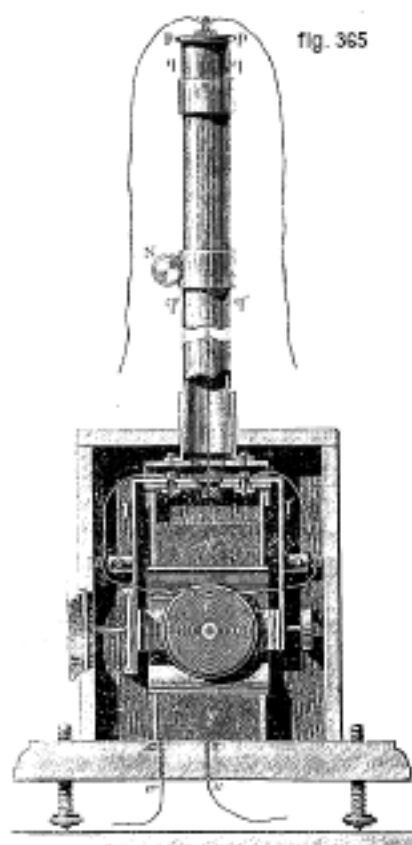
Misurando  $P$  o  $\mathfrak{M}$  e conoscendo  $C_1$  e  $C_2$  si può esprimere l'intensità di corrente  $I$  in misura assoluta. I dispositivi per misurare l'intensità di una corrente, che si basano su questo principio, sono chiamati *elettrodinamometri assoluti*. In questi apparecchi la misura di  $P$  o di  $\mathfrak{M}$  non presenta alcuna difficoltà, poiché la misura di  $P$  si riduce ad una pesata, e la determinazione di

$\mathfrak{M}$  alla misura dell'angolo di rotazione di una bobina, con sospensione unifilare o bifilare. La determinazione dei coefficienti  $C_1$  e  $C$ , utilizzando la formula (23,c), Capitolo XII §. 4, è molto meno agevole. Questo calcolo è possibile solo per forme di linee di percorso molto semplici; di solito è notevolmente complicata dal fatto che in realtà le linee di percorso delle correnti sono rappresentate da bobine formate da tutta una serie di spire isolate; la determinazione esatta delle dimensioni delle bobine non è di per sé un'operazione semplice. A causa di queste difficoltà Lippmann ha proposto addirittura di determinare sperimentalmente le quantità  $C_1$  e  $C_2$ . Se si misura, infatti,  $L_{1,2}$  per più valori di  $x$  o di  $\alpha$  vicini alla posizione di equilibrio della bobina mobile, si può calcolare  $C_1$  o  $C_2$ ; ma la misura di  $L_{1,2}$  può essere ridotta al confronto di questo coefficiente con quello di mutua induzione  $L_{3,4}$ , di due bobine costruite e disposte in modo tale che  $L_{3,4}$  possa essere valutato facilmente ed esattamente.

La costruzione di qualsiasi elettrodinamometro assoluto deve quindi soddisfare le seguenti condizioni principali: 1. Le bobine che agiscono l'una sull'altra devono avere una forma ed una posizione tale che sia possibile valutare esattamente i coefficienti  $C_1$  e  $C_2$ ; 2. la bobina mobile deve avere una posizione che permetta la misura precisa di  $P$  o di  $\mathfrak{M}$ ; 3. i conduttori, che trasportano la corrente alla bobina mobile, devono essere disposti in modo tale da non ostacolare in alcun modo la perfetta mobilità di quest'ultima. L'influenza del campo terrestre sulla bobina mobile può sempre essere eliminata, sia mediante un opportuno orientamento delle bobine rispetto al meridiano magnetico, sia misurando  $P$  o  $\mathfrak{M}$ , per due versi opposti della corrente nelle bobine fisse.

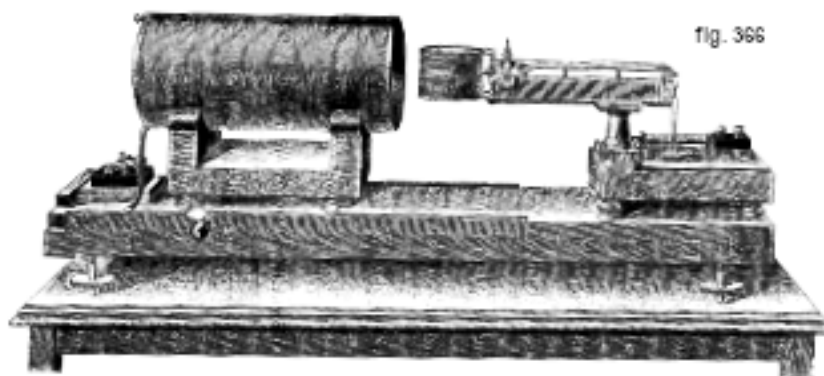
L'elettrodinamometro di W. Weber (fig. 365), da lui impiegato nelle sue classiche ricerche sulle leggi del di Ampère è il prototipo di tutti gli elettrodinamometri. All'interno della bobina fissa  $y$  è sospesa ad un doppio filo (i fili si sovrappongono in proiezione in figura) la bobina mobile  $c$ , sorretta da una sorta di forcina  $ll'$  e il cui asse è perpendicolare all'asse della bobina fissa. La corrente che la attraversa successivamente le bobine, la bobina mobile  $c$  tende a porsi parallelamente all'altra e ruota producendo una torsione della sospensione bifilare. Gli angoli di rotazione vengono letti utilizzando lo specchietto  $f$ , fissato al telaio  $ll'$ . L'elettrodinamometro di F. Kohlrausch è del tutto analogo allo strumento sopra, tranne per il fatto che la bobina mobile è sospesa a un unico filo.





Le difficoltà che presenta la determinazione di  $C_2$ , nei dispositivi precedenti, hanno portato O. Frölich e in seguito J. Frölich a costruire elettrodinometri sferici. Come ha dimostrato Maxwell, all'interno di una bobina sferica completamente avvolta da filo e percorsa da corrente, si produce un campo magnetico uniforme in tutta la sua estensione; l'azione esterna di una tale bobina corrisponde a quella di un magnete infinitamente piccolo di momento magnetico finito. Ne consegue immediatamente che una piccola bobina sferica, sospesa all'interno di una più grande in modo che gli assi delle bobine siano perpendicolari, sarà sottoposta, al passaggio della stessa corrente successivamente nelle due bobine, ad una coppia proporzionale al seno dell'angolo formato dagli assi delle bobine. Se la bobina mobile ha una sospensione bifilare, il quadrato dell'intensità della corrente che attraversa le spire è proporzionale alla tangente dell'angolo di rotazione della bobina interna. Ma se un tale elettrodinometro è estremamente semplice dal punto di vista teorico, la sua costruzione deve presentare grandi difficoltà.

Sul modello dello strumento di Weber è stato costruito un grande elettrodinometro assoluto, utilizzato dalla Commissione Elettrica della British Association. La parte fissa, così come la parte mobile, sono costituite da due strette bobine, a una distanza tra loro uguale al diametro delle spire, e i cui fili sono avvolti su superfici coniche, come ha fatto Helmholtz nella bussola delle tangenti. Allo stesso tipo appartiene anche l'elettrodinometro assoluto di Pellat (fig. 366). Questo strumento fu realizzato nel 1886 da J. Carpentier. È composto da due bobine concentriche ad asse rettangolare: una, lunga e grossa, ha l'asse orizzontale; l'altra, posta all'interno della prima, ha l'asse verticale. La stessa corrente attraversa entrambe le bobine; quella piccola, trovandosi nel campo quasi uniforme prodotto da quella più grande, è sottoposta ad una coppia che tende a deviare il suo asse dalla verticale; è la misura di questa coppia che fa conoscere l'intensità della corrente. La piccola bobina fa corpo con un giogo di bilancia che porta alla sua estremità un piatto sospeso in modo ordinario. Mettendo dei pesi in questo piatto, si bilancia la coppia elettrodinamica.



Se la grande bobina presenta  $n$  spire per unità di lunghezza, il campo magnetico intorno alla sua metà sarà uguale a  $4\pi nI$ ; sulla piccola bobina di raggio  $r$ , che ha  $n'$  spire, si esercita il momento di rotazione  $4\pi nI \cdot n'\pi r^2 I = 4\pi^2 n n' r^2 I^2$ . Questo momento è equilibrato da un peso  $P$  agente sull'altro braccio del giogo lungo  $l$ , di modo che si ha

$$\mathfrak{M} = 4\pi^2 n n' r^2 I^2 = Pgl$$

Pellat ha dedotto da ciò la formula seguente

$$I = \frac{1}{2\pi r} \sqrt{\frac{l}{n n' (1-a)}} \cdot \sqrt{Pg} = A\sqrt{Pg} \quad (16.0.6)$$

dove  $1-a$  è un fattore di correzione introdotto per tenere conto che si è applicato ad una bobina di dimensione finita una formula valida solo per una bobina di lunghezza infinita. Le determinazioni delle lunghezze che entrano nell'espressione della costante  $A$  sono state effettuate dall'Ufficio internazionale dei pesi e delle misure. I numeri dei giri sono stati contati con la massima cura tutte le verifiche possibili sono state effettuate, al fine di garantire la massima precisione a questo dispositivo. Il termine correttivo  $a$  è stato determinato mediante il calcolo e la sua accuratezza è stata verificata sperimentalmente mediante successive misurazioni corrispondenti a diverse posizioni della bobina mobile rispetto a quella fissa.

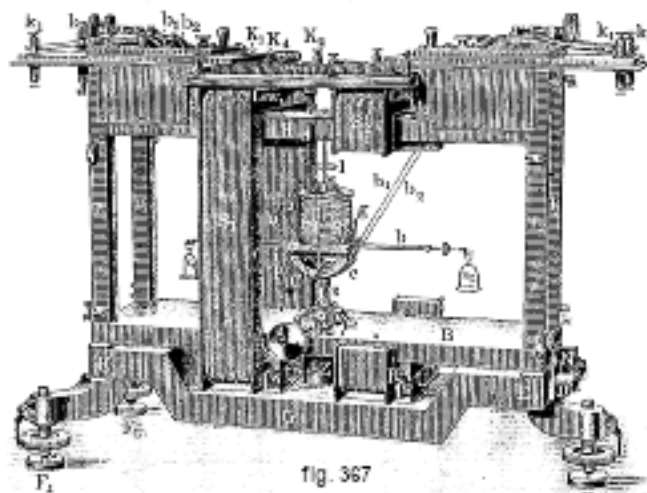
Determinato una volta per tutte il coefficiente  $A$ , l'intensità della corrente è data da una semplice pesata. Le oscillazioni del giogo si osservano mediante un microscopio, dotato di reticolo, che punta un micrometro, a tratti orizzontali, portato dall'estremità del giogo. Si vedono, al microscopio, questi tratti muoversi verticalmente durante le oscillazioni. La bilancia è sensibile a  $0,1 \text{ mg}$ ; una corrente di  $0,3$  ampere è equilibrata, a Parigi dove  $g = 908,896$ , da un peso di  $0,4180 \text{ g}$ . Supponendo che gli errori commessi nella determinazione dei fattori della costante si sommino, si trova che l'errore, che ne risulta per il valore assoluto dell'intensità di corrente, non supera  $1/2000$ .

Gray e dopo di lui Patterson hanno mostrato che l'espressione molto complicata del momento di rotazione, che agisce sulla bobina mobile nell'elettrodinamometro di Weber, si semplifica molto, quando si dà alle due bobine una lunghezza  $\sqrt{3}$  volte più grande del raggio. In questo caso, con un alto grado di precisione, si ha

$$\mathfrak{M} = \frac{2\pi^2 r^2 N_1 N_2 I^2}{c} \quad (16.0.7)$$

dove  $N_1, N_2$  indicano rispettivamente il numero totale di spire sulla bobina mobile e su quella fissa,  $r$  il raggio della bobina mobile e  $c = \sqrt{R^2 \cdot Hl^2}$ ;  $R$  è il raggio della bobina fissa,  $2l$  la lunghezza di questa bobina, e si ha,  $R/2l = 1/\sqrt{3}$ . Patterson e Guthe hanno costruito, secondo questo principio, un elettrodinamometro assoluto, in cui la bobina mobile è dotata di una sospensione unifilare e la corrente portata dal basso mediante bicchieri pieni di mercurio.

La figura 367 rappresenta un elettrodinamometro assoluto costruito con la massima cura, seguendo le indicazioni di Helmholtz, della Physikalisch-Technische Reichsanstalt di Charlottenburg. Due bobine rettangolari fisse  $S_1$  e  $S_2$  (quest'ultima è stata sezionata per la chiarezza della figura) creano il campo magnetico, che fa girare la bobina mobile  $S$ . Questa è fissata al giogo di una bilancia sensibile, sopra l'asse di rotazione. Il giogo è sospeso a nastri d'argento  $b_1b_2$ , che portano la corrente a  $S$ , e scorrono, nelle oscillazioni, dal semi cilindro  $C$  sui nastri. Il momento di rotazione esercitato da  $S_1S_2$  su  $S$  è bilanciato dai pesi posti sui piatti  $s_1$  e  $s_2$ . Il coefficiente  $C_2$  nella formula (5) è stato determinato sperimentalmente, con un metodo analogo a quello di Lippmann sopra menzionato. Per prima cosa si è calcolato il coefficiente  $C_0$  mediante le formule stabilite da Wien e Dusselhorst per l'azione di  $S$  su una banda metallica rettangolare appositamente costruita e accuratamente misurata, che si poteva portare tra  $S_1S_2$ , in un piano parallelo a queste bobine. Si è poi confrontato sperimentalmente l'azione elettrodinamica di questo rettangolo e delle due bobine  $S_1S_2$ , sulla stessa bobina  $S$  e si è dedotto dall'esperimento il numero  $n$ , che indica quante volte, a parità di intensità di corrente, l'azione di  $S_1S_2$  è maggiore dell'azione del rettangolo; si ha allora ovviamente  $C = nC_0$ , essendo  $C$  il coefficiente cercato per l'elettrodinamometro. Un elettrodinamometro assoluto originale è stato costruito recentemente (1910) da Mc Collum.



In questo strumento, una piccola bobina mobile è sospesa all'interno di una grande bobina fissa orizzontale, in modo che i loro assi siano paralleli; l'intensità della corrente è determinata dal rapporto tra i tempi di oscillazione della bobina mobile, quando nelle bobine non passa corrente e quando si fa passare la corrente da misurare.

In un altro tipo fondamentale di elettrodinamometro, la bobina mobile si muove parallelamente a se stessa sotto l'azione delle forze ponderomotrici esercitate dalla bobina fissa. Strumenti di questo tipo sono stati costruiti da Joule, Cazin e Neumann. Il primo elettrodinamometro di questi genere, meritante il nome di assoluto, è stato costruito da Helmholtz (1881); un perfezionamento dello stesso consiste nell'elettrodinamometro di Lord Rayleigh, con il quale egli e Mrs Sidgwick hanno determinato l'equivalente elettrochimico dell'argento (1884). In questo elettrodinamometro, due bobine mobili, sospese alle due estremità del giogo di una bilancia sensibile, sono disposte ognuna tra due bobine fisse; queste ultime sono collegate tra loro in modo che le loro azioni sulle bobine mobili si sommino. Le bobine fisse hanno mediamente un raggio di circa 25 cm e le bobine mobili un raggio di circa 10 cm; la sezione di una spira è un quadrato con lato di circa 1,5 cm. La distanza tra le bobine fisse è uguale al loro raggio, il che dà, come mostra uno studio delle formule, la massima attrazione sulle bobine mobili. La corrente viene portata a ciascuna bobina mobile da spirali di filo estremamente sottile. L'elettrodinamometro assoluto, utilizzato da Janet, Laporte e Jouaust nel 1908 per determinare l'equivalente elettrochimico

dell'argento, è stato costruito esattamente secondo lo stesso principio; è mostrato nella figura 368.

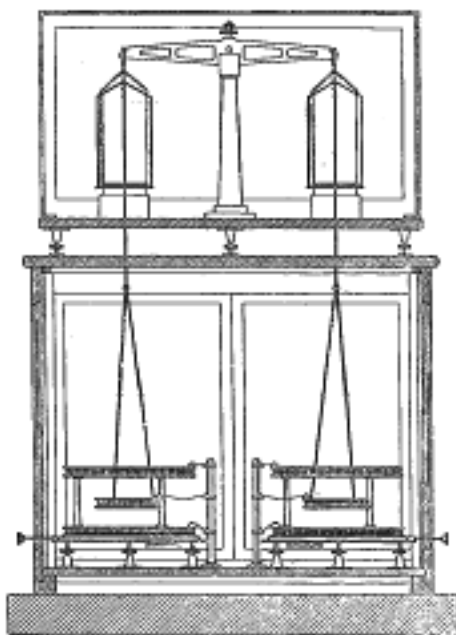


fig. 368

Nello strumento di Heydweiller, tra due bobine circolari fisse, parallele e verticali, c'è una bobina mobile attorno ad un asse orizzontale perpendicolare all'asse comune delle bobine fisse. Questo asse di rotazione passa attraverso il piano medio della bobina mobile e si trova sopra l'asse comune delle bobine fisse. Nell'elettrodinamometro assoluto di Mascart (1882) una lunga bobina mobile (500 mm) è attratta da una bobina fissa di piccola altezza (40 mm). In uno strumento recentemente descritto da Ayrton, Mather e Smith, la bobina mobile, che è corta, è sospesa tra due lunghe bobine fisse, contigue.

Gli elettrodinamometri del tipo di Helmholtz-Lord Rayleigh hanno la particolare proprietà, indicata da Lord Rayleigh, che non è necessaria una determinazione precisa delle dimensioni delle spire per ottenere il coefficiente  $C$ , della formula (5). La formula fondamentale relativa a questo elettrodinamometro è stata stabilita da Maxwell; se si indica con  $R$  e  $r$  i raggi di due correnti circolari parallele, che hanno lo stesso asse e sono distanti  $l$  l'una dall'altra, si ha

$$C_1 = \pi \frac{l\gamma}{\sqrt{Rr}} \left( 2F - \frac{2 - \gamma^2}{1 - \gamma^2} E \right) \quad (16.0.8)$$

dove

$$\gamma = 2 \sqrt{\frac{Rr}{(R+r)^2 + l^2}}$$

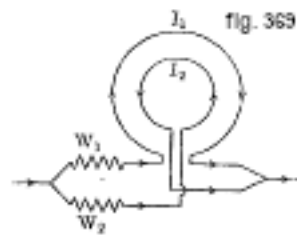
dove  $F$  e  $E$  sono integrali ellittici completi del primo e secondo ordine, di modulo  $\gamma$ . Il calcolo della formula (8) è molto facilitato dalle tabelle stabilite da Lord Rayleigh nelle quali si trovano subito, per un dato valore di  $\gamma$ , i logaritmi delle quantità che entrano nell'espressione tra parentesi della formula (8). Ci si può facilmente rendere conto che  $C_1$  è semplicemente una funzione di  $r/R$  e  $l/R$ ; con la condizione  $l = R$  già ricordata prima, l'unica grandezza, la cui conoscenza è necessaria per la determinazione di  $C_1$ , è  $l/R$ . Questa quantità può essere determinata sia misurando le bobine, sia direttamente per via sperimentale, come indicato per la prima volta da Bosscha: i conduttori circolari studiati sono posti concentricamente l'uno dentro l'altro, nel piano del meridiano magnetico. Ai conduttori vengono successivamente aggiunte le scatole di resistenze  $W_1$  e  $W_2$  (fig. 369) e i due circuiti vengono collegati come derivazioni di una stessa corrente, ma

in modo tale che i campi magnetici prodotti dai conduttori circolari siano in direzioni opposte. Si sceglie  $W_1$  e  $W_2$  in modo che i campi magnetici si compensino perfettamente, cioè in modo che un ago magnetizzato, sospeso al centro comune dei cerchi, non subisca alcuna deviazione al passaggio di corrente. Se  $I_1$  e  $I_2$  sono le intensità di corrente nei rami della derivazione e  $w_1$ ,  $w_2$  le resistenze degli avvolgimenti, si ha in questo caso

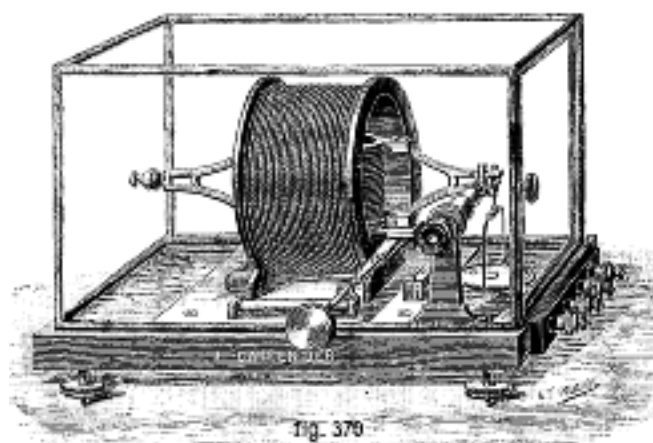
$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R}{r} = \frac{W_2 + w_2}{W_1 + w_1}$$

cioè, la misura del rapporto  $r/R$  è ricondotta a quella del rapporto tra due resistenze, effettuabile con grande precisione.

Tutto quanto sopra detto si riferisce, in senso stretto, solo a due correnti circolari, mentre in realtà si tratta di elettrodinamometri a bobine circolari, portanti un gran numero di spire. I metodi e le formule analitiche che consentono di passare dal caso teorico di due correnti circolari al caso reale delle bobine sono stati indicati da Purkiss e poi da Lyle; Rosa ha effettuato uno studio critico di questi metodi.



Restano ancora da citare gli elettrodinamometri tecnici, impiegati in elettrotecnica per la verifica di strumenti di misura tarati, ad esempio gli amperometri. Il più noto di questi dispositivi è la ampere-bilancia di W. Thomson, la cui costruzione è simile a quella dell'elettrodinamometro di Lord Rayleigh; l'equilibrio distrutto dalle azioni elettrodinamiche viene ristabilito dallo spostamento di un piccolo peso speciale lungo il giogo di una bilancia e dalla posizione di questo peso si deduce l'intensità della corrente; dispositivi di questo tipo sono stati costruiti per correnti da un centesimo di ampere a diverse migliaia di ampere. L'ampere-campione di Pellat si basa sullo stesso principio dell'elettrodinamometro assoluto di questo fisico e si differenzia solo nelle dimensioni. È mostrato nella figura 370; la bobina fissa è di lunghezza molto piccola; la bobina mobile è montata al centro del bilanciere. Nel modello costruito da J. Carpentier, la resistenza della bobina fissa è di circa 15 ohm e quella della bobina mobile è di 10 ohm. Gli ampere campione sono graduati per confronto con l'elettrodinamometro assoluto e la loro costante è determinata molto esattamente. Questa costante ha un valore molto vicino a 0,2. L'intensità della corrente è data, come per l'elettrodinamometro assoluto, da una semplice pesata. Gli ampere campione sono destinati alla misura diretta di correnti variabili da 0,1 a 0,5 ampere. La bilancia è sensibile a 0,1 mg; una corrente di 0,3 ampere è bilanciata da circa 1,5 g. Le misure della stessa corrente, effettuate per diversi ampere-campione, non devono differire oltre  $1/10000$  del loro valore, né dal valore dato dall'elettrodinamometro assoluto. Un ampere-campione Pellat permette, inoltre, unito ad un campione di resistenza, di misurare esattamente tutte le forze elettromotrici, e unito a una bussola delle tangenti, di misurare la componente orizzontale del magnetismo terrestre.



B. *Misura dell'intensità di una corrente mediante il voltmetro.* I fenomeni dell'elettrolisi, che seguono rigorosamente le leggi di Faraday, forniscono i metodi più precisi per la misura dell'intensità delle correnti. Se si indica con  $p$  l'equivalente elettrochimico del metallo, il cui sale disciolto viene sottoposto ad elettrolisi, e se la corrente costante da misurare separa  $P$  milligrammi del metallo dalla soluzione in  $T$  secondi, l'intensità  $I$  della corrente è uguale a

$$I = \frac{P}{pT} \quad (16.0.9)$$

La determinazione dell'intensità di una corrente si riduce quindi alla misura di un peso e. alla valutazione di un intervallo di tempo, misure che possono essere effettuate con un elevato grado di precisione. Dalla seconda legge di Faraday risulta che basta conoscere l'equivalente elettrochimico di un singolo ione, per ottenere questa grandezza rispetto a tutti gli ioni. Ne consegue che, per poter applicare il metodo elettrolitico alla misura dell'intensità delle correnti, è necessario determinare con la massima accuratezza possibile l'equivalente elettrochimico di un qualsiasi metallo. A questo scopo è stato scelto l'argento ed infatti il suo elevato peso equivalente (107,88), la sua monovalenza in tutte le combinazioni, la proprietà che possiede di dare ottimi precipitati, rendono questo metallo particolarmente adatto per l'obiettivo che si persegue.

I lavori più importanti sulla determinazione dell'equivalente elettrochimico dell'argento sono già stati citati, insieme ai loro risultati. Tutte queste ricerche sono state effettuate seguendo lo stesso schema: l'intensità di una corrente, dopo aver decomposto una soluzione acquosa di  $AgAzO^3$ , è stata determinata in misura assoluta utilizzando una bussola delle tangenti (F. e W. Kohlrausch, Dijk e Kunst) o un elettrodinamometro (Lord Rayleigh e Mrs Sidgwick, Pellat e Potier, Patterson e Guthe), oppure secondo la legge di Ohm, misurando la differenza di potenziale ai capi di un conduttore di resistenza nota (Kahle).

Ai lavori già ricordati, se ne sono aggiunti alcuni altri recentemente (tutti effettuati con l'elettrodinamometro), cioè:

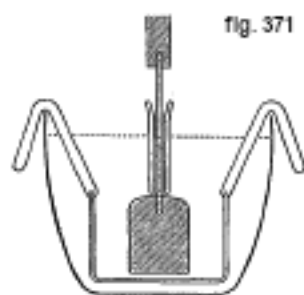
	$p$
Guthe (1906)	1,11773 mg e 1,1182 mg
Smith, Mather e Loway (1907)	1,11827
Janet, Laporte e de la Gorce (1908)	1,11821
Laporte e de la Gorce (1910)	1,11829

Inoltre F. Kohlrausch (1908) ha sottoposto i lavori di F. e W. Kohlrausch (1884) ad un nuovo studio critico, che lo ha portato ad attenersi al valore 1,1183 mg ottenuto in questa ricerca, che concorda in modo del tutto sorprendente con i risultati di recenti esperimenti. Quando si sceglie, nel determinare l'intensità di una corrente, uno dei valori sopra indicati per l'equivalente

elettrochimico dell'argento, si ha l'intensità della corrente in misura assoluta (in ampere teorici = 0,1 C.G.S. unità di intensità di corrente) con un grado di accuratezza, che non supera quello con cui è stata ottenuta la quantità  $p$  utilizzata. Per avere l'intensità della corrente in ampere internazionali, è necessario porre  $p = 1,11800$ , valore adottato dalla Conferenza Internazionale del 1908 per la determinazione degli ampere, per cui l'accuratezza del risultato finale dipende esclusivamente dalla precisione raggiunta nelle misure stesse.

Per determinare l'intensità di una corrente, l'elettrolisi avviene in dispositivi speciali, chiamati da Faraday volteelettrometri o voltametri. Sarebbe certamente più esatto chiamarli coulombmetri, perché danno subito  $Q = \int_0^T I dt$ ; così non è quando  $I$  è costante e si può scrivere  $I = \frac{Q}{T}$ .

a. VOLTAMETRO AD ARGENTO. Come elettrolita si utilizza una soluzione acquosa contenente dal 10 al 20% di azotato d'argento puro e neutro, ottenuta mediante ricristallizzazione di  $AgAzO^3$  disponibile in commercio chimicamente puro. Come catodo viene solitamente utilizzata una lastra di platino, contenente la soluzione, e come anodo una lastra o bacchetta di argento puro, immersa nello strato superiore della soluzione. L'argento si deposita sulla parete del piatto di platino, sotto forma di uno strato coerente e finemente cristallizzato. Affinché le particelle d'argento, che possono staccarsi meccanicamente dall'anodo per erosione dovuta alla corrente, non cadano sul fondo della coppa di platino dove aumenterebbero il peso dell'argento precipitato, l'anodo è circondato da un piccolo sacchetto di carta come filtro o di un piccolo cilindro di argilla porosa; sotto l'anodo è sospesa anche una coppetta di vetro. Le forme esteriori che i vari sperimentatori hanno dato al voltmetro d'argento sono le più varie; Guthe (1904), Smith (1908), nonché Jäger e Steinwehr (1908) hanno effettuato uno studio critico di queste forme e hanno scoperto che con un uso razionale tutte danno risultati quasi identici. Tuttavia l'uso di sacchetti di sostanza organica (carta) attorno all'anodo solleva qualche obiezione, perché i voltametri dotati di tali involucri danno depositi sensibilmente più importanti di quelli a coppa di vetro; Rosa, Vinal e Mc Daniell (1910) hanno dato una spiegazione di questo fatto sottolineando che la cellulosa della carta, nell'elettrolisi, separa dalla soluzione, mediante un processo chimico complesso, l'argento colloidale, che precipita sul catodo. Come tipologia di voltametri a argento moderni si può citare quello di Kohlrausch (1883 e 1908) mostrato in sezione in scala 2/3 in figura 371. Il massiccio anodo d'argento è sospeso a un'asta d'argento protetta da un tubicino di vetro, mentre i bordi del crogiolo di platino recano tre ganci di vetro, che sostengono il piccolo vaso protettore di vetro.



Questo piccolo recipiente non solo raccoglie le particelle d'argento staccate dall'anodo, ma tiene lontana dal catodo anche la parte dell'elettrolita, vicina all'anodo, in cui si formano combinazioni di argento ossigenato che possono, come hanno dimostrato Richards e Heimrod, agire sul processo di elettrolisi. Affinché il deposito di argento sia sufficientemente denso e coerente, la densità di corrente sul catodo non deve superare 0,02 ampere per  $cm^2$ , e sull'anodo 0,2 ampere per  $cm^2$ . Affinché il deposito possa essere facilmente rimosso mediante lavaggio prima della pesata, normalmente vengono precipitati non più di 100 mg di argento per  $cm^2$  del catodo. Non possiamo entrare qui nell'indicazione dettagliata delle regole stabilite per l'uso dei voltametri ad argento, né in quello delle precauzioni da adottare per effettuare misurazioni

precise con questo tipo di strumenti; ritroveremo queste informazioni nei lavori degli autori precedenti, nonché in quelli di Kahle, Jäger e Steinwehr, Richards, Collins e Heimrod, e nei rapporti della Commissione Internazionale del 1908.

Molte ricerche sono state dedicate allo studio dell'azione di diversi fattori sul voltmetro ad argento nonché all'importante questione se la temperatura e la pressione agiscono sulla carica dello ione argento, cioè sull'equivalente elettrochimico. Le osservazioni di Merrill (1900) hanno mostrato che né la pressione (fino a 12 *atm.*), né la temperatura (fino a 90°) hanno alcuna influenza sull'equivalente; l'assenza di effetto dovuto alla temperatura è stata confermata anche dagli esperimenti di Kohlrausch e Weber (1907).

Tra le varie forme del voltmetro ad argento è opportuno citare quello a titolazione di W. Kistiakowskyi, in cui la quantità di argento separato dall'anodo viene determinata mediante titolazione; questo dispositivo è particolarmente conveniente per la misura rapida di basse correnti (fino a 0,2 ampere). I microvoltmetri di Bose e Conradt, così come quelli di Brill e Evans, rappresentano varianti del voltmetro ad argento, che viene utilizzato per misurare correnti molto deboli di pochi milliampere. Farup ha misurato anche correnti di 0,1 milliampere in un voltmetro ad argento contenente una soluzione di cianato di potassio e di argento protetta contro l'accesso di ossigeno dall'aria.

*b. VOLTAMETRO A RAME.* L'equivalente elettrochimico del rame è stato determinato sperimentalmente in diverse occasioni. Le vecchie determinazioni (Vanni, Meikle) davano valori un po' troppo piccoli, probabilmente a causa dei fenomeni chimici secondari che accompagnano l'elettrolisi delle soluzioni di solfato di rame. Le determinazioni molto attente di Richards, Heimrod e Collins (1900 e 1902) hanno fornito i valori 0,3292 *mg* e 0,32929, molto vicini a quelli ottenibili mediante calcolo, parlando dell'equivalente elettrochimico dell'argento. Se prendiamo come punto di partenza il valore convenzionale dell'equivalente elettrochimico dell'argento  $p = 1,11800$ , che è stato utilizzato per la definizione dell'ampere internazionale, il peso equivalente dell'argento è 107,88 (così come è stato ammesso dalla Commissione Internazionale per la determinazione dei pesi atomici nel 1909) e quello del rame essendo 31,8, arriviamo al risultato che un ampere internazionale separa, in un secondo, 0,3296 *mg* di rame da una soluzione di solfato di rame.

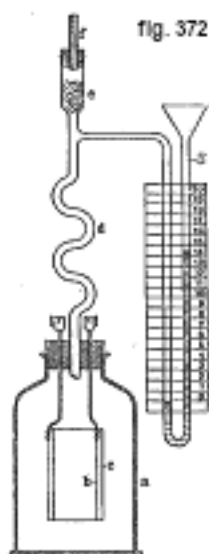
Nel voltmetro a rame, è necessario utilizzare una lamina di rame puro come anodo e una di rame o platino come catodo. Come elettrolita viene utilizzata una soluzione non completamente satura di  $CuSO_4$  puro (da 15 a 20 *g* di  $CuSO_4$  cristallizzato per 100 *g* di acqua); talvolta la soluzione viene acidulata aggiungendo piccole quantità di acido solforico. Oettel consiglia di aggiungere alcool alla soluzione (125 *g* di  $CuSO_4$ , 50 *g* di  $H_2SO_4$  e 50 *g* di alcool per 1 litro d'acqua). Per ottenere un precipitato di rame compatto e denso, la densità di corrente sul catodo non deve superare 0,04 *ampere/cm*<sup>2</sup>. I risultati forniti dal voltmetro a rame non possono avere l'alto grado di precisione ottenuto con il voltmetro ad argento, sia per l'equivalente elettrochimico relativamente piccolo del rame, sia per i fenomeni chimici piuttosto complessi che accompagnano l'elettrolisi del solfato di rame e che possono modificare la quantità di rame depositata dalla corrente. Förster, Meyer e Richards, Collins e Heimrod hanno studiato questi fenomeni. Questi autori e già prima di loro Shepart hanno mostrato, tuttavia, che adottando le necessarie precauzioni, il voltmetro a rame non cede molto, in termini di accuratezza dei risultati, rispetto al voltmetro ad argento.

Il voltmetro a rame viene utilizzato principalmente per la misura di correnti elevate, ovvero nell'ingegneria elettrotecnica. È stato spesso proposto, per rendere più comodo il suo utilizzo, di sospendere il catodo direttamente ad uno dei bracci del giogo di una bilancia (Wendler).

*c. VOLTAMETRO AD ACQUA.* Le quantità di idrogeno e ossigeno liberate nella scomposizione dell'acqua dal passaggio di un coulomb si possono facilmente calcolare. Se prendiamo l'equivalente elettrochimico dell'argento uguale a 1,11800 *mg* (peso equivalente 107,88), si ottiene, per l'idrogeno (1,008), 0,010446 *mg* e, per l'ossigeno (8,000), 0,08291 *mg*; queste quantità corrispondono a 0,09335 *mg* di acqua scomposta; i gas liberati occupano a ° e sotto una pressione



di 760 *mm* un volume di 0,1740 *cm*<sup>3</sup>, i due terzi del quale sono presi dall'idrogeno e un terzo dall'ossigeno. La determinazione sperimentale molto accurata dell'equivalente elettrochimico - per l'idrogeno e l'ossigeno, effettuata da Lehfeldt (1908), ha dato  $0,17394 \pm 0,00001$  *mg* di gas per coulomb, che è molto vicino al risultato trovato dal calcolo, prima indicato.



Nel voltmetro ad acqua, una soluzione contenente dal 10 al 20% di acido solforico si elettrolizza solitamente tra elettrodi di platino. All'anodo, oltre all'ossigeno, vengono ancora prodotti in piccole quantità ozono, acqua ossigenata e acido persolforico; pertanto, nelle misurazioni precise, in particolare quelle delle correnti deboli, si raccoglie e si misura solo l'idrogeno. Coeur e Osaka hanno mostrato che con gli elettrodi di nichel, in una soluzione di potassa caustica proposta come elettrolita dalla Oettel, non si produce ozono; ma d'altro canto Riesenfeld ha constatato che gli elettrodi di nichel danno luogo a tutta una serie di fenomeni chimici secondari, che possono provocare, nel risultato, errori fino al 15%. Lehfeldt ha studiato con particolare attenzione la questione della scelta del miglior elettrolita. Confrontando con un voltmetro ad argento un voltmetro riempito con diversi elettroliti, ha scoperto che tra gli elettrodi di platino si ottengono valori abbastanza esatti solo con una soluzione contenente dal 10 al 30% di  $Na_2SO_4$  e una soluzione contenente dal 5 al 10% di  $K_2Cr_2O_7$ ;  $H_2SO_4$  dà deviazioni che arrivano fino all'1%. Quando determiniamo l'intensità di una corrente mediante il voltmetro ad acqua, dobbiamo riportare con il calcolo il volume di gas ottenuto nell'elettrolisi a 0° e 760 *mm* di pressione. Indicando con  $V$  il volume di gas che è stato liberato a  $t^\circ$ , con  $H$  la pressione barometrica, con  $h$  la differenza dei rispettivi livelli dell'elettrolita, nella parte del recipiente sopra la quale si trova il gas e nella parte che comunica con l'aria esterna, per  $\delta$  la densità dell'elettrolita, con  $s$  la densità del vapore dell'elettrolita alla temperatura  $t$ , il volume ridotto  $V_0$  è uguale a

$$V_0 = V \cdot \frac{H - \frac{h\delta}{13,6} - s}{760 (1 + 0,00367t)} \quad (16.0.10)$$

Le forme più comuni di voltmetro ad acqua, quelle di A. W. Hoffmann e F. Kohlrausch, sono già state descritte nel Cap. X, §2. Altre forme di voltometri ad acqua sono state proposte da Müller, Kolbe, Grimsehl, Turrentine, ecc. Brüggemann e Lehfeldt hanno descritto voltometri appositamente predisposti per misure precise dell'intensità di corrente; con questi dispositivi possiamo ottenere l'intensità di una corrente con un'approssimazione dello 0,1%. Si è spesso descritto anche i voltometri ad acqua, nei quali la quantità di idrogeno liberato viene determinata pesando il voltmetro prima e dopo l'esperimento. Un tipo originale di voltmetro ad acqua è l'amper-manometro di Bredig e Hahn (fig. 372). In questo dispositivo, il gas tonante, formato

per elettrolisi di una debole soluzione di potassa caustica tra gli elettrodi di nichel *b* e *c*, fuoriesce continuamente dal voltmetro attraverso il tubo capillare *f*: il tubo sinuoso *d* e un tampone d'ovatta *e* trattengono le goccioline di elettrolita trascinato dalla corrente del gas. Al passaggio della corrente la pressione nel manometro aumenta, tanto quanto la quantità di gas che esce per *f* nell'unità di tempo non è uguale a quello rilasciato dall'elettrolisi; si legge la pressione sul manometro ad acqua *g*. Poiché secondo la legge di Poiseuille la quantità di gas che fuoriesce è proporzionale alla pressione, la quale è a sua volta proporzionale alla quantità di gas liberato in 1 unità di tempo, cioè all'intensità della corrente, le indicazioni di il manometro deve essere proporzionali all'intensità della corrente. Dagli esperimenti di Hahn, si ha, per il gas tonante umido a temperatura ordinaria  $P = \frac{8,4I}{10^4 r^4}$ , dove *l* è la dimensione del tubo capillare in centimetri, *r* il suo raggio in millimetri, *I* l'intensità della corrente in ampere, *P* l'indicazione del manometro in centimetri di colonna d'acqua. Scegliendo opportunamente la lunghezza e il raggio del tubo capillare, è facile far corrispondere un centimetro di colonna d'acqua a 1 ampere, a 10 ampere o a qualsiasi altro valore dell'intensità della corrente.

Dalle ricerche degli autori precedenti, nonché da quelle del Naber, risulta che il voltmetro ad acqua può, adottando le dovute precauzioni, dare risultati il cui errore raggiunge solo una piccola percentuale. Un inconveniente comune a tutti i voltmetri ad acqua sta nella loro grande forza elettromotrice di polarizzazione, che limita il loro utilizzo a forze elettromotrici maggiori della forza di polarizzazione.

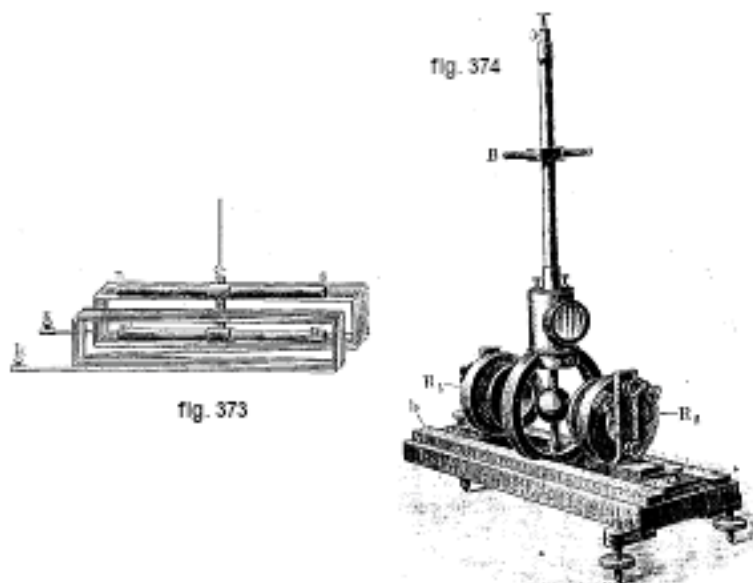
*d. VOLTAMETRI A IODIO, PIOMBO O MERCURIO.* L'elevato peso atomico dello iodio (126,5) ha portato Herroun a proporre un voltmetro a iodio, in cui la quantità di iodio libero, formato per elettrolisi dello ioduro di zinco tra un anodo di platino e un catodo di zinco, viene determinata mediante titolazione con iposolfito di sodio. Il voltmetro a iodio è stato studiato approfonditamente da Danneel e da Kreider; questi ha mostrato che questo voltmetro sembra dare sempre valori superiori a quelli del voltmetro d'argento fino allo 0,1%. Tra gli altri tipi di voltmetri ricordiamo anche quello al piombo di Batts e Kohn, il voltmetro al bromo di Hatfield, ma in particolare quelli a mercurio di Wright (descritti da Dick e Danneel), Hatfield e altri, che hanno recentemente trovato impiego nella tecnologia, come contatori di amper-ora; Lehfeldt ha descritto un voltmetro a mercurio per basse correnti.

C. Misura dell'intensità di una corrente mediante la legge di Ohm. Sia una corrente di intensità sconosciuta *I*, che passa in un circuito contenente una resistenza nota *R*. Misurando la differenza di potenziale *E* ai capi del resistore, si può, con la legge di Ohm, ottenere l'intensità della corrente con la formula  $I = E/R$ . Quando la differenza di potenziale e la resistenza sono espresse in unità assolute, lo stesso si ha per l'intensità della corrente. Se *R* ed *E* sono espressi in ohm internazionali, e nel risultato della misura di *I* si riscontrerà l'inesattezza con cui è stato determinato il campione della forza elettromotrice mediante *I* e *R*. Questo metodo, molto comodo per la misura rapida ed esatta dell'intensità di una corrente, è diventato particolarmente diffuso, poiché il notevole sviluppo dei metodi di compensazione ha permesso di confrontare con rapidità e precisione qualsiasi differenza di potenziale rispetto al campione di forza elettromotrice, l'elemento normale. Questo metodo per misurare l'intensità di una corrente sarà discusso più dettagliatamente in relazione ai metodi di compensazione; diremo qui solo che tutti i migliori strumenti tecnici recenti per misurare l'intensità delle correnti, gli amperometri, si basano in linea di principio sul metodo che abbiamo appena indicato.

D. Metodo elettrometrico di misura dell'intensità di una corrente. Se la corrente *I* da misurare porta in *t* secondi un corpo, la cui capacità è *C* farad, a un potenziale di *V* volt, la quantità di elettricità passata sul corpo è  $Q = It = VC$ , da cui  $I = Q/t$ . Questo metodo, che permette di misurare, con una precisione certamente bassa, correnti di un'intensità fino a  $10^{-15}$  ampere, è attualmente molto utilizzato per lo studio delle correnti elettriche nei gas ionizzati.

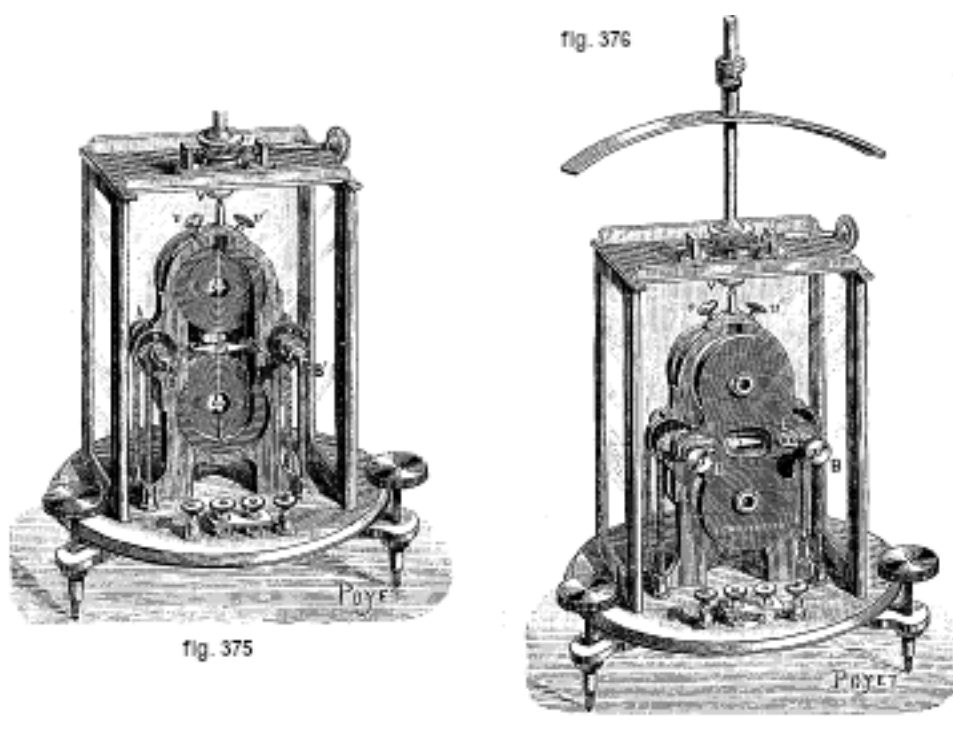
## 2. Galvanometri

Per rilevare e misurare correnti deboli, si utilizzano i *galvanometri*, strumenti essenziali per il fisico quanto la bilancia e il termometro. Il primo galvanometro fu il moltiplicatore Schweiegger (1820), costruito subito dopo la scoperta da parte di Oerstedt dell'azione della corrente sull'ago magnetizzato; era costituito da un telaio rettangolare, sul quale era avvolto un filo isolato; all'interno del telaio c'era un ago magnetico sospeso a un filo sottile. Nel 1826 il Nobili ha proposto il doppio ago astatico (fig. 373), e così un tempo ha aumentato considerevolmente la sensibilità del galvanometro; infatti, la forza direttrice del campo terrestre su tale ago può essere ridotta a piacere, mentre il campo della corrente devia i due aghi nella stesso verso.



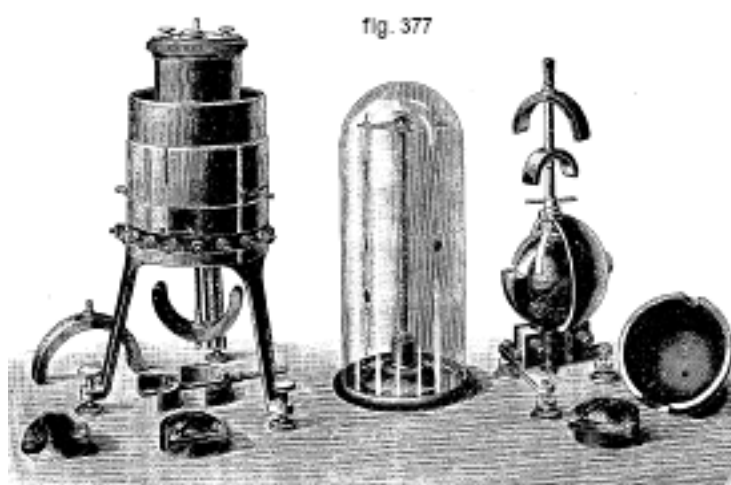
Farady (1832-1855) ha utilizzato, in tutti i suoi lavori, un galvanometro di questo tipo. Gauss e Weeber hanno usato, nella loro famosa ricerca (1833-1846), un grande moltiplicatore a sezione ellittica, il cui magnete del peso di circa  $0,5\text{ kg}$  era sospeso ad un lungo filo di seta; si sono serviti anche, per leggere le deviazioni, del metodo dello specchio proposto nel 1826 da Poggendorf. Il magnete, lungo ( $30\text{ cm}$ ) e pesante, aveva un periodo di oscillazione di circa 14 secondi, e non si fermava mai completamente, costringendo gli operatori a ricorrere a complicati metodi per calcolare la deviazione finale del magnete mediante deviazioni nelle diverse oscillazioni. Le stesse cause hanno portato Weber al suo metodo di rieiezione e a quello del moltiplicatore (vedi più avanti), per l'osservazione delle correnti deboli.

In questo stesso galvanometro è stato pure utilizzato per la prima volta anche un ammortizzatore, basato sull'azione di correnti indotte generate dalle oscillazioni dell'ago in una massa di rame circondante il magnete. G. Wiedemann (1853) ha descritto un tipo molto comodo di galvanometro, che ha avuto grande diffusione ed è ancora in uso oggi (fig. 374), il campo magnetico è prodotto da due bobine  $R_1$  e  $R_2$ , tra le quali è sospeso a filo di bozzolo sottile l'ago magnetico all'interno di un ammortizzatore sferico  $D$  in rame. Le deviazioni dell'ago si osservano, attraverso una finestrella ricavata nel tubo di sospensione, mediante un cannocchiale e uno specchio leggero fissato all'asta che porta il magnete. Si vede in  $B$ , sul tubo di sospensione, il magnete che rende astatico il sistema, e il cui utilizzo, per aumentare la sensibilità dello strumento, è stato proposto nel 1841 da Melloni. Questo magnete è disposto in modo tale da indebolire l'azione del campo terrestre nel punto in cui si trova l'ago magnetizzato e di conseguenza ridurre la coppia che tende a riportare l'ago deviato nella sua posizione di equilibrio. Con un opportuno spostamento del magnete che rende il dispositivo astatico e con l'avvicinamento o allontanamento delle bobine  $R_1$  e  $R_2$ , si può fa variare entro ampi limiti la sensibilità del galvanometro.



Importanti progressi sono stati poi compiuti nella galvanometria da W. Thomson (1851), che ha costruito, per le esigenze della telegrafia transatlantica, un galvanometro astatico particolarmente sensibile. La caratteristica essenziale di questo strumento sta nell'estrema leggerezza del sistema mobile, formato da un equipaggio di piccolissimi magneti dotati di un piccolissimo specchio sospeso da un finissimo filo di bozzolo all'interno di una doppia coppia di bobine (fig. 375, una coppia di bobine è smontata); i movimenti del piccolo specchio si osservano attraverso una finestrella ricavata nelle flange che portano le bobine. Il galvanometro è posto in una gabbia di vetro; lungo un'asta verticale di ottone, fissata al coperchio della gabbia (fig. 376), si può spostare il magnete che rende astatico il sistema. Il galvanometro di W. Thomson, straordinariamente sensibile, ha soppiantato le vecchie forme di galvanometro e si trova ora impiegato.

Un dispositivo particolarmente conveniente dello stesso tipo è il *galvanometro corazzato* di Du Bois e Rubens (1900), mostrato in due forme diverse nella figura 377. A sinistra è il comune galvanometro astatico di W. Thomson, simile a quello mostrato nelle figure 375 e 376.

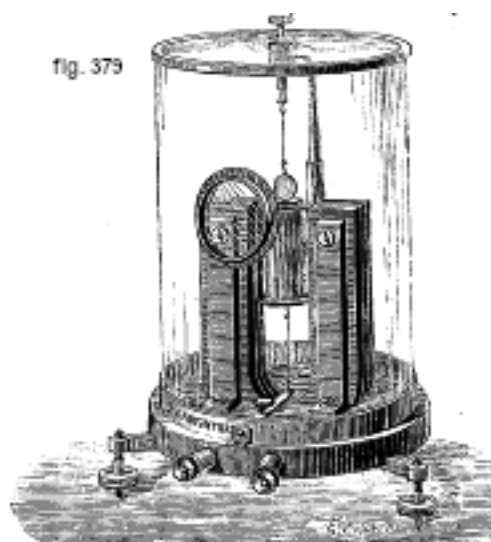


È racchiuso in due cilindri concentrici di acciaio fuso. Lo scopo di questa armatura è quello di indebolire il campo magnetico terrestre all'interno del galvanometro, e soprattutto di proteggere

il sistema sospeso dalle azioni magnetiche esterne variabili di magneti, correnti, dinamo, ecc., posti nelle vicinanze. Si vedono vicino al galvanometro i magneti con cui si ottiene un sistema astatico e le bobine. A destra è rappresentato un galvanometro corazzato sferico non astatico, la cui protezione magnetica è costituita da bobine emisferiche con involucro di acciaio e da due emisfere cave di acciaio (di cui una rimossa) che racchiudono il galvanometro. Siccome il dispositivo di protezione magnetica indebolisce notevolmente l'azione dei magneti esterni destinati a rendere astatico il dispositivo, all'interno della corazza sono presenti ulteriori sottili magneti che svolgono la stessa funzione, che sono curvati ad arco di cerchio e che sono facilmente riconoscibili sulla figura. I leggerissimi gruppi magnetici (visibili sotto la campana di vetro della figura centrale), sono sospesi a fili di quarzo lunghi solo 40 *mm* e hanno un peso complessivo da 50 a 300mg; i piccoli specchietti luminosi fissati all'estremità inferiore degli equipaggiamenti sono osservati attraverso finestre ricavate nella blindatura. Con galvanometri di questo tipo si può ancora rilevare una corrente la cui intensità non supera  $10^{-12}$  ampere, cioè che depositerebbe 1 *mg* di argento in 30000 anni.

Un tipo molto particolare di galvanometro è stato derivato dal dispositivo proposto nel 1867 da W. Thomson per manifestare le deboli correnti utilizzate per la trasmissione dei segnali nella telegrafia transatlantica.

Nell'intenso campo prodotto dai poli N e S (fig. 378) di un elettromagnete, una bobina leggera è sospesa ad un filo sottile; per concentrare le linee di forza in prossimità delle facce laterali della bobina, al centro dello spazio tra i poli era posto un corpo di ferro dolce D. Quando una corrente attraversa la bobina, questa tende a disporsi perpendicolarmente alle linee di forza, attorcigliando il filo di sospensione. Despretz (1880) e Arsonval (1881) hanno applicato lo stesso principio alla costruzione di un galvanometro, sostituendo però l'elettromagnete con un magnete permanente in acciaio; tra due sottilissimi fili d'argento, verticali ed allineati tra loro, è sospesa una leggerissima cornice (fig. 379), costituita da un filo di rame con spire isolate; essi sono fissati, da un lato, al filo di rame del telaio mobile, e, dall'altro, a parti metalliche comunicanti con i terminali del galvanometro; possono quindi essere utilizzati per portare corrente nel telaio. Questo è posto tra i rami verticali di un potente magnete a ferro di cavallo; inoltre è presente un cilindro di ferro dolce, disposto all'interno del telaio, in modo da ridurre il traferro; i lati verticali del telaio si trovano quindi in un intenso campo magnetico. Un piccolo specchio viene utilizzato per osservare l'angolo di deviazione della parte mobile. Apparecchi di questo tipo sono detti galvanometri Despretz-Arsonval o galvanometri a circuito mobile: sono diventati molto diffusi, grazie alla preziosa proprietà che possiedono di rendere le deviazioni del telaio mobile del tutto indipendenti dall'entità e dalle variazioni accidentali dei campi magnetici creati dalla Terra e da correnti, magneti, ecc., posti nelle vicinanze. Infatti il campo del magnete in acciaio è così potente che eventuali campi esterni esistenti in prossimità dello strumento sono assolutamente trascurabili. Un altro importante vantaggio dei galvanometri Despretz-Arsonval è la loro costruzione estremamente semplice e la possibilità di dare loro qualsiasi posizione rispetto al meridiano magnetico.



Inoltre, sono facili da usare; quando l'intero circuito non oppone una resistenza eccessiva, l'insieme mobile, nel momento in cui inizia la corrente, passa senza oscillazioni dalla sua prima posizione di equilibrio alla seconda. Questa aperiodicità abbrevia notevolmente le operazioni e consente addirittura di misurare l'intensità di una corrente variabile in ogni istante. Tale smorzamento è dovuto ai fenomeni di induzione a cui dà luogo il movimento del telaio. Esistono moltissime forme diverse di galvanometri Despretz-Arsonval. I seguenti modelli sono costruiti da J. Carpentier. Il modello mostrato in figura 380, molto portatile, è destinato a misure da effettuare sia in laboratorio che all'esterno, in tutti i casi in cui non è fattibile l'installazione di una scala suddivisa e trasparente. La lettura delle deviazioni si fa utilizzando un microscopio montato sull'asse dello specchio; il microscopio porta, davanti all'oculare, un micrometro su ghiaccio, diviso in 120 parti; il campo è illuminato uniformemente, o da una piccola lampada a benzina, o da un piccolo specchio la cui cornice a doppia rotazione, simile a quella delle scale trasparenti suddivise, può essere fissata sul corpo del microscopio, in luogo della lampada. L'ingrandimento dell'oculare permette di effettuare letture con la stessa precisione di quella ottenuta utilizzando direttamente una scala divisa in millimetri. Un sistema di sollevamento, posto all'interno dell'anima centrale in ferro, permette di immobilizzare il telaio mobile durante il trasporto, ed evita ogni possibilità di rottura o danneggiamento dei cavi di sospensione; questo sollevamento è manovrato all'esterno della scatola. Questo galvanometro può essere montato su un supporto fotografico a tre gambe. Un piccolo pendolo, montato all'interno della scatola, ne garantisce la verticalità.

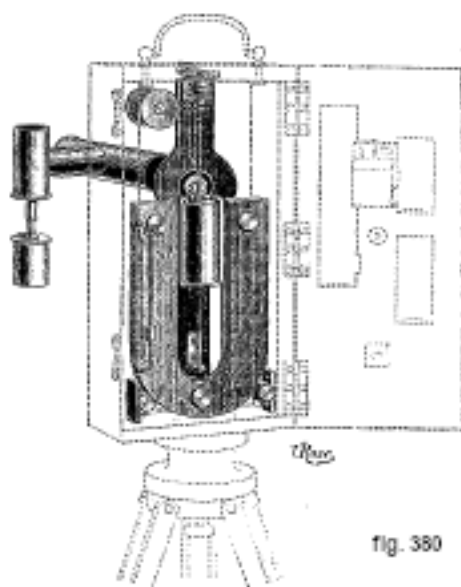


fig. 380

Il modello di figura 381, notevolmente diverso dai modelli ordinari, comprende un telaio mobile rettangolare alto  $64\text{ mm}$  e lungo  $150\text{ mm}$ , costituito da 500 spire di rame del diametro di  $0,1\text{ mm}$ ; il telaio è sospeso in un campo magnetico creato da due lamine magnetiche a forma di U, unite da capo a capo in modo da determinare due punti conseguenti. Una forte massa di ferro dolce riduce la riluttanza del circuito magnetico. Grazie al suo grande momento di inerzia, il sistema mobile ha una durata di oscillazione di circa 8 secondi. La resistenza della montatura è di 500 ohm, l'immagine del reticolo, sulla scala posta a 1 metro dallo specchio, devia di  $1\text{ mm}$  per una corrente di 0,01 microampere. La resistenza di smorzamento critica è di circa 4000 ohm, ovvero 8 volte quella del telaio. Il lungo periodo di oscillazione di questo galvanometro ne consente l'utilizzo per metodi balistici, anche nei casi in cui le scariche non sono istantanee; è quindi adatto a tutte le misure di induzione, anche quando le bobine testate contengono ferro. La sensibilità balistica di questo galvanometro è tale che una quantità di elettricità pari a 1 microcoulomb produce, in un circuito aperto, una elongazione da 40 a  $50\text{ mm}$ . Questo strumento, montato in una cassa di legno, è predisposto sia per essere appeso ad una parete verticale, sia per essere appoggiato su un supporto orizzontale; in quest'ultimo caso la base è dotata di viti distanziatrici.

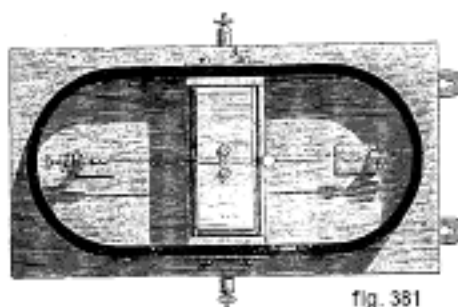
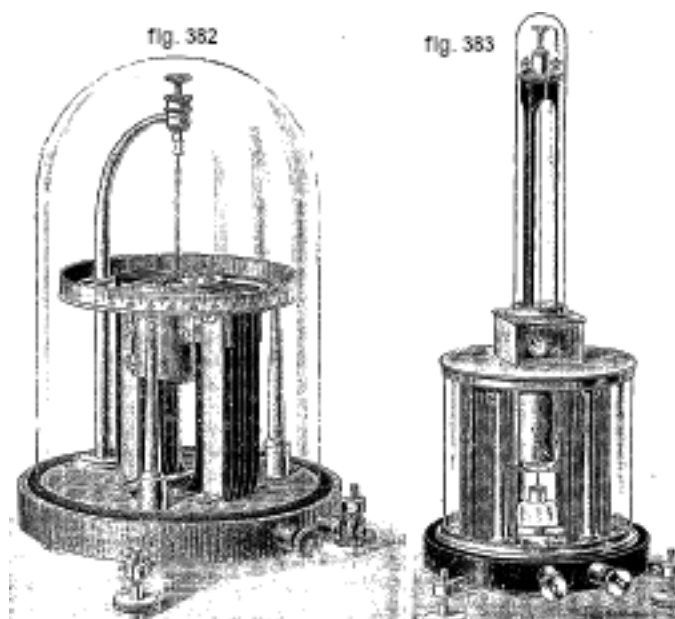


fig. 381

Nel galvanometro di figura 382 il telaio mobile è sospeso a due fili, fissati nel prolungamento di uno dei suoi lati; il suo secondo lato verticale si muove nel campo anulare formato da due espansioni polari fissate sui rami del magnete; la porzione di circuito posta lungo l'asse di rotazione risulta così sottratta all'azione del campo magnetico. Questo dispositivo permette di ottenere deviazioni proporzionali alle intensità entro limiti molto estesi; la graduazione è praticamente stabilita per 180 gradi. Il telaio porta un ago ricurvo che si muove su un cerchio diviso. Questo strumento può essere graduato direttamente in milliampere. La sensibilità massima è di circa 0,02 milliampere per grado di deviazione.

Nel modello di figura 383, il telaio mobile è sospeso ad un unico filo metallico lungo 12 *cm*. La corrente è portata da una vaschetta di mercurio, posta sul fondo, nella quale è immerso un sottile filo di platino, saldato ad una delle estremità del filo del telaio. L'insieme mobile è sostenuto da una testa regolabile fissata, mediante due bulloni, all'estremità di una colonna forata; il tutto è facilmente smontabile. Lo strumento è ricoperto da un sistema di due campane cilindriche, unite da una gabbia rettangolare, provvista, su una delle sue facce, di un vetro leggermente inclinato per evitare riflessi. Il telaio mobile ha una resistenza di 200 ohm; il suo periodo di oscillazione è di circa 4 secondi; una deviazione di 1 *mm*, sulla scala posta ad 1 metro, corrisponde ad una corrente di  $60 \cdot 10^{-10}$  ampere; la resistenza critica di smorzamento è di 1650 ohm.

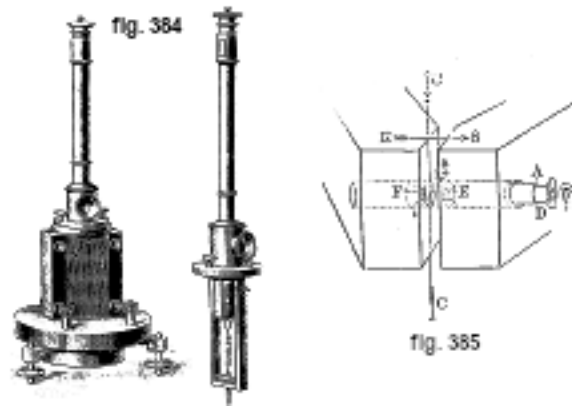


Descriveremo ancora il galvanometro della ditta Siemens e Halske (fig. 384). In questo dispositivo il campo magnetico è prodotto da un magnete formato da lamine di acciaio poste verticalmente. Il telaio mobile è sospeso, allo stesso tempo di un cilindro in ferro, ad un sottile nastro di bronzo fosforoso, all'interno di un particolare tubo cilindrico, mostrato separatamente in figura; il tutto è posto tra le masse polari semi cilindriche del magnete.

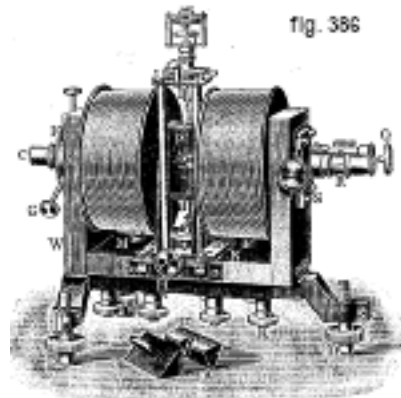
La costruzione dei galvanometri a telaio mobile non è da ritenersi giunta alla perfezione definitiva; la sensibilità dei dispositivi di questo genere, anche i migliori, rimane comunque inferiore a quella dei più sensibili galvanometri a magneti mobili.

Ai galvanometri a conduttore mobile appartengono anche i galvanometri a corda proposti da Ader (1897), e che Einthoven (1903) ha costruito e studiato con cura. In questi strumenti, il conduttore mobile è un filo di quarzo argentato CC (fig. 385), estremamente sottile (il suo spessore scende fino a 0,003 *mm*) e teso come una corda nell'intenso campo magnetico NS di un elettromagnete o di un magnete permanente. Al passaggio della corrente in questo filo, esso subisce una flessione nel senso della freccia *a*, perpendicolare alle linee di forza del campo; questo spostamento laterale del filo è osservato attraverso le aperture praticate nei poli, utilizzando un microscopio EA che ingrandisce fino a 1000 volte; F è un condensatore che illumina il filo.





La figura 386 rappresenta uno dei tanti esempi di questo dispositivo che Edelmann di Monaco ha costruito; si vede in questa figura l'elettromagnete, la piccola cornice che porta il filo di quarzo e il microscopio che fuoriesce dal nucleo destro dell'elettromagnete. I galvanometri a corda sono in grado di rilevare correnti altrettanto basse ( $10^{-12}$  ampere) quanto i migliori galvanometri Thomson; ma, mentre nei galvanometri sensibili a magneti mobili il periodo di oscillazione dell'elemento mobile si conta in secondi, nei galvanometri a corda è solo di centesimi o millesimi di secondo. Inoltre, i galvanometri a corda sono particolarmente utilizzati per l'osservazione di correnti deboli, la cui intensità varia periodicamente molto rapidamente. Il galvanometro è uno strumento così importante per il fisico che riteniamo necessario soffermarci un po' in dettaglio sulla teoria e sulle particolarità di forma dei galvanometri più utilizzati.



A. GALVANOMETRI A MAGNETI MOBILI. Supponiamo che, sotto l'azione della corrente di intensità  $I$ , il sistema magnetico del galvanometro abbia deviato del piccolo angolo  $\varphi$ ; in questa posizione, il momento di rotazione della corrente è uguale al momento di rotazione opposto del campo, che tende a riportare il sistema magnetico nella posizione di equilibrio. Sia  $M$  il momento magnetico dell'intero sistema,  $M_1$  il momento della parte su cui agisce la corrente; indichiamo infine con  $H_1$  l'intensità del campo che tende a riportare il sistema magnetico nella posizione di equilibrio. Si ha allora, dove  $\varphi$  è l'angolo di deviazione del sistema,

$$MH_1 \sin \varphi = M_1 G l \cos \varphi \quad (16.0.11)$$

dove  $G$  indica la costante galvanometrica, cioè l'intensità del campo magnetico creato dal passaggio dell'unità di intensità di corrente nelle bobine del galvanometro. A rigore, bisognerebbe ancora aggiungere al secondo membro il momento di rotazione del filo ritorto di sospensione; ma nei recenti strumenti molto sensibili con sistema magnetico in movimento, questo momento è così piccolo che può essere completamente trascurato. Si deduce dalla (11), per piccole deviazioni  $\varphi$ ,

$$S = \frac{\varphi}{I} = \frac{M_1}{M} \cdot \frac{G}{H_1} = \frac{q}{D} \quad (16.0.12)$$

La quantità  $S$ , che è la deviazione del sistema magnetico nel caso in cui la corrente abbia un'intensità uguale a uno, si chiama sensibilità del galvanometro:  $M_1 G = q$  è il momento di rotazione del sistema mobile per l'unità di intensità di corrente ed si chiama la *costante dinamica* del galvanometro:  $M_1 H = D$  si chiama la forza direttrice e corrisponde al momento di rotazione per una deviazione del sistema mobile dell'angolo  $\varphi = 1$ . La durata  $T$  di una mezza oscillazione del sistema magnetico è uguale a

$$T = \pi \sqrt{\frac{K}{MH_1}} = \pi \sqrt{\frac{K}{D}} \quad (16.0.13)$$

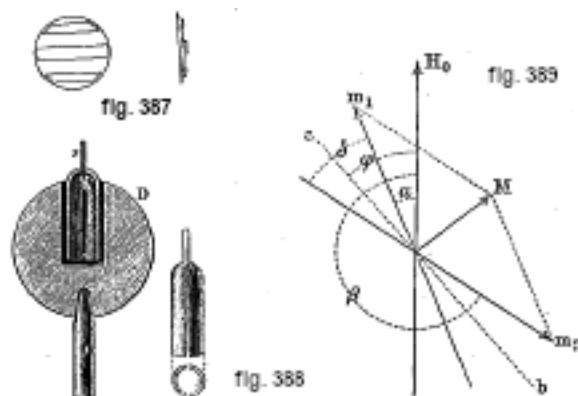
essendo  $k$  il momento d'inerzia del sistema mobile rispetto all'asse di rotazione.

Portando nella (12) il valore di  $H_1$  dedotto dalla (13), si trova per  $S$  l'espressione

$$S = \frac{M_1}{K} \cdot G \cdot \frac{T^2}{\pi^2} \quad (16.0.14)$$

Nella costruzione dei galvanometri sensibili, si cerca di rendere  $S$  il più grande possibile, senza che  $T$  diventi eccessivamente grande. A questo scopo: 1. bisogna aumentare  $M_1$  il più possibile e diminuire  $M$ , come si vede nella formula (12); 2. ma, poiché una riduzione di  $M$  porta ad un aumento della durata dell'oscillazione  $T$ , bisogna contemporaneamente ridurre il più possibile il momento d'inerzia  $K$ , come segue dalla formula (14); 3. è inoltre necessario aumentare il più possibile la costante  $G$  e 4. ridurre il più possibile l'intensità del campo  $H_1$ ; tuttavia, una diminuzione di  $H_1$  porta nuovamente ad un aumento di  $T$ , il che in pratica è scomodo, per cui si deve cercare di ridurlo mediante la massima riduzione possibile di  $K$ .

Nei galvanometri non astatici a un unico sistema mobile, si ha  $M_1 = M$ . Per evitare di aumentare eccessivamente la durata dell'oscillazione  $T$ ,  $M/k$  deve essere il più grande possibile. Valori elevati del momento magnetico  $M$  possono essere ottenuti solo utilizzando i migliori tipi di acciaio per il magnete e dandogli un volume sufficiente; ma il magnete deve rimanere corto, affinché  $K$  non diventi troppo grande. Ora, nei magneti corti, l'azione smagnetizzante delle estremità è sensibile e il momento del magnete è ridotto. W. Thomson ha indicato un modo per evitare questo inconveniente; per primo, ha utilizzato, al posto di un corto e massiccio magnete, una serie di magneti paralleli, sottili e corti; in questi, grazie alle loro piccole dimensioni trasversali, l'azione smagnetizzante è notevolmente ridotta, mentre il momento magnetico, così come il momento d'inerzia del loro insieme, sono gli stessi del magnete più spesso, che si formerebbe dalla loro unione. Si può vedere nella figura 387 un sistema magnetico di W. Thomson, incollato su un sottile disco di mica. W. Siemens ha utilizzato, per lo stesso scopo, un magnete a ferro di cavallo; se si piega un'asta magnetica in modo che la distanza tra i suoi poli diventi  $n$  volte più piccola, si rende così il suo momento magnetico  $n$  volte più piccolo, mentre il momento d'inerzia attorno all'asse di rotazione diventa  $n^2$  volte più piccolo; il rapporto  $M/k$  è quindi  $n$  volte maggiore. Un tale magnete è mostrato nella figura 388; cavo all'interno e munito di ghisa, ha la forma di una campana dentata; è mostrato a sinistra all'interno di un ammortizzatore (vedi sotto).



Una sensibilità molto maggiore può essere ottenuta utilizzando un sistema astatico, cioè aumentando il rapporto  $\frac{M_1}{M}$ . Supponiamo che il sistema astatico sia composto da due sistemi magnetici, aventi rispettivamente i momenti magnetici  $m_1$  e  $m_2$  (fig. 389) e formanti con il piano del meridiano magnetico gli angoli  $\alpha$   $\beta = \pi + \alpha + \delta$ , dove  $\delta$  è l'angolo tra gli assi magnetici dei sistemi. L'insieme dei sistemi  $m_1$  e  $m_2$  equivale ad un magnete il cui momento magnetico è

$$M = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 - 2m_1m_2 \cos \delta} = \sqrt{(m_1 - m_2)^2 + 4m_1m_2 \sin^2 \frac{\delta}{2}}$$

Se le bobine del galvanometro deviano  $m_1$  e  $m_2$  dallo stesso lato, si ha, nella formula (12),  $M_1 = m_1 + m_2$  e

$$\frac{M_1}{M} = \frac{m_1 + m_2}{\sqrt{(m_1 - m_2)^2 + 4m_1m_2 \sin^2 \frac{\delta}{2}}} \quad (16.0.15)$$

Questa formula mostra che bisogna rendere  $m_1$  e  $m_2$  quanto più grandi possibile, uguali e paralleli nel miglior modo possibile. In pratica, la condizione di parallelismo è la più difficile da realizzare, mentre l'uguaglianza di  $m_1$  e  $m_2$  può essere ottenuta mediante un'adeguata realizzazione e magnetizzazione dei magneti; Wadsworth ha persino costruito uno speciale elettromagnete destinato alla magnetizzazione di tali sistemi. Un sistema astatico, sospeso nel campo magnetico terrestre, può assumere posizioni di equilibrio del tutto inaspettate. Esso infatti è posto in posizione tale che la somma dei momenti di rotazione prodotti su di esso dal campo terrestre  $H_0$  sia nulla, cioè tale che

$$H_0 m_1 \sin \alpha + H_0 m_2 \sin \beta = 0 \quad (16.0.16)$$

Se si indica con  $\varphi$  l'angolo compreso tra il meridiano magnetico e la bisettrice  $ab$  dell'angolo  $\delta$ , si ha

$$\alpha = \varphi - \frac{\delta}{2} \quad \beta = \pi + \varphi + \frac{\delta}{2}$$

e l'equazione (16) si può scrivere

$$m_1 \sin \left( \varphi - \frac{\delta}{2} \right) + m_2 \sin \left( \pi + \varphi + \frac{\delta}{2} \right) = 0 \quad (16.0.17)$$

da cui

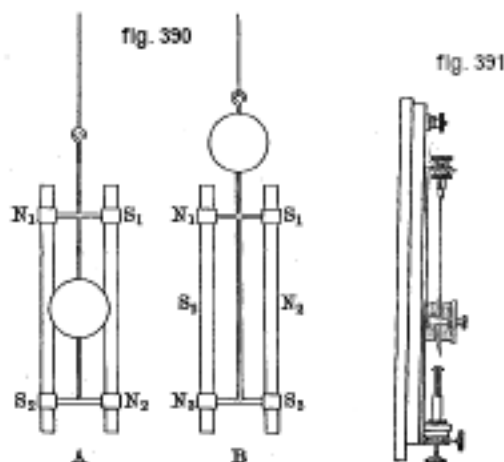
$$\tan \varphi = \frac{m_1 + m_2}{m_1 - m_2} \tan \frac{\delta}{2} \quad (16.0.18)$$

Quando  $\delta = 0$ , si ha  $\varphi = 0$ ; cioè, il sistema si dispone nel meridiano magnetico. Se  $\delta > 0$  e  $m_1 - m_2 = 0$ , si ha  $\varphi = 90^\circ$  e il sistema si dispone perpendicolarmente al meridiano. In generale, per  $m_1 \neq m_2$  e  $\delta > 0$ , il sistema assume la posizione di equilibrio più inattesa.

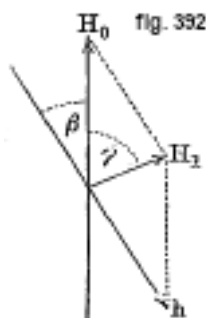
Nel galvanometro astatico è ancora più importante che in quello non astatico ridurre il più possibile il momento d'inerzia dell'intero sistema sospeso. Sotto questo aspetto i fisici, che hanno costruito galvanometri di eccezionale sensibilità, hanno ottenuto risultati notevoli. Così, nel galvanometro Snow, il sistema magnetico è costituito da due complessi di sei piccoli magneti ciascuno, incollati su un tubicino di vetro sottilissimo, e pesa, compreso il piccolo specchio, solo 80 *mg*. I piccoli magneti del galvanometro di Paschen sono stati realizzati con una molla da orologio in acciaio estremamente sottile e sono lunghi solo da 1 *mm* a 1,5 *mm*; il sistema totale, composto da 26 magneti, pesa con lo specchietto solo 5 *mg*. Il sistema astatico di V. Boys pesa addirittura solo 2 *mg*.

Si è cercato ancora un altro modo per ridurre il momento di inerzia nei sistemi astatici, disponendo i magneti parallelamente all'asse di rotazione. Si è rappresentato nella figura 390 A, un tale sistema di magneti dovuto a Weiss, e, nella figura 390 B un altro sistema adottato da Hartmann e Braun, Gray e Broca. Nel dispositivo di quest'ultimo il circuito galvanometrico

è formato da due piccole bobine di  $28\text{ mm}$  di diametro e  $8\text{ mm}$  di spessore; queste due bobine lasciano tra loro uno spazio di  $2\text{ mm}$  nel quale è sospeso il gruppo mobile (fig. 391).



Le estremità delle bobine comunicano con 4 terminali fissati alla base del dispositivo. Una delle due, quella anteriore, è montata su una staffa rimovibile, quindi la posizione dell'equipaggio è facilmente accessibile. Il sistema magnetico è costituito da due barre parallele distanziate tra loro di  $2\text{ mm}$ ; ciascuna delle barre è formata da un tubo magnetico in acciaio di diametro esterno  $0,7\text{ mm}$  e lungo  $35\text{ mm}$ . Ognuna delle barre ha tre poli, due dello stesso nome alle estremità e un polo conseguente al centro; inoltre la magnetizzazione è tale che i poli conseguenti delle due barre sono: uno nord e l'altro sud. L'equipaggio è sospeso ad un filo di bozzolo lungo  $8\text{ cm}$  e porta, nella sua parte inferiore, un piccolissimo specchio del piano  $m$ , largo  $2\text{ mm}$  e alto  $8\text{ mm}$ ; l'intero sistema mobile pesa soli  $2\text{ dg}$ . L'equipaggio è sospeso nello spazio libero tra le due bobine, ad un'altezza tale che i due poli corrispondenti corrispondano al centro delle bobine. Un piccolo magnete direttore, lungo circa  $2\text{ cm}$ , è sostenuto da un'asta verticale che, tramite due bulloni zigrinati, può ricevere un movimento ascendente e un movimento di rotazione: può così essere avvicinato molto all'estremità inferiore dell'equipaggio, e, inoltre, essere orientato in azimut diversi. Da notare che per quanto riguarda tutti i sistemi precedenti che hanno uguale valore di  $M$ , essi devono però avere un momento d'inerzia maggiore di quelli costruiti secondo il principio di W. Thomson.



Un ulteriore passo avanti verso l'aumento della sensibilità del galvanometro è stato compiuto dalla riduzione dell'intensità  $H$  del campo, che riporta il sistema magnetico nella posizione di equilibrio. A questo scopo viene solitamente utilizzato un magnete esterno per ottenere l'astatismo. Sia  $H_0$  (fig. 392) la componente orizzontale dell'intensità magnetica terrestre e  $h$  l'intensità del campo creato dal magnete astatizzante; i due campi si compongono in uno, che ha l'intensità

$$H_1 = \sqrt{H_0^2 + h^2 - 2H_0h \cos \beta}$$

e che forma con la direzione del meridiano magnetico l'angolo  $\gamma$  tale che

$$\sin \gamma = \frac{h}{H_1} \sin \beta$$

Scegliendo opportunamente il momento magnetico del magnete astatizzante e la sua posizione, si può dare al campo  $H_1$  un valore e una direzione qualsiasi; uno studio teorico di questa questione si deve a Charpentier. Quando però  $H_1$  è estremamente piccolo, le inevitabili variazioni periodiche di  $H_0$  possono agire così fortemente su  $H_1$  e  $\gamma$  che il sistema magnetico subisce continui spostamenti e la sensibilità del galvanometro manifesta notevoli deviazioni. È quindi molto più conveniente indebolire il campo che riporta il sistema nella posizione di equilibrio, utilizzando uno scudo magnetico, come ha fatto W. Thomson (1862) e, più tardi, Du Bois e Rubens (1900). L'armatura magnetica, oltre a indebolire il campo magnetico terrestre, riduce nella stessa proporzione anche tutte le variazioni e i disturbi prodotti da sorgenti esterne di campo magnetico. L'azione di uno schermo magnetico sui galvanometri è stata discussa teoricamente da Stefan e, in particolare, da Du Bois, Wills e Esmarch. Du Bois ha mostrato teoricamente e sperimentalmente che l'azione protettiva dell'armatura è approssimativamente proporzionale al cubo della permeabilità (molto debole per intensità piccole come quella del campo terrestre); si deve quindi utilizzare solo il miglior ferro dolce o il miglior acciaio dolce fuso per le armature. Nei galvanometri corazzati di Du Bois e Rubens (fig. 377), la tripla armatura indebolisce il campo magnetico terrestre di quasi 1000 volte; Nichols e Williams hanno costruito un galvanometro con 6 armature, in cui la protezione magnetica è 40 volte maggiore.

Se si vuole aumentare la costante galvanometrica  $G$ , bisogna trovare il modo migliore di avvolgere le bobine creando, per un dato numero di spire, il campo più intenso possibile. Questa questione è stata studiata teoricamente da Maxwell e la costruzione delle bobine degli ultimi galvanometri si avvicina più o meno alle sue indicazioni teoriche; lo stesso problema è stato recentemente affrontato anche da A. Volkmann. Il diametro del filo utilizzato nell'avvolgimento delle bobine e di conseguenza la resistenza  $\rho$  delle bobine dipende interamente dallo scopo a cui è destinato il galvanometro. Se  $N$  è il numero di spire delle bobine,  $d$  il suo diametro, per un dato volume di avvolgimento, si ha circa

$$N = \frac{\alpha}{d^2} \quad \rho = \beta \frac{N}{d^2} = \frac{\gamma}{d^4} \quad (16.0.19)$$

con  $\alpha, \beta, \gamma$  coefficienti, così come  $\delta, \varepsilon, k, \mu$  che entrano nelle formule seguenti. Si deduce dalla formula (19)

$$N = \delta \sqrt{\rho} \quad (16.0.20)$$

La costante galvanometrica  $G$  è, per un dato volume dell'avvolgimento, proporzionale a  $N$  e il campo  $H$ , prodotto dalle bobine, è proporzionale a  $GI$ , per cui

$$H = \varepsilon GI = kNI = \mu \sqrt{\rho} I \quad (16.0.21)$$

Quando la corrente è dovuta a una forza elettromotrice  $E$  e la resistenza esterna del circuito è uguale a  $r$ , si ha

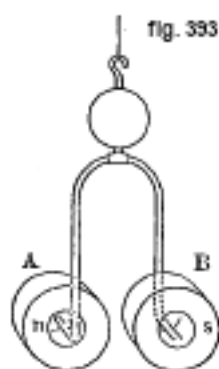
$$I = \frac{E}{r + \rho}$$

e

$$H = \frac{\mu \sqrt{\rho}}{r + \rho} E \quad (16.0.22)$$

L'espressione (22) presenta un massimo per  $r = \rho$ ; in altre parole, a parità di altre condizioni, un galvanometro dà la deviazione maggiore, quando la sua resistenza è uguale a quella del circuito esterno. Ad esempio, per lo studio dei fenomeni termoelettrici in circuiti a resistenza ordinariamente molto bassa, si utilizzano galvanometri che hanno anch'essi una bassa resistenza

e, al contrario, nello studio del passaggio di una corrente attraverso cattivi conduttori, ad esempio in gas ionizzati, si utilizzano galvanometri con un avvolgimento molto fine e una grande resistenza. La scelta della resistenza più vantaggiosa per un galvanometro richiede, in casi complessi, ad esempio nel ponte di Wheatstone, uno studio particolare, ma come regola generale, in ogni caso particolare è necessario scegliere un galvanometro la cui resistenza sia dello stesso ordine di grandezza della resistenza del circuito esterno. Per aumentare il più possibile la costante galvanometrica  $G$ , sono stati costruiti galvanometri con strette bobine cilindriche, nelle quali sono attratti i poli del magnete. La Figura 393 rappresenta una disposizione di questo tipo, che si incontra nel sensibile microgalvanometro Rosenthal; il piccolo magnete leggero a ferro di cavallo, i cui poli sono ripiegati, ruota attorno ad un asse verticale, quando i suoi poli vengono attratti o respinti nelle bobine A e B. Dispositivi simili sono stati proposti da Gray e Kollert; Ayrton ha costruito un galvanometro astatico seguendo il tipo Rosenthal. Nessuno di questi dispositivi, tuttavia, presenta vantaggi essenziali rispetto ai soliti galvanometri della W. Thomson.



Un fattore importante in qualsiasi galvanometro è il dispositivo per smorzare le oscillazioni del sistema magnetico mobile. Abbiamo già accennato in precedenza all'ammortizzatore proposto per la prima volta da Weber e basato sulla generazione da parte del magnete, con le sue oscillazioni, in una massa metallica, di correnti indotte, che agiscono come un freno (per attrito elettromagnetico) sul magnete; si è rappresentato, in figura 388, un ammortizzatore di questo tipo formato da una massiccia sfera di rame, nella quale oscilla il magnete a campana di Siemens. Oltre a questi ammortizzatori, vengono ancora utilizzati quelli ad aria; si tratta di alette in alluminio o mica, fissate al gruppo mobile, dove la resistenza dell'aria smorza le oscillazioni. Nei galvanometri del tipo W. Thomson, il ruolo di ammortizzatore è spesso svolto dallo specchietto stesso del sistema o dalle lamelle che portano i magneti. A. Toepler ha studiato approfonditamente la modalità di azione degli ammortizzatori ad aria. Gli ammortizzatori, nei quali si sfrutta la resistenza di un liquido anziché quella dell'aria, non vengono più utilizzati, perché, vista la piccola forza che, nei moderni galvanometri, agisce sull'elemento in movimento, le forze capillari alla superficie del liquido hanno un'influenza eccessiva sul movimento del sistema.

Qualunque sia il dispositivo smorzatore utilizzato, il momento ritardante da esso creato è sempre proporzionale alla velocità di rotazione del magnete. Se il momento della coppia che ritarda il movimento è uguale a  $a = -m \frac{dp}{dt}$ , con  $n$  fattore di ammortizzamento, e se  $p = n/2K$ , essendo  $K$  il momento d'inerzia del magnete rispetto all'asse di rotazione di quest'ultimo, e  $c = \sqrt{\frac{MH}{K}}$ , il movimento del magnete deviato dipende interamente dalla grandezza relativa di  $p$  rispetto a  $c$ . Quando lo smorzamento è piccolo e  $p < c$ , il magnete deviato ritorna nella posizione di equilibrio mediante oscillazioni di ampiezza gradualmente decrescente e tanto più velocemente quanto maggiore è  $p$ . Se  $\varphi_0$  indica la più piccola deviazione osservabile, si ammette che il magnete sia arrivato a riposo, quando l'ampiezza delle sue oscillazioni è divenuta inferiore a  $\varphi_0$ ; è notevole che il tempo necessario affinché l'ampiezza diminuisca a  $\varphi_0$  dipenda, a parità delle

altre circostanze, solo dalla grandezza  $p$  e non dalla durata dell'oscillazione del sistema. Quando  $p > c$ , il movimento è aperiodico, cioè il magnete deviato ritorna nella posizione di equilibrio, senza oscillare e senza superare questa posizione di equilibrio; teoricamente raggiungerebbe la posizione di equilibrio solo dopo un tempo infinito, ma in pratica ciò accade non appena la deviazione è inferiore a  $\varphi_0$ , il che avviene tanto più velocemente quanto più  $p$  si avvicina a  $c$ . Quando  $p$  è molto grande, il magnete ritorna nella sua posizione di equilibrio così lentamente che le osservazioni diventano estremamente difficili. Nel caso di transizione in cui  $p = c$ , il movimento è ancora aperiodico e il magnete ritorna più rapidamente alla posizione di equilibrio. Dalle formule adatte a questo caso, si deduce facilmente che dall'istante in cui il magnete ritorna nella posizione di equilibrio, la deviazione si riduce all'1% del suo valore iniziale dopo  $t = 2,1T$  (dove  $T$  è il periodo di oscillazione del sistema senza ammortizzatore), allo 0,1% dopo  $2,9T$ , allo 0,01% dopo  $3,7T$ . È ovvio, come ha già dimostrato Du Bois-Reymond (1869), che lo smorzamento più favorevole nei galvanometri si ha quando  $p = c$ ; ci si sforza di avvicinarsi a questa condizione nella costruzione e nell'installazione dei galvanometri, ma nelle forme attuali con magnete mobile lo smorzamento è troppo basso perché il caso di transizione avvenga esattamente.

Lo studio delle oscillazioni di un magnete si riferisce al caso in cui gli angoli di deviazione  $\varphi$  rimangono molto piccoli. Studi più precisi, per valori finiti di  $\varphi$ , si devono a Schering, O. D. Chwolson, Riecke e Lemke.

Spesso si devono seguire le variazioni dell'intensità della corrente utilizzando un galvanometro. Se queste variazioni non avvengono troppo lentamente, è necessario utilizzare un galvanometro con un ammortizzatore abbastanza potente. In questo caso, la posizione in ogni istante del sistema mobile non corrisponde all'entità dell'intensità di corrente nello stesso istante, le indicazioni del sistema mobile sono in ritardo rispetto all'intensità della corrente. La questione piuttosto complessa della dipendenza tra l'intensità di corrente e la deviazione dell'ago nello stesso istante è stata studiata da O. D. Chwolson, Schulze e Schaufelberger.

Nella definizione pratica della sensibilità dei galvanometri a specchio, si è abituati a prendere, come unità di intensità di corrente, un microampere ( $10^{-6}$  ampere), e, come unità angolare, l'angolo di rotazione del sistema mobile per il quale si ottiene, su una scala distante 1000 unità di lunghezza, una deviazione uguale a una unità di lunghezza; ciò corrisponde a un angolo di rotazione dello specchio di circa  $1,7'$ . Ma, poiché per un diverso grado di astatismo e di conseguenza per una diversa durata di oscillazione, la sensibilità di un dato galvanometro può assumere diversi valori, ed è consuetudine riferire la sensibilità ad un periodo completo di oscillazione di 10 secondi. La sensibilità  $S$  di un galvanometro indica quindi la deviazione che esso dà per un microampere e un periodo completo di oscillazione di 10 secondi, deviazione che si esprime in divisioni della scala distanti dallo specchio di 1000 di queste divisioni. Quando si è osservato, per una durata di oscillazione di  $T$  secondi, la sensibilità  $S_T$ , la sensibilità  $S$  ridotta a 10 secondi è, secondo la (14),

$$S = S_T \left( \frac{10}{T} \right)^2$$

Nel confronto di numerosi galvanometri, non si deve confrontare direttamente la loro sensibilità  $S$ , perché le loro resistenze  $\rho$  possono differire, e di conseguenza anche il numero  $N$  di spire delle bobine, a cui è proporzionale la costante galvanometrica. Si è soliti, per questo motivo, confrontare le sensibilità normali  $\mathcal{S}$  dei galvanometri, cioè le sensibilità per un avvolgimento di bobine la cui resistenza totale sarà uguale a un ohm. Dalle formule (20) e (21), segue che se la sensibilità di un galvanometro di resistenza  $\rho$  è  $S$ , la sua sensibilità normale  $\mathcal{S}$  è uguale a

$$\mathcal{S} = \frac{S}{\sqrt{\rho}}$$

La più grande sensibilità normale  $\mathcal{S}$  raggiunta finora è  $\mathcal{S} = 3900$ ; è stata ottenuta da Paschen nel suo galvanometro. Il bel galvanometro astatico corazzato di Du Bois e Rubens dà, per il

peso più leggero ( 60 mg) della parte mobile, la sensibilità normale  $\mathcal{S} = 1000$ . I galvanometri molto sensibili di Wadsworth, Weiss, Abbot e altri ancora non sembrano aver dato risultati superiori a quelli ottenuti da Paschen.

Oltre la sensibilità  $S$  per le correnti, si considera spesso la sensibilità  $P = \varphi/e$  per le piccole differenze di potenziale  $e$ . Siccome  $e = IR$ , essendo  $R$  la resistenza totale del circuito che contiene la detta differenza di potenziale, si ha  $P = \varphi/e = \varphi/IR = s/R$ . Il massimo di  $S$  è raggiunto quando  $r = \rho$ , cioè quando  $R = r + \rho = 2\rho$ ; pertanto il massimo di  $P$  è  $P = s/2\rho$ .

B. GALVANOMETRI A BOBINA MOBILE. In questi dispositivi la bobina deviata dalla corrente si ferma nella posizione in cui il momento delle forze prodotte dal campo magnetico è uguale al momento opposto di verso contrario del filo di sospensione attorcigliato. Indicando con  $H$  l'intensità del campo magnetico in cui ruota la bobina, con  $s$  la somma delle aree delimitate dalle varie spire della bobina, si ottiene, per la costante galvanometrica dinamica,  $q = Hs$ , e, per il momento di rotazione dovuto alla corrente  $I$ , il valore  $HsI$ . Se  $D$  è la forza direttrice del dispositivo di sospensione, la forza agente contro il filo attorcigliato dell'angolo  $\varphi$  è  $D\varphi$  e si ha equilibrio quando  $Hsl = D\varphi$ , da cui

$$S = \frac{\varphi}{I} = \frac{q}{D} = \frac{Hs}{D} \quad (16.0.23)$$

Nei galvanometri a bobina mobile, lo smorzamento delle oscillazioni gioca un ruolo estremamente importante. Nell'avvolgimento della bobina mobile, a seguito del movimento di quest'ultima nel campo magnetico, si produce una corrente indotta che, secondo la legge di Lenz, si oppone a questo movimento; quando il filo della bobina è avvolto su un telaio metallico rettangolare chiuso, anche in questo telaio si origina una corrente che si oppone al movimento; praticando un taglio nella telaio, si impedisce la produzione di tale corrente. Lo smorzamento dovuto alla resistenza dell'aria è solitamente così piccolo, rispetto a quello elettromagnetico, che può essere ignorato. La forza elettromotrice d'induzione generata nel telaio mobile è in misura assoluta uguale a  $e = d\Phi/dt$ , essendo  $\Phi$  il flusso della forza magnetica che attraversa il telaio; quando il piano del telaio forma con la direzione delle linee di forza magnetiche l'angolo  $\varphi$ , si ha, nell'ipotesi di un campo magnetico uniforme,  $\Phi = Hs \sin \varphi$  e  $e = \frac{d\Phi}{dt} = Hs \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt}$ . Quando l'angolo  $\varphi$  rimane piccolo, si può scrivere  $e = Hs \frac{d\varphi}{dt}$  e l'intensità  $i$  della corrente indotta è uguale a  $i = \frac{e}{W} = \frac{Hs}{W} \cdot \frac{d\varphi}{dt}$ , essendo  $W$  la resistenza totale (resistenza dell'avvolgimento più quella esterna) che la corrente indotta deve vincere. La corrente  $i$ , che percorre l'avvolgimento, produce il momento di frenamento  $Hsi = Hs \frac{Hs}{W} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{q^2}{W} \frac{d\varphi}{dt}$ . Da ciò, il coefficiente di smorzamento (momento di reazione per una velocità angolare uguale all'unità) è

$$n = \frac{q^2}{W} \quad (16.0.24)$$

Da questa formula si vede che aumentando  $q$  non solo aumenta la sensibilità  $S$  del galvanometro, ma in misura ancora maggiore il suo smorzamento. Indicando con  $K$  il momento d'inerzia dell'equipaggio mobile, si ottiene, per il movimento del sistema, l'equazione

$$K \frac{d^2\varphi}{dt^2} + n \frac{d\varphi}{dt} + D\varphi = 0 \quad (16.0.25)$$

Poniamo  $\frac{n}{K} = 2p$  e  $\frac{D}{K} = c^2$ , la (25) si scrive

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2p \frac{d\varphi}{dt} + c^2\varphi = 0 \quad (16.0.26)$$

e in questa forma è identica alla (66) del cap. 7, §. 9. Si hanno quindi anche, nel caso attuale, vibrazioni smorzate per  $p < c$ , un movimento aperiodico per  $p > c$ , e per  $p = c$ , il caso di



transizione in cui il sistema mobile ritorna più rapidamente nella posizione di equilibrio. Per evitare il caso  $p > c$ , in cui la bobina mobile striscia lentamente, per così dire, verso la posizione di equilibrio, si può, per aumentare la sensibilità  $S$ , non aumentare  $q$  finché  $p = \frac{n}{2K} = \frac{q^2}{2WK}$  diviene uguale a  $c = \sqrt{\frac{D}{K}}$ . Si ha

$$\frac{q^2}{2WK} = \sqrt{\frac{D}{K}} = \frac{\pi}{T} \quad (16.0.27)$$

dove  $T = \pi\sqrt{\frac{D}{K}}$  è il semi periodo di oscillazione del sistema mobile smorzato. cioè in circuito aperto. Supponiamo realizzato il caso di transizione, che è il più favorevole; si può allora, servendosi della (27), dare a  $S = \frac{q}{D}$  le seguenti espressioni:

$$S = \sqrt{\frac{2WT}{\pi D}} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2WT^3}{\pi K}} \quad (16.0.28)$$

Jäger che ha accuratamente studiato i galvanometri a bobina mobile, indica l'espressione più esatta di  $S$ :

$$S = \sqrt{\frac{2WT}{\pi D}} \cdot \sqrt{1 - \frac{n_0 T}{2K}} \cdot \sqrt{1 + \frac{w_1}{w_2}} \quad (16.0.29)$$

dove  $n_0$  è lo smorzamento in circuito aperto,  $w_1$  la resistenza dell'avvolgimento e  $w_2 = W - w_1$  la resistenza del circuito esterno.

La sensibilità  $P$  per piccole differenze di potenziale è

$$P = \frac{\varphi}{c} = \frac{\varphi}{IW} = \frac{S}{W} = \sqrt{\frac{2T}{W\pi D}} \quad (16.0.30)$$

L'espressione più esatta data da Jäger è

$$P = \sqrt{\frac{2T}{W\pi D}} \sqrt{1 - \frac{n_0}{2} \frac{T}{K}} \left[1 + \frac{w_1}{w_2}\right]^{-\frac{1}{2}} \quad (16.0.31)$$

Le formule (28) e (29) mostrano che, per ottenere una sensibilità  $S$  elevata, è necessario aumentare il più possibile la durata dell'oscillazione  $T$ , senza però uscire da un certo limite, oltre il quale le osservazioni diventano molto difficili. Se ci si ferma a un determinato valore di  $T$ , la si può ottenere mediante un'opportuna scelta di  $D$  e  $K$ ; si vede però, dalle formule (28) e (29), che è preferibile arrivare a un valore elevato per  $T$ , riducendo  $D$  e non aumentando  $K$ . La resistenza limite  $W$ , per la quale si ha il caso di transizione citato, è solitamente determinata anche dalla destinazione che si dà al galvanometro. I valori dati per  $T$  e  $W$  determinano quindi il massimo di  $q = Hs$  ammissibile per il galvanometro. Un aumento della sensibilità si può quindi ottenere solo riducendo la forza direttrice del dispositivo di sospensione, cioè soprattutto riducendo il diametro del filo di sospensione, poiché  $D$  varia proporzionalmente alla quarta potenza del raggio del filo, e una piccola riduzione del raggio del filo produce una significativa riduzione di  $D$ .

Recentemente Reinganum ha indicato la possibilità di utilizzare un altro modo, rendendo la sospensione astatica, per ridurre la forza direttrice. A tale scopo, al filo di sospensione viene fissato un corto e sottile filo di ferro dolce, perpendicolare alle linee di forza del campo e all'esterno della parte del campo dove l'intensità è massima. Quando la bobina ruota, questo filo produce un aumento della deflessione. Un altro metodo consiste nell'utilizzare un magnete sottile e debole, disposto parallelamente alle linee di forza, in modo che i suoi poli siano nella stessa direzione dei poli del magnete che crea il campo. Reinganum è riuscito così, su un galvanometro, a rendere la sua sensibilità  $S$  almeno dieci volte maggiore, aumentando naturalmente allo stesso tempo il suo periodo di oscillazione. Anche Dibbern ha studiato questi processi di astatismo e

trovato che l'uso di un piccolo magnete è più conveniente di quello di un filo di ferro dolce e che si può in tal modo aumentare significativamente  $S$ , senza aumentare  $P$ .

Non entreremo più nel dettaglio sulla teoria piuttosto complicata di questi strumenti; è esposta nelle opere di Jäger, Diesselhorst, Stewart, White, Abraham, Fery e altri; Mather ha studiato la forma migliore da dare all'avvolgimento della bobina mobile. Galvanometri sensibili a bobina mobile a bassa resistenza sono stati descritti da Jäger e Zahn.

La sensibilità dei galvanometri a corda dipende, per un dato campo magnetico, dallo spessore del filo oscillante e dalla sua tensione; tale sensibilità può essere considerata, entro ampi limiti, inversamente proporzionale alla tensione. Il periodo di oscillazione diminuisce con la tensione del filo; per grandi valori della tensione scende ai millesimi di secondo e per valori bassi (alta sensibilità) si conta in secondi. Lo smorzamento del movimento del filo dipende dalla resistenza dell'aria e dalla frenatura dovuta alle correnti indotte nella superficie conduttiva di questo filo; la resistenza dell'aria aumenta con la velocità del movimento del filo, per cui per una tensione elevata (piccolo periodo di oscillazione, bassa sensibilità), il movimento può diventare aperiodico. Con sensibilità elevata (bassa tensione, lungo periodo), lo smorzamento è generalmente basso o bisogna aumentarlo. Einthoven ha indicato un metodo interessante per variare lo smorzamento, applicabile a galvanometri di altra forma, purché il loro periodo di oscillazione sia sufficientemente piccolo, ma la loro resistenza sufficientemente grande. Questo metodo consiste nello shuntaggio del galvanometro parallelo a due circuiti, uno dei quali contiene una capacità e l'altro una resistenza; scegliendo opportunamente capacità e resistenza si possono rendere le oscillazioni periodiche o aperiodiche a piacimento. Più lungo è il periodo di oscillazione e minore è la resistenza del galvanometro, maggiore è la capacità necessaria per variare lo smorzamento. L'applicazione di questo metodo ai galvanometri di lungo periodo e di piccola resistenza richiederebbe, come ha dimostrato Einthoven, capacità straordinariamente grandi.

La possibilità di far variare entro ampi limiti il periodo di oscillazione del galvanometro a corda rende questo strumento particolarmente adatto a fungere da galvanometro a vibrazione per deboli correnti alternate. Salomonson, che ha costruito un tipo particolare di galvanometro a corda, in cui il campo magnetico è prodotto da due fili, paralleli a quello oscillante e percorsi da corrente, ha dimostrato che, in questa forma, il galvanometro può essere utilizzato anche come elettrodinamometro o di wattmetro.

La descrizione dei galvanometri a corda, così come la loro teoria generale, è data nei lavori già menzionati sopra da Einthoven.

C. GALVANOMETRI A VIBRAZIONE. Vengono utilizzati quasi esclusivamente per la misura di deboli correnti alternate e verranno descritti nel volume V.

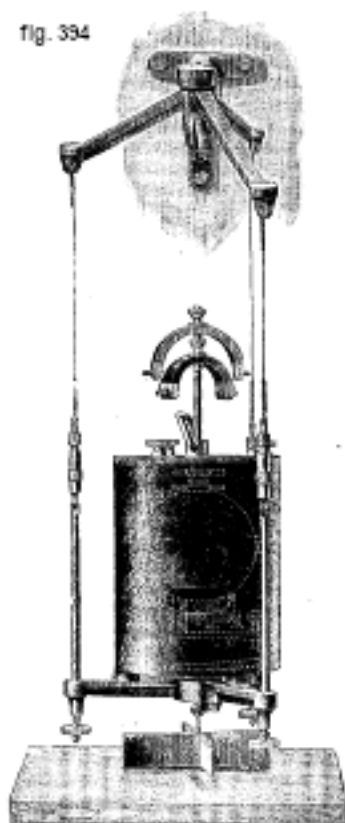
D. GALVANOMETRI DIFFERENZIALI. Per riconoscere l'uguaglianza di intensità di due correnti si utilizzano i galvanometri differenziali, proposti per la prima volta da E. Becquerel (1846). Questi dispositivi hanno due avvolgimenti indipendenti l'uno dall'altro, ciascuno dei quali è percorso dalle correnti da confrontare, le quali hanno una direzione tale da generare campi magnetici opposti. Quando la costante galvanometrica  $G$  ha lo stesso valore nei due avvolgimenti di un galvanometro a magnete mobile e le resistenze degli avvolgimenti sono uguali, il sistema magnetico mobile rimane senza deviazione solo nel caso in cui le correnti che attraversano gli avvolgimenti sono uguali; è così anche quando sono uguali le correnti che il telaio mobile di un galvanometro Depretz-D'Arsonval, portante due avvolgimenti con lo stesso numero di spire, non subisce alcuna deviazione. Finora però i galvanometri a magnete mobile sono stati utilizzati quasi esclusivamente come galvanometri differenziali, perché l'introduzione di due correnti nella stessa bobina mobile e l'equalizzazione dell'azione galvanometrica dei due avvolgimenti di tale bobina presentano gravi difficoltà tecniche. I galvanometri tipo Wiedemann (fig. 374) possono essere immediatamente utilizzati come galvanometri differenziali, inviando una delle correnti nella bobina di destra, l'altra nella bobina di sinistra, e confrontando l'azione galvanometrica delle bobine mediante la variazione della loro distanza dal sistema mobile. Ma, per misure più

precise, si utilizzano sempre galvanometri in cui ciascuna bobina porta due avvolgimenti avvolti uno accanto all'altro, accuratamente isolati l'uno dall'altro e aventi lo stesso numero di spire. I migliori galvanometri recenti, ad esempio quelli della Du Bois el Rubens, sono solitamente dotati di bobine con più avvolgimenti paralleli e possono quindi essere immediatamente utilizzati come galvanometri differenziali.

Un galvanometro differenziale deve soddisfare due condizioni: 1. Il suo ago magnetico non deve deviare quando nei due avvolgimenti collegati in serie viene inviata la stessa corrente; 2. le resistenze di questi avvolgimenti devono essere uguali. Se queste condizioni non sono soddisfatte, è necessario aggiungere qualche spira a uno degli avvolgimenti e inserire nel circuito la cui resistenza sia la più bassa, oppure utilizzare galvanometri differenziali in alcuni dei metodi più perfetti per confrontare le resistenze. Le questioni tecniche relative al loro utilizzo sono state studiate da Kirchoff e Hakseman, Kohlrausch, Dieterici e Jäger. Un galvanometro differenziale a telaio mobile è stato descritto da Shedd.

E. INDICAZIONI PER L'UTILIZZO DEI GALVANOMETRI. L'elevata sensibilità dei recenti galvanometri, ottenuta mediante un'estrema riduzione della forza direttrice, rende necessarie una serie di precauzioni nell'uso di questi dispositivi. Innanzitutto il galvanometro deve essere installato in modo che l'inevitabile scuotimento delle pareti e del pavimento non abbia alcun effetto sui movimenti della parte sospesa. Du Bois e Rubens hanno mostrato che lo scuotimento del punto di sospensione della parte mobile non produce un momento di rotazione nella parte sospesa, se l'asse principale di inerzia di quest'ultima è sul prolungamento del filo di sospensione. Ma anche se questa condizione è soddisfatta nel modo più completo possibile, l'apparecchio deve essere protetto da qualsiasi propagazione perturbatrice. Il lavoro teorico di Hamy e la ricerca di Julius hanno evidenziato le condizioni da soddisfare nell'installazione di un galvanometro. Julius fissa il galvanometro su un telaio o un treppiede, sospeso alla parete o al soffitto mediante tre fili di acciaio della stessa lunghezza ed egualmente tesi. Il centro di gravità dell'intero sistema sospeso ai fili deve trovarsi nel piano dei punti di fissaggio dei cavi al telaio; in questo piano deve trovarsi anche la parte del dispositivo che deve essere maggiormente protetta dalle scosse (punto di attacco del cavo di sospensione). La figura 394 rappresenta lo strumento di Julius, che sostiene un galvanometro sferico corazzato di Du Bois e Rubens; l'ammortizzatore a forma di croce sotto il galvanometro è immerso in una vasca piena d'olio e smorza le vibrazioni torsionali che possono verificarsi in tutto il sistema. Un supporto antivibrazione, montato per un galvanometro Despretz-D'Arsonval, fu installato anche all'Esposizione Universale del 1900 a Parigi da J. Carpentier con soluzioni simili e ha funzionato in modo molto soddisfacente in un luogo del tutto instabile. Einthoven ha messo strumenti su un piatto pesante gli strumenti che dovevano essere protetti dai disturbi esterni ( $1\text{ m} \times 1\text{ m} \times 1\text{ mm}$ ), che fluttuava in un vaso di ferro su uno strato di mercurio spesso  $1\text{ mm}$ . White, che ha studiato anche metodi di protezione contro le vibrazioni, ha proposto varianti ai dispositivi di Julius e Einthoven; un modo semplice di sospensione alla maniera di Julius è stato descritto da Volkmann. Galvanometri sensibili, isolati dagli impulsi esterni, consentono ancora leggere rotazioni arbitrarie del sistema mobile (scostamenti dallo zero), tanto più pronunciati e più scomodi quanto più sensibile è l'apparecchio stesso. Nei galvanometri a magnete mobile, fortemente astatici, questi spostamenti possono derivare da piccole variazioni del campo magnetico esterno e fino ad un certo punto possono essere eliminati dall'armatura magnetica; nei galvanometri a telaio mobile, gli scostamenti dallo zero sono talvolta dovuti ai metalli utilizzati per la costruzione del telaio e del dispositivo di sospensione che sono debolmente magnetici e il cui momento magnetico varia per qualsiasi causa; White e Zeleny hanno studiato questi movimenti e i modi per evitarli.

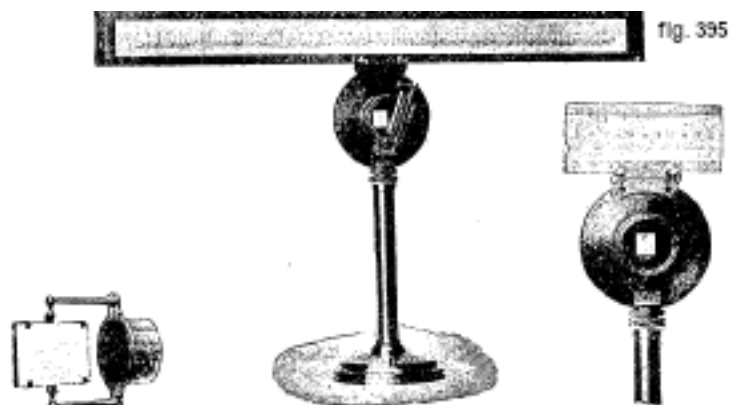
fig. 394



La rotazione del sistema mobile, nei galvanometri sensibili, viene solitamente osservata soggettivamente utilizzando un cannocchiale e una scala graduata. Come hanno mostrato Lord Rayleigh e Wadsworth, la sensibilità di questo metodo di osservazione è limitata dal potere separatore dell'intero sistema ottico, che ordinariamente dipende soltanto dalle dimensioni del piccolo specchio; già, a una distanza pari a 4000 volte il raggio dello specchio, le linee sulla scala millimetrica si confondono, per effetto della diffrazione. L'ingrandimento del cannocchiale qui non ha alcun ruolo, ma non deve essere troppo piccolo, perché la capacità di distinguere le diverse divisioni della scala è limitata dalla capacità di separazione dell'occhio. Wolkmann, che ha studiato a fondo queste circostanze, consiglia di utilizzare ingrandimenti da tre a sei volte maggiori del numero di millimetri contenuti nel raggio dello specchio. Un aumento delle dimensioni dello specchio aumenta il potere separatore, ma allo stesso tempo riduce la sensibilità del galvanometro, perché aumenta il momento di inerzia della parte sospesa. Secondo i calcoli di Wolkmann il rapporto più favorevole si ha quando il momento d'inerzia del solo specchietto è un quinto del momento d'inerzia totale del sistema.

Facendo riflettere il raggio luminoso su uno specchio fisso, interposto sul percorso del raggio tra lo specchio mobile e la scala, possiamo aumentare notevolmente l'angolo di deviazione visibile sulla scala; processi simili sono stati proposti da Piltschikoff, Julius, Geiger e altri. Wolkmann lo ha esaminato criticamente e ha indicato anche altri metodi, dove si ricorre ad esempio all'interferenza, a seguito di una proposta avanzata altrove in tempi diversi; ma questi metodi non offrono alcun vantaggio essenziale rispetto al semplice metodo di deflessione dello specchio. Quando si vuole effettuare una misura precisa dell'angolo di rotazione secondo il metodo Poggendorf, è necessario introdurre tutta una serie di correzioni, il cui studio approfondito si deve a F. Kohlrausch. J. Carpentier ha costruito una scala trasparente (fig. 395) che rende molto semplice l'osservazione degli strumenti a specchio; la loro installazione e regolazione è così facile e l'uso così conveniente, che si è diffuso rapidamente in tutti i laboratori e ha sostituito, quasi completamente, i vecchi modelli di scale a riflessione. Può essere utilizzato con qualsiasi fonte di luce, come una lampada a incandescenza, un bruciatore a gas, una lampada da appartamento, una normale candela e consente, nella maggior parte dei casi, di utilizzare

anche la luce del giorno. La luce utilizzata viene raccolta e riflessa sullo specchio tramite un piccolo vetro rettangolare supportato da una montatura a doppia rotazione. L'osservazione per trasparenza ha il pregevole vantaggio di dare la possibilità di posizionare la scala direttamente davanti all'osservatore nel percorso dei raggi luminosi riflessi dallo specchio.



Da qualche tempo si registrano spesso le oscillazioni della parte mobile dei galvanometri. Nei dispositivi meno sensibili, una piuma fissata all'ago magnetico ne registra i movimenti su un cilindro rotante con velocità uniforme o su una striscia di carta animata con movimento uniforme. I galvanometri azionati direttamente da coppie termoelettriche in pirometria, a causa della loro debole forza direttrice, possono essere adatti alla registrazione solo se la penna di cui sono dotati non sfrega costantemente sulla carta; in un modello di pirometro registratore di puntamento stabilito da J. Carpentier, il meccanismo è dotato di un interruttore che periodicamente lancia corrente in un meccanismo che agisce sulla penna e ne produce la segnatura. Si può ottenere un diagramma continuo, utilizzando la forza elettromotrice di una coppia, aggiungendo ad essa un registratore elettrico Callendar (fig. 396). Questo dispositivo è costituito essenzialmente da un ponte di Wheatstone, un galvanometro Deprez-D'Arsonval, un cilindro registratore di tre movimenti di orologeria. Il cursore di contatto del ponte Wheatstone si muove automaticamente parallelamente, lungo il ponte, e i suoi movimenti in un verso o nell'altro, sono causati dalle deviazioni del galvanometro. Una volta raggiunto l'equilibrio, essendo tornato il telaio del galvanometro nella sua posizione normale, il cursore rimane fermo; una penna a inchiostro, montata sul carrello del cursore, traccia la posizione di equilibrio sul cilindro registratore. Nei galvanometri molto sensibili, il pennello luminoso riflesso dallo specchio iscrive il suo percorso su un foglio di carta sensibile in movimento; esempi di registrazione fotografica dei movimenti dei galvanometri sono stati forniti da Schering e Zeissig, Diesselhorst, Schmidt e altri.

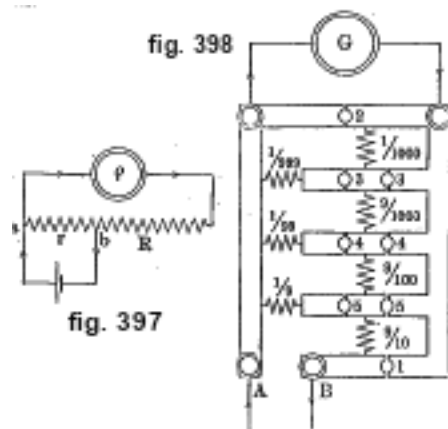


fig. 396

Per ridurre la sensibilità dei galvanometri, si utilizzano degli shunt; la resistenza  $r$  di uno shunt, che rende  $n$  volte più piccola la sensibilità di un galvanometro a resistenza  $\rho$ , è uguale a  $r = \frac{\rho}{n-1}$ . Ayrton e Mather hanno proposto uno shunt universale, che si adatta a qualsiasi galvanometro; la figura 397 fa facilmente comprendere il principio di questo dispositivo. Il galvanometro  $p$  è chiuso su una resistenza  $R$  molto grande, alla cui parte  $ab$  è collegato un circuito che trasporta la corrente  $I$  da misurare. La corrente  $i$ , che attraversa il galvanometro, è, secondo la legge di Ohm, uguale a

$$i = I \frac{r}{R + \rho} = I \alpha r \quad (16.0.32)$$

che designa la resistenza della porzione di  $R$  che si trova tra i punti  $a$  e  $b$ . Dalla formula (30) segue che  $i$  è proporzionale a  $r$  e indipendente dalla resistenza  $\rho$  galvanometro; tuttavia il valore di  $\alpha$  varia a seconda del galvanometro; inoltre una variazione di  $r$  produce anche una variazione di  $I$ , che è tanto minore quanto  $R$  e  $r$  sono maggiori rispetto alla resistenza del resto del circuito. Uno shunt universale di questo tipo può essere facilmente realizzato mediante una qualsiasi scatola di resistori di grandi dimensioni, da cui sono stati rimossi tutte gli spinotti e nella quale la corrente viene immessa attraverso i due terminali dello shunt. Se si vuole che la resistenza totale del circuito non cambi, al variare della sensibilità del galvanometro, si può utilizzare lo shunt d'Armagnat, mostrato in figura 398.



Qui la corrente passa attraverso i terminali A e B; quando si posiziona la caviglia 1, la corrente va direttamente al galvanometro; se si posiziona la 2, la corrente viene chiusa all'esterno del galvanometro. In figura sono indicate le resistenze comprese all'interno dello shunt, espresse come frazioni della resistenza del galvanometro. Come si può vedere, si immette nel galvanometro 0,001 di corrente con 3 e 3, 0,01 fissando 4 e 4, 0,1 fissando 5 e 5 ecc.; ci si accorge facilmente che la resistenza totale tra A e B rimane sempre la stessa e uguale alla resistenza del galvanometro.

Nello shuntaggio di un galvanometro a bobina mobile, non bisogna perdere di vista il fatto che contemporaneamente al variare della resistenza su cui è chiuso il galvanometro, cambia lo smorzamento di quest'ultimo. Wolkmann ha costruito uno speciale shunt per galvanometro a bobina mobile, in cui non solo la resistenza totale del circuito rimane costante, ma anche la resistenza sulla quale è chiusa la bobina del galvanometro.

Nell'uso comune dei galvanometri sensibili, gli angoli di deviazione ottenuti sono così piccoli che da poter considerare l'intensità  $I$  della corrente proporzionale all'angolo di deviazione  $\varphi$  e porre  $I = \varphi/s$ . Per un angolo di deviazione maggiore, si ha  $I = F(\varphi)/s$  dove  $F(\varphi)$  è una funzione complicata, dipendente dalla forma della bobina del galvanometro, dalla disposizione e dimensione dei magneti, ecc.; viene determinata empiricamente, tarando il galvanometro mediante differenze di potenziale note. Entro piccoli limiti di  $\varphi$  si può porre, con sufficiente approssimazione,

$$F(\varphi) = \varphi (1 + \mu \varphi^2)$$

dove  $\mu$  è un coefficiente dedotto dalle misure.

Indicazioni più o meno dettagliate relative alla galvanometria le troveremo, oltre agli autori da noi citati (Du Bois e Rubens, Jäger, in particolare), in alcune memorie di Ayrton, Mather e Sumpner e in un lavoro di Descoudres; molti galvanometri moderni sono stati descritti nella monografia di Hausbath, *Die Galvanometer*, Lipsia 1909.

### 3. Galvanometro balistico

Nelle misure elettriche, si si tratta spesso con correnti di brevissima durata, la cui intensità varia continuamente durante la loro esistenza, salendo rapidamente da zero ad un certo massimo, per poi scendere rapidamente a zero; tale è il carattere, ad esempio, delle correnti che si ottengono nella scarica di un condensatore, in certi fenomeni di induzione, ecc. Molto spesso non è necessario conoscere la legge di variazione di  $i$  col tempo, ma è sufficiente conoscere la quantità totale di elettricità  $Q$ , che è fluita nell'intervallo  $\tau$  di esistenza della corrente, cioè

$$Q = \int_0^{\tau} i dt \quad (16.0.33)$$

Per misurare  $Q$  si può, come vedremo, inviare la corrente considerata nell'avvolgimento di un galvanometro, il cui periodo di oscillazione  $T$  è abbastanza grande da poterlo considerare infinitamente piccolo. Dal valore dell'angolo della prima deviazione del galvanometro sotto l'impulso impartitogli dalla corrente istantanea si deduce poi la quantità di elettricità  $Q$ . Per ottenere una durata di oscillazione sufficientemente lunga è necessario utilizzare galvanometri con momento d'inerzia  $K$  della parte mobile elevato; se, come solitamente accade nei galvanometri sensibili, il valore di  $K$  non è sufficientemente grande, lo si aumenta appesantendo la parte mobile con un piccolo peso aggiuntivo, distribuito simmetricamente rispetto all'asse di rotazione. I galvanometri destinati a misure di questo tipo sono chiamati *galvanometri balistici*.

Supponiamo che nell'avvolgimento di un galvanometro balistico senza smorzamento venga introdotta una corrente istantanea, di periodo di oscillazione  $T$  e costante dinamica  $q$ . Una corrente di intensità  $i$  produce, in un tale galvanometro, un momento di rotazione  $qi$ ; quando la corrente  $i$  passata durante l'intervallo di tempo  $dt$ , l'impulso di rotazione è uguale a  $qidt$ , e di conseguenza l'impulso totale per l'intervallo  $\tau$  della corrente è uguale a  $q \int_0^{\tau} i dt = qQ$ . Uguagliando questo impulso totale con il prodotto del momento d'inerzia  $K$  per la velocità di rotazione  $d\alpha/dt$ , dove  $\alpha$  indica l'angolo di rotazione, si ha

$$K \frac{d\alpha}{dt} = qQ \quad \text{oppure} \quad Q = \frac{1}{q} K v_0 \quad (16.0.34)$$

essendo  $v_0$  la velocità assunta dal sistema mobile sotto l'impulso della corrente; si suppone che all'istante  $t = 0$  si ha anche  $\alpha = 0$ , cioè che il galvanometro era a riposo. Per determinare  $v_0$  si può procedere nel modo seguente: l'energia cinematica acquisita dal sistema mobile è  $\frac{1}{2} K v^2$  e deve essere uguale al lavoro totale compiuto dal sistema mobile contro la forza direttrice  $D$ . Se il lavoro elementare, necessario per far ruotare il sistema dell'angolo  $\alpha$ , è uguale a  $D\varphi(\alpha) d\alpha$ , la funzione  $\varphi(\alpha)$  dipendente dal carattere che assume la causa che tende a riportare il sistema nella posizione di equilibrio, il lavoro totale, nella rotazione del sistema dell'angolo massimo di deviazione  $\alpha_1$ , sarà  $D \int_0^{\alpha_1} \varphi(\alpha) d\alpha = DF(\alpha_1)$ . Si ha quindi

$$\frac{1}{2} K v_0^2 DF(\alpha_1) \quad \text{oppure} \quad v_0 = \sqrt{2F(\alpha_1)} \cdot \sqrt{\frac{D}{K}} \quad (16.0.35)$$

Inserendo questo valore di  $v_0$  nella (32), si ottiene

$$Q = \frac{1}{q} \sqrt{K} \cdot \sqrt{D} \cdot \sqrt{2F(\alpha_1)} \quad (16.0.36)$$

Se si introduce nella (32,b) il valore di  $\sqrt{K}$  dedotto dalla relazione

$$T = \pi \sqrt{\frac{K}{D}}$$

e si nota che si ha, dalla (23),  $S = \frac{q}{D}$ , viene

$$Q = \frac{T}{\pi} \frac{1}{S} \sqrt{2F(\alpha_1)} \quad (16.0.37)$$

In un galvanometro non astatico, a magnete mobile, si ha  $\varphi(\alpha) = \sin \alpha$  e  $F(\alpha_1) = 2 \sin^2 \frac{\alpha_1}{2}$ ; di conseguenza

$$Q = \frac{T}{\pi} \frac{1}{S} 2 \sin^2 \frac{\alpha_1}{2} \quad (16.0.38)$$

In un galvanometro non astatico, a bobina mobile, si ha  $\varphi(\alpha) = \alpha$  e  $F(\alpha_1) = \frac{\alpha_1^2}{2}$ ; di conseguenza

$$Q = \frac{T}{\pi} \frac{1}{S} \alpha_1 \quad (16.0.39)$$

Per piccoli valori di  $\alpha_1$ , le formule (32,d) e (32,e) assumono per i due tipi di galvanometro, la formula generale

$$Q = \frac{T}{\pi} \frac{1}{S} \alpha_1 \quad (16.0.40)$$

Indicando con  $I_0$  l'intensità di una corrente costante, che darebbe nel galvanometro considerato la stessa deviazione costante  $\alpha_1$ , si può, mediante la (12), e la (23), esprimere  $Q$  con la seguente formula estremamente semplice

$$Q = I_0 \frac{T}{\pi} \quad (16.0.41)$$

Nei galvanometri astatici non ammortizzati,  $\varphi(\alpha)$  assume una forma più complessa; questo caso è stato considerato da Wilson per quanto riguarda il pendolo balistico.

Quando la scarica della quantità di energia elettrica  $Q$  avviene regolarmente  $N$  volte al secondo nel galvanometro balistico, ciò equivale al passaggio di una corrente  $I = QN$  nel galvanometro, la quale dà una deviazione costante  $\alpha = SI = SQN$ , da cui

$$Q = \frac{\alpha}{NS} \quad (16.0.42)$$

Se il galvanometro è dotato di ammortizzatore, si devono considerare ancora tre casi diversi: quello delle oscillazioni smorzate, per  $p < c$ ; quello del movimento aperiodico, per  $p > c$ , e il caso di transizione  $p = c$ . Nel primo caso ( $p < c$ ), la dipendenza tra  $v_0$  e  $\alpha_1$  è data dalla formula (7-69,e), che si riduce facilmente alla forma

$$v_0 = \alpha_1 \frac{\pi}{T} e^{\frac{\lambda}{\pi} \arctan \frac{\pi}{\lambda}} \quad (16.0.43)$$

Portando la (33,a) nella (32) e tenendo conto della relazione  $T = \pi \sqrt{\frac{K}{D}}$ , si trova

$$Q = \frac{T}{\pi} \frac{1}{S} \cdot e^{\frac{\lambda}{\pi} \arctan \frac{\pi}{\lambda}} \alpha_1 \quad (16.0.44)$$

Esattamente allo stesso modo, servendosi della (7-78,c), si ha, per il caso di transizione, che è il più interessante,

$$Q = \frac{1}{S} \cdot \frac{T}{\pi} e \alpha_1 \quad (16.0.45)$$



dove  $e$  è la base dei logaritmi naturali. Il caso  $p > c$  presenta un interesse minore; si può introdurre l'espressione di  $Q$  mediante la (7-74,c).

Il fattore  $e^{\frac{\lambda}{\pi} \arctan \frac{\pi}{\lambda}}$  nella (33,b) è, per piccoli valori di  $\lambda$ , vicino a  $e^{\frac{\lambda}{2}}$  o  $\sqrt{k}$ , indicando con  $k$  il rapporto tra i valori assoluti di due ampiezze di oscillazione successive, cioè ponendo  $k = \alpha_n / \alpha_{n+1}$ ; se si osservano  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  ad esempio, si può esprimere il fattore suddetto con  $\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^{1/4}$ . Si può ancora, più esattamente e entro limiti più ampi, esprimere questo fattore con  $1 + \lambda/2$ ; così, come per  $\lambda = 1$  ( $k = 2, 7$ ), la differenza tra il valore esatto di questo fattore e il valore di  $1 + \lambda/2$  è inferiore a un centesimo. Con il crescere di  $\lambda$ ,  $\arctan \frac{\pi}{\lambda}$  si avvicina al valore  $\frac{\pi}{\lambda}$  e, l'intero fattore al valore  $e$ .

Le formule precedenti dalla (33) alla (33,c) presuppongono che la durata della corrente sia infinitamente piccola rispetto alla durata di oscillazione del galvanometro; quando così non è la dipendenza tra  $Q$  e la deviazione del galvanometro è molto più complicata; Dorn, Diesselhorst e Weiss hanno studiato approfonditamente quest'ultimo caso.

Quando lo scostamento prodotto dal passaggio della quantità di elettricità  $Q$  è molto piccolo e quindi difficilmente misurabile, si può ripetere la scarica  $Q$  nel galvanometro in istanti scelti a piacere e, per ottenere una misura più precisa di  $Q$ , si può ricorrere al metodo della moltiplicazione di W. Weber. Quando l'ago del galvanometro ha subito il primo impulso, si aspetta che, ritornando dal massimo della deviazione, raggiunga nuovamente la posizione di equilibrio, e in questo istante gli si comunica un nuovo impulso, della stessa grandezza del primo, ma di verso contrario; al successivo passaggio per la posizione di equilibrio, gli si imprime nuovamente un impulso nello stesso verso del primo, ecc. Se il galvanometro è provvisto di ammortizzatore e se di conseguenza l'ago compie oscillazioni smorzate, raggiunge dopo poco tempo deviazioni massime costanti; quanto più energico è lo smorzamento, tanto più velocemente viene raggiunta questa deviazione limite. Designando con  $\alpha_m$  il semi angolo tra le posizioni estreme dell'ago per la deviazione massima e con  $\alpha_0$  la deviazione, corrispondente ad un singolo impulso, che lo stesso galvanometro darebbe, lo studio teorico del metodo della moltiplicazione mostra che si ha

$$\frac{\alpha_m}{\alpha_0} = \frac{e^\lambda}{e^{\lambda-1}} e^{-\frac{\lambda}{\pi} \arctan \frac{\pi}{\lambda}} \quad (16.0.46)$$

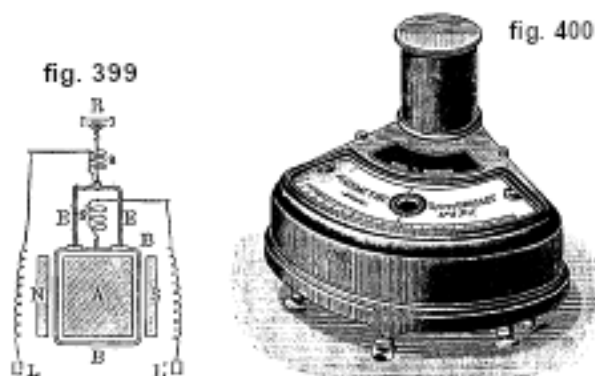
Nell'utilizzo di questo metodo, Dorn ha considerato il grado di influenza degli impulsi intempestivi e la loro notevole durata; Guillet ha descritto un commutatore, che invia automaticamente correnti di verso opportuno nel galvanometro, negli istanti in cui l'ago passa attraverso la sua posizione di equilibrio. W. Weber ha proposto anche, oltre al metodo della moltiplicazione, un altro metodo per mettere in movimento la parte mobile di un galvanometro balistico (metodo di reiezione); ma non ci soffermeremo su questo, perché, nei moderni galvanometri balistici sensibili, entrambi i metodi hanno perso molto del loro interesse.

Come galvanometro balistico, è possibile utilizzare sia un galvanometro a magnete mobile che un galvanometro a bobina mobile. Diesselhorst, che ha considerato i galvanometri di quest'ultimo tipo, ha mostrato che, per questi, il caso di transizione dell'aperiodicità è il più conveniente. Patterson, Stewart, Peirce e Zeleny hanno studiato la stessa questione; Peirce ha considerato anche il caso interessante in cui lo smorzamento, siccome può verificarsi uno smorzamento da parte dell'aria, non è proporzionale alla velocità del sistema in movimento.

Nei galvanometri balistici è necessario determinare sperimentalmente il fattore  $T/\pi s$ , che entra nella formula (33,c). A tale scopo si invia nel galvanometro o la scarica di un condensatore di capacità nota  $C$ , caricato con una determinata differenza di potenziale  $V$  ( $Q = CV$ ), oppure l'impulso di una corrente di induzione, prodotta nell'avvolgimento secondario di una bobina nota, quando la corrente primaria è aperta; Il signor Wien ha mostrato che è conveniente munirsi di una specifica bobina di autoinduzione. Notiamo inoltre che si può anche, con il galvanometro balistico, utilizzare degli shunt per ridurre la sensibilità; l'autoinduzione di questi shunt non ha alcun ruolo, perché le leggi di Kirchhoff si applicano sia a  $\int idt$  che alle correnti costanti.

Un galvanometro balistico dal comodo telaio mobile, che può trovare uso frequente, è il flussimetro di Grassot, appositamente progettato per misurare l'intensità dei flussi magnetici. Questo interessante strumento (fig. 399) è costituito da un galvanometro, il cui telaio mobile BB è sospeso a un filo di bozzolo così sottile che la forza direttrice è praticamente nulla e la durata di oscillazione in circuito aperto, prossima al minuto; la corrente viene introdotta nella bobina e ne esce per mezzo di sottili molle d'argento  $s$  e  $s'$ ; per le resistenze, non troppo grandi (meno di 500 – 1000 ohm), i movimenti della bobina sono aperiodici, e per resistenze basse (poche decine di ohm), la bobina ritorna molto lentamente nella posizione di equilibrio. La bobina è dotata di un ago, che si muove su una scala graduata, e di uno specchio che consente l'utilizzo del metodo di lettura Poggendorf mediante un cannocchiale. Quando la bobina viene chiusa su una bassa resistenza e deviata da una corrente di breve durata, grazie alla prima piccola forza direttrice e a un forte smorzamento dello strumento, rimane per tanto tempo nella posizione di prima deviazione, che si può leggere molto comodamente; per riportare velocemente la bobina nella posizione di equilibrio si può dare ad essa un impulso in senso contrario. La sensibilità del flussometro è molto elevata: 1 mm della scala posta a distanza 1 m corrisponde a circa  $10^{-7}$  coulomb. La Figura 400 mostra l'aspetto esterno di questo dispositivo.

Indicheremo più avanti come si usa il flussimetro per misurare l'intensità dei campi magnetici. W. Mitkewitsch si è occupato della teoria del flussimetro e A. Korolkoff delle sue varie applicazioni.



## 4. Misura delle differenze di potenziale

Per la misura dei potenziali, si utilizzano le seguenti unità: A. Unità elettrostatica assoluta di potenziale, definita, secondo la legge di Coulomb, dalle azioni ponderomotrici di due cariche l'una sull'altra; A'. Unità elettromagnetica assoluta di potenziale,  $3 \cdot 10^{10}$  volte più piccola dell'unità elettrostatica assoluta; viene definita a partire dal fenomeno dell'induzione, tanto che nella sua definizione entra la nozione di intensità del campo magnetico;  $10^8$  unità el. mag. assolute di potenziale =  $\frac{1}{3} \cdot 10^{-2}$  unità el. st. assoluta rappresenta l'unità pratica del potenziale, il volt; B. un volt internazionale, unità pratica che nasce dalla legge di Ohm e si basa sulla definizione dell'ampere e dell'ohm; C. un volt, unità pratica risultante dalla differenza di potenziale di un elemento normale scelto convenzionalmente, ed espressa in volt.

Tutte queste unità devono per loro natura differire leggermente l'una dall'altra. Le unità A e A' sono definite teoricamente: si può effettuare solo una misura reale del potenziale nelle unità A e dedurne il valore corrispondente nelle unità A'. La misura del potenziale nelle unità B si basa sui valori convenzionalmente adottati e fissati per legge per gli ampere e ohm internazionali, ed il risultato della misura si ottiene in volt internazionali anch'essi convenzionali e resi legali; si suppone inoltre che l'intensità di corrente venga determinata con un voltmetro, ma non con un elettrodinamometro, che darebbe l'intensità di corrente in ampere assoluti e non in

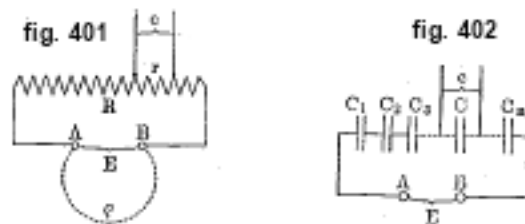
ampere convenzionali. Una misura di potenziale in unità  $C$  si riduce a un confronto tra la differenza di potenziale cercata e il campione di forza elettromotrice, l'elemento normale, la forza elettromotrice del campione espressa in volt convenzionalmente adottata, secondo misure effettuate accuratamente nell'unità  $B$ . Se si potesse misurare con assoluta precisione la stessa differenza di potenziale invariabile nelle varie unità sopra menzionate, si otterrebbero valori numerici diversi; ma, poiché il grado di precisione delle misure ordinarie è molto inferiore a quello delle misure estremamente accurate con l'aiuto delle quali sono state determinate le grandezze elettriche fondamentali fissate dalla legislazione, tale differenza nella pratica non esiste; tuttavia, in ogni misura precisa, è necessario avere un resoconto chiaro delle unità in cui è stata effettuata la misurazione.

Nella misura delle differenze di potenziale, soprattutto quando sono coinvolte grandi differenze di potenziale, spesso si deve sovente dividere la quantità da misurare. A questo scopo, si collegano i punti  $A$  e  $B$  (fig. 401), per i quali si vuole misurare la differenza di potenziale  $E$ , mediante una grande resistenza  $R$ , e si misura la differenza di potenziale  $e$  tra due punti qualsiasi di  $R$ , tra i quali è interposta la resistenza  $r$ . Si ha quindi

$$R = \frac{R}{r}e \quad (16.0.1)$$

Si suppone qui che l'introduzione di  $R$  tra  $A$  e  $B$  non modifichi la differenza di potenziale  $E$ , il che è tanto più corretto in quanto  $R$  è più grande della resistenza  $\rho$  per tutto il resto del circuito che collega  $A$  e  $B$ . È quindi auspicabile che  $R$  sia la più grande possibile; per il frazionamento di differenze di potenziale molto grandi, E. Voigt ha utilizzato per  $R$  aste di legno secco (acero) lunghe  $120\text{ cm}$  e del diametro di  $7\text{ mm}$ , aventi una resistenza di circa  $10^4$  megaohm. La suddivisione delle differenze di potenziale mediante condensatori (fig. 402) è ancora più perfetta, dal punto di vista teorico, nelle misure elettrometriche  $A$ ; quando colleghiamo i punti  $A$  e  $B$  con una serie di condensatori posti uno dopo l'altro, le cui capacità sono  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , e misuriamo la differenza di potenziale  $e$  sulle armature di uno dei condensatori di capacità  $C$ , la differenza potenziale totale  $E$  tra  $A$  e  $B$  è uguale a

$$E = Ce \sum_i \frac{1}{C_m} \quad (16.0.2)$$



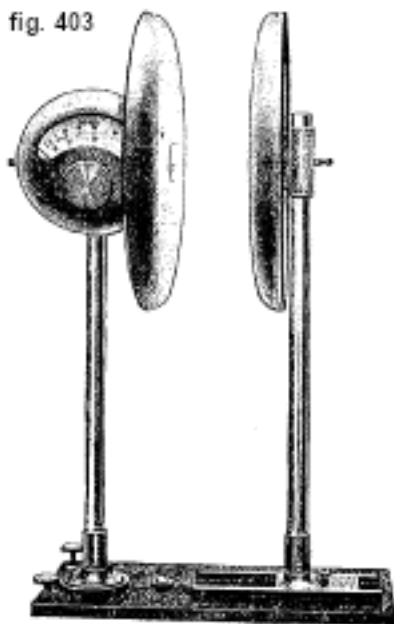
Nella misura elettromeccanica di differenze di potenziale molto piccole tra i terminali di generatori di corrente, è stato talvolta applicato il principio della moltiplicazione della differenza di potenziale desiderata. R. Kohlrausch carica a questo scopo, con la differenza di potenziale  $E$  desiderata, un condensatore ad aria collegato ad un elettrometro; avendo poi allontanato il condensatore della sorgente di differenza di potenziale, allontana le armature del condensatore tra loro; una riduzione della capacità del condensatore da  $C$  a  $C' < C$  produce un aumento della differenza di potenziale tra le armature, che diventa  $nE$ ; il fattore  $n$  da determinare empiricamente; supponendo  $n = C/C'$ , non si può determinare questo fattore mediante il calcolo, perché qui interviene la capacità dell'elettrometro, che varia con la posizione della parte mobile. I moltiplicatori di potenziale proposti da W. Thomson e Hallwachs sono sostanzialmente solo

miglioramenti ulteriori alla realizzazione dello stesso principio. Particolarmente interessante è il moltiplicatore costruito da Einstein su idea di Habicht. In questo dispositivo il potenziale è aumentato successivamente in sei riprese e raggiunge così il valore 360000. Grazie a questo enorme coefficiente di moltiplicazione si possono osservare e misurare, su un comune elettroscopio calibrato, potenziali dell'ordine dei diecimillesimi di volt.

Considereremo i metodi di misura delle differenze di potenziale nell'ordine indicato all'inizio di questo paragrafo.

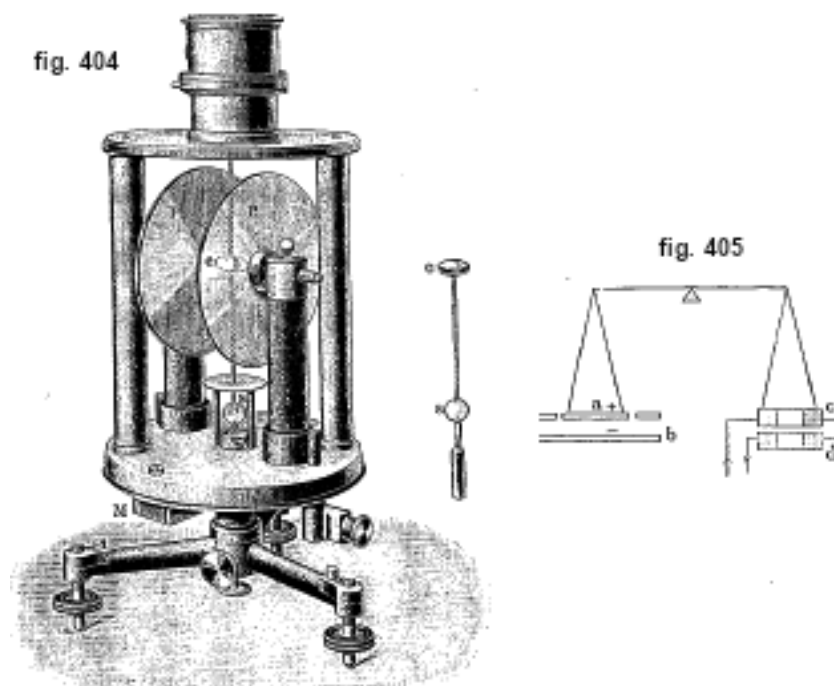
A. MISURA ELETTROMETRICA DELLE DIFFERENZE DI POTENZIALE. Per misurare le differenze di potenziale nelle unità elettriche. st. assolute, si utilizzano elettrometri assoluti. La maggior parte degli elettrometri assoluti esistenti sono solo varianti dell'elettrometro assoluto di W. Thomson; tali sono gli elettrometri di Kirchhoff (questo descritto da Quincke), di Abraham e Lemoine, in cui l'attrazione di una lamina mobile, sospesa ad uno dei bracci di una bilancia è equilibrata da pesi posti sul piatto dell'altro braccio; lo strumento di Abraham e Lemoine può misurare differenze di potenziale fino a 40000 volt, con un errore che non supera lo 0,1%. Dobbiamo citare anche l'elettrometro assoluto sensibile di Fabry e Perot, nel quale lo spostamento di una lastra di vetro mobile, semiargentata sulla faccia inferiore e sospesa a tre molle leggere, è determinato dallo spostamento delle frange di interferenza, che si formano tra la faccia inferiore di questa piastra e la faccia superiore di una piastra fissa. Usando questo apparato, Fabry e Perot hanno misurato direttamente la forza elettromotrice del normale elemento Clark a 0° e lo hanno trovato uguale a  $484,51 \cdot 10^{-5}$  unità el. st. assolute di potenziale. Misurando contemporaneamente questa grandezza in unità B, essi hanno ottenuto, per il suo valore a 0°, 1,4522 volt internazionali; ciò risulta immediatamente, per il rapporto  $v$  tra le unità él. st. assolute di potenziale e il volt internazionale, il valore  $v = \frac{1,4522}{484,51 \cdot 10^{-5}} = 299,73$ . Abraham e Villard (1911) hanno recentemente fatto costruire a J. Carpentier un voltmetro elettrostatico destinato a misurare tensioni molto elevate, da 10000 volt a circa 200000, in corrente continua o alternata. Esso comprende essenzialmente uno strumento di misura racchiuso in un involucro metallico arrotondato provvisto di un pistone mobile a superficie sostanzialmente sferica, i cui piccoli movimenti amplificati producono la deviazione dell'indice. Attorno a questo pistone, costituente l'anello di guardia, è posta una piastra metallica di grosso diametro (fig. 403). L'alloggiamento dell'apparecchio e la sua piastra sono collegati tramite una scheda e un cordone ad uno dei poli della sorgente. Di fronte al pistone, parallelamente alla prima piastra, è invece posta una seconda piastra metallica isolata, la cui distanza può essere variata a piacere. Questa piastra è collegata al secondo polo e ha lo scopo di esercitare una forza di attrazione sul pistone, in funzione della tensione da misurare. Nel modello destinato a tensioni superiori a 50000 volt, due lunghe colonne di vetro fissate sulla stessa base portano, l'una l'alloggiamento del dispositivo e la sua piastra, l'altra il secondo piatto mobile. Quest'ultimo è sigillato in un piedino scorrevole, recante una linea di riferimento, che viene fissata in base alla sensibilità che si vuole ottenere rispetto ai corrispondenti tratti presenti sulla base.

fig. 403



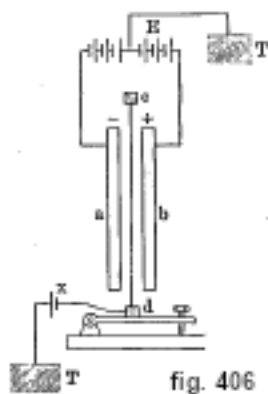
L'elettrometro assoluto di Ebert e Hoffmann, destinato alla misura di potenziali molto elevati, si basa su un altro principio. In questo dispositivo (fig. 404), un piccolo ellissoide  $e$  di alluminio è sospeso a due fili tra le piastre cariche  $P, P$  di un condensatore ad aria, in modo che il suo asse maggiore formi con la direzione delle linee di forza del campo elettrico un angolo di  $45^\circ$ . Se l'ellissoide  $e$  è carico, ruota attorcigliando i fili di sospensione; l'angolo di rotazione si legge utilizzando lo specchietto  $s$ . La piccola asta a cui sono attaccati  $e$  e  $s$  termina inferiormente con un cilindro di rame, immerso nello spazio interpolare di un potente magnete d'acciaio; questo è nascosto nella base dello strumento e serve da ammortizzatore. Poiché le forze agenti sull'ellissoide conduttore carico possono essere calcolate teoricamente, posto in un campo elettrico uniforme, lo strumento descritto può fungere da elettrometro assoluto.

Si devono ancora annoverare tra gli elettrometri assoluti i dispositivi che realizzano un'idea dovuta a Cremec; l'azione reciproca delle parti caricate elettrostaticamente è bilanciata da un'attrazione elettrodinamica tra due bobine percorse dalla stessa corrente  $I$ . Lo schema di questi dispositivi è riportato in figura 405; quando la differenza di potenziale tra le parti  $a$  e  $b$  è uguale a  $V$ , la forza di attrazione tra queste parti è  $F_1 = mV^2$ ; d'altra parte, la forza di attrazione tra le bobine  $c$  e  $d$  è  $F_2 = nI^2$ . Se si aumenta  $I$ , in modo da stabilire l'equilibrio, si ha  $mV^2 = nI^2$  e  $V = \sqrt{\frac{n}{m}} I = kI$ . Per la misura di  $k$ , Cremec ha proposto, in un dispositivo in cui  $a$  e  $b$  hanno la forma di un cilindro cavo e di un cono, di equilibrare con lo strumento stesso la differenza di potenziale  $V_0$  ai terminali della batteria che produce la corrente delle bobine; essendo  $R$  la resistenza che si deve introdurre allo scopo nel circuito della batteria, e  $r$  la resistenza delle bobine, si ha  $V_0 = k \frac{V_0}{R+r}$ , da cui  $k = R + r$  e  $V = (R + r) I$ ; non bisogna perdere di vista che, in questo caso, si misura  $V$  non in unità  $A$ , ma in unità  $B$ . Müller, che utilizzava lo strumento di Cremec, ha determinato  $k$  misurando, mediante lo strumento, differenze di potenziale note. Sullo stesso principio si basa l'interessante elettrometro assoluto di A. Tschernyscheff, con il quale si possono misurare differenze di potenziale da 10000 a 180000 volt. In questo dispositivo le parti  $a$  e  $b$  sono costruite come nell'elettrometro di W. Thomson, in modo da poter calcolare il coefficiente  $m$ ; il coefficiente  $n$  è determinato dal confronto diretto della forza  $F_2$  con la forza di gravità, da cui si ottiene  $V$  in unità  $A$ .



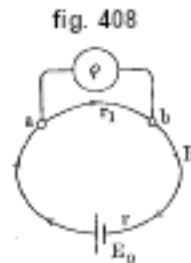
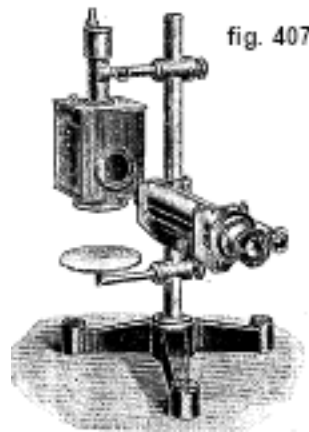
Qualsiasi elettrometro, in cui si misura la forza reciproca tra le parti cariche e per il quale si conosce relazione  $F = \alpha \varphi (V)$ , può essere utilizzato come strumento assoluto determinando il coefficiente  $\alpha$  mediante confronto con un elettrometro. Abbiamo già menzionato tutta una serie di tali elettrometri; citeremo anche quello di A. Heydweiller, successivamente perfezionato da Müller, che lo ha utilizzato per misurare differenze di potenziale fino a 100000 volt. Una teoria più generale degli elettrometri fu data da Pulgar e Wulf e da loro applicata all'elettrometro a quadranti; un lavoro di Scholl è dedicato alla questione praticamente importante della calibrazione di elettrometri di questo tipo.

Indicheremo qui anche alcune nuove forme di elettroscopi sensibili proposte di recente e che non sono stati finora descritte; Inizieremo con gli elettrometri a corda (più precisamente elettroscopi), nei quali, come nei galvanometri a corda, la parte mobile è un filo di quarzo argentato teso o un filo metallico finissimo. Hanno in comune il seguente principio: tra due piastre  $a$  e  $b$  (fig. 406) è teso un filo  $cd$  estremamente sottile e conduttore. Quando si porta  $a$  e  $b$  a potenziali uguali, ma di segno opposto, il filo si piega già sotto la carica più debole, attratto com'è da una delle piastre e respinto dall'altra; la freccia del filo viene osservata mediante un microscopio, dotato di oculare micrometrico. Con un tale strumento, del tutto analogo all'elettrometro a quadrante (le piastre  $a$  e  $b$  corrispondono ai quadranti, il filo all'ago dell'elettrometro), tutti i metodi di impiego, indicate a proposito dell'elettrometro a quadrante, sono ovviamente possibili. Gli elettrometri a corda hanno il vantaggio di avere una bassa capacità (da 5 a 15 cm) e un'elevata sensibilità; sono molto facili da usare.



Nell'elettrometro a corda di Cremer, costruito da Edelman per un potenziale del filo di 1500 volt, una differenza di potenziale di  $10^{-4}$  volt produce una freccia nel filo che, ingrandita 1000 volte al microscopio, appare uguale a 1 mm. Dispositivi simili furono costruiti da Lutz, Laby e Jones.

Il rapido sviluppo della ricerca sulla radioattività e sulla ionizzazione dei gas ha richiesto elettroscopi sensibili e facili da usare e ha portato al miglioramento di questi dispositivi. Così, oltre agli elettroscopi a corda di cui abbiamo appena parlato, sono stati costruiti elettroscopi da Wulf, Wiechert, Elster e Geitel, in cui le tradizionali lamine d'oro sono sostituite da fili di quarzo resi conduttivi in superficie; i movimenti di questi fili vengono osservati anche al microscopio. Il vecchio elettroscopio a foglie d'oro ha ricevuto, nelle mani di Wilson, una nuova forma migliorata, dove il movimento delle foglie viene osservato al microscopio; La figura 407 riproduce l'aspetto esterno di questo comunissimo dispositivo.



**B. DETERMINAZIONE DELLE DIFFERENZE DI POTENZIALE USANDO LA LEGGE DI OHM.** Quando si collegano due punti  $a$  e  $b$ , tra i quali è mantenuta una differenza di potenziale uguale a  $e_0$ , mediante un galvanometro di resistenza  $\rho$ , e il galvanometro indica una corrente di intensità  $i$ , si ha, secondo la legge di Ohm,  $e_0 = i\rho$ , a condizione che la chiusura del galvanometro su  $a$  e  $b$  non modifichi il valore effettivo di  $e_0$ . Questo valore non varia, se  $\rho$  è molto grande rispetto alla resistenza delle altre parti del circuito che collegano  $a$  e  $b$ . Nel caso generale, quando i punti  $a$  e  $b$  (fig. 408) fanno parte di un circuito che contiene una sorgente di forza elettromotrice  $E$  e di resistenza interna  $r$ , la differenza di potenziale  $e_0$ , prima dell'introduzione del galvanometro, è uguale a

$$e_0 = \frac{Er_1}{R + r + r_1} \quad (16.0.3)$$

dove  $r_1$  indica la resistenza del circuito tra  $a$  e  $b$ ,  $R$  la resistenza della parte restante del circuito. Dopo l'introduzione del galvanometro, il valore di  $e_0$  diminuisce e diviene uguale a

$$e = \frac{Er_1}{(R + r) + \left(\frac{r_1}{\rho} + 1\right) + r_1} = e_0 \frac{R + r + r_1}{(R + r) + \left(\frac{r_1}{\rho} + 1\right) + r_1} \quad (16.0.4)$$

Come si vede da questa espressione,  $e$  è tanto più vicino a  $e_0$  quanto più  $\rho$  è maggiore rispetto a  $r_1$ . Quando lo si vuole determinare con un galvanometro, in realtà si ottiene  $e < e_0$  e, per avere il vero valore di  $e_0$ , si devono apportare correzioni al valore osservato oppure utilizzare un galvanometro con resistenza molto grande. Quando  $r_1 = \infty$ , si ha  $e_0 = E$  e  $e = E \frac{1}{\frac{r}{\rho} + 1}$ ; si ha inoltre  $R = 0$ , cioè se la sorgente è chiusa direttamente sul galvanometro, si ha

$$e = E \frac{1}{\frac{r}{\rho} + 1} \quad (16.0.5)$$

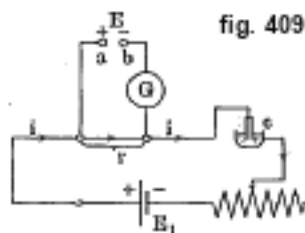
Prima dell'introduzione del principio di compensazione tutti i metodi di misura delle differenze di potenziale si sono basate sulle considerazioni precedenti, che scaturiscono dalla legge Ohm. Un galvanometro, graduato in unità di intensità di corrente, è stato collegato ai punti  $a$  e  $b$ , di cui si cercava la differenza di potenziale, e si calcolava  $e_0$  o  $E$ , utilizzando l'intensità di corrente osservata, con le formule precedenti. Se la resistenza interna  $r$  della sorgente o anche la resistenza totale  $r + R$  era incognita, si osservava, per la misura di  $E$  ( $r_1 = \infty$ ), da una proposizione di Ohm, le intensità di corrente  $i_1$  e  $i_2$  corrispondenti a due diverse resistenze  $R_1$  e  $R_2$ ; dalle formule  $i_1 = E(r + R_1 + \rho)$  e  $i_2 = E(r + R_2 + \rho)$ , si deduce allora

$$E = \frac{i_1 i_2}{i_2 - i_1} ((R_1 - R_2)) \quad (16.0.6)$$

È da notare che tutti i metodi per la determinazione di  $e_0$  ed  $E$ , basati sul ragionamento indicato, non possono dare risultati determinati se non nel caso in cui la forza elettromotrice  $E$  della sorgente non dipende dall'intensità della corrente che essa produce, cioè quando la sorgente (ad esempio la pila) è costante. Ma, in tutti gli elementi,  $E$  diminuisce più o meno all'aumentare dell'intensità della corrente fornita; il vero valore di  $E$ , relativo al caso in cui l'elemento non eroga, non è quindi del tutto determinabile nel modo considerato. Un primo grande progresso fu quindi fatto quando Poggendorff ha introdotto nel 1841 il metodo della compensazione, con l'aiuto del quale si può determinare con un galvanometro la differenza di potenziale tra due punti, differenza che non produce corrente. Il principio del metodo di compensazione è il seguente: (i punti  $a$  e  $b$ , di cui si tratta di determinare la differenza di potenziale  $E$ , ad esempio i terminali di un elemento) (fig. 409), sono collegati da un galvanometro sensibile alla parte  $r$  di un circuito, nel quale passa la corrente proveniente da una batteria ausiliaria  $E_1$ , essendo i collegamenti tali che, nella catena  $abr$ , le differenze di potenziale tra  $a$  e  $b$  e ai capi di  $r$  siano opposte. Si fa variare l'intensità  $i$  della corrente che attraversa  $r$  o la resistenza  $r$  di questo tratto, finché il galvanometro  $G$  non indica più alcuna corrente; in questo caso, la differenza di potenziale cercata  $E$  è uguale alla caduta di potenziale lungo il tratto di resistenza  $r$ , cioè si ha

$$E = ri$$

Comunemente, scelto un valore opportuno per  $r$ , si varia la quantità  $i$  della corrente introducendo resistenze nel circuito di  $E_1$ , finché non si annulla la corrente nel circuito  $E$ ; si misura l'intensità  $i$  utilizzando un preciso galvanometro  $A$ , tarato in ampere (ad esempio un milliamperometro del sistema Weston), un voltmetro ad argento ( $c$  in figura 409), un elettrodinamometro o un galvanometro delle tangenti. Se si conosce il valore di  $i$  in ampere legali, quello di  $r$  in ohm legali, si ottiene il valore di  $E$  in volt legali. Il metodo appena descritto è sicuramente il migliore per misurare le differenze di potenziale in unità B; è stato utilizzato in particolare in tutte le recenti misure della forza elettromotrice degli elementi normali. Lindeck e Rothe hanno fatto costruire presso Siemens e Halske uno speciale dispositivo di compensazione per determinare con il metodo sopra descritto la forza elettromotrice dei termoelementi destinati alla misura della temperatura.



C. CONFRONTO DELLE DIFFERENZE DI POTENZIALE. Prima di conoscere il metodo di compensazione, le forze elettromotrici venivano spesso confrontate utilizzando metodi semplici simili a quelli appena discussi (B). Ne indicheremo qui solo alcuni:



a) Se due elementi  $E_1$  e  $E_2$ , chiusi successivamente sullo stesso circuito di resistenza  $R$  e contenenti un galvanometro di resistenza  $\rho$ , danno le intensità di corrente  $i_1$  e  $i_2$ , si ha

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{i_1 (R + \rho + r_1)}{i_2 (R + \rho + r_2)}$$

dove  $r_1$  e  $r_2$  indicano le resistenze interne degli elementi; quando  $r_1$  e  $r_2$  sono molto piccole rispetto a  $R + \rho$ , si può porre  $\frac{E_1}{E_2} = \frac{i_1}{i_2}$ .

b) Un elemento  $E_1$  dà, nel circuito  $R_1 + \rho$ , l'intensità di corrente  $i$ ; si cerca il valore della resistenza  $R_2 + \rho$ , per la quale l'elemento  $E_2$  dà, nel circuito  $R_2 + \rho$ , la stessa intensità  $i$  di corrente; si ha allora

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{R_1 + \rho + r_1}{R_2 + \rho + r_2}$$

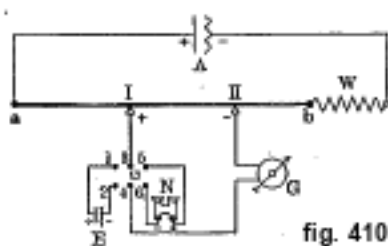
Le quantità  $r_1$  e  $r_2$  sono solitamente sconosciute; le si può trascurare, quando  $R + \rho$  è sufficientemente grande rispetto a queste resistenze.

c) Consideriamo ancora lo schema di figura 206; inseriamo un galvanometro sensibile nel ramo medio AB e scegliamo le resistenze  $R_1$  e  $R_2$  di due casse interposte rispettivamente nel ramo destro e in quello sinistro, in modo che per AB non passi corrente; allora si ha  $\frac{E_1}{E_2} = \frac{R_1 + r_1}{R_2 + r_2}$  (Poggendorff). Se  $R_1$  e  $R_2$  sono sufficientemente grandi rispetto a  $r_1$  e  $r_2$ , si può porre  $\frac{E_1}{E_2} = \frac{R_1}{R_2}$ .

Tutti questi metodi presentano lo stesso inconveniente: le forze elettromotrici delle sorgenti di corrente vengono misurate mentre queste sorgenti erogano; sono del tutto inapplicabili se una delle sorgenti è un elemento normale, perché non può essere chiuso con una piccola resistenza. È solo nella forma datagli da Bosscha e successivamente da Du Bois-Reymond e Clark che il metodo di compensazione, per il confronto delle forze elettromotrici, non presenta questo inconveniente. Si può vedere l'idea di questo metodo considerando la figura 410. Una sorgente di corrente ausiliaria A è chiusa da una resistenza (filo)  $ab$ , lungo la quale il potenziale scende da  $a$  a  $b$ ; lungo questo filo scorrono due contatti I e II, che, tramite un commutatore U, possono essere collegati a loro volta, dal galvanometro G, con ciascuno degli elementi E e N da confrontare (invece di un galvanometro, può anche essere utilizzato un elettrometro capillare); si è rappresentato, per uno di questi elementi, l'elemento normale di Weston. Quando uno degli elementi, ad esempio N, è stato inserito nel circuito (collegando i punti 3 e 5, 4 e 6), si cerca per quale distanza tra i contatti scorrevoli non c'è corrente in G; sia  $l$  cm questa distanza. Introdotto poi l'elemento E (collegando 1 con 3, 2 con 4), si cerca la nuova distanza tra i contatti, per la quale si ha sempre assenza di corrente in G. Se si indica con  $r$  la resistenza di 1 cm di filo  $ab$ , con  $i$  l'intensità della corrente fornita dalla sorgente A che attraversa questo filo, si ha

$$\frac{E}{N} = \frac{lri}{l'ri} = \frac{l}{l'}$$

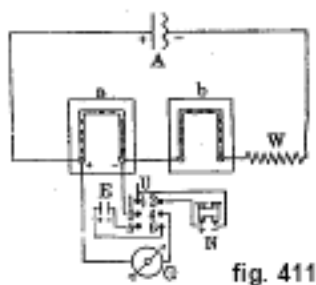
cioè, la determinazione del rapporto tra due forze elettromotrici si riduce alla misura del rapporto tra due resistenze o anche tra due lunghezze, e le forze elettromotrici da confrontare non danno un flusso di corrente durante la misura.



Tra le tante varianti del metodo di compensazione citeremo quello di Orloff, che consente la compensazione simultanea di più forze elettromotrici.

Bouty ha proposto di sostituire il filo di contatto scorrevole con due cassette di resistenze assolutamente identiche (fig. 411). Prima di iniziare la misura, si tolgono tutti gli spinotti dalla cassetta *a*, lasciando in posizione quelle della cassetta *b*; avendo inserito uno degli elementi, ad esempio *N*, si inizia a togliere degli spinotti in *b*, che si inseriscono nel posto vuoto corrispondente di *a*, finché il galvanometro *G* non indica più il passaggio di corrente; sia allora  $R_1$  la resistenza di *a*. Come si vede, in questo scambio di spinotti, la resistenza totale del circuito rimane uguale ad  $a + b$ , e quindi l'intensità di corrente non varia più; cambia solo il rapporto tra le resistenze *a* e *b*. Se si opera così anche con l'elemento *E*, si trova che non vi è corrente in *G*, quando la resistenza di *a* è uguale a  $R_2$ . Si ha pertanto

$$\frac{E}{N} = \frac{R_2}{R_1}$$



Il metodo di compensazione acquista particolare importanza quando, per ottenere una delle forze elettromotrici da confrontare, si utilizza un elemento normale, il cui valore in volt internazionali legali è stato esattamente determinato (ad esempio un elemento Weston = 1,0183 volt internazionale a 20°). In questo caso, si ottiene immediatamente la forza elettromotrice dell'elemento confrontato in volt internazionali. Poiché gli elementi normali si polarizzano rapidamente durante il passaggio della corrente, è necessario porre in serie all'elemento *N* una grande resistenza (qualche decina di migliaia di ohm), che viene lasciata nel circuito finché non viene trovata la resistenza di compensazione. Quando *G* non indica più corrente, si toglie la resistenza e si trova finalmente il valore della resistenza di compensazione.

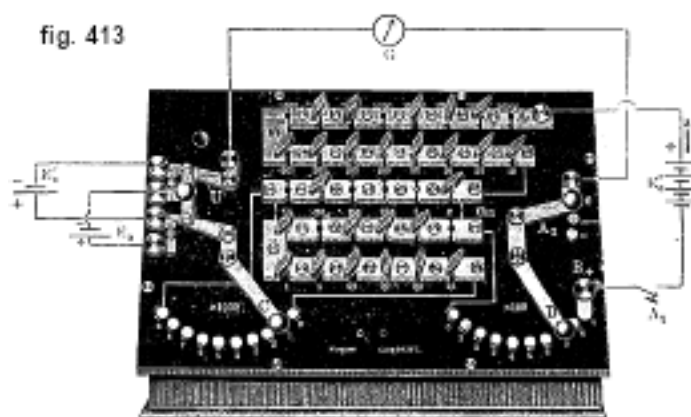
Anche il seguente metodo è molto conveniente. Se la forza elettromotrice dell'elemento normale è pari a  $N$  volt, si darà dapprima alla resistenza di *a* (fig. 411) il valore di circa  $1000N$  ohm; è allora necessario che, nel circuito compreso tra *a* e *b*, passi una corrente di  $10^{-3}$  A, affinché la caduta di potenziale lungo *a* compensi la forza elettromotrice *N*. Per mezzo di una resistenza *W* e di un amperometro inserito nel circuito di *A*, si porta il flusso di corrente in questo circuito il più vicino possibile a  $10^{-3}$  ampere. Chiudendo poi il commutatore *U* sull'elemento *N*, questo è già quasi completamente compensato ed è sufficiente una leggera variazione della resistenza *W* per ottenere una compensazione esatta. Inserito poi l'elemento *E* si cerca la resistenza  $R_2$  che lo compensa e si ha  $E = 10^{-3} \cdot R_2$  volt.



Il metodo di compensazione mediante l'elemento normale è così semplice, così conveniente e fornisce risultati così esatti che attualmente è generalmente adottato per la misura in unità

internazionali sia delle differenze di potenziale che delle intensità e resistenze di corrente. La Figura 412 rappresenta schematicamente diversi metodi di applicazione di questo metodo; si deve supporre che i conduttori  $m$  (+) e  $n$  (-) portino, nello schema di figura 410, ai spinotti 1 e 2 e, nello schema di figura 411, ai spinotti 6 e 5. La figura 412-I mostra come viene misurata la differenza di potenziale tra i punti  $a$  e  $b$  di un circuito percorso da corrente. Se la differenza di potenziale è troppo grande, affinché possa essere immediatamente confrontato con l'elemento normale, lo si divide come indicato in II e si misura una determinata frazione di questa differenza, ad esempio 0,1 oppure 0,01. Per misurare l'intensità di corrente (fig. 412-III), si confronta la differenza di potenziale ai capi di una resistenza  $r$  nota; (secondo l'intensità di corrente, si prende 1, 0,1 o 0,01 ohm) con l'elemento normale; si controlla e tara opportunamente in questo modo un amperometro  $A$  inserito nel circuito. Quando abbiamo una resistenza  $x$  da misurare (fig 412-IV), si inserisce nel circuito di corrente costante, in serie ad una resistenza  $r$  comune, e si misurano le differenze di potenziale  $e_1$  ed  $e_2$ , alle estremità di  $x$  e di  $r$ ; si ha allora  $x = r \frac{e_1}{e_2}$ .

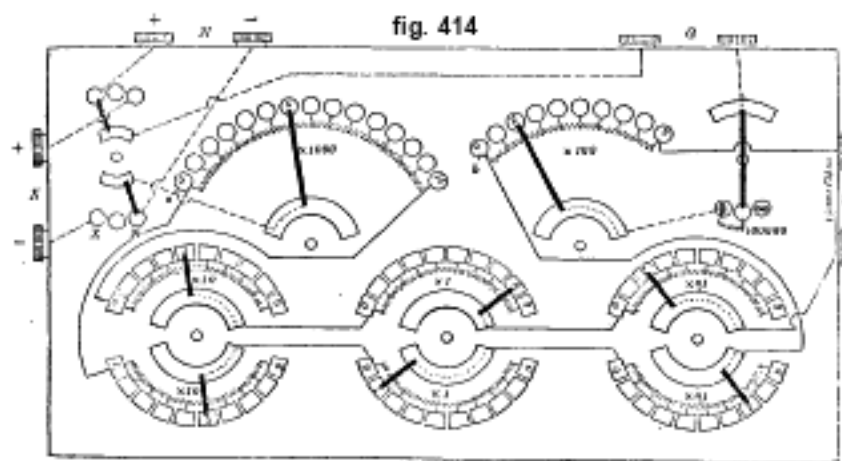
Sì è stati indotti, dal grande sviluppo e dalla rapida diffusione dei metodi di compensazione, a costruire speciali dispositivi di compensazione, che riuniscono in forma conveniente tutti gli elementi necessari per le misure. L'idea di questi dispositivi, che sono stati utilizzati per la prima volta in Inghilterra, si deve al Fleming; si chiamano *potenziometri*. La forma primitiva dello strumento di Feussner, costruito da Wolff, è mostrata nella figura 413. Una batteria ausiliaria  $E''_0$  è collegata tramite l'interruttore  $A$  a diverse resistenze in serie; quelle nelle file superiori vanno da 10 a 50000 ohm (in totale 101000 ohm), quelle nella fila centrale vanno da 2 a 50 ohm (in totale 970 ohm), quelle nelle file inferiori vanno da 2 a 50 ohm (in totale, 97 ohm) e da 0,1 a 1 ohm (in totale, 3 ohm). Inoltre, a sinistra e a destra si trovano due reostati a leva da  $9 \times 1000$  e  $9 \times 100$  ohm. Mediante un opportuno uso degli spinotti si può ottenere qualsiasi resistenza nelle prima, seconda e quinta fila, mentre la somma delle resistenze della terza e quarta fila rimane costante e uguale a 97 ohm, dovendo gli spinotti che si levano da una di queste file essere inseriti subito nei fori corrispondenti dell'altro. La resistenza totale inserita nel circuito di  $E_0''$  può quindi variare tra 9997 e 110000 ohm. Tra i reostati a leva  $C$  e  $D$  è posto un galvanometro e uno o l'altro dei due elementi da confrontare; ruotando le levette, trasportando gli spinotti della terza fila nella quarta o viceversa e rimuovendo quelli della quinta fila, si può, come mostrato in figura, dare alla parte di circuito compresa tra  $C$  e  $D$  qualsiasi resistenza da zero a 10000 ohm.



È vero che rimuovendo gli spinotti oltre la quinta fila si cambia la resistenza totale del circuito che chiude  $E_0$ , ma la resistenza totale di quella fila (3 ohm) è così bassa rispetto alla resistenza totale del circuito che si può trascurare questa variazione. La leva  $A_2$ , che chiude il circuito del galvanometro, può, all'inizio della misura, essere portata sul morsetto inferiore; si introduce allora una resistenza aggiuntiva di 100000 ohm, che protegge sia l'elemento normale che il galvanometro da una corrente troppo intensa. Quando si è trovato approssimativamente il valore della resistenza di compensazione, si riporta, per determinare più esattamente questa resistenza,

la levetta  $A_2$  sul morsetto O. Il commutatore U serve ad introdurre l'uno o l'altro dei due elementi da confrontare.

Nei nuovi dispositivi di compensazione di Frussner (fig. 414), la scomoda operazione di rimozione degli spinotti viene sostituita dall'inserimento e rimozione automatica di resistenze complementari, che mantengono costante la resistenza tra i terminali B e uguale a 14999,9 ohm. A tale scopo si utilizza una serie di 9 resistenze di 0, 1, 1 e 10 ohm, disposte a semicerchio. Levette doppie, spostandosi sulla metà inferiore dei reostati, introducono nel circuito del galvanometro una resistenza maggiore o minore e spostandosi contemporaneamente sulla metà superiore dei reostati tolgono resistenze della stessa dimensione nel circuito della batteria ausiliaria B. Si è rappresentato, nella figura 414, con tratto continuo, il circuito della batteria chiusa in B, con tratteggio quello del galvanometro G; a destra si vede l'interruttore, mediante il quale è possibile chiudere il circuito del galvanometro direttamente o tramite una resistenza di protezione da 100000 ohm. A sinistra si trova un interruttore che introduce nel circuito del galvanometro o l'elemento normale che si chiude in N, oppure la differenza di potenziale cercata che è posta in X.



Tra gli altri strumenti di compensazione, ricordiamo quelli di Raps (costruito da Siemens e Halske), di Hausrath, di Franke e di J. Carpentier. Il potenziometro di J. Carpentier (fig. 415) è costituito da due parti distinte: il potenziometro stesso e il reostato di regolazione. Queste due parti sono completamente separate, quindi nella manovra non è possibile fare confusione: una volta effettuata la regolazione, l'operatore deve solo utilizzare le levette che si trovano sulla parte anteriore del dispositivo e che corrispondono al circuito potenziometrico. Il circuito del potenziometro ha una resistenza costante di 20100 ohm ed è composto (fig. 416) da: 1° una bobina A o A' da 10000 ohm; 2° una serie di bobine di 1000 ohm B; 3° una serie di 11 bobine da 10 ohm C; 4° una serie di 10 bobine da 200 ohm b, in derivazione su due qualsiasi delle bobine vicine della serie B; 5° una serie di 10 bobine da 2 ohm c, in derivazione su due qualsiasi delle bobine vicine della serie C. Una serie di cinque commutatori a levetta permette di ottenere, con queste resistenze, l'intera scala potenziometrica. Il reostato di regolazione ha una resistenza totale di 22220 ohm; questo reostato è composto da quattro serie da 10 resistenze aventi ciascuna 2000, 200, 20 e 2 ohm. Una levetta K comanda la chiave del galvanometro; nella posizione di riposo il galvanometro è in cortocircuito; nella sua posizione centrale, il circuito del galvanometro è ben stabilito, ma attraverso una resistenza protettiva di 100000 ohm P; questa resistenza ausiliaria ha lo scopo di impedire il flusso della batteria campione, finché la regolazione del circuito di compensazione non è perfetta. Questa resistenza di protezione viene cortocircuitata e il galvanometro rimane solo in comunicazione, quando la levetta viene abbassata completamente nella sua terza posizione. Lo strumento è completato da un doppio commutatore a tre vie S che permette, senza modificare alcun collegamento, di posizionare il

circuito derivato, sia sui contatti E a cui è collegato il campione, sia sui contatti  $x$  e  $X$  ai quali sono collegate le forze elettromotrici da misurare.



fig. 415

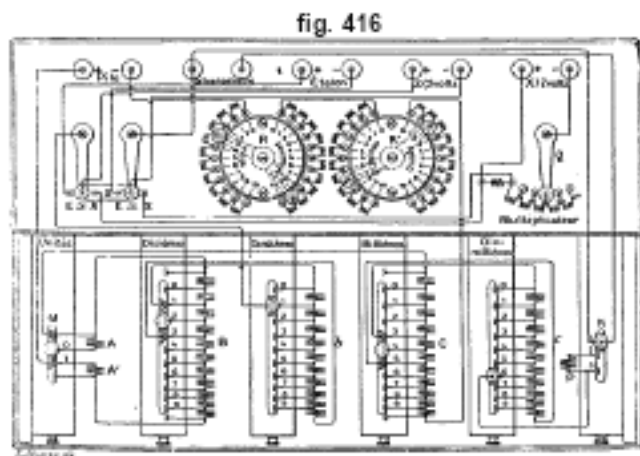


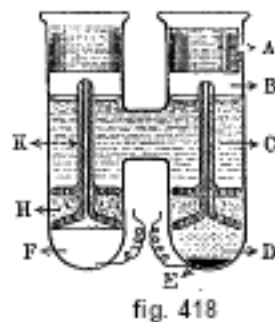
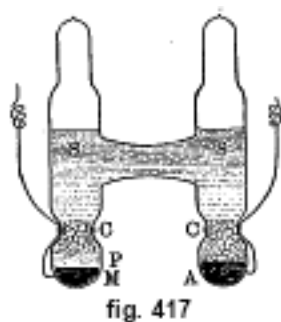
fig. 416

I terminali  $x$  sono utilizzati per le forze elettromotrici inferiori a 2 volt, i terminali  $X$  per quelle superiori; a tale scopo, il circuito corrispondente a  $X$  passa per un riduttore di potenziale  $Q$  in cui la resistenza totale ha un valore di 300000 ohm, e i cui poteri moltiplicatori sono 3 – 10 – 30 – 100 – 300. Per rendere questo potenziometro un dispositivo a lettura diretta è sufficiente far passare una corrente nota attraverso l'intero circuito; se questa corrente ha un'intensità di 0,0001 ampere, la differenza di potenziale ai capi della bobina  $A$  di 10000 ohm sarà di 1 volt e le differenze di potenziale corrispondenti a ciascuna delle divisioni della serie di resistenze  $BbCx$ ; saranno rispettivamente 0,1 – 0,01 – 0,001 – 0,0001 volt. Per effettuare questa regolazione, si posizionano ai terminali contrassegnati con  $E$  una batteria campione di forza elettromotrice nota: cioè 1,434 volt, e, utilizzando le levette, si inserisce questa cifra come se fosse una macchina calcolatrice. Ai terminali della "batteria" si collega una batteria ausiliaria da 2 a 4 volt; essendo questa batteria in opposizione alla batteria campione, la sua portata viene regolata mediante i reostati  $R$ ,  $R'$ , fino a bilanciare rigorosamente l'elemento campione, cioè fino a quando non si nota più alcuna deviazione del galvanometro quando si preme la chiave  $K$ . Essendo il dispositivo graduato, si sostituisce al campione, mediante l'interruttore  $S$ , la forza elettromotrice da misurare; se la forza elettromotrice è inferiore a 2 volt, si collega ai terminali  $x$ ; se è maggiore, ai terminali  $X$ . L'interruttore  $S$  è posto nella posizione corrispondente. È allora sufficiente azionare gli interruttori  $A$ ,  $B$ ,  $b$ ,  $C$ ,  $c$ , nel senso opportuno fino al raggiungimento del nuovo equilibrio del galvanometro, per ottenere la forza elettromotrice cercata con la semplice lettura delle cifre indicate sulle levette. Nel caso di una forza elettromotrice superiore a 2 volt, il riduttore di tensione  $Q$  consente di porre, ai capi del circuito del potenziometro, solo una frazione di questa forza elettromotrice inferiore a 2 volt; la posizione della levetta indica, in questo caso, il rapporto tra la frazione misurata e la forza elettromotrice totale; In queste condizioni, una volta stabilito l'equilibrio, la lettura effettuata sul potenziometro verrà moltiplicata per questo rapporto. Il potenziometro di J. Carpentier permette di misurare differenze di potenziale variabili da 0,0001 a 600 volt.

Dispositivi di compensazione a bassa resistenza, appositamente progettati per misurare differenze di potenziale molto piccole, sono stati costruiti da Lehfeldt, Harker, Diesselhorst e White. Feussner (1911), in un lavoro recente, ha descritto una nuova forma migliorata del suo dispositivo e fornito uno storico degli strumenti di compensazione.

Nel metodo di compensazione il ruolo principale è svolto dall'elemento normale, che oggi è divenuto, grazie al perfezionamento di questo metodo, uno degli strumenti fondamentali del fisico. Se si ricorda che il risultato di quasi tutte le misure precise recenti di intensità di corrente, differenza di potenziale, a volte anche resistenza, portano in definitiva alla forza elettromotrice dell'elemento normale, si comprendono gli sforzi considerevoli fatti e lo sforzo continuo del massimo perfezionamento possibile del campione della differenza di potenziale, e per determinare nel modo più esatto possibile, in termini internazionali, il valore della sua forza elettromotrice.

Tra gli elementi normali, oggi si utilizza quasi esclusivamente l'elemento al cadmio di Weston, soprattutto nella forma che presenta un eccesso di cristalli di  $CdSO^4$ . La figura 417 rappresenta la sezione di tale elemento, al quale solitamente viene data, su proposta di Lord Rayleigh, la forma di una H; M è il mercurio, P la pasta di  $Hg^2O^4$ , C i cristalli di  $CdSO^4$ , S la soluzione satura di  $CdSO^4$ , A l'amalgama di cadmio. Secondo una proposta di Smith, i tubi C vengono ristretti, il che provoca un'agglomerazione dei cristalli di  $CdSO^4$ , che formano una sorta di tappo, impedendo così agli strati di liquido di mescolarsi tra loro nel trasporto degli elementi. Una volta riempito l'elemento, i suoi due tubi di vetro vengono saldati alla lampada. Gli elementi *Weston European Co* ampiamente utilizzati contengono una soluzione di  $CdSO^4$  satura a 4° (insatura a temperatura più elevata), senza cristalli di  $CdSO^4$  in eccesso. La sezione di questi elementi è riportata in figura 418: A è un tappo ricoperto di pece, B uno strato di paraffina, C la soluzione fondamentale di  $CdSO^4$ , D l' $Hg^2S^4$ , E il mercurio, F l'amalgama fondamentale di cadmio al 12,5%, H l'amianto imbevuto di solfato di cadmio, K un ago di porcellana. Gli Elementi *W.E.Co* hanno il particolare vantaggio di avere un coefficiente di temperatura eccessivamente piccolo; secondo gli esperimenti effettuati presso il Laboratorio Centrale di Eletticità di Parigi, la loro forza elettromotrice non varia più di  $5 \cdot 10^{-5}$  volt, tra 10° e 20°.



Questo perché la diminuzione della forza elettromotrice dovuta all'aumento della temperatura è esattamente compensata dall'aumento della forza elettromotrice dovuto alla concomitante diminuzione della concentrazione della soluzione di  $CdSO^4$ . Sembra però che la forza elettromotrice degli elementi *W.E.Co* diminuisca leggermente col tempo; per questo motivo ci si è fermati, per lo standard normale, agli elementi contenenti una soluzione satura con un eccesso di cristalli di  $CdSO^4$ . Sono stati fatti i maggiori sforzi per ottenere il massimo della purezza possibile tutte le sostanze che entrano nella costituzione di questi elementi, nonché determinare l'influenza non solo della composizione, ma anche della loro struttura molecolare sulla forza elettromotrice e sul funzionamento dei campioni. I lavori di sperimentatori isolati (ai nomi citati bisogna aggiungere anche quelli di Steinwehr, Hulett, Wolff, Waters, Smith e Cohen) e degli Istituti hanno chiarito queste questioni al punto che le forze elettromotrici degli elementi Weston, preparati nei vari paesi, non differiscono di più di  $10^{-5}$  volt. Le ricerche continuano ancora in questa direzione;

Cohen recentemente (1910) ha fornito una panoramica delle questioni che restano ancora da risolvere. Istruzioni dettagliate per la costruzione degli elementi normali di Weston (e di Clark) sono state pubblicate da Wolff e da Waters, le cui memorie contengono una bibliografia fino al 1907, così come da molti altri autori, in particolare Janet, Laporte e Jouaust.

La forza elettromotrice degli elementi a eccesso di  $CdSO^4$  di Weston è stata determinata in numerose occasioni. Riportiamo, nella tabella seguente, i risultati delle principali misure recenti:

1906	Guthe	1,01847	a 20°
1906	Guthe	1,01877	a 20°
1908	Ayrton, Mather e Smith	1,01830	a 17°
1908	Pellat	1,01841	a 20°
1908	Janet, Laporte e Jouaust	1,01885	a 16°
1910	Haga e Boerema	1,01836	a 17°
1911	Janet, Laporte e Jouaust	1,01836	a 20°

Tutte queste ricerche, ad eccezione di quelle di Haga e di Boerema effettuate con il galvanometro assoluto delle tangenti, sono state effettuate con elettrocinamometri assoluti e tutte conseguentemente danno  $E$  in unità ohm internazionali  $\times 10^{-1}$  unità el. mag. assolute di intensità di corrente, non immediatamente collegata al volt internazionale, essendo quest'ultimo uguale al prodotto ohm internazionale per l'ampere internazionale. Guthe ha così determinato la forza elettromotrice dell'elemento Clark a 15°, 1,43300 e Ayrton, Mather e Smith hanno ottenuto il valore 1,4060 per il rapporto Clark 15°/Weston 17°.

Secondo la decisione del Congresso Internazionale di Londra del 1908, la forza elettromotrice dell'elemento Weston deve essere espressa in volt internazionali. A tale scopo il Comitato Internazionale costituito a Londra ha effettuato a Washington nel 1910 una serie di lavori vollametrici, in seguito ai quali si è raccomandato di considerare, dal 1° gennaio 1911, come forza elettromotrice dell'elemento di Weston, 1,01831 volt internazionale a 20° (Warburg). Come formula termica, il Congresso Internazionale ha proposto la seguente, ottenuta da Wolff presso il National Bureau of Standards di Washington:

$$E_t = E_{20} - 406 \cdot 10^{-7} (t - 20^\circ) - 95 \cdot 10^{-8} (t - 20^\circ)^2 + 1 \cdot 10^{-8} (t - 20^\circ)^3$$

L'elemento Weston, come qualsiasi altro elemento normale, non deve non essere mai chiuso su una bassa resistenza. Un cortocircuito simile anche se dura solo un istante, fa improvvisamente diminuire sensibilmente la forza elettromotrice dell'elemento e poi occorre un riposo abbastanza lungo perché la sua forza elettromotrice originaria ricompaia. Pertanto, secondo Smith, è necessario un riposo di 1 ora e mezza dopo un cortocircuito di 5 minuti e un riposo di 3 settimane dopo un cortocircuito di 5 ore. Jäger in particolare si è occupato dello studio del cortocircuito dell'elemento Weston; ha sottoposto questa questione ad un'analisi teorica molto completa. Gli elementi devono essere mantenuti al buio, a causa della possibile azione della luce sul  $Hg^2SO^4$ . La resistenza di un elemento di dimensioni usuali oscilla tra 500 e 1000 ohm.

## 5. Misura del lavoro di una corrente

In un conduttore di resistenza  $r$  ohm, percorso da una corrente di intensità di  $I$  ampere e ai cui capi è mantenuta una differenza di potenziale  $e = Ir$  volt, il lavoro  $W$  fornito dalla corrente è

$$W = I^2 r = Ie = \frac{e^2}{r} \text{ joule} \cdot s \quad (16.0.7)$$

La potenza della corrente in questo conduttore è  $W$  watt. Se il conduttore fa parte di una catena senza ramificazioni, la cui resistenza totale è  $R = r + \rho$  e che racchiude una sorgente di

forza elettromotrice  $E$ ,  $W$  è solo una frazione del lavoro totale  $W_0$  fornito nel circuito; si ha infatti

$$W_0 = \frac{E^2}{\rho+r} \quad W = \frac{E^2 r}{(\rho+r)^2} = W_0 \frac{r}{\rho+r} \quad (16.0.8)$$

Quando il lavoro speso non produce effetto utile se non nella parte  $r$  della catena, mentre è assorbito in pura perdita da tutte le altre parti

$$\pi = \frac{W}{W_0} = \frac{r}{\rho+r} \quad (16.0.9)$$

è l'effetto utile o l'efficienza del circuito. Si vede dalla (39,a) che se, per un dato  $\rho$  (resistenza interna di un elemento, ad esempio), si aumenta la resistenza  $r$  (resistenza esterna che chiude l'elemento), all'aumentare di  $r$ , anche  $W$  aumenta finché non si ha  $r = \rho$ ; in questo caso  $W$  raggiunge un massimo  $W_m = E^2/4r$ ; quando  $r$  continua a crescere,  $W$  diminuisce. Il rendimento  $\pi$  cresce in modo continuo da  $\pi = 0$  fino a  $\pi = 1$ , quando  $r$  aumenta da  $r = 0$  fino a  $r = \infty$ ; è uguale a 0,5 per  $r = \rho$ , allorché  $W = W_m$ .

La formula (39) mostra che, per determinare il lavoro  $W$ , è necessario conoscere due delle tre grandezze  $e$ ,  $I$ ,  $r$ , che caratterizzano la porzione considerata del circuito. Normalmente, si calcola  $W$  utilizzando  $e$  ed  $I$ ; infatti 1° la resistenza  $r$  è spesso sconosciuta, varia frequentemente durante l'esperimento e talvolta non è nemmeno determinabile (arco voltaico); 2°  $e$  ed  $I$  possono essere misurati facilmente, con sufficiente precisione nella maggior parte dei casi, mediante strumenti calibrati (voltmetri e amperometri, vedi sotto) che, introdotti nel circuito, indicano continuamente i loro valori. La figura 419 mostra come sono montati un voltmetro B e un amperometro A, per la misura del lavoro nel tratto di conduttore  $ab$ ; occorre naturalmente sottrarre dall'indicazione dell'amperometro A la corrente che passa nell'avvolgimento del voltmetro; questa corrente è  $i = e/r$ , dove  $e$  rappresenta l'indicazione del voltmetro,  $r$  la sua resistenza.

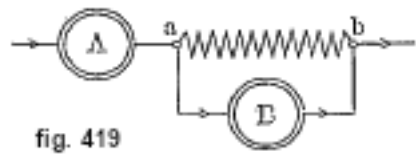


fig. 419

Tutta l'elettrodinamica può servire a misurare il lavoro in un circuito; a tale scopo, si monta una delle due bobine, che agiscono l'una sull'altra, in serie con il conduttore di cui si deve misurare il lavoro, mentre l'altra bobina B è montata in derivazione ai capi di questo conduttore con una grande resistenza. Sia  $r$  la resistenza della bobina A,  $R$  la resistenza dell'intera derivazione nella quale si trova la bobina B. Supponiamo inoltre che la forza reciproca tra le bobine sia  $F = \alpha I i$ , essendo  $I$  l'intensità della corrente che passa in A,  $i$  quella che attraversa B e  $\alpha$  un fattore di proporzionalità. Se le bobine sono montate come indicato nella figura 420,  $I$ , la forza reciproca tra le due bobine è

$$F = \alpha I i = \alpha I \frac{e + Ir}{R} \quad (16.0.10)$$

indicando  $e$  la differenza di potenziale ai capi di  $ab$ . Se ne deduce

$$W = I e = \frac{F}{\alpha} R - I^2 r \quad (16.0.11)$$

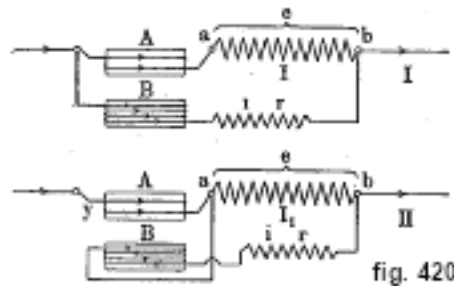
Nel montaggio delle bobine rappresentate in figura 420,  $H$ , l'intensità della corrente, che attraversa il conduttore  $ab$ , è  $I_1 = I - \frac{e}{R}$  e

$$F = \alpha I i = \alpha \left( I_1 + \frac{e}{R} \right) \frac{e}{R} \quad (16.0.12)$$



da cui

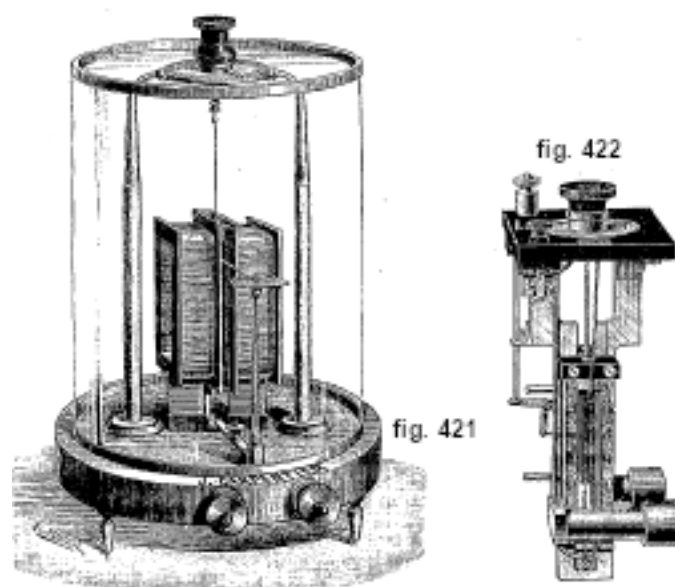
$$W = I_1 e = \frac{F}{\alpha} R - \frac{e^2}{R} \quad (16.0.13)$$



Nella formula (40,a), il termine  $I^2 r$  rappresenta la quantità di energia liberata, nell'unità di tempo, all'interno della bobina A, e, nella formula (40,c),  $e^2/R$  è la quantità di energia liberata, nell'unità di tempo, nella bobina B. Quando questi termini sono entrambi molto piccoli rispetto a  $W$ , cioè quando  $r$  è molto piccola e  $R$  molto grande rispetto alla resistenza di  $ab$ , si può porre

$$W = \frac{F}{\alpha} R \quad (16.0.14)$$

cioè, l'elettrodinamometro dà immediatamente in questo caso il lavoro liberato nella porzione di circuito alla quale è applicato. Gli elettrodinamometri impiegati in elettrotecnica a tale fine (wattmetri) sono costituiti solitamente da due circuiti agenti elettrodinamicamente l'uno sull'altro, dove quello con piccola resistenza è messo in serie con il circuito studiato e l'altro di grande resistenza è montato in derivazione su questo circuito; gli strumenti di questo tipo sono graduati immediatamente in watt. Ci limiteremo a ricordare, tra questi strumenti, l'elettrodinamometro di J. Carpentier; si compone (fig. 421) di due telai fissi e di uno mobile, analogo a quello del galvanometro di Deprez-d'Arsonval. I due telai fissi sono avvolti da una lamina di rame rosso, e collegati tra loro in serie; il telaio mobile è fatto in filo di rame sottile, e posto in derivazione sul circuito fisso; in queste condizioni, la corrente che lo attraversa, e che gli è portata dalle sue due molle di sospensione, è solo una piccola frazione della corrente totale. Un ago in alluminio, fissato al telaio mobile, si muove tra due paraurti; un tratto di riferimento indica la posizione di equilibrio. Nella parte superiore, un pezzo di ebanite porta un indice che permette la lettura dell'angolo di torsione su un quadrante graduato. L'intensità della corrente misurata è uguale al prodotto della radice quadrata dell'angolo di torsione per la costante dello strumento. Se invece di essere collegati insieme, i due circuiti sono indipendenti, il circuito fisso è percorso dalla corrente totale, il telaio mobile da una derivazione proporzionale al voltaggio, si realizza con questo elettrodinamometro un wattmetro a torsione. In questo caso, J. Carpentier gli dà la forma rappresentata nella figura 422, in modo che possa essere contenuto in una scatola permettendone il trasporto al di fuori del laboratorio, per misure industriali. Il piatto superiore, in ebanite, porta un piccolo commutatore invertitore che permette, essendo la corrente portata al wattmetro in un verso qualunque, di far passare questa corrente, nel telaio mobile, nel verso opportuno, cioè in modo che l'indice abbia la sua derivazione da sinistra a destra, e ciò senza che si sia obbligati ad invertire le connessioni.



Il wattmetro è completato da una serie di resistenze senza induzione, contenute in una cassetta indipendente e destinata ad essere unita in serie alla resistenza del telaio mobile. L'impiego di queste resistenze aggiuntive è indispensabile, poiché il circuito mobile è incapace, vista la sua piccola resistenza (circa 200 ohm), di supportare da solo la totalità della derivazione; non può supportare più di 20 volt senza danneggiarsi. Le suddivisioni delle resistenze, calcolate secondo la costante del wattmetro, permettono combinazioni che procurano parecchie sensibilità; esse sono scelte in modo tale che i coefficienti, da introdurre nel calcolo, sono sempre numeri interi. Per avere la potenza in watt, basta moltiplicare il numero di gradi di torsione per il coefficiente di taratura.

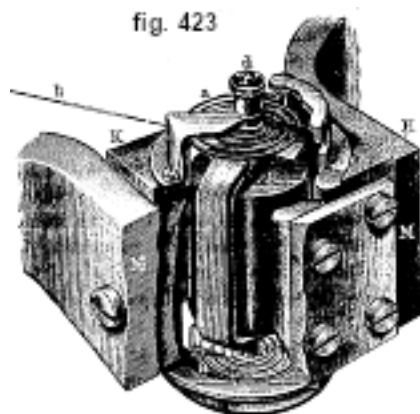
Non ci soffermeremo più a lungo su questo tipo di strumenti, che comprendono anche i contatori di elettricità basati sullo stesso principio, poiché essi sono soprattutto interessanti per la tecnica.

## 6. Strumenti (tecnici) campionati per la misura delle intensità di corrente e delle differenze di potenziale

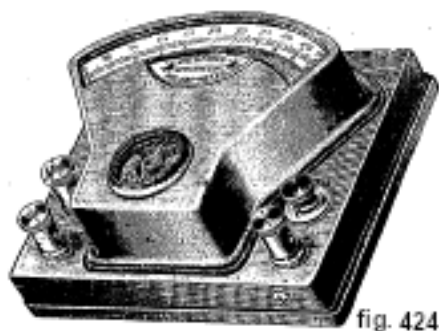
Il fisico deve, nel suo lavoro quotidiano, utilizzare dispositivi elettrotecnici calibrati per misurare le differenze di potenziale (voltmetri) e le intensità di corrente (amperometri). Questi strumenti hanno attualmente raggiunto una tale perfezione da poter essere utilizzati non solo per misure grossolane ed approssimate, ma anche per quelle più precise, in cui l'errore non deve superare qualche decimo di punto percentuale della grandezza da misurare. I migliori amperometri e voltmetri recenti danno infatti, quando si osservano le precauzioni necessarie per ottenere la massima precisione, errori che non superano lo 0,1%. A causa dell'importante ruolo che questi strumenti rivestono nella pratica del laboratorio di fisica, riteniamo necessario trattarli in questa sede, considerando però solo le tipologie più avanzate, ovvero A. i dispositivi a bobina mobile e B. i dispositivi termici. Esistono numerosi voltmetri e amperometri, basati sugli spostamenti di una leggera massa di ferro, sotto l'azione del campo magnetico prodotto dalla bobina, attraverso la quale passa la corrente da misurare. Questi dispositivi non offrono un grado di sensibilità molto elevato; non sono né molto precisi né, nella maggior parte dei casi, aperiodici e quindi difficilmente entrano nella pratica del fisico; ci limiteremo quindi a citarli; si troverà la descrizione in tutti i trattati elettrotecnici un po' dettagliati.

A. DISPOSITIVI A BOBINA MOBILE. I dispositivi tecnici a bobina mobile sono stati introdotti da Weston e vengono spesso chiamati, per questo motivo, dispositivi Weston; la loro costruzione ricorda quella del galvanometro Deprez.-d'Arsonval. Le principali parti costitutive di questi

dispositivi sono mostrate nella figura 423. Tra le masse polari semicilindriche KK di un potente magnete d'acciaio MM e il cilindro concentrico di ferro dolce F, regna un intenso campo magnetico radiale; nello stretto spazio anulare (da  $1,25\text{ mm}$ , da a  $1,5\text{ mm}$  di larghezza) tra F e MM è sospesa una bobina di alluminio estremamente leggera (da  $1,5\text{ g}$  a  $3\text{ g}$ ), che ruota attorno a sottilissimi assi in acciaio temperato, su supporti di zaffiro o altre pietre preziose dure.



Delle molle a spirale *aa* di sostanza non magnetica servono a portare la corrente nella bobina e a produrre una forza antagonista, che tende a riportare l'ago deviato nella sua posizione di equilibrio; questo ago leggero e piatto, di alluminio, collegato alla bobina, si sposta su una scala graduata ed indica le deviazioni della bobina; per evitare errori di parallasse nella lettura, solitamente si posiziona un lungo specchio sotto la scala: è necessario che, nella lettura, l'ago copra esattamente la sua immagine speculare. La figura 424 mostra l'aspetto esterno di un voltmetro di questo tipo, come costruito dalla Weston Electrical Instrument Co; la sua costruzione interna è data dalla figura 425. Grazie all'intenso campo magnetico che producono e alla debole forza antagonista che esercitano, strumenti di questo tipo sono estremamente sensibili: basta un milliampere che attraversa l'avvolgimento della bobina per deviare l'ago per più divisioni della scala (incontreremo dispositivi ancora più sensibili più avanti); essendo il campo radiale uniforme, le deviazioni sono, entro ampi limiti, rigorosamente proporzionali all'intensità della corrente. Questi dispositivi offrono inoltre il vantaggio di essere completamente aperiodici e di fornire indicazioni indipendenti dai campi magnetici esterni.



Supponiamo che la scala sia graduata in milliampere, in modo che lo strumento rappresenti un milliamperometro. Se la resistenza del suo avvolgimento è pari a  $r$  ohm, tra i suoi terminali agisce una differenza di potenziale di  $nr \cdot 10^{-3}$  volt per una deviazione di  $n$  divisioni della scala; si può quindi, conoscendo  $r$ , utilizzare lo strumento anche come millivoltmetro. Per maggiore comodità si sceglie la resistenza  $r$  uguale a un ohm, perché allora  $n$  dà contemporaneamente l'intensità della corrente che attraversa l'apparecchio, in milliampere e la differenza di potenziale ai suoi terminali in millivolt; in questa forma si chiama il dispositivo millivolt-amperometro.

Per poter utilizzare lo strumento anche come voltmetro per grandi differenze di potenziale, si aggiungono in serie ulteriori resistenze; se la resistenza aggiuntiva ha un valore di  $(10^k m - r)$  ohm, ad ogni suddivisione della scala corrisponde, come si vede facilmente, una differenza di potenziale di  $10^{k-3} m$  volt ai capi della circuito del voltmetro e della resistenza aggiuntiva. Pertanto, quando  $r = 1$ , una resistenza aggiuntiva di 999 ohm trasforma il millivoltmetro in un voltmetro, dove ogni divisione corrisponde a un volt ( $m = 1$ ,  $k = 3$ ). Quando lo strumento deve essere utilizzato solo come voltmetro, la resistenza aggiuntiva viene solitamente posta al suo l'interno e ad  $r$  vengono assegnati valori sufficientemente grandi affinché la resistenza totale sia la più grande possibile. Normalmente ci si assicura che con ogni volt della scala la resistenza totale aumenti da 100 a 300 ohm. La figura 425 rappresenta un tale voltmetro, la cui scala è divisa in 150 parti; comprende due resistenze aggiuntive (8, 8) da 0 a 150 e da 0 a 300 volt, ciascuna divisione della scala corrisponde rispettivamente a 1 volt o 2 volt. Si riconosce nella figura che inserendo la differenza di potenziale desiderata tra (6+) e (6 - 150) e premendo il pulsante (7), si fa passare la corrente solo in una resistenza aggiuntiva, mentre inserendola tra (6+) e (6 - 300), la si fa passare successivamente attraverso entrambi.

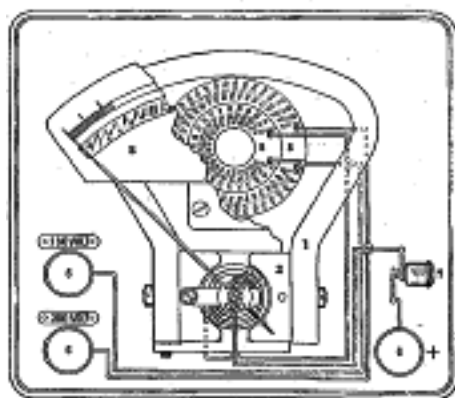


fig. 425

Per trasformare un milliamperometro in un amperometro e misurare correnti più intense, lo si dota di uno shunt. Se la resistenza dello shunt è  $\frac{r}{10^k - 1}$ , ogni suddivisione della scala corrisponde a  $10^{k-2}$  ampere; ad esempio, per  $r = 1$ , uno shunt di  $1/999$  ohm trasforma il milliamperometro in un amperometro dove ogni suddivisione corrisponde ad un ampere. Quando il dispositivo è destinato esclusivamente alla misura di intensità di corrente non molto elevate, spesso lo shunt viene posizionato all'interno del dispositivo stesso. La figura 424 mostra un milliamperometro che arriva fino a 10 milliampere (scala inferiore dove si può leggere immediatamente  $1/10$  milliampere); all'interno è presente uno shunt di  $1/49$  ohm, che permette di estendere il campo di misura fino a 500 milliampere (0,5 ampere). Si collega il polo positivo del circuito al terminale destro, il polo negativo, a seconda del valore dell'intensità di corrente da misurare, al terminale superiore o inferiore sinistro; il pulsante a destra viene utilizzato per attivare o disattivare lo shunt. Quando il dispositivo deve essere utilizzato, per misurare correnti molto elevate, gli shunt, che si scaldano molto al passaggio della corrente e sono ingombranti, vengono posti all'esterno del dispositivo, e sono collegati ad esso tramite fili. Tutti i migliori amperometri moderni sono milliamperometri di costruzione simile, dotati di opportuni shunt.

Un milliamperometro di questo tipo, con un set sufficiente di resistenze e shunt aggiuntivi, è uno strumento da laboratorio assolutamente perfetto, che consente di misurare con precisione relativamente elevata (all'estremità della scala entro 0,1% della quantità misurata) delle intensità di corrente da millesimi di ampere fino a migliaia di ampere e anche, con la stessa precisione, se la resistenza dell'apparecchio è sufficientemente grande, differenze di potenziale da millesimi di volt a centinaia di volt (con tali strumenti non è possibile misurare differenze di potenziale

molto grandi), perché ciò richiederebbe un isolamento speciale). La figura 426 mostra l'aspetto esteriore degli amperometri e voltmetri di precisione per corrente continua costruiti da J. Carpentier. Questi dispositivi, con telaio mobile, sono progettati per fornire un'elevata precisione pur rimanendo leggeri e compatti e la facilità d'uso richiesta dalla pratica di laboratorio. La rotazione è garantita dalla leggerezza del telaio. Il ridottissimo traferro evita la smagnetizzazione e rende trascurabile l'influenza dei campi esterni, garantendo allo stesso tempo un notevole smorzamento. Lo specchio posto sotto l'ago facilita la precisione del puntamento.

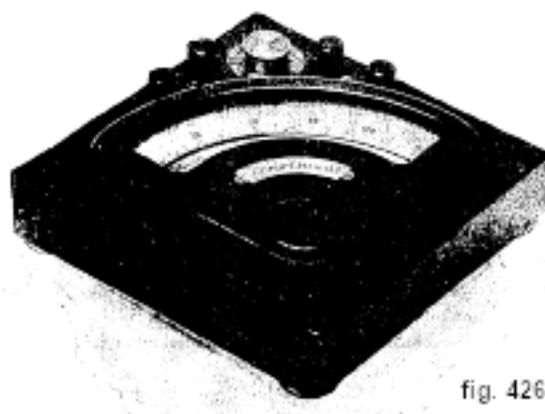
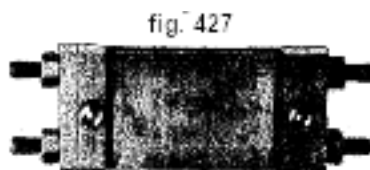


fig. 426

La calibrazione viene eseguita con il potenziometro; la curva delle deviazioni è rigorosamente tradotta dalla deviazione del quadrante. Sono stati stabiliti vari modelli per produrre strumenti con sensibilità multiple. Come voltmetri, oltre ai semplici dispositivi a singola sensibilità, esistono modelli a 3 sensibilità con 4 terminali e modelli a 4 sensibilità con 1 solo terminale e interruttore a 4 pin. Le sensibilità adottate variano fino a 600 volt. Sopra è necessario un riduttore indipendente. I voltmetri di J. Carpentier hanno normalmente una resistenza di 100 ohm per volt, ma possono essere costruiti con una resistenza di 1000 ohm per volt. Come millivoltmetri, oltre al modello normale con i terminali (100 millivolt) esistono modelli con 3 sensibilità (ad esempio 50 – 100 e 1000 millivolt). I voltamperometri hanno 4 terminali, 2 per misurare i volt contrassegnati con U, 2 per quelli degli ampere contrassegnati con I. Un interruttore a 4 vie permette di interrompere il circuito dei volt e di variarne la resistenza, in modo che sia possibile, senza dover guardare i collegamenti stabiliti, ottenere 4 sensibilità successive, ad esempio 300 150, 15 e 3 volt. La misura delle correnti si effettua invece collegando i 2 terminali contrassegnati con I alle prese derivate del derivatore utilizzato da un cordone isolato. Gli shunt che accompagnano i millivoltmetri o voltamperometri di J. Carpentier sono del tipo della figura 427. Questi shunt a lamine di manganina sono tutti regolati per una differenza di potenziale di 100 millivolt ai terminali. Sono esenti da coppie termoelettriche e presentano, per la corrente massima, un riscaldamento sempre moderato. Tuttavia, per correnti che non superano i 150 A, è talvolta più conveniente adottare lo shunt multiplo a 4 sensibilità (fig. 428 e 429).



Questo shunt permette di variare la sensibilità senza interrompere la corrente e senza guardare i collegamenti stabiliti, agendo semplicemente sul tirante a T posto a destra dei terminali. Si nota che il contatto mobile C può essere più o meno perfetto, senza che il rapporto tra le due

resistenze poste in parallelo BC e BGEC sia in alcun modo influenzato; non vi è quindi alcuna causa di errore in un dispositivo del genere dovuta ai contatti.

Nei dispositivi molto sensibili a telaio mobile, quest'ultimo è sospeso ad una sottile striscia di bronzo. Strumenti di questo tipo possono ancora rilevare correnti di  $10^{-7}$  ampere e, in molti casi dove non è richiesta una sensibilità molto elevata, possono sostituire i galvanometri a specchio nei ponti di Wheatstone e negli schemi di compensazione. La Figura 430 rappresenta un galvanometro ad ago costruito da Hartmann e Braun (descritto da Mous), dove ciascuna suddivisione della scala corrisponde a  $0,4 \cdot 10^{-6}$  ampere, in modo da poter ancora rilevare correnti inferiori a  $10^{-7}$  ampere.

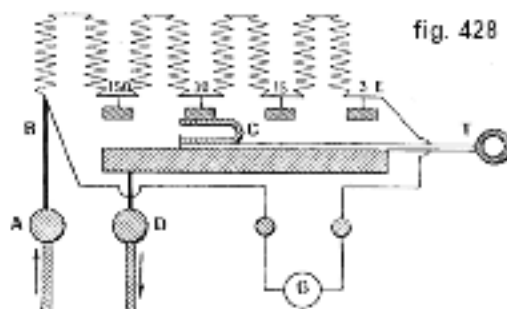


fig. 429

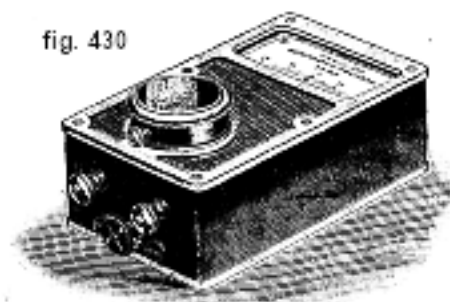
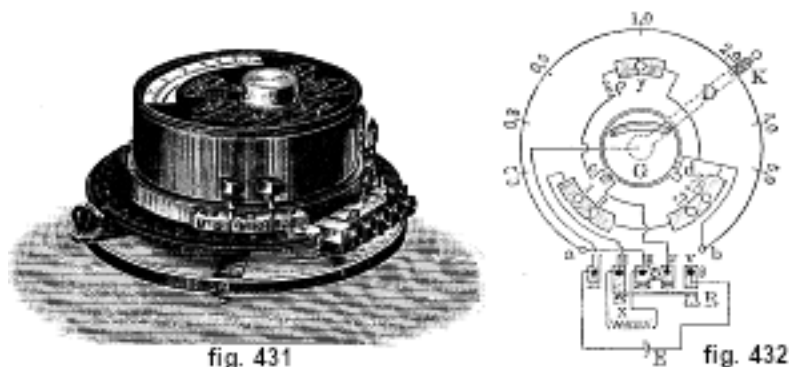


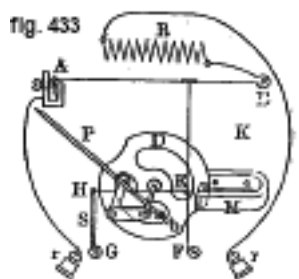
fig. 430

Un millivoltamperometro con resistenza da 1 Ohm è il componente principale del comodissimo galvanometro universale di Siemens e Halske. Quest'ultimo può essere utilizzato sia per misurare le intensità di corrente e le differenze di potenziale, sia per misurare la resistenza utilizzando il metodo del ponte di Wheatstone. L'aspetto esteriore di questo utile dispositivo è riportato nella figura 431 e la figura 432 ne riporta lo schema. Lo strumento è montato su un disco di ardesia, attorno al cui perimetro corre il filo di misura aKb del ponte. La faccia superiore del disco reca una scala disposta in modo che il numero letto su di essa indichi sempre il rapporto tra le lunghezze dei due tratti, in cui è diviso in questo punto l'intero filo (K). Lungo il filo scorre il contatto K della leva D, che funge da contatto mobile per il ponte. Sullo stesso disco è posto il galvanometro G, il cui avvolgimento può essere shuntato dalla resistenza  $\rho$ , ponendo uno spinotto in  $y$ ; quando il galvanometro è shuntato, ogni suddivisione della sua scala corrisponde

a  $10^{-3}$  ampere e la resistenza è uguale a 1 ohm; quando il galvanometro non è shuntato, la sua sensibilità è naturalmente maggiore. Sotto il galvanometro sono disposte una serie di resistenze da 1, 9, 90 e 900 ohm. I collegamenti del galvanometro con queste resistenze, un filo  $x$  e cinque viti di pressione sono facilmente visibili nella figura 432, che corrisponde al caso in cui con lo strumento si misura la resistenza di  $x$ . Bisogna porre una spina tra III e IV, e rimuovere quella da  $y$ .



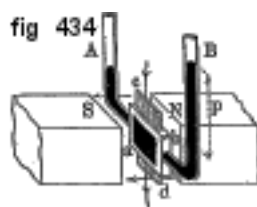
Spostando la leva D si cerca una posizione del contatto K per la quale la chiusura della corrente, mediante il tasto R, non produce alcuna deviazione del galvanometro. Trovata questa posizione, il prodotto della lettura effettuata sulla scala per la resistenza della scatola dà la resistenza  $x$  cercata; così, nella figura 432, la resistenza  $x = 2000$  ohm. Quando si vuole utilizzare lo strumento come amperometro, tutti gli spinotti, tranne quello tra III e IV, devono essere posizionati. Se la corrente da misurare è inferiore a 0,15 ampere, la si porta direttamente ai spinotti II e IV (la scala contiene 150 divisioni da 1 milliampere); se la corrente è più forte, si stabilisce tra II e IV uno shunt di  $\frac{1}{9}$  di ohm (una divisione =  $10^{-2}$ ) ampere,  $\frac{1}{99}$  ohm (una divisione =  $10^{-1}$  ampere) o  $\frac{1}{999}$  ohm (una divisione 1 ampere) e il galvanometro è shuntato. Per utilizzare lo strumento come voltmetro è necessario togliere i spinotti in 9, 90 e 900, nonché tra III e IV, e al contrario rimettere quelli a 1 e a  $y$ . La differenza di potenziale da misurare è collegata a II e IV; ogni divisione della scala corrisponde quindi a 1 volt e il dispositivo rappresenta un voltmetro da 1000 ohm di resistenza, arrivando fino a 150 volt. Quando è inserito lo spinotto 900, la resistenza totale dello strumento è uguale a 100 ohm e una divisione corrisponde a 0,1 volt, l'intera scala comprende 15 volt; se si inserisce lo spinotto nel foro 90, ogni divisione della scala corrisponde a 0,01 volt e l'intera scala a 1,5 volt.



B. STRUMENTI TERMICI. — La temperatura stazionaria, alla quale si scalda un dato conduttore percorso da corrente, è una certa funzione dell'intensità della corrente che lo attraversa. Utilizzando questa temperatura, e di conseguenza anche mediante la dilatazione termica di un filo dovuta a questo riscaldamento, si può valutare l'intensità della corrente che attraversa il conduttore. Su questo principio si basano i misuratori termici introdotti da Cardew e successivamente perfezionati da Hartmann e Braun. Lo schema degli apparecchi di questa casa è

riportato in figura 433. Il conduttore AB riscaldato dalla corrente viene tirato verso il basso dal filo EF, il quale a sua volta viene tirato verso sinistra dal filo EH. Questo è avvolto attorno ad una piccola puleggia, che porta un ago P. La molletta S agisce tramite il filo EH sulla puleggia, che tende a ruotare in senso antiorario, e il filo EF viene teso contemporaneamente ad AB. Il più piccolo allungamento di AB produce uno spostamento abbastanza significativo del punto E verso sinistra ed una corrispondente rotazione della puleggia e dell'ago. Se  $l$  è la lunghezza iniziale di A fino al punto di attacco del filo verticale e se  $dl$  è l'allungamento di questa parte di AB, il punto di attacco viene abbassato della quantità  $a = \sqrt{(l + dl)^2 - l^2} = \sqrt{2ldl}$ , trascurando  $(dl)^2$ . Allo stesso modo, la parte  $\lambda$  del filo verticale dal punto di attacco fino a E, abbassandosi di  $a$ , consente uno spostamento di E verso sinistra della quantità  $b = \sqrt{2\lambda a} = \sqrt[4]{8\lambda^2 l dl}$ , che è molto maggiore di  $dl$ . Se ad esempio  $l = \lambda = 50 \text{ mm}$ ,  $dl = 0,01 \text{ mm}$ , si ha  $b = 10 \text{ mm}$ ;  $b$  è quindi 1000 volte più grande di  $dl$ . Affinché le variazioni della temperatura dell'aria non possano agire sulla posizione dell'ago P, si fissa l'intero sistema di fili su un telaio, che ha lo stesso coefficiente di dilatazione termica dei fili. Lo smorzamento delle oscillazioni dell'ago è effettuato da uno ammortizzatore magnetico, formato da un disco di rame D fissato alla carrucola, che, nel suo moto rotatorio, si muove nello stretto spazio interpolare di un potente magnete M. Quando il dispositivo deve fungere da voltmetro, tra i terminali  $rr$  e il filo AB va inserita un'ulteriore resistenza  $R$ ; se deve essere utilizzato come amperometro si interpone tra  $rr$  una opportuna resistenza formante uno shunt. Le divisioni sulla scala di un tale strumento naturalmente non sono uguali ed essendo molto piccole all'inizio della scala, esso non viene utilizzato a partire dallo zero della graduazione, ma solo a partire da una certa divisione corrispondente a circa il 10 o 15% dell'indicazione più grande.

Gli strumenti termici trovano la loro principale applicazione nella misura delle correnti alternate, per le quali sono adatti quanto le correnti costanti. Sul principio precedente si basano anche i galvanometri termici più sensibili, con lettura a specchio, come quelli costruiti da K. E. F. Schmidt, Fleming, ecc.; ma questi strumenti, come gli apparecchi termogalvanometrici di Duddel e altri, vengono usati quasi esclusivamente per la misura delle correnti alternate e la loro descrizione sarà nel Volume V.



In tempi diversi sono stati proposti numerosi dispositivi per la misura tecnica dell'intensità di correnti costanti, spesso basati su principi molto interessanti, ma che non sono entrati nella pratica o sono stati completamente soppiantati da strumenti a telaio mobile e dispositivi termici. Tra tutti questi dispositivi ne citeremo solo uno, l'amperometro a mercurio di Lippmann, che si basa sull'azione ponderomotrice del peso del campo magnetico su un conduttore liquido percorso da corrente. La parte principale dello strumento, mostrata schematicamente nella figura 434, è un serbatoio piatto di vetro o ebanite  $ab$ , riempito di mercurio e comunicante lateralmente con i tubi A e B, anch'essi contenenti mercurio. Il serbatoio è posto tra i poli di un potente magnete d'acciaio, in una posizione tale che le linee di forza del campo magnetico sono normali alla sottile lamina di mercurio contenuta nel serbatoio. Attraverso le basi superiore ed inferiore le lamine di platino  $c$  e  $d$  entrano nel serbatoio, al centro del quale può essere lanciata la corrente da misurare attraverso lo strato verticale di mercurio. Sia  $l$  la lunghezza della colonna di mercurio, nel verso della corrente, la cui intensità indicheremo con  $I$ ; la forza dovuta all'azione del campo magnetico  $H$  sul liquido conduttore è  $HIl$ . Se  $a$  è lo spessore dello strato di mercurio, la sezione



di questo strato è  $al$  e la pressione del mercurio, per unità di area della parete, è  $\frac{Hil}{la} = \frac{Hi}{a}$ ; questa pressione è tanto maggiore quanto più la corrente e il campo magnetico sono più intensi e il serbatoio più stretto, e fa salire il mercurio in B ad un livello tale che la pressione della colonna sollevata è uguale alla pressione del mercurio nel serbatoio. Se il diametro del tubo A è scelto in modo tale che l'aumento del mercurio in B non fa variare sensibilmente il livello in A, l'altezza della colonna di mercurio sollevata è proporzionale all'intensità della corrente, e, previa una graduazione empirica dello strumento, può essere utilizzata per leggere direttamente l'intensità di corrente. Viceversa, un tale dispositivo, quando il serbatoio  $ab$  è disposto perpendicolarmente alle linee di forza di un campo magnetico, di cui non è nota l'intensità, può essere utilizzato per misurare quest'ultima, inviando nel serbatoio una corrente di intensità nota e misurando la risalita del mercurio così prodotta.

## 7<sup>2</sup>. Misura della componente orizzontale dell'intensità del campo terrestre

Lo studio di qualsiasi campo magnetico consiste nel determinare l'entità della sua intensità e la sua direzione in un dato punto dello spazio. Quando siamo in presenza di campi prodotti artificialmente (da bobine o magneti), molto spesso si può considerare nota la direzione del campo e si deve solo determinare la sua intensità. In casi eccezionali, quando ad esempio la direzione del campo è orizzontale, la si può trovare utilizzando un piccolo ago magnetico. Ma se si tratta del campo magnetico terrestre, la questione dell'intensità di questo campo e la ricerca della sua direzione sono di uguale importanza.

Indichiamo con  $H$  l'intensità di un campo; abbiamo trovato, come equazione delle dimensioni di questa grandezza

$$[H] = L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1} \quad (16.0.15)$$

Abbiamo pure parlato a tale scopo dell'unità C.G.S. di intensità di un campo e l'abbiamo confrontata a quella impiegata da Gauss (mm, mg, s). L'unità C.G.S. di intensità del campo ha ricevuto il nome di *gauss*; si ha pertanto

$$1 \text{ gauss} = 1 \frac{mg^{\frac{1}{2}}}{mm^{\frac{1}{2}} \cdot s}$$

unità di intensità del campo.

Consideriamo il campo terrestre. Indicheremo la sua intensità con  $F$ , la sua componente orizzontale con  $H$ , la sua componente verticale con  $V$ . Come si sa, il piano verticale che passa per la direzione di  $F$  è chiamato *meridiano magnetico*; l'angolo  $\delta$  tra i meridiani magnetico e geografico è chiamato *declinazione magnetica* e l'angolo  $i$  tra  $F$  e il piano orizzontale è chiamato *inclinazione magnetica*. Siamo abituati a chiamare le quantità  $H$ ,  $S$  e  $i$  gli elementi del magnetismo terrestre; sono legati dalle seguenti relazioni:

$$F = \sqrt{H^2 + V^2} = \frac{H}{\cos i} \quad (16.0.16)$$

$$\tan i = \frac{V}{H} \quad (16.0.17)$$

Grazie a  $\delta$ , si ottiene la componente nord  $H \cos \delta$  di  $H$  e la componente ovest  $H \sin \delta$ , considerando la declinazione ovest come positiva.

Gli elementi  $H$ ,  $\delta$  e  $i$  dipendono dal luogo di osservazione; inoltre, in una data posizione, variano nel tempo. Lo studio di queste tre grandezze è oggetto della vasta scienza del magnetismo terrestre, che conta numerosi e dotti rappresentanti e alla quale sono dedicate apposite opere e riviste. Appositi osservatori magnetici tracciano le variazioni di queste grandezze nel tempo,

<sup>2</sup>I tre ultimi paragrafi di questo Capitolo sono stati redatti dall'autore

utilizzando strumenti ad hoc, mentre altri strumenti vengono utilizzati per misurare i valori assoluti di  $H$ ,  $\delta$  e  $i$  negli osservatori o nei rilievi magnetici che si effettuano su una data parte della superficie terrestre; esistono anche dispositivi per la misura diretta di  $V$ . Non possiamo qui affrontare lo studio completo delle questioni relative al magnetismo terrestre e dobbiamo limitarci ad una succinta esposizione dei metodi di misura delle grandezze precedenti.

Consideriamo innanzitutto i metodi per misurare la componente orizzontale  $H$  dell'intensità del campo terrestre. Poisson (1828) ha fornito per la prima volta un metodo che permetteva di confrontare  $H$  con il campo di un magnete artificiale, ma non ci soffermeremo su questo metodo, oggi non più in uso. Le basi dei metodi attuali sono dovute a Gauss (1832). Il dispositivo utilizzato per determinare  $H$  è detto *magnetometro*. Volendo limitarci ad esporre i principi dei vari metodi di misura, non descriveremo nel dettaglio gli strumenti, in gran parte molto complessi, che vengono oggi utilizzati negli osservatori magnetici. La parte principale del magnetometro è un magnete d'acciaio sospeso a un filo (sospensione monofilare) o a due fili adiacenti tra loro (sospensione bifilare). Descrivendo le bilance di torsione nel volume I, abbiamo introdotto questi due modi di sospendere le aste, che oscillano liberamente su un piano orizzontale.

Sia  $M$  il momento magnetico di un dato magnete d'acciaio. Uno dei principali metodi per determinare la componente  $H$  consiste nella combinazione di due misure, una delle quali dà il valore numerico  $A$  della grandezza  $MH$  e l'altra il valore numerico  $B$  della quantità  $M : H$ . Conoscendo  $A$  e  $B$ , si ha

$$H = \sqrt{\frac{A}{B}} \quad M = \sqrt{AB} \quad (16.0.18)$$

Questo metodo fornisce quindi, per così dire incidentalmente, il valore  $M$  del momento magnetico del magnete d'acciaio scelto. Consideriamo separatamente i metodi per la determinazione delle grandezze  $MH$  e  $M : H$ , assumendo per il momento l'utilizzo esclusivo di una sospensione a monofilare; esamineremo più avanti il caso di sospensione bifilare.

I. DETERMINAZIONE DELLA GRANDEZZA  $MH$ . Il metodo più semplice e più utilizzato per determinare  $MH$  consiste nel misurare la durata  $T$  di un'oscillazione (più esattamente una semioscillazione) del momento magnetico  $M$ . A tale scopo, il magnete è sospeso ad un filo, che deve essere completamente non attorcigliato, quando l'asse del magnete oscillante nel piano orizzontale si trova nel meridiano magnetico; la direzione dell'asse coincide quindi con quella di  $H$ . Utilizzando l'equazione (7-60,a),

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{MH}{K}\varphi \quad (16.0.19)$$

abbiamo stabilito l'espressione (7-65)

$$T = \pi\sqrt{\frac{K}{MH}} \quad (16.0.20)$$

$\varphi$  indica l'angolo variabile di cui il magnete è deviato dalla sua posizione di equilibrio,  $t$  il tempo e  $K$  il momento di inerzia del magnete rispetto al suo asse di rotazione. Nello stabilire le formule di cui sopra, si è assunto che le forze del campo terrestre, che producono un momento di rotazione  $-MH\varphi$ , agiscano da sole sul magnete. Ma, quando il magnete è sospeso ad un filo, è anche soggetto, nelle sue oscillazioni, ad una coppia derivante dalla torsione del filo. Il momento di questa coppia è proporzionale all'angolo di torsione, quindi può essere assunto pari a  $D\varphi$ . Il rapporto  $\theta = D : MH$  si determina, ruotando l'estremità superiore del filo di un certo angolo  $\alpha$  e misurando il piccolo angolo  $\varphi$  di cui ruota il magnete. In questo caso c'è equilibrio tra il momento  $MH\varphi$  della coppia dovuta al magnetismo terrestre e il momento torcente  $D(\alpha - \varphi)$  del filo. Uguagliando queste due quantità, si ottiene

$$\theta = \frac{D}{MH} = \frac{\varphi}{\alpha - \varphi} \quad (16.0.21)$$

Bisogna, nell'equazione (44), sostituire ora  $MH$  con

$$MH + D = MH(1 + \theta)$$

e la (44,a) assume allora la forma seguente:

$$T = \pi \sqrt{\frac{K}{MH(1 + \theta)}} \quad (16.0.22)$$

da cui

$$MH = \frac{\pi^2 K}{T^2(1 + \theta)} \quad (16.0.23)$$

La quantità  $K$  può essere determinata con un metodo simile a quello del momento d'inerzia di un pendolo. Si può anche determinare  $MH$ , senza misurare la durata dell'oscillazione  $T$  sotto l'influenza del campo terrestre. A tale scopo si ruota l'estremità superiore del filo di un angolo  $\alpha$  molto grande, in modo che l'asse del magnete formi un angolo  $\varphi$  molto vicino a  $90^\circ$  con il meridiano magnetico; l'angolo  $\varphi_0 = 90^\circ - \varphi$  può essere misurato in modo molto esatto. Dall'uguaglianza  $MH \sin \varphi = D(\alpha - \varphi)$ , si deduce, per  $\varphi_0$  molto piccolo, la relazione

$$MH = \frac{D(\alpha + \varphi_0 - 90^\circ)}{1 - \frac{1}{2}\varphi_0^2} \quad (16.0.24)$$

La durata  $T_0$  di una oscillazione del magnete, in questa posizione, è determinata dalla formula

$$T_0 = \pi \sqrt{\frac{K}{D}} \quad (16.0.25)$$

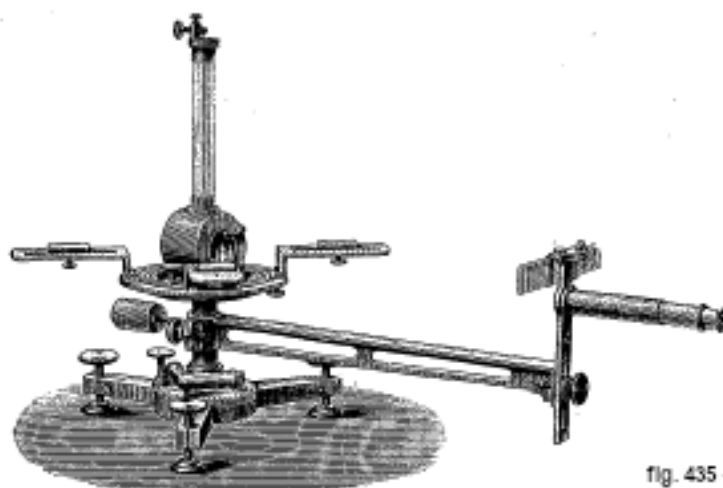
le oscillazioni (molto lente) sono ormai prodotte solo dalla torsione del filo. Osservando  $T_0$ , si ottiene  $D$  e poi  $MH$  con la formula (46,a).

A. Töpler (1884) ha indicato un interessante metodo per la determinazione di  $MH$  mediante la bilancia. Una bilancia sensibile con giogo e piatti leggeri è disposta in modo da poter ruotare attorno ad un asse verticale, passante per il punto di sospensione del giogo. Il magnete è fissato in modo tale che il suo centro coincida con il centro del giogo e il suo asse sia verticale. Per prima cosa si porta il bilanciante in una posizione normale al meridiano magnetico e si realizza l'equilibrio; quindi si fa ruotare la bilancia di  $90^\circ$ . Sul magnete agisce ora una coppia e di conseguenza anche sul giogo; il momento di questa coppia è  $MH$ . Per ripristinare l'equilibrio, si pone sul piatto rivolta a sud  $p^g = pg$  dyne, dove  $g = 981 \text{ cm/s}^2$ . Se  $l$  indica la lunghezza dell'intero giogo, si deduce dall'uguaglianza

$$MH = \frac{1}{2}pgl$$

il valore cercato di  $MH$ . Freiberg (1885) ha studiato questo metodo in modo approfondito e Guglielmo (1900) lo ha modificato.

II. DETERMINAZIONE DELLA GRANDEZZA  $M : H$ . Questa grandezza si determina misurando l'angolo  $\varphi$ , di cui è deviato un magnete ausiliario (ago magnetizzato) sotto l'azione del magnete di momento  $M$ . L'ago magnetico è sospeso ad un filo all'interno di un magnetometro, la cui costruzione non descriveremo qui. Un magnetometro relativamente semplice è mostrato nella figura 435; P. Schulz (1902), Du Bois (1902-1903), così come F. Kohlrausch e Holborn (1903) hanno perfezionato la costruzione del magnetometro. Nello stabilire le formule che determinano l'angolo  $\varphi$  non bisogna perdere di vista il fatto che, escludendo  $H$ , la torsione  $D$  del filo agisce sempre sull'ago deviato. La grandezza  $\theta = D : mH$ , dove  $m$  è il momento magnetico dell'ago mobile, si determina con la formula (7), sostituendo  $M$  con  $m$ . Non si ha più bisogno di conoscere la grandezza  $m$ , poiché non interviene nelle formule finali.



L'angolo di deviazione  $\varphi$  dell'ago magnetizzato si osserva nelle due principali posizioni di Gauss.

*Prima posizione di Gauss.* L'asse del magnete mobile ( $M$ ) è posto normalmente in corrispondenza del meridiano magnetico, a est o a ovest dell'ago magnetizzato ( $m$ ), il prolungamento dell'asse passante per il centro dell'ago.

Sia  $r$  la distanza tra i centri del magnete e dell'ago,  $2a$  la lunghezza di quest'ultimo,  $2a_1$  quella del magnete. Abbiamo fornito nel capitolo XII, le formule esatte (5) e (5,a) per determinare l'angolo di deviazione  $\varphi$ . Dobbiamo ora, in queste formule (5), sostituire  $M_1$  con  $M$ ,  $M$  con  $m$  e sostituire  $mH(1 + \theta)$  a  $mH$ , per tenere conto della torsione del filo. Dividiamo per  $m$ , cancelliamo l'ultimo termine nell'espressione di  $p_2$  e limitiamoci al primo termine complementare; poniamo inoltre  $2a = l$  e  $2a_1 = L$ ; rigorosamente,  $l$  e  $L$  non sono le lunghezze rispettive dell'ago e del magnete, ma le distanze tra i loro poli. La formula (5) si scrive ora nel modo seguente:

$$\frac{2M}{r^3} \cos \varphi \left(1 + \frac{p}{r^2}\right) = H(1 + \theta) \sin \varphi$$

da cui

$$\frac{M}{H} = \frac{r^3 (1 + \theta) \tan \varphi}{2 \left(1 + \frac{p}{r^2}\right)} \quad (16.0.26)$$

si ha qui

$$p = \frac{1}{2}L^2 - \frac{3}{4}l^2 \quad (16.0.27)$$

Per una misura più precisa di  $\varphi$ , si osserva questo angolo in quattro posizioni del magnete: a est dell'ago, con l'estremità nord rivolta verso l'ago; la stessa posizione, ma con il polo sud rivolto verso l'ago; il magnete a ovest dell'ago, i suoi poli orientati successivamente come sopra; si prende quindi la media aritmetica dei quattro valori trovati per l'angolo  $\varphi$ . Se si vogliono evitare le correzioni della grandezza  $p$ , si può osservare a due diverse distanze  $r_1$  e  $r_2$  dal magnete, alle quali corrispondono gli angoli di deviazione  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$ . Dalla (47) si ha

$$\frac{M}{H} = \frac{1}{2} (1 + \theta) \frac{r_1^5 \tan \varphi_1 - r_2^5 \tan \varphi_2}{r_1^2 - r_2^2} \quad (16.0.28)$$

F. Kohlrausch (1887) ha dato formule particolari nel caso in cui  $L$ ,  $l$  e  $r$  sono piccoli.

*Seconda posizione di Gauss.* Alla figura 273 e alle formule (7) e (7,a) del Cap. XII, si riferiscono a questa posizione. L'asse del magnete è ancora normale al meridiano magnetico, ma il suo centro si trova a nord o a sud dell'ago, nel prolungamento dell'asse magnetico di quest'ultimo. Designiamo con  $\varphi'$  l'angolo di deviazione dell'ago, e manteniamo le notazioni precedenti per le

altre grandezze. L'angolo  $\varphi'$  è determinato dalle osservazioni in quattro posizioni del magnete. Le formule menzionate (7) e (7,a) danno

$$\frac{M}{H} = \frac{r^3 (1 + \theta) \tan \varphi'}{2 \left(1 + \frac{q}{r^2}\right)} \quad (16.0.29)$$

$$q = \frac{3}{8}l^2 - \frac{3}{2}L^2 \quad (16.0.30)$$

$$\frac{M}{H} = (1 + \theta) \frac{r_1^5 \tan \varphi'_1 - r_2^5 \tan \varphi'_2}{r_1^2 - r_2^2} \quad (16.0.31)$$

Si prende infine la media aritmetica dei due valori di  $M : H$  ottenuti con le osservazioni nelle due posizioni principali. Anche F. Kohlrausch (1887) ha dato, per la seconda posizione principale, formule valide per piccoli valori di  $L$ ,  $l$  e  $r$ . Non entreremo in ulteriori dettagli e noteremo solo che combinando le espressioni ottenute per  $MH$  e  $M : H$ , vedi formula (43), è necessario introdurre una correzione, perché nella determinazione di  $MH$  il magnete è parallelo, e in quello di  $M : H$  normale al meridiano magnetico. Nel primo caso è sotto l'influenza del campo magnetico e, di conseguenza, il suo momento  $M$  è leggermente maggiore che nel secondo caso.

Invece di misurare gli angoli  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  (o  $\varphi'_1$  e  $\varphi'_2$ ) corrispondenti alle distanze  $r_1$  e  $r_2$ , Edelmann (1882) ha proposto di misurare le distanze  $r_1$  e  $r_2$  (o  $r'_1$  e  $r'_2$ ), per le quali si ottengono deviazioni  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  determinate una volta per tutte. Wild (1880, 1883), Schering (1881) ed altri hanno studiato il metodo di Gauss, dal particolare punto di vista del grado di precisione ottenibile; varianti di questo metodo si devono a F. e W. Kohlrausch (1886), Van Dijk (1904), Hansemann (1886), ecc.

Si può determinare la grandezza  $M : H$  misurando la durata delle oscillazioni dell'ago magnetizzato ( $m$ ) per 16 posizioni del magnete deflettore  $M$ , corrispondenti completamente alle 8 posizioni relative a ciascuna delle due posizioni principali di Gauss (nord, sud, est, ovest, due distanze  $r_1$  e  $r_2$ , rotazione del magnete di  $180^\circ$ ), con la differenza però che l'asse del magnete è parallelo al meridiano magnetico. Il magnete non produce quindi deviazione, ma cambia l'intensità del campo. si ottiene, per la grandezza  $M : H$  l'espressione:

$$\frac{M}{H} = k (1 + \theta) \frac{D_1 r_1 - D_2 r_2}{r_1^2 - r_2^2} \quad (16.0.32)$$

nella quale

$$D_1 = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{t_1^2} - \frac{1}{t_2^2} + \frac{1}{t_3^2} - \frac{1}{t_4^2} \right) \quad D_2 = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{\tau_1^2} - \frac{1}{\tau_2^2} + \frac{1}{\tau_3^2} - \frac{1}{\tau_4^2} \right) \quad (16.0.33)$$

le durate dell'oscillazione  $t$  si riferiscono alla distanza  $r_1$ , le durate  $\tau$  alla distanza  $r_2$ . Quando il magnete è a est o a ovest dell'ago, si ha  $k = -1$ ; quando è a nord o a sud, si ha  $k = +1/2$ . Pfannstiel (1880) ha usato questo metodo; Häbler (1884) ne ha fatto uno studio approfondito e completo.

**SOSPENSIONE BIFILARE.** Finora abbiamo supposto il magnete in movimento sospeso ad un unico filo; Passiamo ora alla determinazione di  $MH$  e  $M : H$  con sospensione bifilare per il magnete. Abbiamo trovato che, per ruotare l'estremità inferiore dei fili dell'angolo  $\varphi$ , serve una coppia  $C \sin \varphi$ , essendo  $C$  una caratteristica costante della sospensione a bifilare data. Gauss (1837), F. Kohlrausch (1882) e in particolare Wild. (1880, 1886) hanno studiato sperimentalmente e teoricamente il metodo della sospensione bifilare.

Per ottenere  $MH$  si posiziona il piano dei fili perpendicolarmente al meridiano magnetico; il magnete sospeso fa ruotare l'estremità inferiore di questi fili dall'angolo  $\varphi$ . Si ha  $MH \cos \varphi = C \sin \varphi$ , da cui  $MH = C \tan \varphi$ . La grandezza  $M : H$  si determina, come in precedenza, osservando la deviazione di un ago magnetizzato dal dato magnete. Wild ha immaginato un metodo per determinare  $H$  utilizzando tre magneti dello stesso peso, ma di diversi momenti magnetici; ha

confrontato anche (1898) l'accuratezza dei risultati delle misure effettuate rispettivamente con una sospensione unifilare e con una bifilare.

DETERMINAZIONE DI  $H$  SENZA DETERMINAZIONE DI  $M$ . Esistono numerosi metodi per determinare  $H$ , senza la determinazione simultanea di  $M$ . Tali sono il metodo di compensazione Weber, sviluppato da F. Kohlrausch (1871), e tutta una serie di metodi galvanometrici; considereremo solo questi ultimi.

Quando si fa passare una corrente di intensità nota in una bussola delle tangenti, si può, in base all'entità della deviazione dell'ago, valutare il valore di  $H$ . Sia  $n$  il numero degli avvolgimenti della bussola,  $R$  il loro raggio,  $I$  l'intensità della corrente in unità C.G.S.,  $\varphi$  la deviazione dell'ago. Si ha

$$H = \frac{2\pi n I}{R \tan \varphi} \quad (16.0.34)$$

Per misurare l'intensità della corrente è possibile utilizzare un voltmetro.

Si stabiliscono le formule relative al caso in cui si utilizza una bussola sinusoidale o un qualsiasi galvanometro, per i quali è nota la dipendenza tra l'angolo di deviazione e l'intensità della corrente. Tanakadaté (1889) e Lehfelddt (1892) hanno sviluppato questo metodo. F. Kohlrausch (1869) ha proposto di utilizzare un galvanometro bifilare, dove la bobina è sospesa a due fili il cui piano, così come quello delle spire della bobina, si trovano nel meridiano magnetico. Quando una corrente  $I$  viene inviata al galvanometro, la bobina mobile ruota di un certo angolo  $\varphi$ ; la stessa corrente viene inviata contemporaneamente in una bussola delle tangenti, dove produce una deviazione dell'ago dell'angolo  $\alpha$ . Si ha

$$I = \frac{D \tan \varphi}{H f} = \frac{H R}{2n\pi} \tan \alpha \quad (16.0.35)$$

essendo  $I$  espresso in unità C.G.S.,  $R$  e  $n$  aventi lo stesso significato della (49), essendo  $D$  il coefficiente di torsione della sospensione bifilare e  $f$  l'area totale limitata dal filo della bobina mobile. Le due espressioni di  $I$  danno

$$H^2 = \frac{2n\pi D \tan \varphi^2}{R f \tan \alpha} \quad (16.0.36)$$

In questa formula non entra più l'intensità  $I$  della corrente. F. Kohlrausch (1882) ha più tardi sostituito la bussola delle tangenti con un semplice magnetometro, posto ad est o ad ovest della bobina mobile, con i centri del magnete e della bobina che devono trovarsi alla stessa altezza; designiamo con  $r$  la distanza tra i centri, con  $R$  il raggio della bobina mobile. Quando la corrente  $I$  attraversa la bobina e questa ha ruotato dell'angolo  $\varphi$ , essa devia il magnete di un certo angolo  $\alpha$  dato dalla seguente relazione:

$$H \tan \alpha = 2fI \cos \varphi (r^2 + R^2)^{-\frac{3}{2}}$$

Eliminando  $fI$  per mezzo della prima delle uguaglianze (49,a), si ha

$$H^2 = \frac{2D \sin \varphi}{(r^2 + R^2)^{\frac{3}{2}} \tan \alpha} \quad (16.0.37)$$

L. Dunoyer (1910) ha costruito un dispositivo composto da due magneti della stessa lunghezza  $2l$  e dello stesso momento  $M$ ; sono disposti uno sopra l'altro e ruotano liberamente, ciascuno separatamente, attorno ad un asse verticale comune. Per un opportuno rapporto tra il campo ed il loro momento magnetico, formano tra essi un certo angolo  $2\alpha$ ; per ragioni di simmetria, questo angolo è diviso in due dalla direzione del campo. Si ottiene facilmente l'equazione di equilibrio del sistema, sia scrivendo che l'energia potenziale dell'insieme è minima, ovvero scrivendo che

l'equilibrio viene raggiunto quando, per ciascun magnete, il momento relativo all'asse di rotazione delle forze che agiscono su di esso è nullo. Questa equazione di equilibrio è

$$H = \frac{M}{8l^3} \cos \alpha \left[ \frac{1}{\left(\frac{h^2}{4l^2} + \sin^2 \alpha\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\left(\frac{h^2}{4l^2} + \cos^2 \alpha\right)^{\frac{3}{2}}} \right] \quad (16.0.38)$$

indicando con  $h$  la distanza verticale tra i centri dei magneti. Indichiamo, per brevità, con  $\varphi(\alpha)$  il secondo membro. Quando  $\frac{h}{2l} > 2$ , si può porre  $\varphi(\alpha) = A \cos \alpha$ , essendo  $A$  una grandezza sensibilmente costante, a condizione che il campo sia sufficientemente uniforme.

Si può ampliare notevolmente il campo di applicazione del metodo di L. Dunoyer, compensando il campo da misurare con un campo noto e utilizzando il dispositivo dei due equipaggi magnetici per verificare, con altissima precisione, che la compensazione avvenga. L. Dunoyer ha studiato un dispositivo di registrazione che fornisce sia la grandezza che la direzione della componente orizzontale del campo terrestre. Lo strumento che ha chiamato *digografo*, perché traccia le curve a cui l'uso marittimo ha dato il nome di digogrammi, fornisce alle navi, per tutti i casi in cui la forza media di guida è sufficiente, il mezzo per effettuare la compensazione dei loro compassi in un tempo minimo e senza osservazioni esterne. Inoltre, il digogramma ottenuto e datato è un documento completo e un'immagine per la storia magnetica della nave. È infatti sempre più riconosciuto da tutti i naviganti che la posizione magnetica di molte navi è, in certi punti, soggetta a fluttuazioni perpetue che è essenziale poter seguire facilmente.

## 8. Misura delle grandezze $V$ , $\delta$ e $i$ ; strumenti di variazione

La componente verticale  $V$  e la grandezza  $F$  dell'intensità del campo terrestre si determinano quasi esclusivamente mediante le formule (42) e (42,a):  $V = H \tan i$ ,  $F = H : \cos i$ , cioè utilizzando misurazioni dirette della componente orizzontale  $H$  e dell'inclinazione magnetica  $i$ . Tuttavia Lloyd (1838, 1858), Wild (1872), Riecke (1881), Töpler (1883), Brunmes e David (1908) hanno costruito strumenti che misurano direttamente  $V$ . Brunmes e David hanno posto l'asse di rotazione dell'ago di inclinazione nel piano del meridiano magnetico, in modo che l'asse magnetico dell'ago assuma la posizione verticale. Successivamente misurano l'angolo  $\varphi$ , di cui l'ago viene deviato da un magnete orizzontale, che si trova a est o ad ovest dello stesso. Si ha  $V = K \cot \varphi$ , essendo  $K$  una costante che deve essere determinata una volta per tutte in un luogo, misurando  $H$  e  $i$ .

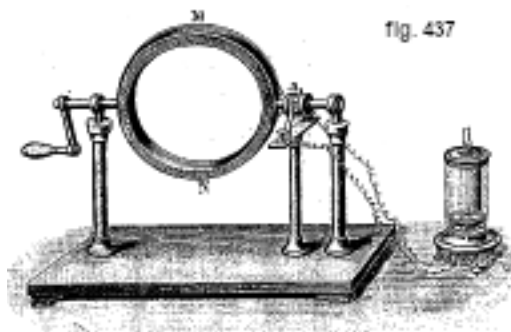
La declinazione magnetica  $\delta$  è determinata utilizzando strumenti detti teodoliti magnetici o declinometri. Questi sono strumenti che permettono di misurare molto esattamente l'angolo tra l'asse magnetico dell'ago di declinazione, che ruota liberamente attorno ad un asse verticale, e il meridiano geografico. Non possiamo spiegare nel dettaglio la complicatissima costruzione di questi strumenti. Il dispositivo più semplice, che indica la direzione del meridiano magnetico, è la bussola.

L'inclinazione magnetica  $i$  si determina con due metodi, utilizzando l'inclinometro ordinario e l'inclinometro a induzione. La parte principale dell'inclinometro comune è un ago inclinato, cioè un ago magnetico che ruota liberamente attorno ad un asse passante per il suo baricentro e normale al meridiano magnetico. Un cerchio verticale graduato, il cui centro è sull'asse di rotazione dell'ago, e che si trova anche il più vicino possibile al piano di rotazione dell'ago, permette di determinare la direzione della retta che congiunge le punte di questo ago. L'intero strumento può ruotare attorno ad un asse verticale. Lo zero della scala del cerchio deve trovarsi esattamente sul piano orizzontale. La figura 436 rappresenta una delle forme di inclinazione; la costruzione dello strumento si comprende da sé. Le letture vengono effettuate utilizzando due microscopi mobili alle due estremità dell'ago, poiché l'asse di rotazione di quest'ultimo potrebbe non passare esattamente per il centro del cerchio. Si fa poi ruotare l'ago di  $180^\circ$  attorno al suo

asse magnetico, senza toccare il cerchio stesso; si elimina così l'errore dovuto alla non perfetta coincidenza dell'asse magnetico con la linea che congiunge le punte dell'ago. Si ripetono le stesse osservazioni, dopo aver ruotato l'intero apparato di  $180^\circ$  attorno all'asse verticale, per evitare l'errore che potrebbe derivare dalla non perfetta orizzontalità della divisione zero del cerchio. Infine si magnetizza nuovamente l'ago, in modo che la sua punta superiore diventi punto inferiore e viceversa, per eliminare l'errore dovuto alla nuova coincidenza del baricentro dell'ago con l'asse di rotazione dello stesso. Quando tutte le letture così effettuate differiscono poco tra loro, è sufficiente prendere la loro media aritmetica. Se invece le differenze sono notevoli si deve ricorrere a formule più complicate, come quelle riportate da F. Kohlrausch nel suo *Lehrbuch der praktischen Physik* (IV edizione, 1910, pagina 395), o quelle stabilite da Leyst (1887).



**INCLINOMETRO A INDUZIONE.** Questo strumento si basa sul fenomeno dell'induzione, di cui abbiamo già parlato più volte, anche se lo studieremo approfonditamente solo nel Volume V. Lo schema del dispositivo è riportato nella figura 437. Un filo è avvolto attorno al contorno di un telaio circolare MN, le cui estremità portano a due lamine metalliche  $a$ , che sfregano con molle collegate ai terminali di un galvanometro. Il telaio può ruotare attorno ad un asse coincidente con uno dei suoi diametri. Per prima cosa si posiziona il piano del telaio orizzontalmente, così come l'asse di rotazione, anch'esso disposto nel piano del meridiano magnetico. Se poi si ruota bruscamente l'anello di  $180^\circ$ , sotto l'influenza della componente verticale  $V$  del campo terrestre, si genera una corrente di induzione  $I_1$ , che viene misurata da un galvanometro; la sua intensità è proporzionale a  $V$ .

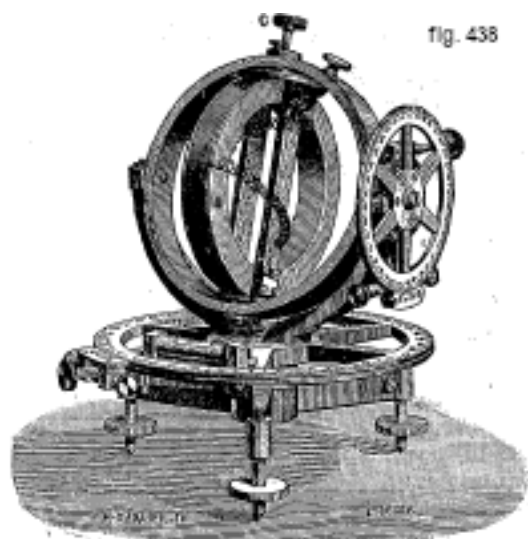


Quando invece si rende verticale l'asse di rotazione, essendo il piano dell'anello perpendicolare al meridiano magnetico, e si ruota bruscamente il telaio di  $180^\circ$ , appare una corrente di induzione



$I_2$ , proporzionale alla componente orizzontale  $H$  del campo terrestre. L'inclinazione  $i$  si calcola con la formula  $\tan i = I_1 : I_2$ . Lo strumento deve essere costruito in modo tale da poter essere portato con precisione in entrambe le posizioni e ruotato esattamente di  $180^\circ$ . Per la misurazione di  $I_1$  e  $I_2$  si utilizza un galvanometro balistico dotato di ammortizzatore e si ruota l'asse di  $180^\circ$  più volte, alternativamente in un senso e nell'altro, utilizzando il metodo della moltiplicazione.

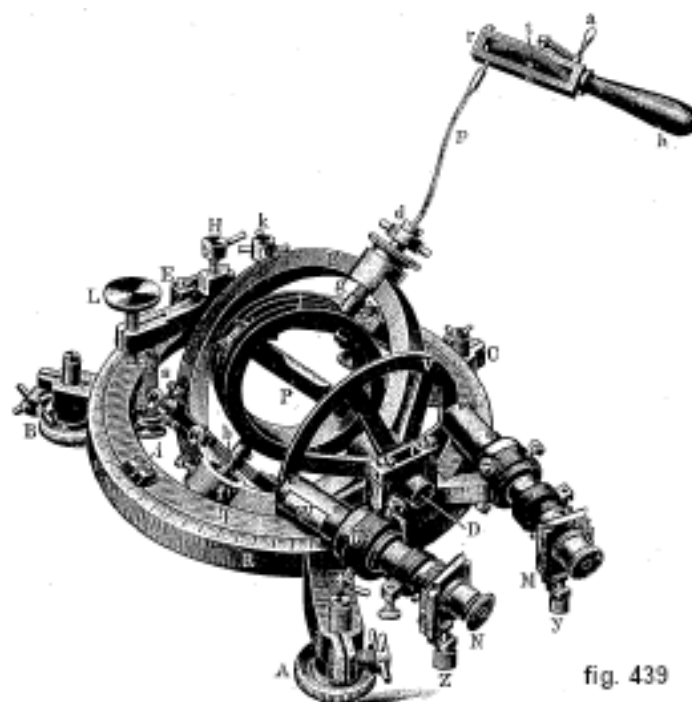
L'inclinometro ad induzione fu proposto da W. Weber (1838, 1853). Egli ha ricevuto varie modifiche da Wild (1878-1895), Schering (1882), Mascart (1883), L. Weber (1885), G. Meyer (1898) e altri. Wild e Mascart portano l'asse di rotazione in una posizione dove non c'è alcuna induzione nella rotazione dell'anello; in questo caso la direzione dell'asse corrisponde alla direzione desiderata della forza  $F$ . L'inclinometro di Mascart è rappresentato in figura 438; Lo strumento è portatile e ha la forma di una bussola d'inclinazione. Al centro, su un treppiede con viti a testa zigrinata, è montato un cerchio azimutale diviso in mezzi gradi, con nonio per i minuti. Su questo cerchio è fissato un telaio verticale che serve da sostegno alla parte mobile; un anello mobile ruota attorno ad un asse orizzontale, e le sue diverse inclinazioni si leggono su un cerchio diviso che porta nel suo movimento.



All'interno di questo anello è montata la bobina indotta che può ruotare attorno ad un asse perpendicolare al primo; due arresti fissi ne limitano la rotazione ad un angolo di  $180^\circ$ . Questo strumento permette di determinare l'inclinazione in meno di un minuto. Venske (1909) ha studiato il metodo di Mascart. G. Meyer fa ruotare l'asse costantemente nella stessa direzione, il che dà origine a correnti alternate ricevute da un telefono; ogni fenomeno sonoro scompare nel telefono, quando l'asse di rotazione ha la direzione della forza  $F$ . Taudin-Chabot (1908) ha immaginato un sistema estremamente ingegnoso, che permette all'anello di ruotare costantemente nello stesso verso, senza utilizzare contatti striscianti.

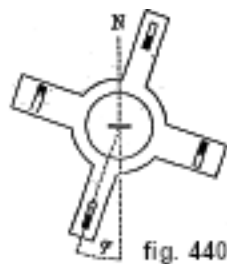
Wild ha costruito lo strumento mostrato in figura 439. L'anello I ruota attorno all'asse  $df$ , che può essere portato in qualsiasi posizione. Il commutatore  $b$  serve a rettificare le correnti, che vengono condotte ad un galvanometro sensibile. All'asse  $DE$  è fissato un cerchio graduato  $V$ , le cui divisioni possono essere lette mediante i microscopi  $M$  e  $N$ ; l'inclinazione di questo asse  $DE$  sull'orizzonte è uguale all'angolo  $i$  cercato.

Altri metodi per misurare l'inclinazione si devono a Pscheidl (1879), Liznar (1888), ecc.



STRUMENTI DI VARIAZIONE. Le grandezze  $H, V, \delta, i$ , sono soggette a continue variazioni che è estremamente importante seguire. I dispositivi di variazione utilizzati a questo scopo si dividono in due gruppi: negli strumenti del primo gruppo, l'osservatore deve seguire egli stesso le variazioni che si verificano; in quelli del secondo la registrazione avviene automaticamente (magnetografi). Consideriamo i dispositivi del primo gruppo.

Le variazioni di declinazione si osservano utilizzando un semplice magnetometro a linea singola utilizzando il metodo Poggendorff. Questo strumento è stato studiato e migliorato recentemente da Heydweiller (1898, 1908), V. Eschenhagen (1899), Bidlingmaier (1907), Edelmann (1908), Maurer (1908), Erich Meyer (1908) e altri. Le variazioni di inclinazione non vengono quasi mai osservate direttamente; le poche opere citabili su questo argomento sono dovute a Wild (1900), Cady (1901) e V. Eschenhagen (1901). A questo scopo può essere utilizzata la bilancia di Lloyd, di cui parleremo più avanti. Per osservare le variazioni della componente orizzontale  $H$ , si sospende un magnete in modo che il suo asse magnetico sia normale al piano del meridiano magnetico. Solitamente ciò si ottiene mediante una sospensione bifilare, della quale si fa ruotare opportunamente l'estremità superiore, oppure si può dare la direzione desiderata ad un magnete con sospensione unifilare, utilizzando un filo di acciaio, platino o quarzo (W. Eschenhagen, 1899); l'estremità superiore riceve una rotazione opportuna. Infine si può ancora utilizzare la normale sospensione unifilare, accostando ad essa un magnete deflettore. Ad. Schmidt (1907) utilizza due magneti deflettori. F. Kohlrausch (1871, 1882) dispone quattro magneti deflettori su un telaio rotante, come mostrato nella figura 440. Lo studio teorico di questo metodo fu effettuato da Wind (1894) e più particolarmente da Poppendeck (1911).



Abbiamo già menzionato lo strumento di L. Dunoyer e abbiamo indicato la formula (49,d); come abbiamo visto, il dispositivo può essere convenientemente utilizzato per misurare  $H$ ,

quando il rapporto  $h : 2l$  è sufficientemente grande (maggiore di 2 per esempio), essendo in questo caso praticamente costante la funzione  $\varphi(\alpha)$ ; è su questa proprietà che si basa il digografo. Ma se il rapporto  $h : 2l$  è molto piccolo (da 0,01 a 0,1) la funzione  $\varphi(\alpha)$  ha un minimo vicino a  $49,5^\circ$  e il dispositivo diventa molto sensibile alle variazioni. Nello strumento che è stato costruito dagli stabilimenti Henry-Lepaute, uno degli aghi, lungo  $10\text{ cm}$  è sostenuto da una staffa con lunghi rami verticali di vetro, sostenuti da un filo di bozzolo; dall'estremità superiore di questa forcilla è attaccato un secondo filo di bozzolo che sostiene una staffa simile, ma più corta, destinata a sostenere il secondo ago, identico al primo. Le due staffe portano specchi fissi che riflettono la luce che ricevono a  $45^\circ$  attraverso una fessura ed una lente. I due fasci luminosi cadono a  $45^\circ$  su altri due specchi fissi che formano due immagini della fenditura nella stessa scala. Sono le variazioni di distanza di queste due immagini che si misurano. Se  $\alpha$  varia da  $48^\circ$  a  $49^\circ$ , l'angolo dei due raggi riflessi varia di  $4^\circ$ . Su una scala posta a  $2\text{ m}$ ,  $1\text{ mm}$  corrisponde quindi ad una variazione relativa del campo pari a  $25 \cdot 10^{-6}$ . Tale sensibilità è stata addirittura superata sperimentalmente, avvicinandosi maggiormente al minimo di  $\varphi(\alpha)$ . Questa posizione segna il confine, per  $\alpha$  crescente, delle posizioni di equilibrio instabili per il sistema dei due aghi. L'esame delle curve di  $\varphi(\alpha)$  permette di indicare un caso semplice, studiato numericamente, in cui l'azione direttrice di un campo esterno uniforme su un sistema di magneti determina cambiamenti bruschi e irreversibili dell'equilibrio, gli intervalli corrispondenti a valori crescenti di  $\alpha$  non coincidono con quelli corrispondenti a valori decrescenti di questo angolo. Questa è l'immagine semplificata di ciò che accade negli esperimenti di Ewing e nella magnetizzazione dei corpi ferromagnetici.

Per osservare le variazioni della componente verticale  $V$ , si utilizza la bilancia magnetica di Lloyd (1838), in cui l'ago magnetico svolge il ruolo di un giogo, l'asse dell'ago essendo normale al piano del meridiano magnetico. Una variazione di  $V$  è accompagnata da un cambiamento di inclinazione del fascio, che viene seguito con il metodo delle deviazioni di uno specchio. Watson (1904) ha modificato la bilancia di Lloyd, fissando l'ago magnetico su un asse orizzontale formato da due fili di quarzo tesi. Nuovi strumenti di variazione per la grandezza  $V$  sono stati costruiti da Andreseen (1905) e v. Büky (1905).

Negli osservatori magnetici, i dispositivi di registrazione sono installati in locali speciali, talvolta sotterranei, dove la temperatura rimane il più costante possibile. Si dispone, ad una distanza sufficiente l'uno dall'altro, di un magnetometro uniale (variazione della declinazione  $\delta$ ), di un bifilare ( $H$ ) e di una bilancia Lloyd ( $V$ ). I raggi di particolari lampade vengono riflessi dai piccoli specchi collegati ai magneti mobili e raggiungono strisce di carta sensibile, avvolte su cilindri rotanti con movimento uniforme. Wild (1889) ha dato una descrizione dettagliata dell'installazione degli strumenti dell'osservatorio di Costantino vicino a Pawlowsk. Nuovi dispositivi di registrazione sono stati costruiti da A. Schmidt (1906, 1907), Cady (1906), Kashwagi (1906), K. Schering (1911) e altri. Un gruppo particolare di dispositivi è quello degli strumenti portatili, che vengono utilizzati nei viaggi scientifici per misurazioni magnetiche. Dispositivi di questo tipo furono costruiti da Wild, Haussmann (1906), Brunner, Wagner, ecc.

## 9. Misura dell'intensità dei campi magnetici artificiali

Si chiamano artificiali i campi prodotti dai magneti, dalle correnti e dalla loro combinazione, cioè dagli elettromagneti. A differenza del campo terrestre (meno di un gauss), i campi artificiali sono solitamente di elevata intensità. In una bobina di filo di rame si può, ad esempio, raggiungere 800 gauss e addirittura, attraverso il raffreddamento continuo, 1500 gauss. Tra i poli di un elettromagnete si può ottenere fino a 50000 gauss. Esistono numerosi metodi per misurare i campi magnetici; prenderemo in considerazione solo quelli più importanti.

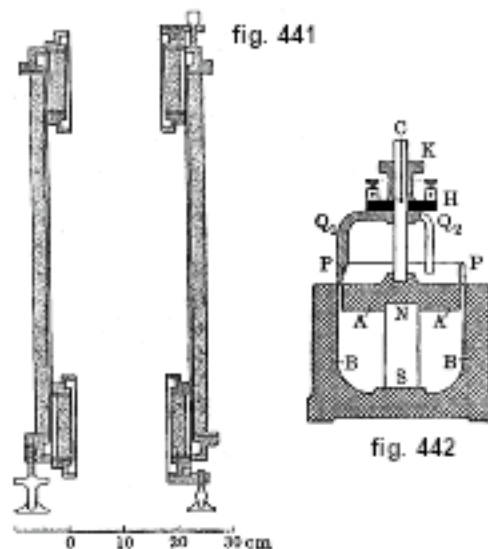
I. DETERMINAZIONE DEL CAMPO MEDIANTE CALCOLO. L'intensità del campo prodotto da una corrente può spesso essere ottenuta tramite il calcolo. Bestelmeyer (1911) ha indicato un

caso interessante, in cui si ottiene un campo molto uniforme in uno spazio abbastanza grande. Tale campo si forma in una bobina, la cui lunghezza supera 2 volte e mezzo il diametro, essendo installata una bobina aggiuntiva a ciascuna delle estremità, come mostrato nella figura 441 in sezione.

II. METODO DI INDUZIONE. Un anello di una o più spire di filo isolato si porta su un piano perpendicolare alle linee di forza del campo magnetico e poi lo si allontana velocemente fino ad una distanza dove l'intensità del campo è praticamente nulla, oppure si effettua lo spostamento in senso contrario. Nell'anello appare quindi una corrente di breve durata che produce una certa deviazione  $s$  in un galvanometro balistico. Questa deviazione è proporzionale all'area circondata dalle spire della bobina e all'intensità  $H$  cercata del campo. Si ha quindi

$$H = \frac{cs}{f} \quad (16.0.39)$$

dove  $c$  designa una costante, che dipende dalle proprietà del galvanometro balistico. La stessa formula è adatta anche nel caso in cui l'anello venga ruotato velocemente di  $90^\circ$ ; per una rotazione di  $180^\circ$  è necessario sostituire  $f$  con  $2f$  al denominatore della formula (50). La costante  $c$  può essere determinata utilizzando l'induttore terrestre con la formula  $c = 2H_0 f_0 : s_0$ , dove  $H_0$  indica la componente del campo terrestre che produce l'induzione e dove  $f_0$  si riferisce all'anello dell'induttore terrestre;  $s_0$  è l'indicazione del galvanometro. Si può anche inserire un magnete, di momento  $M$  noto in una lunga bobina, che presenta  $n$  spire per centimetro; si ha allora  $c = 4\pi n M : s'$ . Hibbert (1892), R. Gans (1907) e Duddell (1908) hanno costruito campioni di intensità di campo, utilizzati per determinare la costante  $c$ . Lo strumento di Hibbert è mostrato nella figura 442; è costituito da un magnete in acciaio, posto all'interno di un contenitore BB in ferro dolce, chiuso quasi completamente da un coperchio in ferro AA. L'anello di filo di PP fissato alla testa K può essere introdotto nella fessura anulare tra A e B, avendo il suo movimento sempre la stessa grandezza.



Interessante è l'uso da parte di Königsberger (1901) dell'elettrometro a quadranti, al posto del galvanometro balistico. Il circuito della bobina mobile rimane quindi non chiuso. Quando la bobina si sposta, la sua forza elettromotrice interna produce una differenza di potenziale sui quadranti e successivamente l'ago riceve una scossa. La deflessione dell'ago serve come misura della forza elettromotrice di induzione.

Anche l'interessante metodo di Bouty (1898) si basa sull'induzione. Un filetto d'acqua o mercurio scorre in una direzione perpendicolare alle linee di forza del campo magnetico. In esso

compare una forza elettromotrice trasversale  $E$ , che si misura con l'elettrometro capillare. Se  $d$  è il diametro del filetto,  $q$  la massa di liquido che scorre al secondo, si ha  $H = Ed : q$ .

Si può annoverare tra i metodi ad induzione anche quello a piatto rotante. Una piccola piastra metallica, le cui facce sono perpendicolari alla direzione del campo  $H$ , viene posta in rotazione rapida ( $n$  giri al secondo). Tra due punti sulla superficie della piastra, rispettivamente distanti dall'asse di rotazione di  $r_1$  e  $r_2$ , si produce la differenza di potenziale

$$E = \pi n H (r_1^2 - r_2^2) \text{ C.G.S.} = 10^{-8} \pi n (r_1^2 - r_2^2) \text{ volt} \quad (16.0.40)$$

Avendo misurato  $E$ , si deduce da questa relazione il valore di  $H$ . Fischer (1906) ha costruito uno strumento, in cui una piastra di bronzo fosforoso (diametro 3,1 cm) compie 18,5 giri al secondo; è posta in rotazione da un meccanismo a orologeria. Hartmann e Braun hanno aumentato il numero di giri fino a 50 al secondo. Si misura  $E$  con un millivoltmetro. Questo dispositivo fornisce indicazioni precise, anche sotto l'influenza del campo terrestre.

Anche il metodo delle oscillazioni smorzate di una bobina appartiene ai metodi di induzione. Una piccola bobina (anello) è sospesa a uno o due fili; le sue spire sono parallele alle linee di forza del campo; può rimanere aperta o essere chiusa da un resistore (reostato). Sia  $f$  l'area avvolta dalle spire della bobina,  $T$  la durata delle oscillazioni,  $\lambda_0$  il decremento logaritmico delle oscillazioni in circuito aperto,  $\lambda$  lo stesso decremento in circuito chiuso,  $K$  il momento d'inerzia della bobina; la resistenza totale del circuito chiuso è  $W \text{ ohm} = 10^9 w \text{ C.G.S.}$

Si ha, in questo caso,

$$H = \frac{1}{f} \sqrt{\frac{2\pi 10^9 w K (\lambda - \lambda_0)}{T \sqrt{\pi^2 - \lambda^2}}} \quad (16.0.41)$$

Si può anche procedere diversamente, cercando la resistenza  $w$  per la quale le oscillazioni della bobina diventano esattamente aperiodiche. Si ha allora (Gray, 1893)

$$H = \frac{1}{f} \sqrt{\frac{4\pi 10^9 \omega K}{T}} \quad (16.0.42)$$

III. METODO DELLA SPIRALE DI BISMUTO. Abbiamo visto nel cap. 15 che la resistenza elettrica del bismuto dipende dall'intensità del campo magnetico. Nella figura 360 si è rappresentata una spirale di bismuto, la cui resistenza permette di valutare l'intensità del campo, quando il piano di questa spirale è perpendicolare alle linee di forza del campo. Esistono tavole che permettono, conoscendo la temperatura e la resistenza della spirale nel campo, di ricavare immediatamente l'intensità di tale campo. Leduc (1885) fu il primo a proporre l'uso del bismuto per misurare il campo magnetico; la spirale di cui abbiamo appena parlato è stata costruita da Lenard (1890). Henderson (1894) ha sottolineato l'importante ruolo che gioca la temperatura in un tale metodo e ha proposto di posizionare, in prossimità della spirale di bismuto, un termometro sensibile, ad esempio una spirale di platino, la cui resistenza può misurare la temperatura.

IV. MISURA DELL'AZIONE PONDEROMOTRICE SULLA CORRENTE. Abbiamo considerato le forze che agiscono su un conduttore percorso da corrente, quando questo si trova in un campo magnetico; l'intensità di queste forze può essere utilizzata per misurare l'intensità del campo. I seguenti metodi si basano su questa idea.

1. In una bobina con sospensione bifilare, le cui spire sono parallele alla direzione del campo, viene immessa una corrente di data intensità; la bobina ruota quindi di un certo angolo  $\varphi$ . La formula

$$H = \frac{D \tan \varphi}{f I} \quad (16.0.43)$$

dove  $D$  è la costante di torsione dei fili,  $f$  l'area delimitata dalle spire della bobina,  $I$  l'intensità della corrente in unità C.G.S., dà l'intensità del campo. Himstedt (1880), Luggin (1887) e

Stengere (1888) si sono occupati di questo metodo. La torsione semplice è stata usata da A. Du Bois-Reymond (1891) così come da Edser e Standsfield (1892), i cui dispositivi sono in qualche modo una trasformazione del galvanometro Deprez-d'Arsonval con il quale  $I$  viene misurato in campo magnetico invariabile.

2. L'azione del campo sulla corrente può essere misurata con una bilancia mediante pesi. Questo principio trova applicazione nell'apparato di K. Angström ed in particolare in quello di Cotton (1900). Una parte corta e reclinata di un filo percorso da una corrente di  $I$  unità C.G.S., è disposto perpendicolarmente alle linee di forza; è attaccato a un'estremità del giogo della bilancia. La forza  $Hl$  (essendo  $l$  la lunghezza della porzione considerata del filo) è bilanciata da  $p$  grammi, cioè da  $pg$  dyne, per cui

$$H = \frac{pg}{l} \quad (16.0.44)$$

Faerber (1902), Weiss (1907), Jordan (1909) e Sève (1910, 1911) hanno modificato e perfezionato il metodo Cotton. Lo strumento Sève permette di misurare l'intensità del campo con un'approssimazione dello 0,1%.

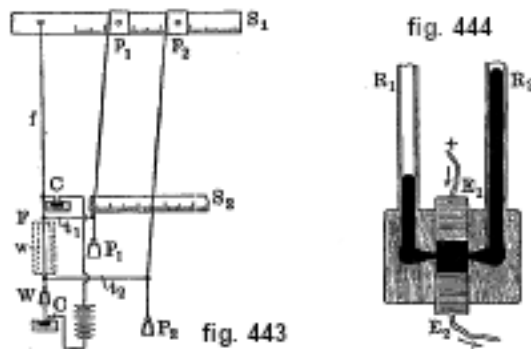
Crémieu e Pender (1903) hanno costruito uno strumento sensibile con il quale si possono misurare campi molto deboli (dell'ordine di  $10^{-6}$  C.G.S.).

3. Lord Kelvin ha costruito uno strumento rappresentato schematicamente in figura 443. La parte superiore FW di un filo  $f$  teso verticalmente è posta nel campo  $H$  allo studio (ad esempio tra i poli  $w$  di un elettromagnete); invia in questo filo la corrente da una batteria al centro delle coppette CG piene di mercurio. I fili  $t_1$  e  $t_2$  sono fissati a  $f$  e a due fili laterali, tesi dai pesi  $P_1$  e  $P_2$ ; le estremità superiori di questi fili sono fissate ai cursori  $p_1$  e  $p_2$ . Le linee di forza del campo da misurare sono perpendicolari al piano della figura. Sul filo FW agisce una forza diretta da destra verso sinistra: è bilanciata dalla trazione (esercitata verso destra) dei fili  $t_1$  e  $t_2$ , quando i cursori  $p_1$  e  $p_2$  sono spostati verso destra. L'entità di tale trazione e di conseguenza il valore di  $H$  si può calcolare dalle letture effettuate sulle scale  $S_1$  e  $S_2$ , note l'intensità della corrente, i pesi  $P_1$  e  $P_2$  e le dimensioni dei fili.

V. METODO DI LEDUC. Anche il metodo di Leduc (1887) si basa sulla misura dell'azione ponderomotrice esercitata dal campo su un conduttore percorso da corrente. Il conduttore qui è un liquido, il mercurio, posto tra  $E_1$  e  $E_2$  (fig. 444), in uno spazio la cui larghezza  $d$  è molto piccola seguendo la direzione del campo magnetico, perpendicolare al piano della figura. Una corrente di  $I$  unità C.G.S. passa da  $E_1$  a  $E_2$ , per cui sul mercurio agisce una forza, equilibrata dalla pressione  $P$  esercitata dalla colonna di mercurio che scorre da  $R_1$  a  $R_2$ . In questo caso si ha

$$H = \frac{Pd}{I} \quad (16.0.45)$$

Du Bois (1888), Field e Walker (1893) hanno perfezionato questo dispositivo, che è in qualche modo un amperometro di Lippmann inverso.



VI. METODO DI QUINCKE. In precedenza abbiamo fatto conoscere il metodo dovuto a Quincke (1885), per misurare la suscettibilità magnetica  $\chi$  dei liquidi per l'osservazione dell'altezza del

liquido in un tubo. La formula (48) ci fornisce la grandezza  $\chi$ , quando l'intensità del campo  $H$  è nota. Si può scrivere questa formula

$$H = C\sqrt{h}$$

dove  $h$  indica il valore dell'innalzamento del liquido paramagnetico e  $C$  una costante che si determina misurando  $h$  in un campo di intensità nota. I lavori di Quincke (1885), Du Bois (1888), Liebnecht e Wills (1900) sono già stati citati in precedenza. Aggiungiamo qui che recentemente C. Chévenau (1910), data la piccola differenza di livello che si ottiene ponendo un liquido magnetico in un campo, ha proposto di aumentare la sensibilità ponendo nel campo il livello di separazione di due liquidi di densità simili, uno paramagnetico e l'altro diamagnetico, posti in due grandi serbatoi collegati da un sottile tubo. Si può così ottenere un dislivello che già ci permette di vedere chiaramente, senza strumento ottico, l'apprezzabile effetto del campo. Per avere una misura esatta del campo, nel punto in cui si trova il livello, se il campo è superiore a 1000 gauss, si può mettere in comunicazione il dispositivo di due tubi precedenti, da un lato con un piccolo compressore, dall'altro con un manometro differenziale, e comprimere l'aria finché il livello non è ritornato allo stesso punto e all'equilibrio. In altre parole, la pressione dovuta al campo viene compensata da una pressione, dovuta al compressore, che si misura dal dislivello  $h$  del manometro differenziale. Si può così moltiplicare per 130 circa l'effetto prodotto sul campo, cioè osservare 6,7 cm di dislivello sul manometro invece di 0,05 cm in un campo di 2800 gauss. L'interesse di questo strumento, che non richiede un dispositivo di misura preciso, consiste nel fornire il campo  $H$  con la semplice formula (52), essendo  $C$  la costante dello strumento, e misurare un campo, di una estensione eccessivamente piccola o in una regione molto ristretta, indipendentemente dal fatto che sia uniforme, continuo o alternato.

VII. *Metodi ottici* I. Vedremo nel volume V che, nei corpi che si trovano in un campo magnetico, si ha una rotazione del piano di polarizzazione dei raggi luminosi che si propagano nella direzione delle linee di forza del campo. Poiché l'entità di questa rotazione è proporzionale all'intensità  $H$  del campo, il valore di quest'ultimo può essere misurato in questo modo. Quincke (1885) e Du Bois (1894) hanno studiato questo metodo.

2. Nel Volume V faremo conoscere noto anche quello che viene chiamato il fenomeno di Zeemann (effetto Zeemann). Quando una sorgente luminosa, che dà uno spettro di righe, viene posta in un campo magnetico e si osservano con uno spettroscopio le radiazioni emesse perpendicolarmente alle linee di forza, ciascuna riga spettrale viene divisa, per le sostanze normali, in tre righe (tripletti); la differenza  $\Delta\lambda$  tra le rispettive lunghezze d'onda dalla linea centrale ( $\lambda$ ) e da una delle linee estreme del tripletto è uguale a

$$\Delta\lambda = 4,7 \cdot 10^{-5} H \lambda^2 \quad (16.0.46)$$

Conoscendo  $\lambda$  e misurando  $\Delta\lambda$ , si può determinare  $H$ .

3. Corbino (1910) e Tenani (1910) si sono proposti di misurare il campo magnetico mediante la doppia rifrazione, che avviene in questo campo. Anche quest'ultimo fenomeno verrà preso in considerazione nel volume V.

VIII. METODO BASATO SULL'EFFETTO HALL. Supponiamo che una corrente elettrica venga inviata in una sottile lastra conduttrice, ad esempio una piastra rettangolare, essendo i fili di alimentazione fissati al centro dei due lati corti. Se si collegano sui lati lunghi due punti aventi lo stesso potenziale, ad esempio i loro punti medi, con un galvanometro sensibile, quest'ultimo ovviamente non rileva alcuna corrente. Ma, quando la piastra è disposta normalmente alle linee di forza di un campo magnetico, avviene una rotazione delle linee equipotenziali e una corrente passa attraverso il galvanometro. Torneremo su questo fenomeno nel volume V. L'intensità di questa corrente è, per molte sostanze e entro certi limiti, proporzionale all'intensità  $H$  del campo; questo è il caso ad esempio di Ag e Au fino a  $H = 22000$  gauss. Peuckert (1910) ha proposto di utilizzare l'effetto Hall, in una piastra di Bi, per la misura di  $H$ . Zahn (1910) ha indicato le fonti di errore che possono verificarsi in questo metodo.

IX. METODI DIVERSI. Si può determinare l'intensità  $H$  di un campo confrontandolo con il campo all'interno di una bobina. Tale metodo è stato proposto da Paschen (1905); è stato studiato approfonditamente da Prümm (1907). Su un asse comune sono montati due induttori, uno dei quali si trova nel campo  $H$  da misurare, l'altro all'interno di una bobina, nelle cui spire viene inviata una corrente di intensità tale che i due induttori accoppiati in opposizione non danno alcuna corrente. In questo caso  $H$  è uguale all'intensità del campo all'interno della bobina. Anche il metodo Voege (1909) si basa su un principio simile, che compensa l'azione di un campo (da 1 a 100 gauss) su un ago magnetizzato, mediante l'azione di una bobina. R. Gans e Gmelin (1909) hanno modificato e perfezionato il metodo di Paschen e sono riusciti a misurare campi intensi con un'approssimazione dello 0,2%. Gerhcke e Wogan (1909) sono andati ancora oltre; nel confronto dei campi di due bobine con un metodo analogo hanno ottenuto una precisione dello 0,01%.

Il flussimetro di Grassot può essere utilizzato anche per misurare l'intensità di un campo.

OSSERVAZIONI FINALI. Abbiamo esposto, negli ultimi due Capitoli, i metodi di misura di diverse grandezze elettriche e magnetiche, nonché alcuni risultati della misura della conducibilità elettrica. Ma non abbiamo così fornito una panoramica completa di tutte le grandezze che possono essere misurate. Esistono ad esempio metodi per misurare il momento magnetico, la distanza tra i poli di un magnete, ecc. Relativamente al primo punto possiamo fare riferimento alle formule del § 7, in cui entra in gioco il momento magnetico; Informazioni più dettagliate su queste questioni, nonché su altre relative alle misure elettriche e magnetiche, si troveranno nelle opere apposite.



# Indice

<b>I. Campo elettrico costante</b>	<b>13</b>
1. Proprietà del campo elettrico costante	15
2. Le sorgenti del campo elettrico	145
3. Azione del campo elettrico sui corpi che contiene	225
4. MISURE ELETTROSTATICHE	249
5. ELETTRICITÀ ATMOSFERICA (TERRESTRE)	293
6. Proprietà del campo magnetico costante	313
7. Sorgenti del campo magnetico. Magneti	337
8. Sorgenti del campo magnetico. Corrente elettrica	377
9. Fenomeni termici e meccanici all'interno di un circuito	441
10. FENOMENI CHIMICI ALL'INTERNO DI UN CIRCUITO. ELETTROLISI. TEORIA DELLA CORRENTE IDROELETTRICA	451
11. Fenomeni termoelettrici all'interno di un circuito	527
12. Azioni ponderomotrici del campo magnetico	553
13. Induzione dello stato magnetico nei corpi	597
14. Azione del campo magnetico sui corpi che contiene	675
15. Misura delle resistenze elettriche. Metodi e risultati <sup>3</sup>	683
16. MISURA DELL'INTENSITÀ DI CORRENTE, DELLA FORZA ELETTROMOTRICE E DELL'INTENSITÀ DEL CAMPO MAGNETICO <sup>4</sup>	731

---

<sup>3</sup>Ho potuto avvalermi ampiamente, per la scrittura di questo Capitolo, dei consigli e delle indicazioni dell'amico Professor A. L. Gerschoun, al quale rivolgo qui i miei più sinceri ringraziamenti.

<sup>4</sup>La stesura di questo Capitolo è dovuta fino al § 7 a A. L. Guerschoun.